Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI del

Dipartimento di Matematica

P. Cermelli & F. Guana

Modelli Matematici ed Equazioni alle Derivate Parziali

C.d.L. in Matematica, a.a. 2001/2002

Quaderno # 12 - Settembre 2002



### Prefazione

Queste dispense raccolgono gli appunti di un corso di metodi e modelli matematici per il corso di Laurea in Matematica tenuto col nome di "Istituzioni di Fisica Matematica" presso l'Università del Piemonte Orientale (a.a. 1997-1998 e 1998/1999) e con il nome di "Meccanica del Continuo - II modulo" presso l'Università di Torino (a.a. 2000/2001 e 2001/2002). Il corso è destinato sia a studenti del terzo anno del C.d.L. in Matematica, che a studenti del primo anno del Dottorato di Ricerca. La scelta del contenuto del corso è basata sulla considerazione che le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali sono gli strumenti matematici fondamentali per la modellizzazione dei fenomeni deterministici, e sembra opportuno fornire un corso di base sulle tecniche classiche per la loro risoluzione, che ne metta in evidenza le relazioni con il problema della modellizzazione. In generale, infatti, il matematico applicato non formula il modello per il sistema da studiare (fisico, biologico, chimico, finanziario, ecc.) direttamente in termini di equazioni differenziali. La procedura si articola in varie fasi: dapprima si introducono oppurtune variabili di stato, che descrivono appunto lo stato del sistema in ogni istante, ad esempio posizione e velocità per un punto materiale, lo stato di deformazione per un corpo elastico, il numero di individui in un modello di popolazione, la concentrazione in un sistema chimico; quindi si identificano le variabili cosiddette *di processo*, che descrivono le interazioni tra i vari elementi del sistema e l'esterno, ad esempio forze, campi di stress per sistemi continui, flussi e termini di sorgente per sistemi biologici, termini di reazione per sistemi chimici; la terza fase consiste nella formulazione di opportune equazioni di bilancio, che determinano in maniera precisa il modo in cui le variabili di processo interagiscono tra di loro, ad esempio leggi di bilancio della quantità di moto, della massa, eccetera. La quarta fase consiste nella scelta di *relazioni costitutive* opportune, che determinano come le variabili di processo dipendono dalle variabili di stato, ad esempio, le relazioni che esprimono lo stress in funzione della deformazione in un corpo elastico, oppure il flusso in funzione del gradiente di concentrazione in un sistema chimico o biologico. Inserendo le relazioni costitutive nelle equazioni di bilancio si ottengono infine equazioni differenziali in termini delle variabili di stato, che rappresentano appunto il culmine del processo di modellizzazione. Una volta determinato il sistema di equazioni differenziali che descrive il fenomeno da studiare, è necessario analizzare le sue soluzioni, qualitativamente o numericamente, per confrontare il loro comportamento con quello del fenomeno reale. In queste lezioni verrà descritta la procedura di costruzione e analisi di alcuni modelli matematici per fenomeni fisici e biologici. Considereremo quasi esclusivamente modelli che conducono ad equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del primo e del secondo ordine. Descriveremo il comportamento qualitativo delle soluzioni e alcuni metodi di risoluzione, essenzialmente basati sulle funzioni di Green, sulla separazione delle variabili e il metodo delle caratteristiche. E' importante osservare che (i) ogni termine che compare nell'equazione differenziale che descrive il modello è frutto di una scelta ben precisa di variabili di stato, di equazioni di bilancio, e soprattutto costitutive (in effetti la modellizzazione consiste sostanzialmente nel fare proprio queste scelte), e (ii) ogni termine che compare nell'equazione differenziale ha conseguenze ben precise sul comportamento qualitativo delle soluzioni. Il filo condut-

tore di queste lezioni è proprio di mettere in evidenza le relazioni tra (i) e (ii). Infine, vorremmo ringraziare Giovanni Leoni, Marino Badiale e Franco Pastrone per gli utili suggerimenti e discussioni.

# Indice

1	Equazioni differenziali alle derivate parziali         La legge di bilancio della massa         2.1 Il bilancio della massa         2.2 Le relazioni costitutive				
2					
3	Equazioni lineari del primo ordine				
	3.1	Caratt	eristiche	10	
	3.2	Esemp	pi	12	
	3.3	Esemp	oio: trasporto di inquinanti nei fiumi	14	
4	Equazioni quasilineari del primo ordine				
	4.1	Caratt	eristiche	18	
	4.2	Le car	atteristiche si intersecano: breaking time	19	
	4.3	Esemp	vi	21	
	4.4	Onde	d'urto - soluzioni tipo shock	23	
5	L'equazione del calore				
	5.1	Proble	emi ai valori iniziali e al contorno	28	
	5.2	Propri	età delle soluzioni	29	
	5.3	Metod	i di risoluzione	32	
		5.3.1	Soluzione esponenziale	32	
		5.3.2	Formula di Green	36	
		5.3.3	Il metodo di separazione delle variabili	38	
6	Equazioni e sistemi di reazione-diffusione				
	6.1	Sistem	i di reazione - diffusione: instabilità di		
		Turing	ξ	49	
7	L'equazione di Laplace				
	7.1	Propri	età delle soluzioni	56	
	7.2	Metod	i di risoluzione	58	
		7.2.1	La formula di Green	58	
		7.2.2	Il metodo di separazione delle variabili	60	

	7.3	Esempio: equilibrio di un corpo cilindrico elastico soggetto a deformazioni	co	
		di scorrimento	62	
8	L'ec	quazione delle onde	64	
	8.1	L'equazione di D'Alembert		
		8.1.1 Metodo di risoluzione nel caso $\Omega = \mathbb{R}$ : la formula di		
		$D'Alembert \dots \dots$	65	
		8.1.2 Il metodo di separazione delle variabili per domini limitati $\Omega = [0, L]$	68	
		8.1.3 Conservazione dell'energia	71	
	8.2	L'equazione del telegrafista	72	
		8.2.1 Un esempio	73	
$\mathbf{A}$			75	
	A.1	Criterio per il segno della parte reale degli autovalori di una matrice reale		
		$2 \times 2$	75	
	A.2	I teoremi della divergenza e del trasporto	75	
	A.3	Distribuzioni	77	
	A.4	Serie di Fourier	78	

# Capitolo 1 Equazioni differenziali alle derivate parziali

In generale, useremo la notazione  $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$  per i punti di  $\mathbb{R}^n$ , e t per il tempo. Consideriamo funzioni reali di n+1 variabili  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x}$  che varia in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , e t che varia in un intervallo I di  $\mathbb{R}^+$ , e utilizziamo le notazioni descritte nell'Appendice A.2. Un'equazione differenziale alle derivate parziali di ordine n nell'incognita  $u(\mathbf{x}, t)$  è una relazione della forma

$$F(\mathbf{x}, t, u, u_t, \nabla u, \ldots) = 0, \tag{1.1}$$

che coinvolge  $\mathbf{x}$ , t, u e le sue derivate parziali fino all'ordine n (supponendo che la funzione u sia sufficientemente regolare). Una **soluzione** di questa equazione è una funzione  $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$  definita su  $\Omega \times I$ , che soddisfa identicamente l'equazione differenziale:

$$F(\mathbf{x}, t, \bar{u}(\mathbf{x}, t), \bar{u}_t(\mathbf{x}, t), \nabla \bar{u}(\mathbf{x}, t), \ldots) \equiv 0 , \qquad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I ...$$

Si parla di soluzione **stazionaria** se  $\bar{u}$  non dipende dal tempo, cioè  $\bar{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x})$ . Se un'equazione differenziale alle derivate parziali ammette soluzioni, in generale queste non sono uniche. Per ottenere una soluzione unica, è necessario imporre condizioni ausiliarie:

- le **condizioni al contorno**, che consistono nell'assegnare la funzione incognita o le sue derivate sulla frontiera del dominio Ω;
- le condizioni iniziali, che consistono nell'assegnare il valore della funzione incognita (o di alcune sue derivate) all'istante iniziale t = 0.

Se l'espressione (1.1) non contiene derivate rispetto al tempo, cioè ha la forma

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u, \ldots) = 0, \tag{1.2}$$

e la funzione incognita è  $u = u(\mathbf{x})$ , è sufficente assegnare solamente condizioni al contorno su  $\partial\Omega$ . Si dice che un'equazione differenziale è **lineare** se la funzione F è lineare in u e nelle sue derivate. Ad esempio, nel caso di una dimensione spaziale con  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , sono lineari le equazioni

$$u_t + ku_{xx} = 0,$$
  $u_t - \sin(x^2 t)u_{xx} = 0,$ 

mentre non lo sono le

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u_{tt} - (u_x)^2 = 0.$$

La proprietà fondamentale delle equazioni lineari è la validità del **principio di sovrapposizione delle soluzioni**: la combinazione lineare di due o più soluzioni dell'equazione è ancora una soluzione. Consideriamo a titolo di esempio un'equazione lineare del primo ordine  $F(\mathbf{x}, t, u, u_t, \nabla u) = 0$ . La linearità significa in questo caso che

$$F(\mathbf{x}, t, u + \lambda v, u_t + \lambda v_t, \nabla u + \lambda \nabla v) = F(\mathbf{x}, t, u, u_t, \nabla u) + \lambda F(\mathbf{x}, t, v, v_t, \nabla v),$$

per ogni coppia di funzioni regolari u, v e per ogni costante reale  $\lambda$ . Se  $u \in v$  sono soluzioni,  $F(\mathbf{x}, t, u, u_t, \nabla u) \equiv F(\mathbf{x}, t, v, v_t, \nabla v) \equiv 0$ , e dalla linearità segue che  $u + \lambda v$  è soluzione. Un'equazione differenziale si dice **quasilineare** se è lineare solo nelle derivate di ordine massimo della funzione incognita. Ad esempio le equazioni  $u_t + uu_x = 0$  e  $u_{tt} - (u_x)^2 = 0$  sono quasilineari. Infine, ricordiamo che un'equazione lineare o quasilineare si dice **omogenea** se è della forma

$$\mathbf{L}u=0,$$

con **L** un operatore differenziale lineare o quasilineare, ad esempio gradiente, divergenza o laplaciano. Al contrario, un'equazione lineare o quasilineare si dice **non omogenea** se ha la forma

$$\mathbf{L}u = f,$$

con f una funzione dipendente eventualmente da  $(\mathbf{x}, t)$  ma non dalla funzione incognita u. In questo corso esaminiamo solo le seguenti classi di equazioni lineari o quasilineari del primo e del second'ordine:

#### 1. Equazioni lineari omogenee del primo ordine. Si tratta di equazioni della forma

$$u_t + c(x, t)u_x = 0, (1.3)$$

nell'incognita u = u(x, t), con  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , e c(x, t) una funzione assegnata. Vedremo un'applicazione di questa equazione a fenomeni di trasporto passivo, ad esempio il trasporto di sostanze inquinanti nei fiumi.

2. Equazioni quasilineari omogenee del primo ordine. Sono equazioni della forma

$$u_t + c(u)u_x = 0, (1.4)$$

nell'incognita u = u(x,t), con  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , e c(u) una funzione assegnata della funzione incognita u; quest'equazione è non lineare in u, e non vale quindi il principio di sovrapposizione, ma è lineare nelle derivate di ordine massimo, in questo caso il primo. La (1.4) si può utilizzare per descrivere fenomeni di trasporto per convezione.

3. Equazione di Laplace. E' l'equazione lineare omogenea del secondo ordine

$$\Delta u = 0, \tag{1.5}$$

nell'incognita  $u = u(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Delta$  il laplaciano (A.3). Poiché non compaiono derivate rispetto al tempo, questa equazione è appropriata per descrivere fenomeni stazionari (potenziale elettrico, potenziale gravitazionale, temperatura di un conduttore).

4. Equazione del calore. Si tratta dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine

$$u_t = k\Delta u, \tag{1.6}$$

nell'incognita  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ; è un'equazione utilizzata per descrivere fenomeni di diffusione (trasmissione del calore, dinamica delle popolazioni). La costante reale k > 0 si dice diffusività.

5. Equazione di reazione-diffusione. È un'equazione del secondo ordine della forma

$$u_t = k\Delta u + f(u), \tag{1.7}$$

nell'incognita  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , k una costante positiva, e f(u) una funzione assegnata della funzione u; la linearità di quest'equazione dipende dalla forma della funzione f(u). La (1.7) descrive fenomeni di diffusione in presenza di 'sorgenti' o 'pozzi' (dinamica delle popolazioni, reazioni chimiche).

**6.** Equazione di D'Alembert o equazione delle onde. E' l'equazione lineare omogenea del secondo ordine

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{1.8}$$

nell'incognita  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e *c* una costante reale positiva, detta velocità di propagazione. Quest'equazione descrive fenomeni di propagazione ondosa (onde elettromagnetiche, superficiali, sonore, trasmissione di segnali).

7. Equazione del telegrafista. Si tratta dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine

$$u_{tt} + \lambda u_t = c^2 \Delta u, \tag{1.9}$$

nell'incognita  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  e c e  $\lambda$  costanti reali positive, (c è la velocità di propagazione); la (1.9) rappresenta un semplice modello di propagazione che permette di illustrare i fenomeni di dispersione e attenuazione delle soluzioni nelle onde.

8. Sistemi di reazione-diffusione. Sono sistemi di equazioni (in generale quasilineari) del secondo ordine, della forma

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u + f(u, w), \\ w_t = h\Delta w + g(u, w), \end{cases}$$
(1.10)

con  $u = u(\mathbf{x}, t)$  e  $w = w(\mathbf{x}, t)$  funzioni incognite, k, h costanti reali positive e f(u, w), g(u, w) funzioni assegnate, che descrivono l'interazione tra u e w. L'equazione si può utilizzare per descrivere situazioni in cui due sostanze o popolazioni, caratterizzate da diffusività diverse  $(k \neq h)$ , sono in competizione, o più in generale interagiscono tra loro (reazioni chimiche, dinamica delle popolazioni, morfogenesi).

Le equazioni lineari del secondo ordine si classificano ulteriormente in **ellittiche**, **paraboliche** e **iperboliche**. Per descrivere questa classificazione, conviene considerare il tempo come una coordinata equivalente alle coordinate spaziali, ponendo  $x_{n+1} = t$ : posto N = n + 1la funzione incognita si scrive  $u = u(x_1, \ldots, x_N)$ , e l'equazione differenziale (1.1) si può scrivere nella forma

$$\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} u_{x_i x_j} + F_0 = 0, \qquad (1.11)$$

dove  $A_{ij} = A_{ij}(x_1, \ldots, x_N)$  sono i coefficienti di una matrice simmetrica  $N \times N$ , e  $F_0$ può dipendere da u e dalle sue derivate prime, ma non dalle derivate seconde. Notiamo che  $u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{tt}$ , eccetera. Il termine quadratico  $\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}u_{x_ix_j}$  si chiama **parte principale** dell'equazione differenziale. Ad esempio, si ha per l'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^2$ , con u = u(x, y),

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per l'equazione delle onde in  $\mathbb{R}$ , con u = u(x, t),

$$u_{xx} - c^2 u_{tt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix},$$

e per l'equazione del calore in  $\mathbb{R}$ , con u = u(x, t),

$$u_t - ku_{xx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo ora che una matrice simmetrica, o equivalentemente una forma quadratica, si può classificare in base alla sua segnatura, ovvero la coppia di interi (p,q) tali che prappresenta il numero di autovalori positivi, e q il numero di quelli negativi. L'equazione differenziale (1.11) si dice **ellittica** se la segnatura di  $A_{ij}$  è (N,0), ovvero la matrice  $A_{ij}$ è definita positiva. Analogamente, la (1.11) si dice **iperbolica** se la segnatura di  $A_{ij}$  è (N-1,1), e **parabolica** se la segnatura di  $A_{ij}$  è (N-1,0). Applicando questo criterio di classificazione alle equazioni descritte sopra, si vede che l'equazione di Laplace è ellittica, l'equazione del calore è parabolica, e l'equazione delle onde è iperbolica. In effetti, si può dimostrare che ogni equazione ellittica si può scrivere come equazione di Laplace (1.5) (eventualmente non omogenea) mediante un opportuno cambiamento di coordinate, e analogamente ogni equazione parabolica e iperbolica si può scrivere come equazione del calore (1.6) o delle onde (1.8) rispettivamente, in opportuni sistemi di coordinate.

### Capitolo 2

## La legge di bilancio della massa

### 2.1 Il bilancio della massa

Lo schema generale per costruire un modello matematico deterministico è basato sui seguenti passi:

- si assegnano opportune variabili *di stato*, che descrivono lo stato del sistema in ogni istante, ad esempio posizione e velocità per un punto materiale, la deformazione per un corpo elastico, il numero di individui in un modello di popolazione, la concentrazione di una data sostanza in un sistema chimico;
- quindi si assegnano le variabili cosiddette *di processo*, che descrivono le interazioni tra i vari elementi del sistema e l'esterno, ad esempio forze, campi di stress per sistemi continui, flussi e termini di sorgente per sistemi biologici, termini di reazione per sistemi chimici;
- si postulano leggi di bilancio che correlano tra loro le variabili di processo;
- e si scelgono infine opportune relazioni costitutive che correlano le variabili di stato e di processo.

Descriviamo qui una prima ampia classe di modelli la cui caratteristica comune è di essere tutti basati sulla più semplice legge di bilancio, il cosiddetto bilancio della massa. Supponiamo che il fenomeno da descrivere sia caratterizzato da una singola variabile di stato

$$u = u(\mathbf{x}, t),\tag{2.1}$$

con  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , funzione che si può interpretare come densità di una data quantità (ad esempio massa, energia, numero di individui di una popolazione), e introduciamo quindi le variabili di processo

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{e} \qquad r = r(\mathbf{x}, t). \tag{2.2}$$

Il campo vettoriale **h** viene detto **flusso**, mentre la funzione r rappresenta il **tasso di produzione netta** di u, dovuto alla presenza di 'sorgenti' o 'pozzi'. Viene detta 'massa' m(P) di un dominio  $P \subset \Omega$  il valore dell'integrale

$$m(P) = \int_P u.$$

La legge di bilancio della massa afferma che il tasso di variazione temporale della massa di un dominio P è uguale alla somma del flusso entrante attraverso il bordo  $\partial P$  e della produzione netta di u in P. In simboli

$$\frac{d}{dt} \int_{P} u = -\int_{\partial P} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} + \int_{P} r, \qquad (2.3)$$

per ogni dominio arbitrario  $P \subset \Omega$  ed ogni istante t, e dove  $\mathbf{n}$  è la normale esterna a  $\partial P$ . E' da notare il segno negativo davanti al termine di flusso: è implicita qui la convenzione che il termine  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$  rappresentI il flusso *uscente* dal dominio P attraverso l'elemento d'area di normale  $\mathbf{n}$ . La legge di bilancio della massa in forma integrale (2.3) si può scrivere equivalentemente in forma locale, cioé come equazione differenziale che correla  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \in r(\mathbf{x}, t)$  in ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  e ogni istante t.

**Teorema 2.1 (di localizzazione I)** Se  $u \in \mathbf{h}$  sono funzioni di classe  $C^1$  nei loro argomenti  $e \ r \ e \ continua$ , allora la (2.3)  $e \ equivalente$  all'equazione:

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{h} + r, \qquad in \ \Omega \times I. \tag{2.4}$$

**Dimostrazione.** Supponiamo che valga la (2.3). Tenendo conto del fatto che il dominio P è fisso si ha per il teorema del trasporto di Reynolds (Teorema A.2)

$$\frac{d}{dt}\int_P u = \int_P u_t,$$

e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso si ottiene:

$$\int_{P} u_t = -\int_{P} \operatorname{div} \mathbf{h} + \int_{P} r \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{P} (u_t + \operatorname{div} \mathbf{h} - r) = 0,$$

per ogni dominio  $P \subset \Omega$  e istante  $t \in I$ , e ciò implica la (2.4). Infatti, se per assurdo esistesse  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega$  tale che  $u_t(\mathbf{x}_0, t_0) + \operatorname{div} \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t_0) - r(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$ , allora per il teorema di permanenza del segno, essendo la funzione  $u_t + \operatorname{div} \mathbf{h} - r$  continua, dovrebbe esistere un intorno  $U(\mathbf{x}_0)$  del punto  $\mathbf{x}_0$  in cui  $u_t + \operatorname{div} \mathbf{h} - r > 0$  per  $t = t_0$ . Data l'arbitrarietà della porzione P, scegliendo  $P = U(\mathbf{x}_0)$  si avrebbe che:

$$\int_{U(\mathbf{x}_0)} (u_t + \operatorname{div} \mathbf{h} - r) > 0$$

il che contraddice la (2.3). Viceversa, se la funzione integranda in (2.3) è identicamente nulla su  $\Omega \times I$ , allora l'integrale su ogni dominio P deve essere necessariamente nullo, e il teorema è dimostrato.

#### 2.2 Le relazioni costitutive

L'equazione di bilancio in forma locale (2.4) non rappresenta direttamente un'equazione differenziale nell'incognita u. Per "chiudere" il problema è necessario assegnare il flusso **h** e il termine di sorgente r in funzione di u e delle sue derivate, ovvero assegnare le cosiddette **relazioni costitutive** tra le variabili di stato e quelle di processo. Qui consideriamo relazioni costitutive della forma

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(u, \nabla u), \qquad \mathbf{e} \qquad r = r_{int}(u, \nabla u) + r_{ext}, \tag{2.5}$$

dove  $r_{int}$  rappresenta la produzione netta 'interna' di u, dovuta ad esempio a reazioni chimiche, oppure a nascita o morte nel caso di popolazioni. Il termine  $r_{ext}$ , che non dipende dalla variabile di stato u, corrisponde alla produzione netta di u dovuta a fattori esterni, ad esempio immigrazione-emigrazione nel caso della popolazioni. Assegnare le relazioni costitutive significa specificare completamente il modello: a diversi fenomeni corrispondono relazioni costitutive diverse. Utilizzando le relazioni costitutive (2.5), la legge di bilancio della massa diventa un'equazione differenziale alle derivate parziali nella u:

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{h}(u, \nabla u) + r_{int}(u, \nabla u) + r_{ext}.$$
(2.6)

Riportiamo qui alcuni esempi di relazioni costitutive per il flusso  $\mathbf{h}$ :

 $\bullet$ Flusso lineare nella densità u

$$\mathbf{h} = u\mathbf{c} \tag{2.7}$$

dove  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  è una funzione assegnata, detta velocità di trasporto. Questo tipo di relazione costitutiva è appropriata a fenomeni di trasporto passivo con velocità  $\mathbf{c}$ .

• Flusso convettivo

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(u),\tag{2.8}$$

con g funzione assegnata. Questo tipo di relazioni costitutive descrive ad esempio fenomeni di trasporto in cui la velocità non dipende linearmente dalla densità locale u (trasporto per convezione).

• Flusso diffusivo

$$\mathbf{h} = -k\nabla u,\tag{2.9}$$

con k, detta diffusività, una costante positiva. Questa relazione costitutiva descrive fenomeni di diffusione (ad esempio calore, sostanze chimiche, microorganismi). Dato che il vettore  $\mathbf{h}$  è parallelo al gradiente della densità u, ricordando le note proprietà del gradiente di una funzione si ha che (i) il flusso  $\mathbf{h}$  è ortogonale alle superfici di livello u = cost.; (ii) il vettore  $\mathbf{h}$  punta nella direzione in cui u decresce; si parla di flusso contro-gradiente: il trasporto di massa avviene da zone ad alta densità a zone a bassa densità.

Descriviamo ora alcuni esempi di relazioni costitutive per il termine r prendendo ad esempio la dinamica delle popolazioni. Supponiamo che  $u = u(\mathbf{x}, t)$  rappresenti la densità di individui di una data specie nel punto  $\mathbf{x}$  e all'istante t. Le più semplici relazioni costitutive per il termine di produzione netta r sono classiche: • Legge di Malthus: supponiamo che il tasso di crescita interna, dato dalla differenza tra il coefficiente di natalità e quello di mortalità, sia proporzionale alla densità di individui, ovvero

$$r(u) = r_0 u,$$
 (2.10)

con  $r_0$  una costante reale. Ad esempio, se  $r_0$  è positiva, questa scelta è appropriata a fasi di crescita in assenza di fattori limitanti, ad esempio in presenza di una disponibilità illimitata di nutrienti. • Modello logistico: a causa della diponibilità limitata di risorse, la

crescita di una popolazione reale è autolimitante, e una relazione costitutiva più realistica è

$$r(u) = r_0 \left(1 - \frac{u}{k}\right) u, \qquad (2.11)$$

con  $r_0$  costante positiva, e k viene detta densità di saturazione. La caratteristica saliente della (2.11) è che il tasso di crescita r diminuisce al crescere della densità di popolazione u, ma rimane positivo se u rimane al di sotto della densità di saturazione k. Se u invece supera la densità di saturazione, il tasso di crescita è negativo.



Figura 2.1: Grafico del tasso di crescita r = r(u) per la logistica (cf. (2.11)).

A titolo di esempio, supponiamo che il flusso sia identicamente nullo e la densità sia costante, ovvero  $u(\mathbf{x}, t) = u(t)$ . L'equazione di bilancio della massa si riduce allora all'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$\dot{u} = r(u). \tag{2.12}$$

Consideriamo dapprima la legge di Malthus. Con questa scelta costitutiva, la (2.12) diventa

$$\dot{u} = r_0 u,$$

la cui soluzione è di tipo esponenziale

$$u(t) = u_0 e^{r_0 t}$$

con  $u_0$  la densità iniziale di individui all'istante  $t_0$ . Se il coefficiente  $r_0$  è positivo si ha crescita illimitata della popolazione, se invece è negativo (ad esempio se il numero

di morti supera quello delle nascite) la popolazione si estingue. Nel caso del modello logistico, invece, la legge di bilancio della massa diventa

$$\dot{u} = r_0 \left( 1 - \frac{u}{k} \right) u,$$

che si risolve per separazione delle variabili, e ammette come soluzione

$$u(t) = \frac{u_0 k e^{r_0 t}}{k - u_0 + u_0 e^{r_0 t}}$$

Nel caso rappresentato nella figura seguente si è posto k = 2. Perciò una popolazione inizialmente sotto il livello di saturazione  $(u_0 < k)$  cresce ma non supera k, mentre una popolazione inizialmente al di sopra di questo livello decresce al livello di saturazione.



Figura 2.2: Grafico della soluzione u(t) dell'equazione logistica.

# Capitolo 3 Equazioni lineari del primo ordine

### 3.1 Caratteristiche

Consideriamo in questo capitolo solamente il caso di una dimensione spaziale, assumendo che  $\Omega$  sia un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Consideriamo il caso più semplice di relazione costitutiva per il flusso, del tipo **trasporto passivo**, ovvero

$$h = cu,$$

con c = c(x, t) una funzione assegnata, che rappresenta la velocità di trasporto. Supponiamo inoltre che il termine di produzione sia identicamente nullo, cioé r = 0: l'equazione di bilancio della massa (2.4) diventa allora un'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine

$$u_t + c(x, t)u_x = 0, (3.1)$$

nell'incognita u = u(x, t). Descriviamo qui il metodo di risoluzione della (3.1) basato sulle caratteristiche.

**Definizione 3.1** Si dice caratteristica delle'equazione (3.1) una soluzione x = x(t)dell'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{x} = c(x, t). \tag{3.2}$$

Se c = c(x, t) è una funzione di classe  $C^1$  rispetto ad x, l'equazione (3.2) ammette soluzioni, e in particolare esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = c(x,t) \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$
(3.3)

con  $\xi$  fissato sull'asse reale. Il grafico di questa funzione nel piano (x, t) è una curva, detta **curva caratteristica**. Si può interpretare x(t)come punto mobile lungo l'asse x con velocità c(x, t). Descriviamo ora alcune proprietà delle caratteristiche.

• Le curve caratteristiche 'non tornano indietro nel tempo'. Consideriamo infatti la rappresentazione parametrica di una curva caratteristica nel piano (x, t), in funzione del parametro reale  $\tau$ ,

$$\begin{cases} x = x(\tau), \\ t = \tau. \end{cases}$$

Il vettore tangente alla curva è  $\mathbf{v} = (\frac{dx}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}) = (\dot{x}, 1)$ ; dato che la sua componente nella direzione t nel piano (x, t) è sempre positiva,  $\mathbf{v}$  non può essere parallelo all'asse x nè essere rivolto verso il semiasse t negativo.

• Le soluzioni u = u(x, t) di (3.1) sono costanti lungo le caratteristiche. Consideriamo infatti una caratteristica x = x(t) ed una soluzione ristretta a tale caratteristica, u = u(x(t), t); si ha che

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = u_t + cu_x = 0,$$

il che implica che u(x(t), t) = cost. Si dice allora che la soluzione si propaga lungo le caratteristiche, e il fatto che le curve caratteristiche non possano tornare indietro nel tempo si può interpretare come un principio di causa-effetto.

• La soluzione u = u(x, t) di (3.1) è nota in ogni punto (x, t) se la funzione u è assegnata lungo una curva non caratteristica (si dice *non caratteristica* una curva che non è tangente ad alcuna caratteristica in ogni suo punto). Supponiamo infatti di conoscere la funzione u lungo una curva assegnata  $\gamma$ , e poniamo  $u_{|\gamma} = u_0$ ; scelto un punto qualsiasi  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  costruiamo la caratteristica passante per quel punto e intersechiamola con la curva assegnata  $\gamma$ ; detto  $(\xi, \tau)$  il punto di intersezione, dato che le soluzioni sono costanti lungo le caratteristiche, si ha che  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = u_0(\xi, \tau)$ . Ad esempio, per quanto visto in precedenza, l'asse t = 0 è una curva non caratteristica, e quindi se si conoscono i valori iniziali della funzione u, ovvero se è assegnata  $u(\xi, 0)$ , la soluzione u(x, t) è costante lungo la caratteristica soluzione di (3.3), e ciò permette di determinare u(x, t) in tutto il semipiano t > 0. Si ha quindi il seguente

#### Teorema 3.1 (di esistenza e unicità) Dato il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + c(x,t)u_x = 0\\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$
(3.4)

 $con \ x \in \Omega = \mathbb{R}$ , se la funzione c(x,t) è differenziabile esiste un'unica soluzione reale u = u(x,t), con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , data da

$$u(x,t) = u_0(\xi(x,t))$$
(3.5)

 $con \xi(x,t)$  l'ascissa del punto di intersezione della caratteristica passante per (x,t) con l'asse t = 0.

La dimostrazione segue dalle proprietà precedenti scegliendo l'asse t = 0 come curva non caratteristica su cui u è assegnata. Per determinare  $\xi$  in funzione di (x, t), è necessario risolvere l'equazione differenziale ordinaria (3.3). Una volta ottenuta la caratteristica  $x = x(\xi, t)$  in funzione di t e della condizione iniziale  $\xi$ , basta risolvere rispetto a  $\xi$  la relazione  $x = x(\xi, t)$  per ottenere  $\xi = \xi(x, t)$ . Osserviamo che la relazione (3.5) tra le funzioni u e  $u_0$  implica che la soluzione u(x, t) ha la stessa regolarità del dato  $u_0(x)$ .

### 3.2 Esempi

(i) Consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

su  $\Omega = \mathbb{R}$ . Determiniamo le curve caratteristiche, risolvendo il problema di Cauchy (notiamo che c = 2t)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$x(t) = t^2 + \xi.$$

Dato ora un punto (x, t) nel semipiano t > 0 determiniamo l'ascissa  $\xi = \xi(x, t)$  del punto



Figura 3.1: Caratteristiche per l'esempio (i).

di intersezione della caratteristica passante per (x, t) con l'asse t = 0. Si ottiene

$$\xi = \xi(x,t) = x - t^2,$$

e la soluzione u(x, t) si ottiene infine dalla (3.5):

$$u = u(x,t) = u_0(\xi(x,t)) = u_0(x-t^2) = e^{-(x-t^2)^2}.$$



Figura 3.2: Soluzione per l'esempio (i) agli istanti t = 0,1,2.

(ii) Risolviamo l'equazione

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = 0\\ u(x,0) = \sin x, \end{cases}$$

su  $\Omega = \mathbb{R}$ . Determiniamo le curve caratteristiche

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3\\ x(0) = \xi \end{cases}$$

Si ottiene

$$x(t) = 3t + \xi,$$

ovvero un fascio di rette parallele. Il punto di intersezione  $\xi$  della caratteristica con l'asset=0 è dato da

$$\xi(x,t) = x - 3t.$$

A questo punto si può determinare esplicitamente la soluzione, e si ha

$$u = u(x,t) = u_0(\xi(x,t)) = \sin(x-3t).$$

(iii) Risolviamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t - x^2 t u_x = 0\\ u(x,0) = x + 1, \end{cases}$$

su  $\Omega = \mathbb{R}$ . Le caratteristiche sono le soluzioni del problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -x^2 t \\ x(0) = \xi, \end{array} \right.$$

ovvero

$$x(t) = \frac{2\xi}{2 + \xi t^2}$$

da cui si ottiene

$$\xi(x,t) = \frac{2x}{2 - xt^2}$$



Figura 3.3: Soluzione per l'esempio (ii) agli istanti t = 0,1,2.

e infine la soluzione in forma esplicita

$$u = u(x,t) = u_0(\xi(x,t)) = \frac{2x}{2 - xt^2} + 1 = \frac{(2 - t^2)x + 2}{2 - xt^2}.$$



Figura 3.4: Soluzione per l'esempio (iii) agli istanti t = 0,1,2.

### 3.3 Esempio: trasporto di inquinanti nei fiumi

Vediamo ora un esempio di applicazione del modello di trasporto passivo. Si consideri un fiume rettilineo unidimensionale, identificato con la retta reale, e sia u = u(x,t) la concentrazione di un dato inquinante nel punto x del fiume all'istante t. La legge di bilancio appropriata a descrivere questa situazione è il bilancio della massa

$$u_t = -h_x + r.$$

In particolare, supponiamo che

• la sostanza inquinante venga trasportata dal flusso con velocità costante c > 0, che supponiamo essere la velocità dell'acqua nel fiume, e scegliamo relazioni costitutive di tipo trasporto passivo per il flusso

$$h = cu;$$

• la sostanza inquinante venga degradata, ad esempio a causa della presenza di batteri, con un tasso proporzionale alla sua concentrazione. Ciò equivale a scegliere relazioni costitutive per il termine di sorgente della forma

$$r = -\mu u$$
,

 $con \mu$  una costante reale positiva.

Sostituendo queste relazioni costitutive nell'equazione di bilancio della massa (2.4) si ottiene un' equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea:

$$u_t + cu_x + \mu u = 0. (3.6)$$

Con una semplice sostituzione e possibile ricondursi ad un'equazione omogenea: poniamo

$$w(x,t) = u(x,t)e^{(\mu/c)x} \quad \Leftrightarrow \quad u(x,t) = w(x,t)e^{-(\mu/c)x}, \tag{3.7}$$

 $\operatorname{cosicch}{}^{\diamond}$  la (3.6) diventa:

$$w_t e^{-(\mu/c)x} + c(w_x e^{-(\mu/c)x} - (\mu/c)w e^{-(\mu/c)x}) + \mu w e^{-(\mu/c)x} = (w_t + cw_x)e^{-(\mu/c)x} = 0,$$

ovvero

$$w_t + cw_x = 0. aga{3.8}$$

Per ciò che riguarda le condizioni iniziali, consideriamo due casi distinti: (i) possiamo assegnare la concentrazione iniziale della sostanza lungo il fiume, il che equivale ad imporre condizioni iniziali del tipo  $u(x, 0) = u_0(x)$  su tutta la retta t = 0. Ponendo ad esempio

 $u_0(x) = e^{-x^2},$ 

con il cambiamento di variabile (3.7) si ottiene un problema ai valori iniziali nell'incognita w:

$$\begin{cases} w_t + cw_x = 0, \\ w_0(x) = e^{(\mu/c)x - x^2}. \end{cases}$$

Le curve caratteristiche, soluzioni dell'equazione  $\dot{x} = c$ , sono le rette parallele  $x = ct + \xi$ , da cui  $\xi = x - ct$ , e si ottiene la soluzione in termini di w nella forma

$$w(x,t) = w_0(\xi(x,t)) = e^{(\mu/c)\xi - \xi^2} = e^{(\mu/c)(x - ct) - (x - ct)^2},$$

ovvero

$$u(x,t) = e^{-(\mu/c)x} e^{(\mu/c)(x-ct) - (x-ct)^2} = e^{-\mu t} e^{-(x-ct)^2}.$$
(3.9)

Notiamo che il termine  $e^{-\mu t}$  rappresenta l'effetto della degradazione della sostanza inquinante, e "schiaccia" sull'asse u = 0 il grafico della soluzione, mentre il termine  $e^{-(x-ct)^2}$ descrive il trasporto della sostanza lungo il fiume: il grafico della soluzione si sposta senza cambiare forma (a parte il decadimento dovuto al termine  $e^{-\mu t}$ ) lungo l'asse x, verso destra con velocità c. (ii) Il modello (3.6) si può utilizzare anche per studiare come si



Figura 3.5: Soluzione  $u(x,t) = e^{-t}e^{-(x-t)^2}$  per il caso (i) agli istanti t = 0,1,2.

propaga un fronte di inquinante in un fiume inizialmente pulito. Poniamo  $\Omega = [0, +\infty)$  e supponiamo che all'istante iniziale il fiume sia pulito, ovvero u(x, 0) = 0, e che nel punto x = 0 all'istante t = 0 una sorgente inizi a scaricare una quantità costante di inquinante  $u(0,t) = \bar{u}$ , per t > 0. Ciò equivale ad assegnare condizioni iniziali per t = 0 e condizioni al contorno per x = 0, ovvero assegnare la funzione u sulla curva non caratteristica data dall'unione delle semirette x > 0 e t > 0. In effetti, le curve caratteristiche sono le rette  $x = ct + \xi$ , che sono trasversali sia all'asse x che all'asse t. In termini della variabile w si ottiene:

$$\begin{cases} w_t + cw_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ w(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^+ \\ w(0,t) = \bar{u} & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$
(3.10)

Le curve caratteristiche sono le rette  $x = ct + \xi$ , da cui  $\xi(x, t) = x - ct$ . Il fatto che ora sia assegnato il valore della funzione w anche sul semiasse t > 0 porta ad una situazione nuova; la caratteristica per l'origine x = ct divide il primo quadrante del piano (x, t) in due regioni: una zona A in cui le soluzioni sono determinate dalle condizioni iniziali per t = 0 e x > 0, ed una zona B in cui le soluzioni dipendono dalle condizioni al contorno per x = 0 e t > 0, a seconda che le caratteristiche passanti per i punti di ciascuna regione intersechino rispettivamente l'asse t = 0 oppure l'asse x = 0. In conclusione quindi, posto

$$A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ | x > ct\}$$
$$B = \{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ | x < ct\}$$

le soluzioni della (3.10) sono date da:

$$w(x,t) = w_0(\xi(x,t)) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in A \\ \bar{u}, & (x,t) \in B \end{cases}$$

da cui segue

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in A \\ \bar{u} e^{-(\mu/c)x}, & (x,t) \in B. \end{cases}$$



Figura 3.6: Zone del piano (x, t) individuate dalla caratteristica per l'origine x = 3t, avendo scelto c = 3.



Figura 3.7: Soluzione per il caso (ii), con c = 3.

### Capitolo 4

## Equazioni quasilineari del primo ordine

In questo capitolo consideriamo solamente il caso di una dimensione spaziale. Si dice che il **flusso** h è **convettivo** se dipende dalla densità u, ovvero

$$h = h(u). \tag{4.1}$$

Se il termine di sorgente r è identicamente nullo, sostituendo la (4.1) nell'equazione di bilancio della massa  $u_t = -h_x + r$  si ottiene un'equazione alle derivate parziali quasilineare omogenea

$$u_t + c(u)u_x = 0, (4.2)$$

 $\operatorname{con}$ 

$$c(u) = h'(u). \tag{4.3}$$

Interpretando c(u) come velocità di propagazione, la (4.2) mostra che, nel caso convettivo, la velocità dipende dalla densità u. Ricordiamo che il termine "quasilineare" si riferisce al fatto che l'equazione dipende linearmente dalle derivate di ordine massimo (in questo caso il primo) della funzione u.

### 4.1 Caratteristiche

Vediamo ora come estendere il metodo delle caratteristiche all'equazione (4.2), e consideriamo il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$
(4.4)

dove la funzione incognita u è definita su  $\mathbb{R} \times I$ , con  $I \subset \mathbb{R}$ . Definiamo ancora le caratteristiche come le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = c(u(x,t)), \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

$$(4.5)$$

con  $\xi$  fissato in  $\mathbb{R}$ . Dato che la funzione u(x,t) è incognita, questa equazione non si può risolvere direttamente. Possiamo però notare che, come nel caso lineare, la (4.5) implica che la soluzione u(x,t) sia costante lungo le caratteristiche. Infatti, se si denota con u(x(t),t) la soluzione ristretta ad una caratteristica, si ha

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + \dot{x}u_x = u_t + c(u)u_x = 0.$$

A sua volta, questo implica che la velocità c(u(x,t)) sia costante lungo le caratteristiche, cosicché l'equazione (4.5) si riduce a  $\dot{x} = \text{cost.}$  Si può allora concludere che le caratteristiche sono rette di equazione

$$x(t) = c(u)t + \xi, \tag{4.6}$$

dove con c(u) si intende il valore costante di tale funzione lungo la caratteristica in questione. Notiamo che tale valore è incognito in questo stadio. Quindi, in linea di principio, come nel caso lineare, la soluzione nel punto (x, t) è determinata dalla relazione

$$u(x,t) = u_0(\xi(x,t)), \tag{4.7}$$

con  $\xi(x,t)$  l'intersezione della caratteristica (4.6) con l'asse t = 0. La funzione  $\xi(x,t)$  si può determinare, in linea di principio, risolvendo l'equazione

$$x = c(u_0(\xi))t + \xi$$
 (4.8)

rispetto a  $\xi$ , per (x, t) assegnati. La situazione è quindi analoga al caso lineare, ma in questo caso non è detto che le caratteristiche ricoprano tutto il piano in modo che per ogni punto passi una e una sola di esse, il che significa che la soluzione definita dalla (4.7) può non esistere in senso ordinario. In particolare, si possono verificare due fenomeni: - due o più rette caratteristiche si intersecano in un punto (x, t). Poiché la soluzione è costante lungo le due rette (in effetti uguale alla condizione iniziale assegnata), ne segue che la soluzione u assume due o più valori distinti in (x, t), ovvero diventa una funzione multivoca. E' necessario introdurre una nuova nozione di soluzione, la cosiddetta soluzione di tipo shock (onda d'urto). - Esiste una regione del piano per cui non passano caratteristiche, cosicché non è possibile determinare la soluzione in questa regione. Si può ancora definire una soluzione in termini delle cosiddette onde di rarefazione.

#### 4.2 Le caratteristiche si intersecano: breaking time

Supponiamo che alcune rette caratteristiche si intersechino in una regione del semipiano t > 0: si definisce **breaking time** il minimo istante di tempo  $t_b$  in cui le caratteristiche si intersecano. Per  $t < t_b$  la situazione è analoga al caso lineare: per ogni punto (x, t), con  $t < t_b$ , passa una e una sola caratteristica, e la soluzione u(x, t) si determina tramite la (4.7). Al contrario, per  $t > t_b$ , la soluzione u diventa una funzione *multivoca*. Per

determinare il breaking time  $t_b$ , consideriamo un punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  fissato, con  $\bar{t} > 0$ , e la caratteristica per  $(\bar{x}, \bar{t})$ 

$$x = c(u_0(\xi))t + \xi.$$
(4.9)

Dato che  $(\bar{x}, \bar{t})$  per ipotesi appartiene alla caratteristica (4.9), si ha che  $\bar{x} = c(u_0(\xi))\bar{t} + \xi$ , e il valore  $\xi$  in funzione di  $(\bar{x}, \bar{t})$  si determina risolvendo l'equazione implicita

$$F(\bar{x},\bar{t},\xi) = \bar{x} - c(u_0(\xi))\bar{t} - \xi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \xi = \xi(\bar{x},\bar{t}). \tag{4.10}$$

Se questa equazione ammette una sola soluzione, per il punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  passa una sola caratteristica. Per il teorema della funzione implicita, una condizione sufficiente affinché ci sia un'unica soluzione è che

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)\bar{t} - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{t} \neq -\frac{1}{c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)}.$$

Il breaking time  $t_b$  è quindi il più piccolo istante di tempo (positivo) in cui questa condizione non è soddisfatta, ovvero per cui  $t = -\frac{1}{c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)}$ , e quindi  $t_b$  è dato dalla relazione

$$t_b = \inf_{\xi \in P} \left\{ t \, : \, t = -\frac{1}{c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)} \right\},\tag{4.11}$$

dove

$$P = \{\xi \in \mathbb{R} / -\frac{1}{c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)} \ge 0\},\$$

il che garantisce che  $t_b$  sia nonnegativo. In altri termini, per  $\bar{t} \geq t_b$ , la (4.10) non si può risolvere univocamente in termini di  $\xi$  per ogni  $\bar{x}$ : se la (4.10) ammette soluzioni, deve quindi ammetterne più di una, e ciò significa che per  $(\bar{x}, \bar{t})$  passano due o più caratteristiche. Passando ora alla soluzione u(x, t), si ha quindi che per  $t < t_b$  questa esiste ed è data da

$$u(x,t) = u_0(\xi), \tag{4.12}$$

con  $\xi(x,t)$  ottenuto risolvendo la  $x - c(u_0(\xi))t - \xi = 0$ . Supponiamo ora che due o più caratteristiche si intersechino per  $t = t_b$ , e supponiamo che esista  $\xi_b$  tale che (cf. (4.11))

$$t_b = -\frac{1}{c'(u_0(\xi_b))u'_0(\xi_b)}.$$

Consideriamo la caratteristica corrispondente a  $\xi_b$ 

$$x(t) := c(u_0(\xi_b))t + \xi_b.$$

Dimostriamo ora che per  $t \to t_b^-$  la derivata  $u_x(x(t), t)$  diventa illimitata, e il grafico della funzione  $u(\cdot, t)$  tende ad avere tangente verticale: si dice che si ha una cosiddetta **catastrofe di gradiente**. Infatti, dalla (4.12) si ha, lungo una generica caratteristica, che

$$u_x = u_0'(\xi)\,\xi_x,$$

e dato che la funzione  $\xi(x,t)$  è soluzione dell'equazione  $F(x,t,\xi) = x - c(u_0(\xi))t - \xi = 0$ , applicando il teorema della funzione implicita si ha

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial \xi} = \frac{1}{c'(u_0(\xi))u'_0(\xi)t+1},$$

da cui

$$u_x(x,t) = \frac{u_0'(\xi)}{c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t + 1},$$

con  $\xi = \xi(x, t)$ . Valutando questa relazione lungo la caratteristica x(t) corrispondente a  $\xi_b$ , e facendo tendere t a  $t_b$ , si ottiene

$$\lim_{t \to t_b^-} |u_x(x(t), t)| = \lim_{t \to t_b^-} \left| \frac{u_0'(\xi_b)}{c'(u_0(\xi_b))u_0'(\xi_b)t + 1} \right| = +\infty,$$

dato che per  $t = t_b$  il denominatore si annulla.

### 4.3 Esempi

(i) Equazione di Burgers. Scegliamo  $\Omega = \mathbb{R}$ , poniamo r = 0 e consideriamo un flusso di tipo convettivo della forma

$$h(u) = \frac{1}{2} u^2 \quad \Leftrightarrow \quad c(u) = u.$$

Scegliamo come condizione iniziale la funzione  $u_0(x) = e^{-x^2}$ . L'equazione (4.2) diventa

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$
(4.13)

Poichè  $c(u) = u e u_0 = e^{-x^2}$ , le caratteristiche  $x = c(u_0(\xi))t + \xi$  sono in questo caso le rette  $x = e^{-\xi^2}t + \xi$ , la cui pendenza varia in dipendenza dal punto  $\xi$  in cui intersecano l'asse x. Determiniamo il breaking time  $t_b$  dalla formula (4.11); dato che

$$c'(u) = 1,$$
  $u'_0(\xi) = -2\xi e^{-\xi^2},$ 

si ha

$$P = \left\{ \xi \in \mathbb{R} \, / \, \frac{1}{2\xi e^{-\xi^2}} \ge 0 \right\} = (0, +\infty),$$

da cui

$$t_b = \inf_{\xi \in (0, +\infty)} \left\{ \frac{1}{2\xi e^{-\xi^2}} \right\} = \inf_{\xi \in (0, +\infty)} \left\{ \frac{e^{\xi^2}}{2\xi} \right\}.$$

Dato che

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{e^{\xi^2}}{2\xi}\right) = \frac{e^{\xi^2}(2\xi^2 - 1)}{2\xi^2},$$



Figura 4.1: Caratteristiche per l'equazione (4.13): si noti che le rette si intersecano.

la funzione  $\frac{e^{\xi^2}}{2\xi}$  ha un minimo assoluto su  $(0, +\infty)$  per  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , da cui sostituendo si ottiene:

$$t_b = \frac{e^{1/2}}{2/\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Possiamo concludere che per  $t < t_b$  la soluzione esiste ed è definita da

$$u(x,t) = e^{-\xi^2(x,t)},$$

con  $\xi(x,t)$  soluzione di  $x - e^{-\xi^2}t - \xi = 0$ , mentre per  $t \ge t_b$  non esiste soluzione classica.



Figura 4.2: Grafico della soluzione u(x,t) in vari istanti di tempo precedenti il breaking time. Si noti che il grafico della soluzione tende ad avere tangente verticale.

(ii) Consideriamo ancora l'equazione (4.13) con condizioni iniziali

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0\\ 1 - x & 0 \le x < 1\\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$
(4.14)

su  $\Omega = \mathbb{R}$ . Dalla (4.5) otteniamo le rette caratteristiche:

$$x = \begin{cases} t + \xi, & \xi < 0\\ (1 - \xi)t + \xi, & 0 \le \xi < 1\\ \xi, & \xi \ge 1 \end{cases}$$
(4.15)



Figura 4.3: Caratteristiche per l'equazione di Burgers con dati iniziali (4.14).

Dal grafico si vede che le caratteristiche si incontrano nel punto di coordinate (1, 1). Verifichiamo che il breaking time è  $t_b = 1$ : determiniamo dapprima la derivata della funzione  $u_0$ :

$$u_0'(\xi) = \begin{cases} 0, & x < 0\\ -1, & 0 \le x < 1\\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$
(4.16)

L'espressione  $\frac{1}{u'_0(\xi)}$  ha senso solo per  $\xi \in (0, 1)$ , e si ha quindi

$$t_b = \inf_{\xi \in (0,1)} \left\{ -\frac{1}{u_0'(\xi)} \right\} = 1$$

In questo caso è possibile calcolare esplicitamente la soluzione  $u(x,t) = u_0(\xi(x,t))$  per t < 1, e si ottiene

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in A\\ \frac{1-x}{1-t}, & (x,t) \in B\\ 0, & (x,t) \in C \end{cases}$$

dove i domini A, B, C sono definiti da

$$A = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1) | x < t < 1\}$$
  

$$B = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1) | t \le x \le 1\}$$
  

$$C = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1) | x > 1\}.$$

### 4.4 Onde d'urto - soluzioni tipo shock

Per  $t \ge t_b$  non esistono soluzioni regolari dell'equazione differenziale (4.2). E' ancora possibile tuttavia prolungare su questo dominio la funzione u(x,t) (soluzione per  $t < t_b$ ),



Figura 4.4: Grafico della soluzione u(x,t) in vari istanti di tempo precedenti il breaking time. Si noti che il grafico della soluzione tende a diventare verticale.

in modo che sia ancora regolare (e soluzione dell'equazione differenziale di partenza) eccetto che su di una curva x(t), su cui ammette una discontinuità di salto. La curva di discontinuità x(t) e l'ampiezza del salto di u attraverso x(t) si possono determinare da opportune condizioni aggiuntive, dette condizioni di salto di Rankine-Hugoniot. Vedremo ora come ottenere queste condizioni dall'equazione di bilancio della massa in forma integrale, in presenza di una curva di discontinuità per la funzione u. Per determinare le condizioni di salto, consideriamo il caso generale n-dimensionale, con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che il Teorema di Localizzazione I, che asserisce l'equivalenza tra le leggi di bilancio in forma integrale e differenziale, richiede esplicitamente le ipotesi di regolarità  $u \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+), \mathbf{h} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+), r \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ , e quindi in particolare che u e  $\mathbf{h}$ siano funzioni continue in  $\Omega$  per ogni t fissato. Supponiamo ora che le funzioni  $u(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  abbiano una discontinuità di salto attraverso una superficie mobile S = S(t), detta superficie singolare o fronte d'onda, e siano regolari altrove. Denotiamo con  $\mathbf{m}$  una scelta della normale unitaria a S(t), e con V la velocità normale<sup>1</sup> di S(t).

**Definizione 4.1** Si dice salto di una funzione  $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$  attraverso la superficie S = S(t) la funzione

$$\llbracket f \rrbracket(\mathbf{x}, t) = f^+(\mathbf{x}, t) - f^-(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} \in S(t), \quad t \in I,$$
(4.17)

dove, dette  $\Omega^+, \Omega^-$  le regioni di  $\Omega$  verso cui sono dirette rispettivamente le normali  $\mathbf{m} \in -\mathbf{m}$  alla superficie S, si pone

$$f^{+}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{y} \to \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in \Omega^{+}}} f(\mathbf{y},t), \qquad f^{-}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{y} \to \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in \Omega^{-}}} f(\mathbf{y},t).$$

Consideriamo ora la legge di bilancio della massa in forma integrale

$$\frac{d}{dt} \int_{P} u = -\int_{\partial P} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} + \int_{P} r \qquad \forall P \subset \Omega,$$
(4.18)

con **n** la normale esterna a  $\partial P$ . A differenza della legge di bilancio in forma locale (2.4), la (4.18) ha ancora senso in presenza di una superficie singolare, dato che le funzioni  $u, \mathbf{h}, r$  sono integrabili. Vale il seguente

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Ricordiamo che, se S(t) ha equazione intrinseca  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ , la sua velocità normale è data dall'espressione  $V = -\varphi_t/|\nabla\varphi|$ .

**Teorema 4.1 (di localizzazione II)** Supponiamo che u, **h** e r siano rispettivamente di classe  $C^1 e C^0$  a tratti in  $\Omega \times I$ , e ammettano discontinuità di salto attraverso la superficie singolare S(t), mobile con velocità normale V. Supponiamo inoltre che i salti  $[\![u]\!]$  e  $[\![h]\!]$  siano continui come funzioni definite su S(t). Allora l'equazione di bilancio della massa in forma integrale è equivalente alle relazioni locali

$$u_t = -\operatorname{div} \mathbf{h} + r, \tag{4.19}$$

per  $\mathbf{x} \in \Omega \setminus S(t)$  e  $t \in I$ , e

$$\llbracket u \rrbracket V = \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m}, \tag{4.20}$$

per  $\mathbf{x} \in S(t)$  e  $t \in I$ . La (4.20) è detta condizione di salto di Rankine-Hugoniot.

**Dimostrazione**. Se  $P \cap S = \emptyset$  non si presenta alcun problema e la stessa procedura utilizzata nel teorema di localizzazione I mostra che vale la (4.19). Supponiamo allora che  $P \cap S \neq \emptyset$ , e poniamo  $P^+ = P \cap \Omega^+$  e  $P^- = P \cap \Omega^-$ . Osserviamo che la frontiera di  $P^+$ è composta da una porzione della frontiera di P, fissa, e dalla superficie mobile  $S(t) \cap P$ . Inoltre, la normale esterna a  $S(t) \cap P$ , intesa come frontiera di  $P^+$ , è data dal vettore  $-\mathbf{m}$ , mentre la normale esterna a  $S(t) \cap P$ , intesa come frontiera di  $P^-$ , è  $\mathbf{m}$ . Applichiamo il teorema del trasporto di Reynolds al primo termine della (4.18): si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{P} u = \frac{d}{dt} \int_{P^{+}} u + \frac{d}{dt} \int_{P^{-}} u = \int_{P^{+}} u_{t} + \int_{\partial P^{+}} u^{+} V^{+} + \int_{P^{-}} u_{t} + \int_{\partial P^{-}} u^{-} V^{-},$$

dove  $V^+$  e  $V^-$  sono le velocità normali di  $S(t) \cap P$  nella direzione delle normali esterne -**m** e **m** a  $P^+$  e  $P^-$  rispettivamente, ovvero  $V^+ = -V$  e  $V^- = V$ . Si ha quindi

$$\frac{d}{dt}\int_P u = \int_P u_t - \int_{P\cap S} \llbracket u \rrbracket V.$$

Consideriamo ora il secondo termine della (4.18): ricordando che **h** ha una discontinuità di salto su S, ed è continua su  $\partial P$ , otteniamo, applicando il teorema della divergenza

$$\int_{\partial P} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial P^+} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \int_{P \cap S} \mathbf{h}^+ \cdot (-\mathbf{m}) + \int_{\partial P^-} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} - \int_{P \cap S} \mathbf{h}^- \cdot \mathbf{m} =$$
$$= \int_{P^+} \operatorname{div} \mathbf{h} + \int_{P^-} \operatorname{div} \mathbf{h} + \int_{P \cap S} \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m} = \int_P \operatorname{div} \mathbf{h} + \int_{P \cap S} \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m}.$$

La legge di bilancio (4.18)può riscrivere quindi nella forma

$$\int_{P} u_t - \int_{P \cap S} \llbracket u \rrbracket V = -\int_{P} \operatorname{div} \mathbf{h} - \int_{P \cap S} \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m} + \int_{P} r,$$

ovvero

$$\int_{P} (u_t + \operatorname{div} \mathbf{h} - r) - \int_{P \cap S} (\llbracket u \rrbracket V - \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m}) = 0.$$

Osserviamo ora che il primo integrale si annulla, dato che  $u_t + \text{div} \mathbf{h} - r = 0 \text{ su } \Omega \setminus S(t)$ per la (4.19), e si ha

$$\int_{P \cap S} (\llbracket u \rrbracket V - \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m}) = 0 \qquad \forall P,$$

e dato che P è arbitrario e i salti di u e **h** sono continui su S(t), ne segue che

$$\llbracket u \rrbracket V - \llbracket \mathbf{h} \rrbracket \cdot \mathbf{m} = 0,$$

il che conclude la dimostrazione.

Ritorniamo ora al caso di una dimensione spaziale: n = 1, con h = h(u) e c(u) = h'(u). La superficie singolare S(t) è ora rappresentata da un punto mobile  $x = x_s(t)$  sulla retta reale, e il ruolo della velocità normale è ora giocato dalla velocità del punto  $\dot{x}_s(t)$ .

**Definizione 4.2** Si dice soluzione di tipo shock dell'equazione (4.2) una funzione u = u(x,t), discontinua attraverso  $x_s(t)$ , che sia soluzione della (4.2) in  $\Omega \setminus \{x_s(t)\}$  per ogni  $t \in I$ , con I opportuno, e soddisfi le condizioni di salto di Rankine-Hugoniot

$$\llbracket u \rrbracket \dot{x}_s - \llbracket h(u) \rrbracket = 0 \tag{4.21}$$

per  $x = x_s(t)$ .

Cerchiamo ora di estendere la soluzione classica dell'equazione quasilineare (4.2) a tempi  $t \ge t_b$  mediante una soluzione di tipo shock. Per costruire una soluzione di tipo shock, notiamo che, a priori, la curva singolare  $x_s(t)$  è incognita, e si può interpretare la condizione di salto

$$\dot{x}_{s} = \frac{\llbracket h(u) \rrbracket (x_{s}, t)}{\llbracket u \rrbracket (x_{s}, t)}$$
(4.22)

come equazione differenziale ordinaria ordinaria nell'incognita  $x_s(t)$ , a patto che siano noti i salti di  $u \in h(u)$  attraverso  $x_s$ . Questi si possono determinare in funzione delle condizioni iniziali come segue: consideriamo un punto  $(x_s(\bar{t}), \bar{t})$  sulla curva singolare; per questo punto passano almeno due caratteristiche della (4.2). Scegliamo le caratteristiche di pendenza minima e massima (caratterizzate dai parametri  $\xi_m \in \xi_M$  rispettivamente), e prolunghiamole all'indietro nel tempo fino ad intersecare l'asse t = 0. Dato che la soluzione u è costante lungo le caratteristiche, poniamo

$$u^{-}(x_{s}(\bar{t}),\bar{t}) = u_{0}(\xi_{m}), \qquad u^{+}(x_{s}(\bar{t}),\bar{t}) = u_{0}(\xi_{M}),$$

il che permette di esprimere il secondo membro della (4.22) in funzione delle condizioni iniziali.

Riprendiamo a titolo di esempio l'esercizio (ii) della sezione precedente, ovvero il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\\ u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0\\ 1 - x & 0 \le x < 1\\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$



Figura 4.5: La curva singolare per la soluzione tipo shock dell'esempio (ii).

di cui si era determinata la soluzione per  $t < t_b = 1$ . Cerchiamo una soluzione di tipo shock per  $t \ge 1$ : la condizione di salto è in questo caso

$$\dot{x_s} = \frac{\llbracket h(u) \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} = \frac{\frac{1}{2} \llbracket u^2 \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} = \frac{\frac{1}{2} u_+^2 - \frac{1}{2} u_-^2}{u_+ - u_-} = \frac{1}{2} (u_+ - u_-).$$

Dalla (4.15) si vede che le caratteristiche  $x = t + \xi$  hanno pendenza la minima 1, mentre le caratteristiche  $x = \xi$  hanno la pendenza massima (in effetti infinita); ma le caratteristiche con pendenza minima intersecano tutte l'asse t = 0 nei punti in cui  $u_0 = 1$ , e ne segue che  $u_- = 1$ ; analogamente, le caratteristiche con pendenza massima intersecano tutte l'asse t = 0 nei punti in cui  $u_0 = 0$ , da cui segue che  $u_+ = 0$ . L'equazione di salto diventa quindi

$$\dot{x_s} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_s(t) = \frac{1}{2}t + x_s^0;$$

il coefficiente  $x_s^0$  si trova imponendo il passaggio per il punto (x,t) = (1,1) in cui le caratteristiche si intersecano al tempo  $t_b = 1$ , e si trova  $x_s^0 = \frac{1}{2}$ . Il grafico della curva singolare nel piano (x,t), e le caratteristiche di pendenza massima e minima utilizzate per costruire le soluzioni tipo shock, sono rappresentate in figura 4.5.

### Capitolo 5

## L'equazione del calore

### 5.1 Problemi ai valori iniziali e al contorno

Consideriamo ora relazioni costitutive di tipo diffusivo per il flusso

$$\mathbf{h} = -k\nabla u, \qquad k > 0. \tag{5.1}$$

La costante reale positiva k viene detta *diffusività*. Dato che il vettore **h** è parallelo al gradiente della densità u, ricordando le note proprietà del gradiente di una funzione si ha che

(i) il flusso **h** è ortogonale alle superfici di livello u = cost.;

(ii) il vettore **h** punta nella direzione in cui u decresce; si parla di flusso *contro-gradiente*: il trasporto di massa avviene da zone ad alta densità a zone a bassa densità.

Notiamo che nel caso di una dimensione spaziale la (5.1) si scrive

$$h = -ku_x. (5.2)$$

Sostituendo la relazione costitutiva (5.1) nell'equazione di bilancio della massa (2.4), si ottiene la cosiddetta equazione di diffusione:

$$u_t = k\Delta u + r. \tag{5.3}$$

In particolare, si parla di **equazione del calore** se  $r \equiv 0$ 

$$u_t = k\Delta u,\tag{5.4}$$

e si parla di **equazione di reazione-diffusione** se r = r(u) dipende dalla densità u

$$u_t = k\Delta u + r(u). \tag{5.5}$$

Dimostreremo più avanti che, per ottenere una soluzione unica della (5.3), è necessario assegnare opportune condizioni iniziali (per t = 0) e al contorno (su  $\partial\Omega$ ) per la funzione incognita u. In particolare, si assegnano *condizioni iniziali* nella forma

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega,$$

mentre le condizioni al contorno più comuni sono

(i) le cosiddette *condizioni di Dirichlet*, che corrispondono ad assegnare la densità u sulla frontiera di  $\Omega$ ,

$$u(\mathbf{x},t) = u_1(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

(si parla di condizioni di Dirichlet omogenee se  $u_1(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ );

(ii) oppure le *condizioni di Neumann*, che corrispondono ad assegnare la componente normale del flusso  $\mathbf{h}$  sulla frontiera di  $\Omega$ ,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega, \quad t\in\mathbb{R}^+,$$

con **n** la normale esterna a  $\partial \Omega$ . Per la (5.1),

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = -k\nabla u \cdot \mathbf{n} := -k\frac{\partial u}{\partial n},$$

ovvero assegnare la componente normale del flusso su  $\partial\Omega$  equivale ad assegnare la derivata normale  $\frac{\partial u}{\partial n}$  della densità u. Anche in questo caso si parla di condizioni di Neumann omogenee se  $h_0 = 0$ .

(iii) Si possono avere infine *condizioni miste*, che consistono nell'assegnare condizioni di Dirichlet su di una porzione di  $\partial\Omega$  e condizioni di Neumann sulla parte complementare

$$u(\mathbf{x},t) = u_1(\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in (\partial\Omega)_u, \quad t \in \mathbb{R}^+ k \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x},t) = -h_0(\mathbf{x},t) \qquad \mathbf{x} \in (\partial\Omega)_h, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

 $\operatorname{con} (\partial \Omega)_h \cup (\partial \Omega)_u = \partial \Omega.$ 

### 5.2 Proprietà delle soluzioni

#### 1) Irreversibilità

Consideriamo una soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  dell'equazione del calore (5.4) sull'intervallo temporale [0, T]. Al crescere di t in questo intervallo la funzione  $u(\mathbf{x}, t)$ , pensata come funzione di  $\mathbf{x}$ , passa dal valore iniziale  $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$  al valore finale  $u(\mathbf{x}, T)$ . Consideriamo ora la funzione  $u^-(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, T - t)$ : al crescere di t in [0, T] questa passa da un valore iniziale  $u^-(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, T)$ , che coincide col valore finale di u, ad un valore finale  $u^-(\mathbf{x}, T) = u(\mathbf{x}, 0)$ , che coincide col valore iniziale di u. Perciò la funzione  $u^-$  corrisponde a percorrere in senso inverso nel tempo il processo descritto dalla funzione u. Dimostreremo ora che, data una qualsiasi soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  dell'equazione del calore (5.4), il processo invertito nel tempo  $u^-(\mathbf{x}, t)$  non può essere soluzione della stessa equazione, a meno che u non sia costante rispetto al tempo, cioè  $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})$ . Quindi se un fenomeno evolutivo è descritto dall'equazione del calore, questo è *irreversibile*: non si può "tornare indietro nel tempo" da uno stato finale arbitrario ad uno stato iniziale assegnato, in quanto questo processo invertito non soddisferebbe più l'equazione del calore. Per dimostrare l'affermazione fatta sopra, notiamo che  $u_t^-(\mathbf{x}, t) = -u_t(\mathbf{x}, T - t)$  e

 $\Delta u^{-}(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},T-t)$ . Ma poiché  $u(\mathbf{x},t)$  è soluzione, per ogni t fissato si ha anche  $u_t(\mathbf{x},T-t) = \Delta u(\mathbf{x},T-t)$ , da cui segue che  $u_t^{-}(\mathbf{x},t) = -\Delta u^{-}(\mathbf{x},t)$ . Ciò significa che  $u^{-}(\mathbf{x},t)$  soddisfa l'equazione del calore solo se  $u_t^{-}(\mathbf{x},t) = 0$ , ovvero  $u^{-}$ , e quindi anche u, non dipendono dal tempo. 2) **L'energia decresce lungo le soluzioni** Per t fissato,

definiamo **energia** della funzione  $u(\mathbf{x}, t)$  la sua norma  $L^2$  (rispetto a  $\mathbf{x}$ ):

$$E(t) = \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x}.$$
(5.6)

Dimostriamo ora che, se u è soluzione dell'equazione del calore con condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann omogenee, si ha

$$\dot{E} \le 0, \tag{5.7}$$

ovvero la norma della soluzione (l'energia) decresce nel tempo. Quindi fenomeni che ammettono una descrizione basata sull'equazione del calore con dati al contorno omogenei sono caratterizzati dal decadimento della soluzione nel tempo. L'energia non viene conservata ma dissipata. Per dimostrare la (5.7), deriviamo E(t) rispetto al tempo

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |u|^2 = 2 \int_{\Omega} u u_t,$$

e osserviamo che per ipotesi u è soluzione dell'equazione del calore, cioé  $u_t = \Delta u$ . Inoltre, ricordando l'identità  $f\Delta g = \operatorname{div} (f\nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g$ , valida per ogni coppia di funzioni  $f, g \in C^2(\Omega)$ , si ottiene

$$\begin{split} \dot{E} &= 2\int_{\Omega} u\Delta u = 2\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(u\nabla u\right) - 2\int_{\Omega} |\nabla u|^{2} = \\ &= 2\int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \mathbf{n} - 2\int_{\Omega} |\nabla u|^{2} = 2\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} - 2\int_{\Omega} |\nabla u|^{2} = \\ &= -2\int_{\Omega} |\nabla u|^{2} \leq 0, \end{split}$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo le condizioni al contorno omogenee per ipotesi, si ha  $u|_{\partial\Omega} = 0$  oppure  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ . Consideriamo ora un problema misto ai valori iniziali e al contorno per l'equazione del calore:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times I \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ u = u_1 & \text{in } (\partial \Omega)_u \times I \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -h_0 & \text{in } (\partial \Omega)_h \times I \end{cases}$$
(5.8)

Una prima conseguenza del fatto che l'energia non può aumentare nel tempo è l'unicità della soluzione di (5.8).
**Proprietà 5.1** La soluzione del problema (5.8) se esiste è unica.

**Dimostrazione.** Consideriamo due soluzioni  $u \in v$  di (5.8). Denotiamo con w la loro differenza, w = u - v. Dato che l'equazione del calore è lineare la funzione w, combinazione lineare di due soluzioni, è ancora soluzione:  $w_t = \Delta w$ . Dalla (5.8) si ottengono le condizioni iniziali per w

$$w(\mathbf{x},0) = u(\mathbf{x},0) - v(\mathbf{x},0) = u_0 - u_0 = 0$$

e quelle al contorno

$$w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - v(\mathbf{x},t) = u_1 - u_1 = 0 \quad \text{in } \partial \Omega_u \times I$$
$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = -h_0 + h_0 = 0 \qquad \text{in } \partial \Omega_h \times I$$

Quindi w è soluzione dell'equazione del calore con dati al bordo omogenei, e ciò implica che l'energia decresce nel tempo

 $\dot{E} \leq 0.$ 

Inoltre si ha, per t = 0,

$$E(0) = \int_{\Omega} |w(\mathbf{x}, 0)|^2 = 0;$$

e quindi, essendo E(t) una funzione positiva,

$$E(t) \equiv 0$$

per  $t \in I$ . Ciò implica a sua volta che  $w(\mathbf{x}, t) \equiv 0$  e quindi

 $u(\mathbf{x},t) = v(\mathbf{x},t)$ 

per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  e  $t \in I$ , il che prova l'unicità. Una proprietà notevole delle soluzioni

dell'equazione del calore è il cosiddetto principio del massimo, che afferma che i valori assunti dalla funzione all'interno di  $\Omega$ , per t > 0, non possono mai superare il massimo valore assunto della condizione iniziale  $u_0$ , o delle condizioni al contorno  $u_1$ . Qui enunciamo il principio del massimo, senza dimostrazione, nel caso di una dimensione spaziale. Sia  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  e u = u(x, t) una funzione continua su tutto il dominio chiuso  $[a, b] \times [0, +\infty)$ , e  $C^2$  sull'aperto  $(a, b) \times (0, +\infty)$ , soluzione dell'equazione del calore

$$u_t = u_{xx}$$

in  $(a, b) \times (0, +\infty)$ . Fissiamo un istante temporale T > 0, e sia  $\Gamma$  la curva nel piano (x, t) data dall'unione di  $[a, b] \times \{0\}$  (l'intervallo su cui si assegnano i valori iniziali) e dei due segmenti verticali  $\{a\} \times [0, T]$  e  $\{b\} \times [0, T]$  (su cui si assegnano i dati al contorno). Vale il seguente

Teorema 5.1 (Principio del massimo) Nelle ipotesi precedenti,

$$\max_{(x,t)\in[a,b]\times[0,T]}|u(x,t)| = \max_{(x,t)\in\Gamma}|u(x,t)|.$$
(5.9)



Figura 5.1: Il dominio spazio-temporale coinvolto nel principio del massimo.

# 5.3 Metodi di risoluzione

Ci restringiamo qui al caso unidimensionale:  $\Omega \subset \mathbb{R}$ .

## 5.3.1 Soluzione esponenziale

Dato che l'equazione del calore è lineare, ci si può aspettare che tra le sue soluzioni ci siano anche funzioni esponenziali di  $\mathbf{x}$  e t, o combinazioni lineari di esponenziali (infatti la derivazione di una funzione esponenziale ha l'effetto di moltiplicare l'esponenziale stesso per una costante, e premette di ridurre un'equazione differenziale lineare ad un'equazione algebrica). E' chiaro che in generale la soluzione di un particolare problema ai valori iniziali e al contorno non è semplicemente data da una funzione esponenziale, ma si può sperare di ottenere la soluzione, o una sua approssimazione, in termini di serie o somme finite di soluzioni esponenziali. Consideriamo quindi l'equazione del calore con diffusività k = 1

$$u_t = u_{xx},\tag{5.10}$$

e consideriamo un ansatz (soluzione tentativa) esponenziale<sup>1</sup> della forma

$$u(x,t) = e^{(\lambda t + \xi x)} \qquad \lambda, \xi \in \mathbb{C}.$$
(5.11)

Notiamo che la scelta di costanti complesse nell'esponenziale (5.11), permette di descrivere in maniera unificata sia funzioni oscillanti che con andamento esponenziale. Infatti, consideriamo dapprima la componente temporale della soluzione esponenziale: scrivendo  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  si ha, per la formula di Eulero,

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda_r t} e^{i\lambda_i t} = e^{\lambda_r t} (\cos \lambda_i t + i \sin \lambda_i t).$$

Quindi la parte reale di  $\lambda$  determina la crescita nel tempo (se positiva), o l'attenuazione (se negativa) della soluzione. Al contrario, la parte immaginaria di  $\lambda$  determina un andamento

 $<sup>^{1}</sup>$ La funzione (5.11) è a valori complessi, ma l'equazione del calore si estende banalmente a funzioni complesse.

oscillatorio, con periodo temporale  $2\pi/\lambda_i$ . Si ha una situazione analoga per la componente spaziale della soluzione  $e^{\xi x}$ : la parte reale di  $\xi$  determina la crescita o l'abbattimento delle soluzioni rispetto a x, mentre la sua parte immaginaria determina un andamento oscillatorio rispetto a x. Vediamo ora sotto quali condizioni la (5.11) può essere soluzione della (5.10), senza specificare per ora nè il dominio  $\Omega$  nè le condizioni iniziali e al contorno. Derivando la (5.11) si ha

$$u_t = \lambda u, \qquad u_{xx} = \xi^2 u$$

e imponendo che la (5.11) soddisfi la (5.10) si ottiene

$$\lambda u = \xi^2 u,$$

ovvero la condizione di compatibilità per  $\lambda \in \xi$ 

$$\lambda = \xi^2. \tag{5.12}$$

Studiamo ora più in dettaglio due casi particolari, corrispondenti a diverse scelte del dominio  $\Omega$ .

(i)  $\Omega = \mathbb{R}$ . Osserviamo prima di tutto che la nozione di condizione al contorno si può estendere anche a un dominio illimitato come  $\Omega = \mathbb{R}$ , assegnando ad esempio condizioni sul comportamento della funzione u per  $x \to \pm \infty$ . In particolare, possiamo richiedere che la soluzione sia limitata, ovvero

$$|u(x,t)| \le M(t) \qquad \text{per } x \to \pm \infty, \quad t \in [0,+\infty), \tag{5.13}$$

con M(t) una opportuna funzione positiva. Cerchiamo soluzioni esponenziali della (5.10) che soddisfino le condizioni al contorno (5.13), senza specificare condizioni iniziali. Consideriamo la funzione (5.11): separando la parte reale e immaginaria di  $\lambda \in \xi$  si ottiene

$$u(x,t) = e^{\lambda t} e^{\xi x} = e^{\lambda_r t} e^{\xi_r x} (\cos(\lambda_i t + \xi_i x) + i \sin(\lambda_i t + \xi_i x)),$$

e affinché la u(x,t) sia limitata rispetto a x per ogni t fissato deve essere  $\xi_r = 0$  (se  $\xi_r \neq 0$ il termine  $e^{\xi_r x}$  è illimitato su  $\mathbb{R}$ ), cosicché  $\xi$  è immaginario puro

$$\xi = i\omega, \qquad \omega \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Affinché la soluzione esponenziale (5.11) sia soluzione dell'equazione del calore, deve valere la condizione di compatibilità (5.12), che diventa in questo caso

$$\lambda = -\omega^2. \tag{5.15}$$

Quindi  $\lambda$  è reale e negativo: non si hanno oscillazioni temporali ma solo abbattimento nel tempo. La soluzione esponenziale ha la forma

$$u(x,t) = e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x},\tag{5.16}$$



Figura 5.2: Grafico della soluzione (5.17) in vari istanti di tempo.

la cui parte reale è

$$Re(u(x,t)) = e^{-\omega^2 t} \cos \omega x.$$
(5.17)

La soluzione esponenziale quindi corrisponde ad una funzione oscillante rispetto a x che decade esponenzialmente nel tempo.

(ii)  $\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ . Richiediamo che *u* sia una funzione oscillante rispetto a *t* per x = 0 e sia limitata su tutto  $\mathbb{R}^+$ , ovvero scegliamo come condizione al contorno per x = 0 la funzione

$$u(0,t) = e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}^+; \tag{5.18}$$

e all'infinito

 $|u(x,t)| \le M(t) \qquad \text{per } x \to +\infty, \quad t \in [0,+\infty).$ (5.19)

Consideriamo come prima un ansatz esponenziale (5.11): imponendo la condizione al contorno (5.18) si ha

$$u(0,t) = e^{\lambda t} = e^{i\omega t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

da cui segue che  $\lambda$  è immaginario puro,

1

$$\lambda = i\omega, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

La seconda condizione al contorno richiede che  $e^{\xi x}$  sia limitata su  $\mathbb{R}^+$ , il che accade solo se la parte reale di  $\xi$  non è positiva, ovvero  $Re(\xi) \leq 0$ . Infine, la condizione di compatibilità (5.12) richiede che sia

$$i\omega = \xi^2, \tag{5.20}$$

e questa equazione ammette le due soluzioni  $\xi = \pm \left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)$ , di cui una sola soddisfa la condizione  $\xi_r < 0$ 

$$\xi = -\sqrt{\frac{\omega}{2}} - i\sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

In conclusione, la soluzione esponenziale dell'equazione del calore ha la forma

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}x)},$$
(5.21)



Figura 5.3: Grafico della soluzione (5.22) in vari istanti di tempo.

la cui parte reale è

$$Re(u(x,t)) = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right).$$
(5.22)

Il primo termine nella (5.22) rappresenta un decadimento esponenziale nello spazio, mentre il secondo termine  $\cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}x)$ , pensato come funzione di x, è una sinusoide che trasla lungo l'asse x al variare di t.

#### Esempio: distribuzione di temperatura nel suolo

Applichiamo la tecnica precedente ad un semplice modello di diffusione del calore nella crosta terrestre. Rappresentiamo la crosta terrestre come il semispazio di equazione x > 0 in coordinate cartesiane (x, y, z): se il piano x = 0 rappresenta la superficie terrestre, la coordinata x rappresenta quindi la profondità. Supponiamo che la funzione incognita u(x, t) rappresenti la temperatura alla profondità x nell'istante t, temperatura che supponiamo indipendente da  $y \in z$ . Assumiamo che la temperatura u sia soluzione dell'equazione del calore (5.10). Per assegnare condizioni al contorno opportune, osserviamo prima di tutto che è ragionevole supporte che la temperatura sia limitata a grandi profondità, ovvero che valga la (5.19). Per ciò che riguarda x = 0, assegnare condizioni al contorno in questo punto equivale a specificare la temperatura alla superficie terrestre, che varia nel tempo in dipendenza da fattori esterni in genere di carattere periodico; in particolare, possiamo considerare variazioni giornaliere, dovute alla rotazione terrestre, oppure variazioni annuali, dovute al moto di rivoluzione della terra. In altri termini, poniamo

$$u(0,t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = Re(e^{i\frac{2\pi}{T}t}), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

dove T è il periodo di oscillazione temporale della temperatura alla superficie. La soluzione di questo problema ai valori al contorno è data dalla (5.22), con  $\omega = 2\pi/T$ :

$$u(x,t) = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}}x} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \sqrt{\frac{T}{4\pi}}x\right)\right].$$
(5.23)

La presenza del termine  $e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}}x}$  implica che la temperatura tende a zero all'aumentare della profondità. Il secondo termine cos  $\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\sqrt{\frac{T}{4\pi}}x\right)\right]$  è una funzione oscillante rispetto al tempo per x fissato, con uno sfasamento rispetto alla temperatura superficiale u(0,t)di una quantità proporzionale alla profondità  $\sqrt{\frac{T}{4\pi}}x$ . Confrontiamo gli effetti delle variazioni giornaliere e annuali di temperatura, e indichiamo con  $T_G$  e  $T_A$  i corrispondenti periodi. Osserviamo che, essendo  $T_G < T_A$ , si ha che

$$e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_G}}x} < e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_A}}x}.$$

per ogni  $x \in (0, +\infty)$ . Quindi, l'effetto di riscaldamento/raffreddamento delle variazioni giornaliere, con periodo  $T_G$  piccolo, decade con la profondità molto più velocemente dell'effetto del riscaldamento/raffreddamento annuale, con periodo  $T_A$  grande. Questa semplice osservazione può spiegare il fenomeno del *permafrost*, lo strato di terreno che ad alte latitudini rimane ghiacciato giorno e notte. Un altro classico esempio, considerando variazioni giornaliere di temperatura, ponendo  $T = T_G$ , è il cosiddetto *problema delle cantine*: qual è la profondità ideale a cui costruire una cantina, ovvero qual è la profondità  $x_c$  alla quale la temperatura è sfasata di un semiperiodo  $T_G/2$  rispetto alla superficie (cioè calda di notte e fredda di giorno)? Ricordando che lo sfasamento di temperatura rispetto alla superficie è  $\sqrt{\frac{T_G}{4\pi}} x$ , si deve avere

$$\sqrt{\frac{T_G}{4\pi}} x = \frac{T_G}{2},$$
$$x_c = \sqrt{\pi T_G}.$$

da cui

## 5.3.2 Formula di Green

Descriviamo ora la procedura di risoluzione della (5.10) basata sulla formula di Green, nel caso in cui  $\Omega = \mathbb{R}$ . Consideriamo il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$
(5.24)

Una soluzione di (5.24) si può costruire esplicitamente utilizzando il seguente risultato (per la dimostrazione, cf. ad esempio John (1982)).

**Teorema 5.2** (FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE) Se  $u_0(x)$  è una funzione continua a tratti e limitata su  $\mathbb{R}$ , allora

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \, dy, \qquad (5.25)$$

*è* soluzione dell'equazione del calore per t > 0. Inoltre, per  $t \to 0$ 

$$u(x,t) \to u_0(x), \tag{5.26}$$

in tutti i punti x in cui  $u_0$  è continua.

In altri termini, la (5.25) è soluzione del problema ai valori iniziali (5.24). E' importante osservare che la funzione u(x,t) nella (5.25) è solamente definita per t > 0: la formula (5.25) non ha senso per t = 0. La formula di rappresentazione (5.25) si può scrivere nella forma generale

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t) u_0(y) \, dy, \qquad (5.27)$$

dove

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}, \qquad t > 0,$$
(5.28)

è il cosiddetto **nucleo di Green** o **nucleo del calore**. Osserviamo che K(x, y, t) è una funzione di classe  $C^{\infty}$  per t > 0. Il nucleo di Green gode di varie proprietà interessanti: prima di tutto, è simmetrico rispetto a  $x \in y$ , cioè K(x, y, t) = K(y, x, t). Inoltre si verifica facilmente che, per x fissato e t > 0, K(x, y, t) è soluzione dell'equazione del calore, ovvero  $K_t = K_{yy}$  per  $x \neq y$ . Infine, sempre per x fissato, K(x, y, t) è una successione delta (cf. l'Appendice A.3), ovvero

$$K(x, y, t) \to \delta_x(y) \qquad \text{per } t \to 0^+$$

dove il limite è inteso nel senso delle distribuzioni (cf. l'Appendice), ovvero

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, t) \varphi(y) \, dy \to \varphi(x)$$

per ogni funzione reale  $\varphi$  che sia  $C^{\infty}$  a supporto compatto. In altri termini, la funzione di Green è soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} K_t(x, y, t) = K_{yy}(x, y, t) \\ K(x, y, 0) = \delta_x(y). \end{cases}$$
(5.29)

Una funzione soluzione di (5.29) si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. Dalla formula di rappresentazione (5.25) si possono dedurre importanti proprietà della soluzione dell'equazione del calore (5.24).

a. Regolarizzazione dei dati iniziali Osserviamo che la soluzione (5.27) è di classe  $C^{\infty}$ in x e in t qualunque sia il dato iniziale  $u_0$ , purchè almeno continuo a tratti e limitato su  $\mathbb{R}$ . Una dimostrazione di questa affermazione si può trovare ad esempio nel libro di Lieb e Loss (1997). Quindi in generale la u(x,t) è quindi molto più regolare del dato iniziale  $u_0(x)$ : l'equazione del calore smussa le discontinuità dei dati iniziali. Vediamo qui un'altra manifestazione dell'irreversibilità dei processi descritti dall'equazione del calore (5.24). Infatti, consideriamo uno stato del sistema  $u(x,t_0)$  all'istante  $t_0 > 0$  fissato, e supponiamo che  $u(x,t_0)$  non sia  $C^{\infty}$  rispetto a x, ma sia ad esempio discontinua. Allora lo stato  $u(x,t_0)$  non può essere soluzione dell'equazione calore con condizioni iniziali arbitrarie fissate per t = 0: se così fosse, infatti, per quanto detto sopra  $u(x,t_0)$  dovrebbe necessariamente essere  $C^{\infty}$ .

**b.** Decadimento della soluzione Se il dato iniziale  $u_0(x)$  è sommabile su  $\mathbb{R}$ , ovvero se  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ , il che si verifica ad esempio se  $u_0$  ha supporto compatto<sup>2</sup>, u(x,t) converge uniformemente in x a zero per  $t \to +\infty$ . Valgono infatti le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |u_0(y)| \, dy \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(y)| \, dy \\ &= \frac{M}{\sqrt{4\pi t}} \to 0, \end{aligned}$$

per  $t \to +\infty$ , e dove  $M = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(y)| \, dy$  è una costante.

c. Velocità di propagazione infinita Se il dato iniziale ha supporto compatto ed è non negativo  $(u_0(x) \ge 0)$ , poniamo  $U = \operatorname{supp}(u_0)$ , (cosicché  $u_0$  è nullo all'esterno di U). Scegliamo  $x_0$  al di fuori del supporto dei dati iniziali, tale che  $u_0(x_0) = 0$ . Per un qualsiasi t > 0, si ha allora dalla (5.25)

$$u(x_0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_U e^{-\frac{(x_0-y)^2}{4t}} u_0(y) \, dy.$$

Ma questo integrale è non nullo, dato che si integra sul supporto di  $u_0$ , e sia  $u_0$  che K sono non negative. In altri termini, per ogni  $x_0$  arbitrario, anche molto distante dal supporto di  $u_0$ , la "perturbazione"  $u_0$  fa sentire il suo effetto in  $x_0$  in ogni istante t > 0 anche arbitrariamente piccolo: la velocità di propagazione del dato iniziale  $u_0$  è infinita.

**d.** Permanenza del segno Se il dato iniziale  $u_0(x)$  è non negativo su  $\mathbb{R}$ , allora, dato che K(x, y, t) è sempre positivo per ogni valore del suo argomento, la soluzione u(x, t) data dalla (5.27) è sempre non negativa. Quindi, se ad esempio u(x, t) rappresenta una distribuzione di temperatura oppure di densità ciò significa che la temperatura (o la densità) non può diventare negativa.

### 5.3.3 Il metodo di separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili rappresenta la tecnica standard per risolvere problemi ai valori iniziali e al contorno su domini limitati. L'idea è cercare famiglie di soluzioni particolarmente semplici, dette *soluzioni separate*, nella forma

$$u(x,t) = T(t)X(x),$$
 (5.30)

di un dato problema ai valori al contorno, ed esprimere la soluzione del problema originario (ovvero inclusi i dati iniziali) come sovrapposizione, o più precisamente, come sviluppo in serie, di soluzioni di questo tipo. L'idea del metodo e la sua implementazione sono

 $<sup>^{2}</sup>$ Si definisce supporto di una funzione la chiusura del complementare della regione in cui la funzione si annulla.

semplici, ma bisogna fare attenzione a che siano soddisfatte condizioni opportune di convergenza delle serie interessate, tipicamente serie di Fourier. Supponiamo che il dominio spaziale sia un intervallo della forma  $\Omega = (0, L)$ , e consideriamo problemi ai valori iniziali e al contorno di Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\\ u(x, 0) = u_0(x)\\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \end{cases}$$
(5.31)

e di Neumann:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\\ u(x, 0) = u_0(x)\\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0. \end{cases}$$
(5.32)

Consideriamo dapprima il problema di Dirichlet (5.31). Cerchiamo dapprima soluzioni separate, nella forma (5.30), del problema ai valori al contorno (senza imporre condizioni iniziali)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\\ u(0, t) = u(L, t) = 0. \end{cases}$$
(5.33)

Dato che  $u_t(x,t) = T'(t)X(x)$  e  $u_{xx} = T(t)X''(x)$  (dove l'apice indica la derivata di una funzione di una sola variabile rispetto al suo argomento), si ha

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$
(5.34)

Ma i termini  $\frac{T'(t)}{T(t)} \in \frac{X''(x)}{X(x)}$  sono ciascuno funzione di variabili tra loro indipendenti  $(x \in t)$ , e l'uguaglianza (5.34) può valere per ogni  $x \in t$  se e solo se  $\frac{T'(t)}{T(t)} \in \frac{X''(x)}{X(x)}$  sono identicamente costanti. Scriviamo perciò

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

dove la costante negativa  $-\omega^2$  è detta *costante di separazione*. E' possibile vedere che scegliendo una costante di separazione positiva si otterrebbero soluzioni separate (5.30) identicamente nulle. Quindi  $T(t) \in X(x)$  devono essere soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie

$$T'(t) + \omega^2 T(t) = 0$$
 e  $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0.$  (5.35)

Imponiamo ora le condizioni al contorno di Dirichlet u(0,t) = u(L,t) = 0 alla soluzione separata. Si ottiene

$$T(t)X(0) = T(t)X(L) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

il che implica che, se  $T(t) \neq 0$ , deve essere

$$X(0) = X(L) = 0. (5.36)$$

Poiché cerchiamo soluzioni del problema (5.33) senza condizioni iniziali, non imponiamo condizioni aggiuntive sulla T(t). Risolvendo la  $(5.35)_1$  si ottiene

$$T(t) = ce^{-\omega^2 t},\tag{5.37}$$

con c costante arbitraria, mentre le soluzioni della  $(5.35)_2$  hanno forma

$$X(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

Imponendo ora le condizioni al contorno (5.36) si ottiene

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0\\ X(L) = c_1 \cos \omega L + c_2 \sin \omega L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0\\ \sin \omega L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0\\ \omega = n\pi/L \end{cases}$$

con  $n \in \mathbb{Z}$ . Quindi ci sono infinite soluzioni separate  $u_n(x,t)$  della (5.33) della forma

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = ce^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$
(5.38)

con c costante abritraria. Osserviamo ora che l'equazione del calore è lineare, e vale quindi il principio di sovrapposizione delle soluzioni: le combinazioni lineari finite di soluzioni separate  $u_n(x,t)$  sono ancora soluzioni. Per estensione, possiamo immaginare che anche la somma di un numero infinito di soluzioni separate, ovvero una serie, sia ancora soluzione, scrivendo formalmente (ovvero senza preoccuparci per ora della convergenza) la generica soluzione del problema ai valori al contorno di Dirichlet (5.33) nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$
(5.39)

con  $c_n$  coefficienti reali opportuni. Ritorniamo ora al problema ai valori iniziali (5.31): determinando i coefficienti  $c_n$  nella (5.39) in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali, si ottiene formalmente una soluzione del problema (5.31). Ponendo t = 0 nella (5.39) e usando la (5.31) si ottiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x),$$

e ciò significa che le costanti  $c_n$  devono essere i coefficienti di Fourier della funzione  $u_0(x)$ , dati dalla formula (vedi Appendice A.4)

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx. \tag{5.40}$$

A titolo di esempio, consideriamo il problema di Dirichlet su  $\Omega = (0, \pi)$ 

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u_0(x) = \sin x + 1/2 \sin 4x. \end{cases}$$



Figura 5.4: Grafico della soluzione (5.41) in istanti di tempo successivi.

Il dato iniziale  $u_0$  è già scritto come serie di Fourier con un numero finito di termini, i cui unici coefficienti non nulli sono  $c_1 = 1$  e  $c_4 = 1/2$ . Utilizzando le (5.39), (5.40) otteniamo la soluzione formale

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x + \frac{1}{2}e^{-16t}\sin 4x.$$
(5.41)

Giustifichiamo ora il procedimento seguito discutendo la convergenza della serie (5.39), (5.40).

**Teorema 5.3** Se il dato iniziale  $u_0(x)$  è una funzione continua a tratti su [0, L], la serie (5.39), con  $c_n$  dati dalla (5.40), converge uniformemente su [0, L] ad una funzione u(x, t) di classe  $C^{\infty}$ , che rappresenta la soluzione del problema di Dirichlet (5.31).

Osserviamo che anche in questo caso la soluzione è quindi più regolare del dato iniziale.

**Dimostrazione.** Osserviamo prima di tutto che una funzione continua a tratti  $u_0(x)$  su [0, L] è necessariamente a quadrato sommabile. Per il Teorema A.3 nell'Appendice,  $u_0$  è sviluppabile in serie di Fourier, e i coefficienti  $c_n$  della serie sono tali per cui la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$$

è convergente. Fissiamo ora t > 0, e scriviamo la serie in (5.39) come serie trigonometrica in x, ovvero  $\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , con coefficienti di Fourier

$$\tilde{c}_n = c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

Dato che la serie numerica  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$  è convergente, i coefficienti  $|c_n|$  sono limitati da una costante positiva M, da cui segue che

$$|\tilde{c}_n| \le M e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

Dal teorema del confronto per le serie a termini positivi segue che la serie numerica  $\sum_{n=0}^{+\infty} |\tilde{c}_n|$  è convergente, e per il Teorema A.5 nell'Appendice la serie (5.39) è convergente uniformemente per ogni t ad una funzione continua. Derivando termine a termine la (5.39)

si dimostra analogamente che la u(x, t) è indefinitamente differenziabile. Sempre derivando termine a termine la (5.39) si dimostra infine che la u(x, t) è soluzione dell'equazione del calore per t > 0.

Consideriamo ora il problema ai valori iniziali e al contorno di Neumann (5.32), e il problema ai valori al contorno associato (senza condizioni iniziali)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \end{cases}$$
(5.42)

Le soluzioni separate (5.30) della (5.42) anche in questo caso devono soddisfare le equazioni diffenziali ordinarie (5.35), ma ora le condizioni al contorno per la X(x) hanno ora la forma

$$X'(0) = X'(L) = 0. (5.43)$$

Le soluzioni dell'equazione per la T(t) sono le stesse del caso precedente, ovvero le (5.37). Scrivendo X(x) nella forma  $X(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ , e imponendo le condizioni al contorno si trova

$$\begin{cases} X'(0) = \omega c_2 = 0\\ X'(L) = -\omega(c_1 \sin \omega L - c_2 \cos \omega L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0\\ c_1 \sin \omega L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0\\ \omega = \frac{n\pi}{L}, \end{cases}$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Anche in questo caso abbiamo quindi un'infinità numerabile di soluzioni date dall'espressione:

$$u_n(x,t) = \text{cost.} \ e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (5.44)$$

cosicché possiamo cercare la soluzione del problema di Neumann (5.32) come serie formale

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$
 (5.45)

Analogamente al problema di Dirichlet, le condizioni iniziali impongono che i coefficienti  $c_n$  debbano essere i coefficienti di Fourier della funzione  $u_0(x)$ , dati ora da

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx,$$

e il problema della convergenza e della regolarità è del tutto simile al caso di Dirichlet.

Notiamo che le soluzioni date dalle (5.39) e (5.45) sono espresse come sovrapposizione di "armoniche" della forma sin  $\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  o cos  $\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , pesate dall'esponenziale decrescente  $e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$ , che tende a zero per  $t \to +\infty$  e provoca il decadimento nel tempo della soluzione, ovvero

 $|u(x,t)| \to 0$  uniformemente per  $t \to +\infty$ ,

per la soluzione del problema di Dirichlet, e

$$|u(x,t)| \to \frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) \, dx$$
 uniformemente per  $t \to +\infty$ ,

per la soluzione del problema di Neumann.

### Ancora sulla funzione di Green

La soluzione trovata con il metodo di separazione delle variabili può essere scritta nella forma

$$u(x,t) = \int_{\Omega} K(x,y,t) \, u_0(y) \, dy, \qquad (5.46)$$

dove  $\Omega = (0, L)$ , e K(x, y, t) è un opportuno nucleo di Green. Infatti, ad esempio nel caso del problema di Dirichlet, riscrivendo l'espressione (5.39) nella forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$
  
=  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$   
=  $\int_0^L \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right) u_0(y) dy,$ 

(la sommatoria si può spostare all'interno del segno di integrale grazie alla convergenza uniforme della serie) si ottiene l'espressione per il nucleo di Green per il problema considerato (cf. (5.46)) nella forma

$$K(x,y,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

### Un esempio

Consideriamo il dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < L/2 \\ 1 & L/2 \le x < L. \end{cases}$$

Questa funzione è sviluppabile in serie di Fourier nella forma

$$u_0(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dove

$$c_0 = 1$$
,  $e_{n} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n = 2k+1 \end{cases}$ 

ovvero

$$u_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}.$$



Figura 5.5: Il dato iniziale costante a tratti  $u_0$ .

Il grafico della somma parziale

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}$$

è riportato nella Figura 5.6.



Figura 5.6: Approssimazione del dato iniziale  $u_0$  mediante serie di Fourier.

Consideriamo ora la soluzione dell'equazione del calore sotto forma di serie di Fourier

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad t > 0,$$

dove i coefficienti  $c_n$ sono gli stessi della condizione iniziale  $u_0.$  Si ha quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}.$$

La soluzione approssimata

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{30} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}$$

è riportata sotto per vari istanti di tempo. Si vede dal grafico che la soluzione tende al valore costante 1/2 per t crescente.



Figura 5.7: La soluzione del problema di Neumann in vari istanti di tempo.

# Capitolo 6

# Equazioni e sistemi di reazione-diffusione

L'equazione del calore trattata nel capitolo precedente corrisponde a una relazione costitutiva di tipo diffusivo per il flusso, ma con termine di sorgente r identicamente nullo. Se questo termine non è identicamente nullo, e supponendo che

$$r = r(u), \tag{6.1}$$

nell'ipotesi che il flusso sia dato da  $\mathbf{h} = -\nabla u$ , il bilancio della massa fornisce un'equazione parabolica del tipo

$$u_t = \Delta u + r(u), \tag{6.2}$$

detta equazione di *reazione-diffusione*. Nel caso di una dimensione spaziale, si ha ovviamente

$$u_t = u_{xx} + r(u). (6.3)$$

Anche in questo caso, come per l'equazione del calore, si associano all'equazione differenziale (6.2) opportune condizioni al contorno e iniziali. Se il termine r(u) è lineare in u, allora la (6.2) è un'equazione lineare, e si possono applicare i metodi di risoluzione descritti per l'equazione del calore. Nel caso non lineare si può ricorrere a metodi qualitativi o numerici per studiare il comportamento delle soluzioni. Un semplice metodo qualitativo è basato ad esempio sulla cosiddetta *analisi di stabilità lineare*. Il metodo permette di trarre conclusioni sul comportamento della soluzione nell'intorno di uno stato di equilibrio omogeneo e stazionario. Il primo passo consiste nel cercare soluzioni costanti rispetto a  $\mathbf{x}$ e dal tempo, del problema (6.2), ovvero soluzioni  $u(\mathbf{x}, t) = u_0$  dell'equazione di equilibrio

$$r(u) = 0.$$

Il passo successivo consiste nel linearizzare la funzione r(u) nell'intorno di  $u_0$ , e studiare quindi il comportamento dell'equazione linearizzata, che si può risolvere esplicitamente. Si può allora sperare che, se lo stato di equilibrio è stabile (in un qualche senso da specificare) allora le soluzioni del sistema linearizzato non si discostino troppo dalle soluzioni del problema originario. Esistono molti risultati qualitativi sul comportamento dell'equazione di reazione-diffusione (6.2). Ad esempio, nel caso di una dimensione spaziale, un tipico risultato è il seguente:

**Teorema 6.1** Ogni soluzione di equilibrio non identicamente costante di (6.3) con condizioni al contorno di Neumann omogenee è instabile.

Il risultato precedente afferma in sostanza che una soluzione di equilibrio non identicamente costante rispetto alla x non si conserva per piccole perturbazioni. A titolo di esempio, consideriamo il problema ai valori al contorno per  $\Omega = (0, 1)$  (senza condizioni iniziali)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0. \end{cases}$$

Il problema di equilibrio associato è

$$\begin{cases} u_{xx} + u = 0 & x \in (0, 1) \\ u_x(0) = u_x(1) = 0 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni, date da  $u_{eq} = K \cos(n\pi x)$ , con K costante reale e  $n \in \mathbb{N}$ . Il risultato precedente afferma che tutte la sola soluzione di equilibrio stabile è quella corrispondente a n = 0: le soluzioni con andamento oscillatorio sono necessariamente instabili.

### Esempio: dinamica delle popolazioni

Supponiamo che *u* rappresenti la densità di individui di una data popolazione, restringendoci al caso di una dimensione spaziale:  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . E' ragionevole pensare che il più semplice modello che descrive l'evoluzione di *u* sia basato sul bilancio della massa  $u_t = -h_x + r$ . E' necessario assegnare relazioni costitutive per il flusso *h* e il termine di sorgente *r*. Supponiamo che il flusso sia di tipo diffusivo: gli individui migrano da zone ad alta densità di popolazione a zone a bassa densità. Poniamo quindi

$$h = -\mu u_x,$$

con  $\mu$  costante positiva, che rappresenta la mobilità degli individui. Per ciò che riguarda il termine di sorgente, le scelte più semplici corrispondono alla legge di Malthus

$$r = \rho u$$
,

con  $\rho$  costante positiva, oppure alla logistica

$$r = \rho u \left( 1 - \frac{u}{k} \right),$$

dove k è la costante di saturazione (vedere la Sezione 2.2 per una discussione della legge di Malthus e della logistica). Con queste scelte costitutive, il bilancio della massa nel caso malthusiano fornisce l'equazione lineare

$$u_t = \mu u_{xx} + \rho u, \tag{6.4}$$

mentre nel caso logistico si ha la cosiddetta equazione di Fisher

$$u_t = \mu u_{xx} + \rho u \left( 1 - \frac{u}{k} \right), \tag{6.5}$$

introdotta originariamente come modello per la diffusione di un gene favorevole in una popolazione chiusa. E' importante osservare che il ruolo del termine di sorgente ha un effetto in un certo senso opposto a quello del termine di flusso: mentre il flusso controgradiente tende a "spalmare" la soluzione in uno stato uniforme, il termine di produzione, sia nel caso di Malthus che nel caso logistico per u < k, tende a fare crescere la densità locale della popolazione. Il modello malthusiano (6.4) è lineare, e quindi più semplice da studiare. Lo applicheremo qui per studiare la dimensione critica sotto la quale una colonia, ad esempio di plancton, si estingue. Più precisamente, supponiamo che una data popolazione sia distribuita su di un intervallo  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$ , e la densità di individui sia nulla al bordo della colonia, cosicché la u è soluzione del problema di Dirichlet (non specifichiamo dati iniziali)

$$\begin{cases} u_t = \mu u_{xx} + \rho u \\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{cases}$$
(6.6)

Come accennato sopra, il termine di diffusione  $\mu u_{xx}$  agisce in competizione col termine di sorgente  $\rho u$ : la diffusione degli individui porta ad una diminuzione della densità della popolazione; se la colonia è troppo piccola, la crescita dovuta a  $\rho u$  non è sufficiente a rimpiazzare la diminuzione dovuta alla diffusione, e la colonia si estingue. Viceversa, se la colonia è sufficientemente grande, lontano dal bordo della colonia la diminuzione della densità dovuta alla diffusione è piuttosto lenta: domina il termine di produzione e la colonia cresce. In altri termini, ci aspettiamo che esista una lunghezza critica  $L_c$  al di sotto della quale la colonia si estingue, ovvero  $u(x,t) \to 0$  per  $t \to +\infty$ , e al di sopra della quale invece prospera, cioè u(x,t) cresce indefinitamente per  $t \to +\infty$ . Dato che il problema è lineare, possiamo utilizzare il metodo di separazione delle variabili. Sostituendo nella (6.6) la soluzione separata u(x,t) = T(t)X(x) si ottiene

$$T'(t)X(x) = \mu T(t)X''(x) + \rho T(t)X(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{\mu T(t)} - \frac{\rho}{\mu} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

con  $\omega$  costante di separazione. Perciò le funzioni T(t) e X(x) devono soddisfare le equazioni differenziali ordinarie

$$T'(t) = (\rho - \mu \omega^2)T(t),$$

la cui soluzione è

$$T(t) = T(0) \exp\left[\left(\rho - \mu\omega^2\right)t\right],$$

е

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0\\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzioni solo se  $\omega = \frac{n\pi}{L}$  con *n* intero, della forma

$$X(x) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con c costante arbitraria. La generica soluzione separata del problema ai valori al contorno (6.6) è quindi

$$u_n(x,t) = \exp\left[\left(\rho - \frac{\mu n^2 \pi^2}{L^2}\right)t\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Se ora richiediamo che la soluzione soddisfi a un'assegnata condizione iniziale, in analogia a quanto fatto per l'equazione del calore possiamo scrivere formalmente la soluzione come serie di Fourier

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{\left(\rho - \frac{\mu n^2 \pi^2}{L^2}\right) t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

dove le costanti  $c_n$  sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale. Consideriamo separatamente i vari termini  $u_n(x,t)$  della serie. A differenza dell'equazione del calore, ora l'esponenziale può non essere sempre decrescente rispetto al tempo per ogni n: il coefficiente  $\rho$  può amplificare alcuni termini della serie. Ciò accade se esiste almeno un intero n tale che

$$\rho - \frac{\mu n^2 \pi^2}{L^2} > 0,$$

cioè per

$$n < \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Se la dimensione L della colonia è sufficientemente grande, oppure se il tasso di crescita  $\rho$ è grande, oppure infine se la mobilità  $\mu$  è bassa, allora esiste almeno un intero che soddisfa la disuguaglianza, e la colonia non si estingue. La dimensione critica della colonia è il minimo valore  $L_c$  per cui esiste almeno un termine  $u_n(x, t)$  della serie che viene amplificato. Prendendo n = 1 si ottiene

$$L_c = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

# 6.1 Sistemi di reazione - diffusione: instabilità di Turing

Una caratteristica comune di molti sistemi sia biologici, che chimici o meccanici, in cui interagiscono due o più componenti, è la formazione di pattern (traducibile in "motivi") regolari. Un pattern si può definire come una distribuzione spaziale regolare non omogenea di una data quantità. Un popolare esempio di pattern in un sistema biologico è

la distribuzione delle macchie sul mantello dei leopardi, o delle strisce sul mantello delle tigri. La formazione di pattern regolari può esser descritta da un semplice modello di reazione-diffusione dovuto a Turing, in cui due sostanze (dette promotore e inibitore) interagiscono tra loro con le seguenti modalità: il promotore, che supponiamo diffonda molto lentamente, favorisce la crescita dell'inibitore, mentre l'inibitore, che invece supponiamo diffonda molto più velocemente, rallenta la crescita del promotore. In assenza di diffusione, un tale sistema tenderebbe ad un equilibrio omogeneo al crescere del tempo. Il fatto che le due sostanze diffondano con mobilità molto diverse destabilizza l'equilibrio e provoca la formazione di pattern regolari. Più precisamente, consideriamo un modello di reazione - diffusione per due popolazioni distinte di densità  $u(x,t) \in w(x,t)$ , con  $x \in [0, L]$ e  $t \in \mathbb{R}^+$ . Scriviamo il bilancio della massa per ciascuna popolazione

$$u_t = -h_x + f, \qquad w_t = -k_x + g,$$

dove  $h, k \in f, g$  sono rispettivamente i flussi e i termini di sorgente relativi alle due popolazioni. Supponiamo che le relazioni costitutive per i flussi siano di tipo diffusivo

$$h = -\lambda u_x, \qquad k = -\mu w_x,$$

 $\operatorname{con} \lambda, \mu \geq 0$  le mobilità delle due popolazioni. Per ciò che riguarda i termini di sorgente, dato che supponiamo che le due popolazioni interagiscano, assumiamo che ciascun termine dipenda da entrambe le densità, ovvero

$$f = f(u, w), \qquad \quad g = g(u, w).$$

Nel caso più semplice queste funzioni possono essere scelte lineari in  $u \in w$ 

$$f = au + bw, \qquad g = cu + dw,$$

con a, b, c, d costanti fissate. Per ottenere un modello ben definito, occorre assegnare queste costanti. In particolare assumiamo che:

- la popolazione di densità w agisca da inibitore nei confronti della popolazione descritta da u (il promotore), e scegliamo b < 0;
- in assenza di inibitore, la crescita di u sia esponenziale (ovvero malthusiana) e scegliamo a > 0;
- il promotore favorisca la crescita dell'inibitore, cosicché c > 0;
- in assenza di promotore, l'inibitore tenda a diminuire, ovvero d < 0;
- supponiamo che l'inibitore diffonda molto più velocemente del promotore, e poniamo  $\lambda = 1 e \mu >> 1$ .

Con queste relazioni costitutive, le equazioni che governano il fenomeno sono

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a \, u + b \, w, \\ w_t = \mu w_{xx} + c \, u + d \, w. \end{cases}$$
(6.7)

Assumiamo che il sistema sia isolato, e imponiamo che il flusso attraverso  $\partial\Omega$  sia nullo, assegnando condizioni al contorno di Neumann omogenee

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0.$$
 (6.8)

In notazione matriciale, ponendo

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

le (6.7) e (6.8) diventano

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{D}\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{A}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}_x(0,t) = \mathbf{u}_x(L,t) = \mathbf{0}. \end{cases}$$
(6.9)

Consideriamo dapprima stati **u** omogenei (ovvero indipendenti da x): il sistema (6.9) si riduce al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}\mathbf{u}.\tag{6.10}$$

La soluzione di equilibrio  $\mathbf{u} = (0,0)$  di (6.10) è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice **A** hanno parte reale negativa, oppure in modo equivalente se

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} < 0, \qquad \det \mathbf{A} > 0, \tag{6.11}$$

cosa che supporremo verificata d'ora in poi. Cerchiamo ora soluzioni del sistema completo (6.9) in termini di ansatz esponenziali

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{c}e^{\lambda t}\cos(\omega x),\tag{6.12}$$

con  $\lambda \in \omega$  scalari e **c** un vettore, eventualmente complessi. Si ha

$$\mathbf{u}_t = \lambda \mathbf{u} = \lambda \mathbf{c} e^{\lambda t} \cos(\omega x), \qquad \mathbf{u}_{xx} = -\omega^2 \mathbf{u} = -\omega^2 \mathbf{c} e^{\lambda t} \cos(\omega x),$$

e sostituendo queste espressioni in (6.9), si ottiene una relazione algebrica tra  $\lambda, \omega, \mathbf{c}$ :

$$[\lambda \mathbf{1} - (\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D})]\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$
(6.13)

Imponendo ora le condizioni al contorno  $\mathbf{u}_x(0,t) = \mathbf{u}_x(L,t) = \mathbf{0}$  alla (6.12), si ottiene

$$\omega = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Il problema si riduce così alla ricerca degli autovalori  $\lambda_n$  e degli autovettori  $\mathbf{c}_n$  della matrice  $\mathbf{A} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \mathbf{D}$  per ogni *n* fissato. Notiamo che, per ogni *n* fissato, ci sono due autovalori  $\lambda_{1,n}$ 

e  $\lambda_{2,n}$ , in generale complessi coniugati, con corrispondenti autovettori  $\mathbf{c}_{1,n}$  e  $\mathbf{c}_{2,n}$ . Una volta determinati gli autovalori e gli autovettori, si può scrivere una generica soluzione di (6.9) come sovrapposizione di soluzioni esponenziali

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{c}_{1,n} e^{\lambda_{1,n}t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{c}_{2,n} e^{\lambda_{2,n}t} \cos\left(\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right).$$

Il fenomeno noto come instabilità di Turing consiste nell'amplificazione, al crescere di t, di una o di un numero finito di armoniche della serie di Fourier che rappresenta (almeno formalmente) la soluzione. Questo si verifica se esiste almeno un n per il quale la parte reale degli autovalori  $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}$  è non negativa, ovvero se esiste almeno un n per cui

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}-\omega_{n}^{2}\mathbf{D}\right)>0,\qquad \operatorname{det}(\mathbf{A}-\omega_{n}^{2}\mathbf{D})>0,$$

oppure

$$\det(\mathbf{A} - \omega_n^2 \mathbf{D}) < 0.$$

Dato che, in generale, queste relazioni ammettono soluzioni al più per un numero finito di interi n, solo un numero finito di armoniche risulta amplificato, e la soluzione, per t grande, tende ad essere una sovrapposizione di sinusoidi con periodo spaziale molto simile, con formazione di strutture regolari, i cosiddetti pattern. Osserviamo ora che l'ipotesi (6.11) garantisce che

$$\operatorname{tr} \left( \mathbf{A} - \omega_n^2 \mathbf{D} \right) = \operatorname{tr} \mathbf{A} - \omega_n^2 \operatorname{tr} \mathbf{D} = \operatorname{tr} \mathbf{A} - \omega_n^2 (1 + \mu) < 0.$$

L'unica possibilità è quindi che, per qualche n, si abbia  $\det(\mathbf{A} - \omega_n^2 \mathbf{D}) < 0$ . Questo determinante è un polinomio di secondo grado in  $\omega_n^2$ , che può assumere valori negativi solo eventualmente all'interno dell'intervallo  $(\omega_{min}^2, \omega_{max}^2)$  compreso tra le sue radici. Si verifica quindi amplificazione solo delle armoniche (che sono quindi in numero finito) corrispondenti agli n per cui

$$\frac{n\pi}{L} \in (\omega_{\min}^2, \omega_{\max}^2).$$

Mostriamo ora che, se il coefficiente di diffusione dell'inibitore  $\mu$  supera una determinata soglia, allora esiste effettivamente un intervallo  $(\omega_{min}^2, \omega_{max}^2)$  per cui il determinante è negativo, e si verifica l'instabilità di Turing. Infatti, si ha

$$\det(\mathbf{A} - \omega_n^2 \mathbf{D}) = \mu \omega^4 - (d + a\mu)\omega^2 + (ad - bc),$$

che ammette radici se

$$a^{2}\mu^{2} - 2\mu(ad - 2bc) + d^{2} = (a\mu - d)^{2} + 4\mu bc > 0.$$

Dato che  $\lim_{\mu\to+\infty} [(a\mu - d)^2 + 4\mu bc] = +\infty$ , esiste certamente  $\bar{\mu}$  tale che, per  $\mu > \bar{\mu}$ , si ha  $(a\mu - d)^2 + 4\mu bc > 0$ .

#### Un esempio

Scegliamo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo dapprima stati omogenei u = u(t) e w = w(t). Il sistema di reazionediffusione (6.9) si riduce in questo caso ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Dato che tr  $\mathbf{A} = -1 < 0$  e det  $\mathbf{A} = 1 > 0$ , la soluzione  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (ovvero u = 0 e w = 0) è l'unica configurazione di equilibrio stabile per questo sistema (cf. Appendice A.1). Consideriamo ora il sistema completo (6.9). Abbiamo visto che questo ammette soluzioni separate della forma

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{c} \exp(\lambda t) \cos(\omega x), \qquad \omega = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

se e solo se  $\lambda$  è un autovalore e **c** è il corrispondente autovettore della matrice  $\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D}$ . Per ogni  $\omega$  fissato (e quindi per ogni *n* fissato) ci sono due autovalori distinti (eventualmente complessi coniugati)

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\sqrt{-3 + 42\,\omega^2 + 49\,\omega^4}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\sqrt{-3 + 42\,\omega^2 + 49\,\omega^4},$$

con autovettori dati rispettivamente da



Figura 6.1: Il determinante det  $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D})$  in funzione di  $\omega$ .

$$\mathbf{c}_{1} = \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\,\omega^{2} + \frac{1}{2}\,\sqrt{-3 + 42\,\omega^{2} + 49\,\omega^{4}},\,1\right],\quad\mathbf{c}_{2} = \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\,\omega^{2} - \frac{1}{2}\,\sqrt{-3 + 42\,\omega^{2} + 49\,\omega^{4}},\,1\right]$$

Come descritto in precedenza, il sistema sviluppa instabilità di Turing se esiste qualche  $n \in \mathbb{N}$  tale che, per  $\omega = n\pi/L$ , uno dei due autovalori ha parte reale positiva (cosicché la corrispondente componente della soluzione viene amplificata). Per il criterio

nell'Appendice A.1, questo avviene se tr $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D}) > 0$  e det $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D}) > 0$  oppure se det $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D}) < 0$ . Dato che

$$\operatorname{tr} \left( \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D} \right) = \operatorname{tr} \mathbf{A} - \omega^2 \operatorname{tr} \mathbf{D} = -1 - 9\omega^2 < 0,$$

l'instabilità si sviluppa solo se

$$\det\left(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{D}\right) = 1 - 6\omega^2 + 8\omega^4 < 0.$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato in figura 6.1. Il determinante è negativo per  $1/2 < \omega < 1/\sqrt{2}$ . In termini di *n*, si ha quindi amplificazione di quelle componenti della soluzione corrispondenti agli *n* per cui

$$\frac{L}{2\pi} < n < \frac{L}{\pi\sqrt{2}},$$

Ad esempio, scegliendo L = 70, si ha  $12 \le n \le 15$ . Questo sistema quindi presenta instabilità di Turing. Il grafico della soluzione è riportato in Figura 6.2.



Figura 6.2: Instabilità di Turing: soluzione del sistema (6.7) in vari istanti di tempo.

# Capitolo 7 L'equazione di Laplace

Consideriamo una soluzione stazionaria<sup>1</sup>  $u = u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega$ , dell'equazione di diffusione (5.3) con k = 1: poiché  $u_t = 0$ , la funzione u deve essere soluzione dell'equazione ellittica

$$\Delta u + r = 0. \tag{7.1}$$

Se il termine di sorgente r è identicamente nullo, si ha in particolare l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{7.2}$$

mentre se  $r = \omega^2 u$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , si ha l'equazione di Helmoltz

$$\Delta u + \omega^2 u = 0, \tag{7.3}$$

e se infine  $r = -f(\mathbf{x})$  è una funzione assegnata della sola  $\mathbf{x}$  si ha l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f. \tag{7.4}$$

Ad esempio, se u rappresenta la temperatura in un conduttore di calore, l'equazione di Laplace descrive la distribuzione di temperatura corrispondente ad un flusso di calore  $\mathbf{h}$ stazionario, tale che div  $\mathbf{h} = 0$ . Dato che le equazioni (7.2), (7.3) e (7.4) non contengono derivate rispetto al tempo, non ha senso assegnare condizioni iniziali per la funzione incognita u. Si assegnano perciò solo condizioni al contorno: si hanno condizioni al contorno di Dirichlet se viene assegnata la funzione  $u = u_0$  sul bordo  $\partial\Omega$ , o condizioni al contorno di Neumann se si assegna la derivata normale  $\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma_0$  (o equivalentemente il flusso normale  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ ) su  $\partial\Omega$ . Si possono evidentemente assegnare anche condizioni miste su sottoinsiemi complementari  $(\partial\Omega)_u \in (\partial\Omega)_{\sigma}$ . Consideriamo d'ora in poi solamente l'equazione di Laplace (7.2). Le sue soluzioni sono dette **funzioni armoniche**. Esempi di funzioni armoniche su domini piani  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sono

$$u(x,y) = ax + by, \quad e^x \sin y, \quad xy, \quad x^2 - y^2, \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Cioé indipendente dal tempo.

Fissato  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  si verifica facilmente che anche  $u(x, y) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ è una funzione armonica in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ . In notazione compatta, posto  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (x_0, y_0)$ , si ha quindi che la funzione  $u(\mathbf{x}) = \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|$  è armonica in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{\eta}\}$  per  $\boldsymbol{\eta}$  fissato. Si definisce **nucleo di Green** per l'equazione di Laplace in  $\mathbb{R}^2$  la funzione armonica

$$K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|, \qquad (7.5)$$

definita sul dominio  $\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\eta}\}$ . Notiamo che, poiché  $K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = K(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x})$ , il nucleo di Green è armonica anche rispetto alla variabile  $\boldsymbol{\eta}$ . Si puó in effetti dire di piú: si dimostra infatti che il nucleo di Green é una soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, ovvero é soluzione di

$$\Delta_{\boldsymbol{\eta}} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \delta_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\eta}), \tag{7.6}$$

nel senso delle distribuzioni.

# 7.1 Proprietà delle soluzioni

In analogia con le soluzioni dell'equazione del calore, le funzioni armoniche su di un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  assumono il valore massimo (e minimo) sul bordo: vale infatti il seguente

**Teorema 7.1** (Principio del massimo) Data una funzione armonica u di classe  $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , si ha

$$\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| = \max_{\partial \Omega} |u(\mathbf{x})|.$$
(7.7)

Inoltre, fissate opportune condizioni al contorno, valgono risultati di unicità analoghi a quelli visti in precedenza. Consideriamo in particolare il problema d Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(\mathbf{x}) = u_0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$
(7.8)

e quello di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = \sigma_0(\mathbf{x}) & \text{su } \partial \Omega. \end{cases}$$
(7.9)

Per il problema di Neumann, si richiede la seguente condizione di compatibilità per i dati al contorno:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_0 = 0. \tag{7.10}$$

Che debba valere necessariamente questa condizione si vede applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \Delta u = 0$$

**Teorema 7.2** Se esiste una soluzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  del problema di Dirichlet (7.8) allora tale soluzione è unica. Analogamente, se esiste una soluzione del problema di Neumann (7.9), questa è unica a meno di una costante additiva (ovvero se  $u(\mathbf{x})$  è soluzione, allora  $u(\mathbf{x}) + c$  è ancora soluzione per ogni  $c \in \mathbb{R}$ ).

Per dimostrare questo teorema, utilizziamo il metodo dell'energia: introduciamo prima di tutto l'**energia** di una soluzione u dell'equazione di Laplace come la norma  $L^2$  del suo gradiente

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \tag{7.11}$$

La dimostrazione è basata su due risultati preliminari, che prendono il nome di **identità di Green**. Consideriamo a questo scopo due funzioni  $w, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ : valgono allora le seguenti identità

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = -\int_{\Omega} u\Delta u + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n},\tag{7.12}$$

$$\int_{\Omega} (u\Delta w - w\Delta u) = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}).$$
(7.13)

Per dimostrare le identità di Green, basta osservare che

$$\begin{split} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w &= \int_{\Omega} [\operatorname{div} \left( w \nabla u \right) - w \operatorname{div} \nabla u] \\ &= \int_{\partial \Omega} w \nabla u \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega} w \Delta u = \int_{\partial \Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\Omega} w \Delta u, \end{split}$$

dove si è utilizzata la relazione div  $(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$ , valida per ogni funzione f e campo vettoriale  $\mathbf{v}$  sufficientemente regolari. L'identità (7.12) segue ponendo u = w. Per ottenere la (7.13) è sufficiente scambiare  $u \in w$ , ottenendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\partial \Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} - \int_{\Omega} w \Delta u = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial w}{\partial n} - \int_{\Omega} u \Delta w.$$

**Dimostrazione del Teorema 7.2.** Consideriamo due soluzioni  $u \in w$  dello stesso problema di Dirichlet (7.8), con condizioni al contorno assegnate:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial \Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w = u_0 & \text{su } \partial \Omega. \end{cases}$$

La differenza delle due soluzioni v = u - w è allora soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{su } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$$

Calcoliamo ora l'energia di v, utilizzando la prima identità di Green

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} v \Delta v + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial v}{\partial n} = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che v è armonica in  $\Omega \in v = 0$  su  $\partial\Omega$ . Poiché l'integranda  $|\nabla v|^2$  in E è sempre non negativa, si ha quindi

$$\nabla v = 0$$
 in  $\Omega \implies v = \text{cost},$ 

e dato che v = 0 su  $\partial\Omega$ , ne segue che v = 0 su tutto  $\Omega$ . La differenza di due soluzioni è nulla, e quindi la soluzione è unica. Per ciò che riguarda il problema di Neumann (7.9), si ha ancora che la differenza v di due soluzioni è a sua volta soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{su } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial \Omega, \end{cases}$$

e l'energia di v è ancora nulla, dato che  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  su  $\partial \Omega$ . Ne segue che  $v = \text{cost. su } \Omega$ , ovvero la differenza tra due soluzioni è una costante, e la dimostrazione è conclusa.

# 7.2 Metodi di risoluzione

### 7.2.1 La formula di Green

Restringendoci per semplicità al caso bidimensionale, consideriamo una funzione  $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , che sia di classe  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ : vale allora la seguente identità, di cui omettiamo la dimostrazione,

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{\xi}) K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\partial \Omega} \left[ u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial K}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) \right] \, ds_{\boldsymbol{\xi}} \tag{7.14}$$

dove  $K = 1/(2\pi) \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  è il nucleo di Green. Nella formula (7.14) abbiamo utilizzato le convenzioni seguenti: in entrambi gli integrali,  $\boldsymbol{\xi}$  rappresenta la variabile rispetto a cui si integra; il simbolo  $dA_{\boldsymbol{\xi}}$  è l'elemento d'area in  $\Omega$ , mentre il simbolo  $ds_{\boldsymbol{\xi}}$  è l'elemento d'arco di  $\partial\Omega$ ; infine, abbiamo definito  $\frac{\partial K}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} K$ , con  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$  il gradiente rispetto a  $\boldsymbol{\xi}$ . Osserviamo che la formula di rappresentazione (7.14) è ancora valida se si sostituisce alla funzione K una qualsiasi funzione della forma  $\tilde{K}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi})$ , dove w è una funzione armonica arbitraria in  $\Omega$ . Si ha infatti, per la seconda identità di Green (7.13) e il fatto che  $\Delta w = 0$ , che

$$\int_{\Omega} w(\boldsymbol{\xi}) \Delta u(\boldsymbol{\xi}) \, dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\partial \Omega} \left( u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial w}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) - w(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \, ds_{\boldsymbol{\xi}} = 0,$$

e sommando questa identità alla (7.14) si ottiene

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{\xi}) \tilde{K}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\partial \Omega} \left[ u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \tilde{K}}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \tilde{K}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{\xi}) \right] \, ds_{\boldsymbol{\xi}}.$$
 (7.15)

La formula (7.15) si può utilizzare per ottenere una rappresentazione della soluzione dei problemi di Dirichlet (7.8) e di Neumann (7.9) in funzione dei dati al contorno  $u_0, \sigma_0$  (la

### L'equazione di Laplace

(7.15) fornisce anche le soluzioni dell'equazione di Poisson). Il principio su cui si basa il metodo è il seguente: supponiamo che u nella (7.15) sia soluzione dell'equazione di Laplace. L'integrale su  $\Omega$  nella (7.15) di conseguenza è nullo. D'altra parte, l'integrale sul bordo contiene sia la funzione incognita u che la sua derivata normale. Considerando ad esempio il problema di Dirichlet, sappiamo che la funzione u è assegnata, e quindi nota, sul bordo, ma la sua derivata normale è incognita. Utilizzando la libertà di scegliere il nuceo  $\tilde{K}$ , lo si assegni in modo che sia  $\tilde{K} = 0$  su  $\partial\Omega$ : si definisce **funzione di Green** per il laplaciano su  $\Omega$  con condizioni al contorno di Dirichlet la funzione

$$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = K(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{tale che } G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{per } \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega.$$
(7.16)

Scegliendo  $\tilde{K} = G$  nella (7.15) e ricordando che  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  e  $u = u_0$  su  $\partial \Omega$  si ottiene la cosiddetta formula di Green

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, ds_{\boldsymbol{\xi}}$$
(7.17)

ovvero una rappresentazione integrale esplicita della soluzione in funzione dei dati al contorno  $u_0$ . Si determina in maniera analoga la soluzione dell'equazione di Poisson  $\Delta u = f$  con dati di Dirichlet

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi}) G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, dA_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{\partial \Omega} u_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, ds_{\boldsymbol{\xi}}.$$
 (7.18)

Nel caso del problema di Neumann per l'equazione di Laplace (7.9), è nota sul bordo la derivata normale  $\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma_0$ , mentre la u è incognita. Occorre quindi scegliere la funzione  $\tilde{K}$  in modo che si annulli su  $\partial\Omega$  la sua derivata normale: si definisce **funzione di Neumann** per il laplaciano su  $\Omega$  con condizioni al contorno di Neumann una funzione (determinata a meno di una costante additiva)

$$N(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = K(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{tale che } \frac{\partial N}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{per } \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega.$$
(7.19)

Scegliendo  $\tilde{K} = N$  nella (7.15) si ottiene la formula di Green per il problema di Neumann

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma_0(\boldsymbol{\xi}) \, ds_{\boldsymbol{\xi}} + \text{cost.}, \qquad (7.20)$$

e si procede analogamente per l'equazione di Poisson con dati di Neumann. La funzione di Green dipende dal dominio  $\Omega$ , e si può determinare esplicitamente in alcuni casi semplici, ad esempio se  $\Omega$  è un disco, un rettangolo o un semispazio, ma esistono tecniche per trasformare domini di forma molto generale in domini per i quali la funzione G è nota. A titolo di esempio riportiamo la funzione di Green per un dominio circolare: supponiamo che  $\Omega = B_1(\mathbf{0})$ , il disco di raggio unitario e centro nell'origine, e consideriamo il problema di Dirichlet (7.8); si dimostra che

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - |\mathbf{x}| \boldsymbol{\xi} \right|.$$

Osserviamo che la G è somma del nucleo di Green e di una funzione armonica rispetto a  $\boldsymbol{\xi}$ . Si verifica direttamente che  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$  per  $\boldsymbol{\xi} \in \partial B_1(\mathbf{0})$ , ovvero per  $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ . Calcolando la derivata normale della funzione di Green per  $\boldsymbol{\xi} \in \partial B_1(\mathbf{0})$  e sostituendola nella (7.17), si ottiene la soluzione del problema di Dirichlet nella forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} u_0(\boldsymbol{\xi}) ds_{\boldsymbol{\xi}}.$$
(7.21)

La formula precedente si semplifica passando a coordinate polari: posto  $\mathbf{x} = (x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  e osservando che  $u_0$ , essendo definita sulla circonferenza di raggio 1, è una funzione della sola  $\theta \in [0, 2\pi]$ , si ottiene

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi-\theta)} u_0(\theta)d\theta.$$

E' importante osservare che la formula di Green non ha significato per  $\mathbf{x} \in \partial \Omega$ , e fornisce la soluzione solo all'interno del dominio  $\Omega$  (ad esempio, nel caso del disco, solo per  $\rho < 1$ ).

## 7.2.2 Il metodo di separazione delle variabili

Il metodo funziona esattamente come per l'equazione del calore, e lo descriviamo schematicamente in un caso specifico. Consideriamo il problema di Dirichlet (7.8) nel quadrato  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Prendiamo come dato al contorno  $u_0$  una funzione nulla su tre lati del quadrato, ma non identicamente nulla sul quarto lato, ad esempio il lato orizzontale superiore, ponendo  $u(x, 1) = u_0(x)$  con  $u_0$  funzione asegnata. Cerchiamo soluzioni separate dell'equazione di Laplace nella forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y);$$

si ha

$$0 = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y),$$

per cui, come visto in precedenza per l'equazione del calore, esiste un costante reale  $\omega$  tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\omega^2.$$

Si ottengono quindi le due equazioni differenziali ordinarie

$$X''(x) + \omega^2 X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \omega^2 Y(y) = 0,$$

per  $x, y \in (0, 1)$ . Consideriamo ora le condizioni al contorno: si ha, per i due lati verticali,

$$\begin{array}{lll} u(0,y)=0, & y\in(0,1) & \Leftrightarrow & X(0)Y(y)=0, & y\in(0,1) & \Rightarrow & X(0)=0, \\ u(1,y)=0, & y\in(0,1) & \Leftrightarrow & X(1)Y(y)=0, & y\in(0,1) & \Rightarrow & X(1)=0, \end{array}$$

e per il lato orizzontale inferiore

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad X(x)Y(0) = 0, \quad x \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0.$$

Non utilizziamo per ora la condizione  $u = u_0$  sul lato orizzontale superiore. Per la funzione X(x) si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

che ammette le infinite soluzioni  $X_n(x) = \sin(\omega x)$ , con  $\omega = n\pi$  per  $n \in \mathbb{N}$ . La funzione Y(y) soddisfa invece l'equazione

$$\begin{cases} Y'' - \omega^2 Y = 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono della forma  $Y(y) = c_1(e^{\omega y} - e^{-\omega y}) = 2c_1 \sinh(\omega y)$ . La generica soluzione separata è dunque

$$u_n(x,y) = \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y).$$

Dato che l'equazione di Laplace è lineare, la combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione, e possiamo quindi scrivere formalmente la soluzione del problema di Dirichlet come serie di Fourier

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sinh(n\pi y) \sin(n\pi x),$$
(7.22)

dove i coefficienti  $c_n$  devono essere determinati imponendo la rimanenente condizione al contorno sul lato superiore del quadrato  $u(x, 1) = u_0(x)$ . Si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n \sin(n\pi x) = u_0(x),$$
(7.23)

ovvero i coefficienti  $\tilde{c}_n = c_n \sinh(n\pi)$  sono coefficienti di Fourier della funzione  $u_0(x)$ . Non discutiamo qui le questioni relative alla convergenza della serie di Fourier ad una soluzione dell'equazione di Laplace: le considerazioni sono analoghe a quelle sviluppate per l'equazione del calore. Vediamo ora come la rappresentazione (7.22) possa essere riscritta come formula di Green (7.17), in termini di una funzione di Green opportuna. Dato che i coefficienti di Fourier di  $u_0$  sono dati dall'espressione  $\tilde{c}_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx$ , e sostituendo questa espressione nella (7.22) ricordando che  $\tilde{c}_n = c_n \sinh(n\pi)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 u_0(\xi)\sin(n\pi\xi) \, d\xi \right] = \\ &= \int_0^1 u_0(\xi) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)\sin(n\pi\xi)}{\sinh(n\pi)} \right] \, d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} G(x,y,\xi) u_0(\xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $u_0 = 0$  sui tre lati del quadrato e l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier e

$$G(x, y, \xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)\sin(n\pi\xi)}{\sinh(n\pi)}$$

rappresenta quindi la funzione di Green per il problema in questione.

# 7.3 Esempio: equilibrio di un corpo cilindrico elastico soggetto a deformazioni di scorrimento

A titolo di esempio, mostriamo un'applicazione dell'equazione di Laplace (o di Poisson) a un problema di elasticità (è necessario avere familiarità con la teoria dell'elasticità lineare). Nello spazio, con coordinate cartesiane (x, y, z), sia  $\Omega$  un cilindro retto ad asse verticale, con  $\tilde{\Omega}$  la sua sezione col piano orizzontale z = 0. Assumiamo che il campo di spostamenti sia verticale, e abbia la forma

$$\mathbf{u} = u(x, y)\mathbf{k},\tag{7.24}$$

con u una funzione reale su  $\tilde{\Omega}$  e **k** il versore dell'asse z. Campi di spostamento di questo tipo vengono detti "antiplane shear". Il gradiente di spostamento corrispondente ha la forma

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & 0 \end{pmatrix},$$

e il tensore di strain è

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_x \\ 0 & 0 & u_y \\ u_x & u_y & 0 \end{pmatrix}.$$

Assumiamo ora che il cilindro sia elastico e isotropo, cosicché il tensore di Cauchy è dato da

$$\mathbf{T} = \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{E})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_x \\ 0 & 0 & u_y \\ u_x & u_y & 0 \end{pmatrix},$$

con $\lambda$ e $\mu$ costanti di Lamé. Le equazioni che governano la deformazione sono le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 & \operatorname{in} \Omega, \\ \mathbf{Tn} = \mathbf{t}_0 & \operatorname{su} (\partial \Omega)_t, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \operatorname{su} (\partial \Omega)_u. \end{cases}$$

Per campi di spostamento del tipo (7.24) la divergenza del tensore di Cauchy è

div 
$$\mathbf{T} = \mu (0, 0, \Delta u) = \mu \Delta u \mathbf{k},$$

mentre il termine  ${\bf Tn}$  diventa

$$\mathbf{Tn} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_x \\ 0 & 0 & u_y \\ u_x & u_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu (0, 0, u_x n_1 + u_y n_2) = \mu \left( 0, 0, \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{k}$$

dove abbiamo posto  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$  per la normale esterna a  $\partial \Omega$ . Sostituendo queste relazioni nelle equazioni di equilibrio e proiettando sul versore  $\mathbf{k}$  si ottiene infine il seguente problema a valori al contorno nella funzione incognita u

$$\begin{cases} \mu \Delta u + b = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} = t_0 & \text{su } (\partial \Omega)_t, \\ u = u_0 & \text{su } (\partial \Omega)_u, \end{cases}$$

dove abbiamo posto  $\mathbf{b} = b\mathbf{k}, \mathbf{t}_0 = t_0\mathbf{k}, e \mathbf{u}_0 = u_0\mathbf{k}.$ 

# Capitolo 8 L'equazione delle onde

Le equazioni differenziali descritte in questo capitolo, a differenza di quelle studiate nei capitoli precedenti, sono del secondo ordine rispetto al tempo, e quindi non si ottengono da modelli basati sul bilancio della massa. In molti casi la legge di bilancio da cui queste equazioni derivano è la legge di bilancio della quantità di moto, studiata nei corsi di meccanica dei continui.

# 8.1 L'equazione di D'Alembert

Si chiama **equazione di D'Alembert** o **equazione delle onde** l'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, di tipo iperbolico,

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{8.1}$$

dove u è una funzione reale definita su  $\Omega \times I$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $I \subset \mathbb{R}^+$ , e c è una costante positiva detta **velocità di propagazione**. Questa equazione viene usata generalmente per descrivere fenomeni di propagazione ondosa di varia natura<sup>1</sup>. Per avere una soluzione unica dell'equazione di d'Alembert è necessario imporre opportune condizioni al contorno o iniziali. Le condizioni al contorno possono essere di Dirichlet, di Neumann, oppure miste, e sono del tutto analoghe alle corrispondenti condizioni per l'equazione del calore o di Laplace. Per ciò che riguarda le condizioni iniziali, invece, dato che l'equazione delle onde è del secondo ordine rispetto al tempo, è necessario assegnare il valore iniziale non solo della funzione incognita, ma anche della sua derivata temporale, ovvero

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$
 e  $u_t(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x})$ , per  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b},$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>In particolare, l'equazione delle onde (8.1) si può ottenere dalla legge di bilancio della quantità di moto per un corpo elastico lineare, restringendosi a scorrimenti del tipo "antiplane shear": in maniera analoga a quanto fatto nella Sezione 7.3, si dimostra che il bilancio della quantità di moto, nella forma

dove  $\rho_0$  è la densità di massa, **u** è il vettore spostamento, **T** è il tensore di stress e **b** è la densità delle forze esterne, si riduce all'equazione delle onde (8.1) per campi di spostamento della forma (7.24), con una velocità di propagazione data da  $c = \sqrt{\mu/\rho_0}$ .

In questo capitolo ci restringeremo per semplicità al caso di una dimensione spaziale: l'equazione di d'Alembert diventa in questo caso

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.\tag{8.2}$$

# 8.1.1 Metodo di risoluzione nel caso $\Omega = \mathbb{R}$ : la formula di D'Alembert

Presentiamo prima di tutto una proprietà generale delle soluzioni di (8.2) nel caso  $\Omega = \mathbb{R}$ :

**Proprietà 8.1** Se  $\Omega = \mathbb{R}$  ogni soluzione dell'equazione delle onde (8.2) ha la forma

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$
(8.3)

con f, g funzioni opportune su  $\mathbb{R}$ .

In altri termini, le soluzioni di (8.2) si possono scrivere come sovrapposizione di "travelling waves" della forma  $f(x-c) \in g(x+c)$ , che si propagano con velocità  $c \in -c$ , mantenendo invariata la loro forma.

Dimostrazione. Consideriamo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi) \end{cases}, \tag{8.4}$$

e riscriviamo l'equazione delle onde nel sistema di coordinate "caratteristico"  $(\xi, \eta)$ . A questo scopo, scrivendo

$$\hat{u}(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{ovvero} \quad \hat{u}(\xi,\eta) = u\left(\frac{1}{2}(\xi+\eta), \frac{1}{2c}(\eta-\xi)\right)$$

e sostituendo nella (8.2), si ottiene l'equazione delle onde in forma "canonica"

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi \partial \eta} = \hat{u}_{\xi\eta} = 0 \tag{8.5}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$u_{t} = \hat{u}_{\xi}\xi_{t} + \hat{u}_{\eta}\eta_{t} = -c\hat{u}_{\xi} + c\hat{u}_{\eta}$$
$$u_{tt} = c^{2}\hat{u}_{\xi\xi} - 2c^{2}\hat{u}_{\eta\xi} + c^{2}\hat{u}_{\eta\eta}$$
$$u_{x} = \hat{u}_{\xi} + \hat{u}_{\eta}$$
$$u_{xx} = \hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{u}_{\eta\eta}.$$

Integriamo ora la (8.5) rispetto a  $\eta$ : si ha

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{\xi}(\xi, \eta) = F(\xi),$$

con F una funzione arbitraria. Integrando ancora rispetto a  $\xi$  si ottiene

$$\hat{u}(\xi,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} F(z) \, dz + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

con g una funzione arbitraria e f una primitiva di F. Le rette x - ct = cost e x + ct = costsono dette rispettivamente **caratteristiche in avanti**, o **positive**, e **caratteristiche all'indietro**, o **negative**, dell'equazione delle onde. Notiamo che nella rappresentazione (8.3), una generica soluzione dell'equazione delle onde è espressa come sovrapposizione di due funzioni, ciascuna delle quali è costante lungo una famiglia di caratteristiche. La f dipende solo dalla  $\xi$ , ed è perciò costante sulla famiglia di caratteristiche positive x - ct = cost., mentre la g è a sua volta costante sulla famiglia di caratteristiche negative x + ct = cost.. Ricordando quanto detto a proposito delle equazioni del primo ordine (Capitolo 3), si può dire che la f e la g vengono "trasportate" lungo le caratteristiche positive e negative rispettivamente, con velocità finite  $\pm c$ . In altri termini, la soluzione dell'equazione delle onde è la sovrapposizione di due "onde" che mantengono invariata la forma, e si muovono l'una verso destra con velocità c, l'altra verso sinistra con velocità -c. La struttura (8.3) delle soluzioni dell'equazione delle onde permette di dare una rappresentazione esplicita della soluzione del problema puro ai valori iniziali. Consideriamo infatti il problema di Cauchy su  $\Omega = \mathbb{R}$ 

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$
(8.6)

Mostriamo ora che la soluzione di (8.6) è data dalla cosiddetta formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) \, ds.$$
(8.7)

Per dimostrare questa relazione, consideriamo la formula (8.3), e imponiamo le condizioni iniziali:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = u_0(x),$$
  

$$u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) = v_0(x)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $u_t(x,t) = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$ . Il passo successivo è determinare  $f \in g$  in funzione di  $u_0 \in v_0$  dal sistema lineare

$$u'_0(x) = f'(x) + g'(x) v_0(x) = -cf'(x) + cg'(x),$$

ovvero

$$f'(x) = \frac{1}{2}[u'_0(x) - \frac{1}{c}v_0(x)]$$
  
$$g'(x) = \frac{1}{2}[u'_0(x) + \frac{1}{c}v_0(x)]$$
e integrando rispetto a x si ha

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^x v_0(s) \, ds + \text{cost.},$$
  
$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^x v_0(s) \, ds + \text{cost.},$$

con  $x_0$  arbitrario. Sostituendo nella (8.3) si ottiene finalmente

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-ct) + g(x+ct) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} v_0(s)\,ds + \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} v_0(s)\,ds + \text{cost.} \\ &= \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\,ds + \text{cost.}, \end{aligned}$$

e ponendo t = 0 si vede che la costante additiva è nulla. Dalla formula (8.7) si può vedere che, in ogni punto assegnato  $(x_0, t_0)$ , la soluzione  $u(x_0, t_0)$  dipende dai valori del dato iniziale  $u_0$  soltanto nei punti  $x_0 - ct_0$  e  $x_0 + ct_0$ . D'altra parte, il dato iniziale  $v_0$ compare integrato sull'intervallo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ , ovvero la soluzione  $u(x_0, t_0)$  dipende dai valori di  $v_0$  su tutto l'intervallo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . Questo significa che la soluzione uin  $(x_0, t_0)$  dipende al più dai valori dei dati iniziali  $(u_0, v_0)$  sull'intervallo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ , detto **dominio di dipendenza** dai dati iniziali. Reciprocamente, ci possiamo chiedere in quali punti (x, t) la soluzione sia influenzata dal valore dei dati iniziali assegnati su di un intervallo [a, b]. E' facile rendersi conto che tali punti riempiono una regione del semipiano (x, t), con  $t \ge 0$ , compresa tra la caratteristica all'indietro passante per a, ovvero x + ct = a, e la caratteristica in avanti passante per b, ovvero x - ct = b. Tale regione è detta **dominio di influenza** dei dati iniziali nell'intervallo [a, b];



Figura 8.1: Dominio di dipendenza dai dati iniziali.



Figura 8.2: Dominio di influenza dei dati iniziali.

#### Un esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy su $\mathbb R$ 

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{per } x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
(8.8)

La formula di D'Alembert, essendo  $v_0 = 0$ , si riduce in questo caso a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)].$$

Il dominio di influenza dei dati nell'intervallo [-1, 1] è rappresentato nella figura seguente. La soluzione del problema è quindi

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{nella regione D} \\ 1 & \text{nella regione B} \\ \frac{1}{2} & \text{nelle regioni A e C} \end{cases}$$

# 8.1.2 Il metodo di separazione delle variabili per domini limitati $\Omega = [0, L]$

Se il dominio  $\Omega$  è un intervallo limitato [0, L], la formula di D'Alembert non si può utilizzare: in questo caso ha senso applicare il metodo di separazione delle variabili. Consideriamo il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{pmatrix}
 u_{tt} = c^2 u_{xx} \\
 u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\
 u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,L] \\
 u_t(x,0) = 0 & x \in [0,L]

\end{cases}$$
(8.9)



Figura 8.3: I domini A,B,C,D per l'esempio (8.8).

e cerchiamo soluzioni separate della forma u(x,t) = T(t)X(x). Si ottiene

$$\begin{cases} X''(x) + \omega^2 X(x) = 0\\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

е

$$T''(t) + c^2 \omega^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ci sono quindi infinite soluzioni separate  $u_n(x,t) = [A_n \cos(\frac{n\pi c}{L}t) + B_n \sin(\frac{n\pi c}{L}t)] \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ . Cerchiamo quindi una soluzione formale del problema (8.9) come serie di Fourier di soluzioni separate

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$
(8.10)

Occorre ora determinare i coefficienti  $A_n$ ,  $B_n$  in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte. Imponendo la prima condizione iniziale si ha

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Nell'ipotesi che si possa derivare termine a termine la serie formale (8.10), si ha

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \left[-A_n \frac{n\pi c}{L}\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \frac{n\pi c}{L}\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e imponendo la seconda condizione iniziale si ottiene

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0.$$

Da queste relazioni si conclude che le costanti  $A_n$  devono essere i coefficienti di Fourier del dato  $u_0(x)$ , mentre le  $B_n$  devono essere tutte nulle. La soluzione formale del problema

(8.9) è perciò

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx. \tag{8.11}$$

Una prima conseguenza della rappresentazione (8.11) è che la soluzione u(x,t) non è necessariamente più regolare del dato iniziale  $u_0(x)$ : infatti, applicando i teoremi di convergenza per le serie di Fourier descritti nell'Appendice A4, si vede che, ad esempio, la serie (8.11) converge solo in senso  $L^2$ , se la condizione iniziale è di classe  $L^2$ . Quindi l'equazione delle onde, a differenza dell'equazione del calore, non regolarizza i dati iniziali. Inoltre, sempre la (8.11) mostra che la soluzione non decade nel tempo. Nella (8.11) si esprime la funzione u come sovrapposizione di funzioni sinusoidali, dette **armoniche**. Il generico coefficiente  $A_n$  viene chiamato **ampiezza** della *n*-esima armonica. Le singole armoniche sono anche dette **onde stazionarie**, in quanto il termine  $\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$  si può interpretare come ampiezza variabile, oscillante periodicamente nel tempo, della funzione "stazionaria" sin  $\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ . La frequenza temporale di oscillazione di ciascuna armonica è data dall'espressione

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{nc}{2L},$$

il che mostra che ogni armonica oscilla con una frequenza multipla intera della **frequenza** fondamentale  $\nu_1 = \frac{c}{2L}$ .

#### Esempio: la corda vibrante

Si può dimostrare che il sistema (8.9) rappresenta un modello semplificato per le vibrazioni di una corda elastica di lunghezza L, fissata agli estremi e inizialmente ferma, la cui forma iniziale è descritta dalla funzione  $u_0$ . L'incognita u(x,t) rappresenta in questo caso lo spostamento trasversale della corda dalla sua posizione di riposo in un piano orizzontale. Una corda vibrante nell'aria genera onde di pressione, ovvero onde sonore, e possiamo assumere che i due parametri caratteristici di ogni armonica, ovvero l'ampiezza  $A_n$  e la frequenza  $\nu_n$ , siano correlate rispettivamente con l'intensità e l'altezza (nel senso di grave/acuto) del suono. La scomposizione di un suono come sovrapposizione di armoniche permette di comprendere ad esempio la struttura delle scala musicale basata sul temperamento equabile. Questa scala è costruita in modo che il rapporto tra le frequenze di due note consecutive sia una costante f, tale che le frequenze fondamentali di due note separate da un'ottava siano in rapporto di 2 : 1. Ad esempio, consideriamo il La centrale (del diapason), la cui frequenza  $\nu$  è circa 440 *cicli/secondo*: al La dell'ottava successiva corrisponde una frequenza doppia. Dato che ci sono 12 note in un'ottava, deve essere soddisfatta la relazione  $2\nu = f^{12}\nu$ , il che implica che  $f = \sqrt[12]{2}$ . Ritornando alla corda vibrante, ricordiamo che la frequenza dell'armonica fondamentale (corrispondente ad una vibrazione della corda vuota) è data da  $\frac{c}{2L}$ , che supponiamo corrisponda a un La: per ottenere la nota dell'ottava superiore è necessario raddoppiare questa frequenza, il che significa dimezzare L, effetto che si ottiene, ad esempio su di una chitarra, schiacciando

la corda esattamente a metà della tastiera. Supponendo invece di volere ottenere il Mi, notiamo che questa nota ha un rapporto di frequenze  $f^7 = \sqrt[12]{27}$  con il La (intervallo di quinta), il che significa che bisogna premere la corda sulla tastiera in modo che la nuova lunghezza sia  $\frac{L}{\frac{12}{27}} \approx \frac{2}{3}L$ .

## 8.1.3 Conservazione dell'energia

Nel caso dell'equazione delle onde si definisce **energia** di una soluzione la funzione del tempo

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( u_t^2(\mathbf{x}, t) + c^2 |\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \, d\mathbf{x}.$$

$$(8.12)$$

Vale la seguente proprietà:

**Proprietà 8.2** Consideriamo una soluzione u dell'equazione delle onde con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee e costanti rispetto al tempo (ovvero  $u(\mathbf{x},t) = u_0 = \cos t$  su  $\partial\Omega$ ), oppure di Neumann omogenee ( $\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \, \sin \partial\Omega$ ). Allora l'energia di u è costante nel tempo.

**Dimostrazione.** Calcolando la derivata rispetto al tempo dell'energia della soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  si ottiene

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} (u_t \, u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t),$$

e ricordando l'identità div $(u_t \nabla u) = \nabla u_t \cdot \nabla u + u_t \Delta u$  si ha, applicando il teorema della divergenza,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t = \int_{\Omega} [\operatorname{div} (u_t \, \nabla u) - u_t \Delta u] = \int_{\partial \Omega} u_t \, \nabla u \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega} u_t \Delta u,$$

e quindi, usando il fatto che u è soluzione dell'equazione delle onde,

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} (u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) + \int_{\partial \Omega} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial n}$$
$$= \int_{\Omega} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u) + \int_{\partial \Omega} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial \Omega} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Se le condizioni al contorno sono omogenee, uno dei due termini dell'integrale è nullo, e ciò prova che l'energia è costante rispetto al tempo. In modo analogo a quanto fatto per

le equazioni del calore e di Laplace si può utilizzare il metodo dell'energia per dimostrare l'unicità della soluzione dell'equazione del calore.

## 8.2 L'equazione del telegrafista

La cosiddetta equazione del telegrafista si può ottenere dall'equazione delle onde con l'aggiunta di un termine proporzionale a  $u_t$ :

$$u_{tt} + \lambda u_t = c^2 \Delta u, \tag{8.13}$$

con  $\lambda$ , c costanti reali positive. Il termine aggiuntivo  $\lambda u_t$  viene detto "dissipativo", in quanto la sua presenza fa sì che l'energia non si conservi, anzi sia decrescente, lungo le soluzioni dei problemi di Dirichlet o di Neumann omogenei. Consideriamo infatti l'energia E definita dalla (8.12), e calcoliamo la sua derivata rispetto al tempo lungo la soluzione  $u(\mathbf{x}, t)$  dell'equazione (8.13), con condizioni al contorno di Dirichlet o Neumann omogenee (ovvero identicamente nulle sul bordo); si ha

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u) + \int_{\partial \Omega} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial n} = -\int_{\Omega} \lambda u_t^2 + \int_{\partial \Omega} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial n} = -\int_{\Omega} \lambda u_t^2 \le 0$$

L'equazione del telegrafista permette di studiare due fenomeni caratteristici della propagazione: l'attenuazione e la dispersione. A questo scopo, consideriamo il caso di una dimensione spaziale,  $\Omega = \mathbb{R}$ , e cerchiamo una soluzione esponenziale della (8.13) senza specificare condizioni iniziali, della forma

$$u(x,t) = e^{ik(x+Vt)},$$
 (8.14)

dove il parametro k è detto **numero d'onda**, e V è la **velocità di propagazione**. Sia k che V possono assumere valori complessi. Osserviamo a titolo preliminare che, sostituendo la (8.14) nell'equazione delle onde (8.1) si ottiene

$$-k^{2}V^{2}e^{ik(x+Vt)} = c^{2}(-k^{2}e^{ik(x+Vt)}) \quad \Rightarrow \quad V^{2} = c^{2} \quad \Rightarrow \quad V = \pm c,$$

ovvero la velocità di propagazione è costante e uguale a c. La situazione è sostanzialmente differente per l'equazione del telegrafista: in questo caso infatti la velocità V dipende dal numero d'onda k (quindi soluzioni con numero d'onda diverso si propagano con velocità differenti); per verificarlo sostituiamo l'ansatz esponenziale nella (8.13),

$$-k^{2}V^{2}e^{ik(x+Vt)} + \lambda ikVe^{ik(x+Vt)} = c^{2}(-k^{2}e^{ik(x+Vt)}),$$

ottenendo l'equazione algebrica di secondo grado in V:

$$V^2 - i\frac{\lambda}{k}V - c^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$V = i\frac{\lambda}{2k} \pm \sqrt{c^2 - \frac{\lambda^2}{4k^2}}.$$

Nell'ipotesi che  $c^2-\frac{\lambda^2}{4k^2}>0,$  la velocità V è complessa con parte reale non nulla, e possiamo scrivere

$$V = i\frac{\lambda}{2k} \pm V_r, \qquad V_r = \sqrt{c^2 - \frac{\lambda^2}{4k^2}} \in \mathbb{R}.$$
(8.15)

La relazione  $(8.15)_2$ , che lega la parte reale  $V_r$  della velocità al numero d'onda k, è detta **relazione di dispersione**. Sostituendo la (8.15) nella (8.14) otteniamo le soluzioni esponenziali nella forma

$$u(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} e^{ik(x+V_r t)}.$$
(8.16)

Notiamo che il termine esponenziale  $e^{-\frac{\lambda}{2}t}$  fa si che la soluzione tenda a zero al crescere di t: possiamo quindi dire che il termine dissipativo  $\lambda u_t$  provoca l'attenuazione della soluzione a zero. Per ciò che riguarda la dispersione, vedremo nel prossimo esempio come il fatto che la velocità  $V_r$  dipenda da k fa si che la forma della soluzione cambi nel tempo (a differenza dell'equazione delle onde: le soluzioni esponenziali corrispondono a oscillazioni che si propagano con forma e velocità costante).

## 8.2.1 Un esempio

Consideriamo il seguente problema su  $\Omega = \mathbb{R}$ 

$$\begin{cases} u_{tt} + \lambda u_t = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \sin x + \sin 2x & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ma non non imponiamo condizioni iniziali per  $u_t$  nè i valori al contorno di u(x,t) per  $x \to \pm \infty$ . E' conveniente lavorare direttamente in campo complesso, trattando  $u_0(x)$  come la parte immaginaria della funzione complessa  $\tilde{u}_0(x) = 2\left(e^{ix} + e^{i2x}\right)$ , e risolvere l'equazione in campo complesso: la soluzione cercata ne sarà la parte immaginaria. Per la linearità dell'equazione (8.13), possiamo cercare la soluzione come somma di due soluzioni distinte  $\tilde{u}_1(x,t) \in \tilde{u}_2(x,t)$ , che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali  $u_1(x,0) = e^{ix} e u_2(x,0) = e^{i2x}$ . Notiamo che  $u_1(x,0) e u_2(x,0)$  hanno la forma  $e^{ikx}$ , con k = 1 e k = 2 rispettivamente. Dalla (8.16) e (8.15)<sub>2</sub> si ottiene

$$\tilde{u}_1(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} e^{i(x\pm V_1t)}, \qquad V_1 = \sqrt{c^2 - \frac{\lambda^2}{4}}, \quad (\text{con } k = 1)$$
$$\tilde{u}_2(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} e^{2i(x\pm V_2t)}, \qquad V_2 = \sqrt{c^2 - \frac{\lambda^2}{16}}, \quad (\text{con } k = 2),$$

da cui

$$\tilde{u}(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} \left(e^{i(x\pm V_1t)} + e^{2i(x\pm V_2t)}\right)$$

La parte immaginaria di questa espressione fornisce la soluzione reale:

$$u(x,t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} (\sin(x \pm V_1 t) + \sin 2(x \pm V_2 t)).$$

La soluzione esponenziale quindi si esprime come sovrapposizione delle due "armoniche"  $\sin x$  e  $\sin 2x$ , che si propagano con velocità diverse  $V_1$  e  $V_2$ , determinate dalla relazione di dispersione (8.15)<sub>2</sub>. La dispersione quindi provoca la "degradazione" della soluzione, che non conserva la forma iniziale.

## Appendice A

## A.1 Criterio per il segno della parte reale degli autovalori di una matrice reale $2 \times 2$

Consideriamo una matrice **A**, che supponiamo  $2 \times 2$  a coefficienti reali, e i suoi autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$ , eventualmente coincidenti o complessi coniugati. Vale la relazione

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2.$$

Tenendo conto che, se gli autovalori sono complessi coniugati,  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  e quindi  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2a$  e  $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2$ , si ha il seguente risultato:

- se tr  $\mathbf{A} > 0$  e det  $\mathbf{A} > 0$  entrambi gli autovalori hanno parte reale positiva (ovvero sono entrambi positivi se sono reali);
- se tr  $\mathbf{A} < 0$  e det  $\mathbf{A} > 0$  entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa (ovvero sono entrambi negativi se sono reali);
- se det  $\mathbf{A} < 0$  gli autovalori sono necessariamente reali e di segno opposto, ovvero uno degli autovalori è positivo, e l'altro negativo.

## A.2 I teoremi della divergenza e del trasporto

Consideriamo una funzione regolare  $u = u(\mathbf{x}, t)$  e un campo vettoriale regolare  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  su  $\Omega \times I$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $I \subset \mathbb{R}^+$ . Ricordiamo che un campo vettoriale si identifica con una *n*-upla di funzioni reali  $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ , con  $w_i$  definita su  $\Omega \times I$ .

Definizione A.1 Si dice divergenza del campo vettoriale w la funzione

div 
$$\mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}.$$
 (A.1)

Ad esempio, consideriamo il campo vettoriale

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x, y) = (x \ln y, y), \quad \Omega = \{(x, y)/y > 0\}$$

si ha

div 
$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial x}(x \ln y) + \frac{\partial}{\partial y}y = \ln y + 1.$$

Definizione A.2 Si dice gradiente di una funzione u il campo vettoriale

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right). \tag{A.2}$$

Definizione A.3 Si dice laplaciano di una funzione u la funzione

$$\Delta u = \operatorname{div}\left(\nabla u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$
(A.3)

Il laplaciano è la traccia della matrice hessiana di u.

Nel caso particolare in cui u = u(x, t) sia una funzione reale di una variabile spaziale e del tempo, il laplaciano coincide con la derivata seconda rispetto a x:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; .$$

Si consideri ora una regione regolare limitata  $P \subseteq \Omega$ , termine con il quale si intende una regione chiusa con frontiera regolare a tratti.

**Teorema A.1 (della divergenza)** Dato un campo vettoriale regolare  $\mathbf{w}$  su  $\Omega$ , e detta  $\mathbf{n}$  la normale esterna alla frontiera  $\partial P$ , vale la seguente relazione:

$$\int_{P} \operatorname{div} \mathbf{w} = \int_{\partial P} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \tag{A.4}$$

Consideriamo ora un sottoinsieme  $P(t) \subseteq \Omega$  dipendente dal tempo, ovvero tale per cui  $\partial P(t)$  sia una superficie mobile in  $\mathbb{R}^n$ . La velocità normale V di  $\partial P(t)$  è una funzione su  $\partial P(t)$ , che rappresenta in ogni punto **x** di  $\partial P(t)$  la proiezione della velocità del punto mobile **x** sulla normale esterna **n**. Ricordiamo che, se  $\partial P(t)$  ha equazione intrinseca  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ , la sua velocità normale è data dall'espressione  $V = -\varphi_t/|\nabla \varphi|$ . Vale il seguente risultato:

**Teorema A.2 (del trasporto di Reynolds)** Si consideri una funzione regolare  $u = u(\mathbf{x}, t)$  su  $\Omega \times I$  e una sottoinsieme  $P(t) \subseteq \Omega$  dipendente dal tempo, e denotiamo con V la velocità normale di  $\partial P$ . Si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{P} u = \int_{P} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\partial P} u V.$$
(A.5)

In altri termini, la variazione nel tempo della "massa" contenuta nella regione P è uguale alla variazione della densità u all'interno della regione, sommata alla "massa" che entra o esce attraverso il bordo di P a causa del moto di  $\partial P$ .

## A.3 Distribuzioni

Consideriamo lo spazio  $C_0^{\infty}(\Omega)$  delle funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto su  $\Omega$ . Si dice *distribuzione* su  $\Omega$  un funzionale lineare continuo su  $C_0^{\infty}(\Omega)$ , ovvero una mappa T che associa ad ogni funzione  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  il numero reale

$$T: \varphi \mapsto T(\varphi),$$

e che opera in modo *lineare*, ovvero

$$T(\varphi + k\psi) = T(\varphi) + kT(\psi),$$

per ogni funzione  $\varphi, \psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  e costante k reale. Le relazioni precedenti definiscono un funzionale lineare su  $C_0^{\infty}(\Omega)$ . Per definire la continuità, è necessaria una nozione di convergenza nello spazio  $C_0^{\infty}(\Omega)$ . A questo scopo, diciamo che una successione di funzioni  $\varphi_n \in C_0^{\infty}(\Omega)$  converge a  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  uniformemente sui compatti se esiste un compatto  $K \subset \Omega$  tale che supp $(\varphi_n) \subset K$  e  $\varphi_n$  converge a  $\varphi$  uniformemente con tutte le sue derivate. Il funzionale T allora si dice continuo se

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi)$$

per ogni successione  $\varphi_n$  che converge a  $\varphi$  uniformemente sui compatti. Un primo esempio di distribuzione si ottiene considerando una funzione f integrabile su  $\Omega$ , e definendo

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}).$$

Si verifica che  $T_f$  è continuo. Un altro esempio si ha prendendo un insieme misurabile  $A \subset \Omega$ , e considerando il funzionale lineare

$$T_A(\varphi) = \int_A \varphi(\mathbf{x}).$$

Un terzo esempio di distribuzione è la cosiddetta *delta di Dirac*, definita come segue

$$\delta_{\mathbf{x}_0}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x}_0).$$

Si usa talvolta introdurre una "funzione generalizzata"  $\delta(\mathbf{x})$  tale che

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0).$$

Si definisce derivata parziale  $\partial_i T$  di una distribuzione le nuova distribuzione definita dalla relazione

$$\partial_i T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

dove  $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ . In questo senso ogni distribuzione è indefinitamente derivabile. Richiamiamo infine il concetto di convergenza nel senso delle distribuzioni. Consideriamo una successione di distribuzioni  $T_n$ . Si dice che  $T_n \to T$  nel senso delle distribuzioni se

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi)$$

per ogni  $\varphi \in C_0^{\infty}$ . In quest'ottica, diciamo che una successione di funzioni integrabili  $f_n$  è successione delta se le distribuzioni  $T_{f_n}$  associate alle funzioni  $f_n$  convergono a  $\delta_{\mathbf{x}_0}$  nel senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_{\Omega} f_n(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}_0),$$

per ogni  $\varphi \in C_0^{\infty}$ . Un esempio di successione delta su  $\mathbb{R}$  è la successione di gaussiane

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2},$$

che converge a  $\delta_0$ .

## A.4 Serie di Fourier

Consideriamo una funzione f definita sull'intervallo [0, L]. Sotto opportune ipotesi questa si può sviluppare in *serie di Fourier*, ovvero f si può scrivere come somma di una serie trigonometrica del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

dove  $a_n$  e  $b_n$  sono i coefficienti di Fourier di f, definiti dalle

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Più precisamente, diciamo che f è sviluppabile in serie di Fourier (ad esempio dei seni) se

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \to f(x),$$

per  $N \to +\infty$ , e dove la convergenza è intesa in senso diverso a seconda del contesto. Ad esempio, un teorema fondamentale che garantisce la sviluppabilità in serie di Fourier è il seguente:

**Teorema A.3** Se la funzione f è a quadrato sommabile, ovvero  $f \in L^2(0, L)$ , allora è sviluppabile in serie di Fourier in  $L^2(0, L)$ , ovvero

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - f(x)\right\| \to 0,$$

per  $N \to +\infty$ , e dove

$$||f||^{2} = \int_{0}^{L} |f(x)|^{2} dx$$

è la norma in  $L^2(0,L)$ . Inoltre, le serie numeriche  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 e \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2$  sono convergenti e si ha

$$||f||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2.$$

Notiamo che il teorema precedente, che coinvolge la convergenza in media quadratica della serie di Fourier, non da' nessuna informazione sulla convergenza *puntuale* della serie alla funzione assegnata f. Se la funzione f è più regolare, ad esempio  $C^1$  a tratti, vale ad esempio il seguente risultato di convergenza puntuale:

**Teorema A.4** Se la funzione f è continua e ha derivata prima continua eccetto che al più in un numero finito di punti, allora

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \to f(x),$$

per  $N \to +\infty$ , per ogni x in cui la f è continua.

Un teorema che utilizzeremo nelle lezioni è il seguente:

**Teorema A.5** Supponiamo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$  sia convergente. Allora

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

converge uniformemente per  $N \to +\infty$  ad una funzione continua f, e i coefficienti di Fourier di f sono gli  $a_n$ .

Ricordiamo infine il classico teorema di derivazione termine a termine di una successione.

**Teorema A.6** Se  $f_n$  è una successione di funzioni in  $C^1(0, L)$ , e se  $f_n \to f$  e  $f'_n \to g$ uniformemente su [0, L], allora f è differenziabile e f' = g.

## Bibliografia

## Metodi classici per le equazioni alle derivate parziali:

- J.D. Logan, Introduction to nonlinear partial differential equations, Wiley-Interscience, 1994
- J.D. Logan, Applied partial differential equations, Springer-Verlag, 1998
- F. John, Partial differential equations, 4th edition, Springer-Verlag, 1982

### Equazioni di reazione-diffusione:

- J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag, 1983
- P. Grindrod, Pattern and waves, Clarendon Press, 1991

### Equazione delle onde:

- A. Jeffrey, *Quasilinear hyperbolic systems and waves*. Interscience, Pitman Publishing, 1976
- C.A. Coulson & A. Jeffrey, Waves: a mathematical approach to the common types of wave motion. 2nd ed., Longman, 1978

### Matematica applicata:

- T.W. Körner, Fourier analysis, Cambridge University Press, 1988
- J. P. Keener, Principles of applied mathematics, Addison-Wesley, 1988
- S. Lang, Real and functional analysis, 3rd edition, Springer, 1993
- E.H. Lieb & M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, 1997

### Modelli matematici vari:

• E. Beltrami, *Mathematics for dynamic modeling*, Academic Press, 1987

- A. Friedman & W. Littman, *Industrial mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- J.D. Murray, Mathematical biology, Springer, 1989

#### Meccanica dei continui:

- M.E. Gurtin, An introducton to continuum mechanics, Academic Press, 1981
- P. Podio Guidugli, A primer in elasticity. J. Elasticity 58/1, 2000
- P.G. Ciarlet, Mathematical elasticity. Vol. I. North-Holland, 1988