Lezione 10

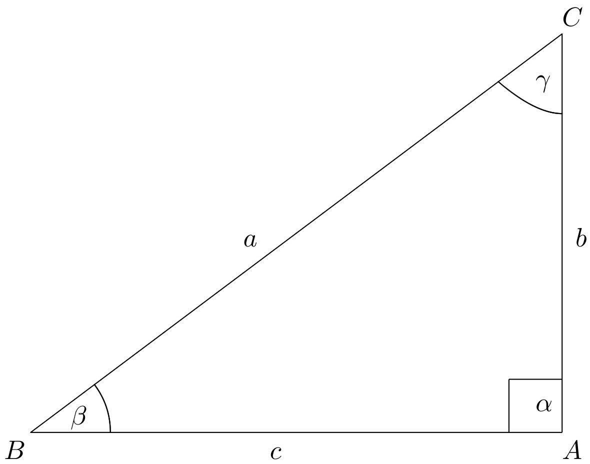
Trigonometria e triangoli

Donato A. Ciampa

In questa lezione analizzeremo le relazioni tra i triangoli che hanno portato alla nascita della trigonometria come la intendiamo oggi. Infatti, la maggior parte delle relazioni trigonometriche nascono per esigenze di carattere pratico legate a misurazioni di distanze o determinazioni di altezze di edifici o, ancora, al fine di determinare le direzioni (ad esempio nella navigazione).

1. Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo.

Osserviamo il triangolo rettangolo riportato nella figura seguente:



Dalla definizione di seno, coseno e tangente, otteniamo per l'angolo β

$$\sin\beta = \frac{b}{a}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a}, \quad \tan\beta = \frac{b}{c},$$

da cui le relazioni

$$b = a\sin\beta, \quad c = a\cos\beta, \quad b = c\tan\beta, \tag{1.1}$$

che legano tra loro i cateti, l'ipotenusa e gli angoli di un triangolo rettangolo. Osserviamo poi che avendosi[1]

$$b^2 + c^2 = a^2\sin^2\beta + a^2\cos^2\beta = a^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta),$$

[1]Questa è una dimostrazione del teorema di Pitagora

si ottiene

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{1.2}$$

il Teorema di Pitagora. Infine, per le relazioni tra gli angoli interni di un triangolo qualsiasi, dal momento che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, abbiamo

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}, \tag{1.3}$$

essendo $\alpha = \pi/2$.

Le formule precedenti permettono, una volta noti due dei cinque valori a, b, c, β, γ (di cui almeno un lato) di determinare gli altri tre. Tale metodo consiste nel *risolvere* il triangolo rettangolo. In particolare:

1.1. **Noti i due cateti b, c.**

$$\beta = \arctan \frac{b}{c}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

1.2. **Note le misure del cateto b e dell'ipotenusa a.**

$$\beta = \arcsin \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

1.3. **Note la misura del cateto b e dell'angolo β.**

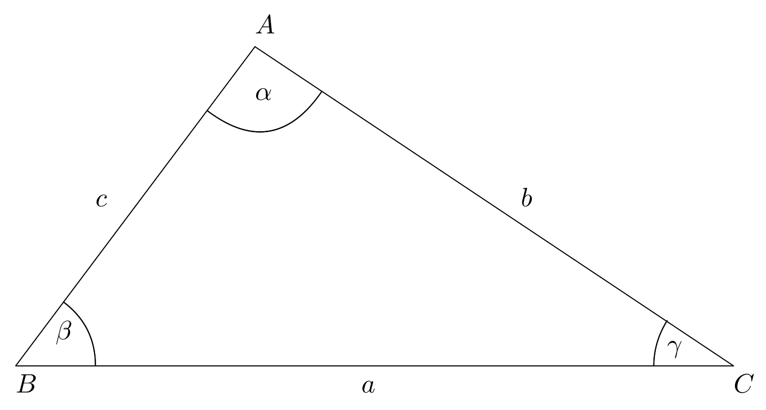
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad a = \frac{b}{\sin \beta}, \quad c = a \cos \beta;$$

1.4. **Note la misura dell'ipotenusa a e l'ampiezza dell'angolo β.**

$$b = a \sin \beta, \quad c = a \cos \beta, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

2. Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualsiasi

Consideriamo il triangolo scaleno in figura



Per esso valgono i due risultati seguenti:

2.1. **Teorema dei seni.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2.2. **Teorema delle proiezioni.**

$$\begin{aligned} a =& b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b =& a\cos\gamma + c\cos\alpha, \\ c =& a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned}$$

2.3. **Teorema dei coseni (o di Carnot).**

$$\begin{aligned} a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 =& a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 =& a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, utilizzando i teoremi dei seni e di Carnot è possibile, note tre delle sei quantità $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ (di cui almeno un lato), determinare le altre tre. I casi che si presentano sono cinque:

2.4. **Sono noti a, b, c.**

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

2.5. **Sono noti a, b e γ (l'angolo compreso tra i due lati).**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma, \quad \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma;$$

2.6. **Sono noti a, b e α (uno degli angoli opposti).**

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha, \quad c = a\cos\beta + b\cos\alpha, \quad \sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta;$$

2.7. **Sono noti a e gli angoli α, β (uno adiacente e uno opposto).**

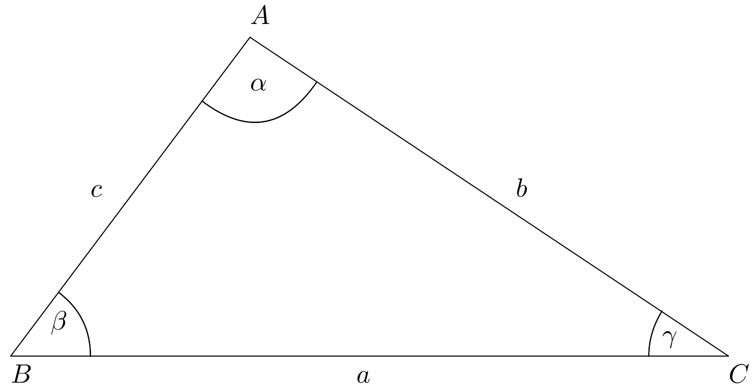
$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \gamma = \pi - \alpha - \beta, \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

2.8. **Sono noti a e gli angoli β, γ (entrambi adiacenti).**

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma, \quad b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

3. Applicazioni geometriche

Consideriamo nuovamente il triangolo in figura:



Indichiamo con $p = (a + b + c)/2$ il *semiperimetro* del triangolo. L'area S del triangolo si può determinare nei tre modi seguenti:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{3.1}$$

$$S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}; \tag{3.2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{3.3}$$

L'ultima relazione prende il nome di *formula di Erone*: è interessante notare come in tale formula per determinare una misura di tipo "*quadrato*" quale è l'area, si utilizzi una misura di tipo "*lineare*" come il semiperimetro per quattro volte (in modo da ottenere una misura di tipo "*quarta potenza*", che non ha un significato determinato in geometria Euclidea) e ci si riconduca alla misura corretta operando una estrazione di radice (oggetto che per i greci ai tempi di Erone rappresentava un tabù!).

Un altro interessante risultato ottenibile mediante la trigonometria è la determinazione della lunghezza del raggio del cerchio circoscritto al triangolo. Infatti[2], per tre punti non allineati, quali sono i vertici di un triangolo, passa una ed una sola circonferenza. Il suo raggio, R, si può allora determinare nei seguenti modi:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}; \tag{3.4}$$

$$R = \frac{abc}{4S}, \tag{3.5}$$

dove S è la misura della superficie del triangolo.

[2] Come dovrebbe essere ben noto!

Si ricordi che la mediana relativa ad un lato di un triangolo e il segmento di estremi il punto medio del lato e il vertice opposto al lato. La bisettrice di un angolo, invece, è il segmento che divide in due parti uguali l'angolo a cui è riferita, di estremi il vertice relativo all'angolo e un punto sul lato opposto. Con la trigonometria possiamo determinare le misure di tali segmenti. In particolare, per la mediana m_a relativa al lato di lunghezza a abbiamo

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \tag{3.6}$$

mentre per la bisettrice d_α relativa all'angolo α abbiamo

$$d_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{3.7}$$