Lezione 9

Equazioni e disequazioni trigonometriche

Donato A. Ciampa

In questa lezione vedremo come risolvere le equazioni e le disequazioni trigonometriche. In particolare, vedremo che buona parte di queste possono essere classificate in particolari gruppi per i quali risulta utile costruire un procedimento generale per la risoluzione.

1. Equazioni trigonometriche

1.1. **Equazioni trigonometriche elementari.** Le equazioni trigonometriche elementari sono della forma

$$\sin x = n, \qquad \cos x = n, \qquad \tan x = n,$$

con $n \in \mathbb{R}$. Nelle prime due equazioni si impone la limitazione $-1 \leqslant n \leqslant 1$, mentre nell'ultima n è un qualsiasi numero reale.

1.1.1. *L'equazione* $\sin x = n$. Le soluzioni di tale equazione sono

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

dove $\alpha = \arcsin n \in [-\pi/2, \pi/2]$.

1.1.2. *L'equazione* $\cos x = n$. Le soluzioni di tale equazione sono

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad x = 2\pi - \alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

dove $\alpha = \arccos n \in [0, \pi]$.

1.1.3. *L'equazione* $\tan x = n$. Le soluzioni di tale equazione è

$$x = \alpha + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

dove $\alpha = \arctan n \in [0, \pi]$.

1.2. **Equazioni speciali.**

1.2.1. *Equazioni omogenee in seno e coseno.* Sono della forma

$$a \sin x + b \cos x = 0, \qquad a \neq 0, b \neq 0,$$

omogenea di primo grado, e

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0,$$

omogenea di secondo grado.

L'equazione di primo grado equivale alla

$$a \tan x + b = 0,$$

che si ottiene dividendo per $\cos x$. Ciò è possibile in quanto i valori $x = \pi/2 + k\pi$ che annullano il $\cos x$ non sono soluzioni dell'equazione.

Nell'equazione di secondo grado, si può presentare il caso $a = 0$: l'equazione allora equivale alla

$$\cos x(b \sin x + c \cos x) = 0.$$

In tal caso, alle soluzioni dell'equzione

$$b \tan x + c = 0,$$

ottenuta dividendo per $\cos x$, dobbiamo aggiungere quelle dell'equazione $\cos x = 0$, che avevamo escluso al passo precedente.

Quando invece tutte le costanti sono non nulle, possiamo dividere nuovamente per $\cos x$ (anche in questo caso i valori $x = \pi/2+k\pi$ non sono soluzioni dell'equazione) e ottenere l'equazione equivalente

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

Quest ultima, posto $t = \tan x$, equivale all'equazione algebrica di secondo grado

$$at^2 + bt + c = 0,$$

la quale, a seconda del segno del descriminante $b^2 - 4ac$, presenta diversi tipi di soluzioni:

(i) se $b^2 - 4ac > 0$, abbiamo due soluzioni reali distinte t_1 e t_2. In tal caso dovremo risolvere le equazioni

$$\tan x = t_1, \qquad \tan x = t_2,$$

ed otterremo così due soluzioni distinte per l'equazione originale;

(ii) se $b^2 - 4ac = 0$, abbiamo due soluzioni reali coincidenti $t_1 = t_2$. In tal caso dovremo risolvere l'equazione

$$\tan x = t_1,$$

ed otterremo così una soluzione per l'equazione originale;

(iii) se $b^2 - 4ac < 0$ l'equazione algebrica non ha soluzioni e così è per l'equazione originale.

1.2.2. *Equazioni lineari in seno e coseno.* Sono le equazioni della forma

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

con a, b, c costanti reali non nulle. Per risolvere tale equazione, si ricorre alla sostituzione

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t = \tan \frac{x}{2}.$$

L'equazione diventa allora

$$(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0,$$

le cui soluzioni sono reali se e solo se $4(a^2+b^2-c^2) \geqslant 0$. In tal caso le radici dell'equazione sono date dall'espressione

$$t_1 = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}, \qquad t_2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},$$

e quindi conducono alla risoluzione delle due equazioni

$$\tan\frac{x}{2} = t_1, \qquad \tan\frac{x}{2} = t_2,$$

che danno le soluzioni dell'equazione originale.

Si osservi che bisogna anche controllare che i valori $x = \pi + 2k\pi$ (che rendono $\tan(x/2)$ priva di senso) siano o meno soluzioni dell'equazione originale: ciò accade quando $b + c = 0$.

Un altro modo di risolvere queste equazioni è quello di porre

$$\cos x = X, \qquad \sin x = Y,$$

e risolvere il sistema

$$\begin{cases} aY + bX = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

Tale sistema, riducendosi alla ricerca delle intersezioni di una retta e la circonferenza trigonometrica, può avere due, una o nessuna soluzioni.

1.2.3. *Equazioni simmetriche in seno e coseno.* Tali equazioni sono quelle in cui, scambiando $\sin x$ con $\cos x$, si mantiene l'equazione originale inalterata.

La forma generale di una tale equazione è

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(\sin^k x + \cos^k x) + \sum_{k=0}^{M} b_k(\sin x \cos x)^k + c = 0.$$

Per risolvere tali equazioni, si pone

$$x = \frac{\pi}{4} + y,$$

in modo che

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y + \sin y),$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y).$$

Da queste otteniamo

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\cos^2 y - \sin^2 y) = \cos^2 y - \frac{1}{2},$$

e

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos y.$$

È possibile allora, sostituendo i valori ottenuti per $\sin x$ e $\cos x$, trasformare l'equazione simmetrica in una in sole potenze di $\cos x$.

In particolare, l'equazione simmetrica di primo grado

$$a(\sin x + \cos x) + c = 0,$$

equivale all'equazione[1]

$$a\sqrt{2}\cos y + c = 0.$$

L'equazione simmetrica di grado due, invece, è della forma

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0,$$

ed equivale alla

$$b\cos^2 y + a\sqrt{2}\cos y + c - \frac{b}{2} = 0.$$

Posto allora $t = \cos y$ si ha l'equazione algebrica equivalente

$$2bt^2 + 2\sqrt{2}at + 2c - b = 0,$$

la quale ha le due soluzioni

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}a - \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4bc}}{2b}, \qquad t_2 = \frac{\sqrt{2}a + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4bc}}{2b},$$

per $2(a^2 + b^2 - 2bc) \geqslant 0$. Una volta trovate queste soluzioni, basta risolvere le equazioni

$$\cos y = t_1, \qquad \cos y = t_2,$$

le quali permettono di determinare le soluzioni originali dell'equazione data.

2. Disequazioni trigonometriche

Per risolvere una disequazione trigonometrica, è conveniente riportarsi sempre ad una o più disequazioni trigonometriche elementari della forma

$$\sin x \lesseqgtr n, \qquad \cos x \lesseqgtr n, \qquad \tan x \lesseqgtr n.$$

Inoltre, risulta molto utile, al fine di determinare tutte le soluzioni, il lavorare sulla circonferenza trigonometrica.

Per quanto riguarda i sistemi di disequazioni trigonometriche, si osservi che, per determinare la soluzione generale, bisogna tener conto della periodicità comune delle funzioni presenti. Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni con periodicità $T = 2\pi$ (in quanto entrambe le funzioni hanno tale periodo), mentre il sistema

$$\begin{cases} \tan x > 0 \\ \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni con periodicità $T = 2\pi$, sebbene la funzione tangente abbia periodicità inferiore rispetto alla funzione coseno.

Tratteremo in maggior dettaglio le disequazioni trigonometriche con degli esempi.

[1] Si può pervenire a tale risultato anche considerando tale equazione come una particolare equazione lineare con $a = b$.