Lezione 7

Applicazioni di Geometria Analitica

Donato A. Ciampa

In questa lezione vedremo come i sistemi di equazioni e disequazioni in più variabili ammettano una interpretazione geometrica. Analizzeremo in particolare i sistemi di primo e secondo grado.

1. Sistemi di equazioni in più variabili

Un sistema di equazioni in più variabili è della forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_M(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 \end{cases},$$

dove $f_1, \ldots, f_M$ sono M equazioni nelle N variabili $x_1, \ldots, x_N$. In generale, per risolvere un tale sistema, il metodo più veloce è quello di determinare man mano i valori di una delle variabili in dipendenza dalle altre e procedere alla sostituzione di tale valore nelle varie equazioni. Iterando il procedimento, si perviene ad una equazione in una sola delle variabili che, una volta risolta, permette di ricavare tutte le soluzioni del sistema sotituendo di volta in volta le sue radici nelle restanti equazioni.

Vedremo ora dei casi particolari, che hanno una interpretazione geometrica.

1.1. **Sistemi di primo grado di due equazioni in due incognite.** Un sistema di questo tipo è della forma

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che le due equazioni rappresentano, nel piano cartesiano, due rette r ed r'. È ovvio allora che tale sistema può avere:

(*i*) *una* soluzione: le rette si intersecano;
(*ii*) *nessuna* soluzione: le rette sono parallele;
(*iii*) *infinite* soluzioni: le rette sono sovrapposte.

Analizziamo il punto (*ii*): le rette sono parallele se e solo se i coefficienti angolari sono uguali, cioè

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k = \text{cost.}$$

Osserviamo ora cosa accade ai coefficienti del termine noto. Si possono presentare due casi:

- Se $c/c' = k$ allora le due equazioni risultano uguali a meno di un coefficiente k: quindi le rette sono sovrapposte;

- Se $c/c' \neq k$ invece le due equazioni risultano diverse: le due rette sono parallele.

Osserviamo ora che se le due rette non hanno coefficiente angolare uguale, allora esse si intersecheranno certamente in un unico punto del piano cartesiano. Possiamo allora concludere quanto segue:

(1) Il sistema ha 1 soluzione se $a/a' \neq b/b'$;
(2) Il sistema non ha alcuna soluzione se $a/a' = b/b' \neq c/c'$;
(3) Il sistema ha infinite soluzioni se $a/a' = b/b' = c/c'$.

1.2. **Sistemi di grado superiore al primo.** Tali sistemi sono quelli in cui almeno una delle equazioni presenti è di secondo grado. I casi notevoli sono quelli in cui abbiamo 2 equazioni:

- una di grado uno e l'altra di grado due: ci ritroviamo nel caso dell'intersezione tra una retta ed una conica, che abbiamo già definito nelle scorse lezioni;
- entrambe di grado due: è il caso dell'intersezione di due coniche, anch'esso già analizzato in altre lezioni.

Un caso particolare di sistemi del secondo ordine, sono quelli della forma

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases} .$$

Per risolvere tali sistemi si può osservare che le sue soluzioni soddisfano le condizioni per le radici di una equazione di secondo grado: si risolve allora l'equazione ausiliaria

$$t^2 - pt + q = 0,$$

la quale ammette 2 radici reali, oppure 2 radici coincidenti, o ancora nessuna soluzione reale. Fatto ciò, si ottengono le soluzioni del sistema, nel modo seguente:

- due radici reali $t_1 \neq t_2$: le soluzioni del sistema sono (t_1, t_2) e (t_2, t_1);
- due radici reali coincidenti $t_1 = t_2$: l'unica soluzione è il punto (t_1, t_1);
- nessuna radice reale: nessuna soluzione.

Si osservi infine che tale sistema può essere interpretato geometricamente come l'intersezione di una parabola equilatera $xy = q$ e della retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante $x + y = p$.

2. Sistemi di disequazioni in più variabili

Non esiste una teoria completa per descrivere le possibilità diverse che si presentano nel risolvere tali sistemi. Tuttavia, possiamo fare alcune importanti considerazioni. Le disequazioni

$$ax + by + c > 0, \qquad ax + by + c < 0,$$

determinano una divisione del piano cartesiano in due parti distinte e la condizione di essere maggiore o minore di 0 la necessità di considerare uno solo di questi due semipiani: in particolare questo sarà il semipiano contenente tutti i punti che soddisfanno alla disequazione data.

Un ragionamento analogo si può fare per la disequazione

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f > 0,$$

(o per la sua analoga con $<$): anche in questo caso la conica separa il piano cartesiano in due parti. Una sarà all'interno della conica, l'altra all'esterno.

È chiaro cosa intendere per interno ed esterno di una conica, nel caso in cui si parli di circonferenza ed ellisse: interno, sarà esattamente la porzione di piano contenuta dentro la curva data, mentre esterno sarà il suo complementare. Ma cosa possiamo dire per la parabola e per l'iperbole?

Osserviamo che l'interno di una ellisse contiene i due fuochi: in generale, ciò risulta vero per ogni conica. Ne deduciamo quindi che quando parliamo di interno di parabola ed iperbole (che sono due curve aperte) intendiamo la parte di piano in cui sono contenuti i fuochi di tali coniche.

Le applicazioni per tali sistemi sono svariate: le due principali riguardano i cosiddetti problemi di ottimizzazione, quelli cioè per i quali si vuole determinare il minimo o massimo di una funzione a partire da determinate condizioni per l'esistenza delle variabili coinvolte, e per la determinazione dei domini di funzioni in più variabili.