

Lezione 6

Geometria Analitica 2

Donato A. Ciampa

In questa lezione richiameremo il concetto di luogo geometrico e di conica. In seguito analizzeremo le equazioni in forma canonica delle coniche e dei problemi ad esse relativi.

1. RICHIAMI DI GEOMETRIA ANALITICA: LE CONICHE

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione nelle variabili x, y . Si chiama *luogo geometrico di equazione f* l'insieme dei punti

$$(1.1) \quad \mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Una *conica* è il luogo dei punti nel piano che soddisfano l'equazione generale

$$(1.2) \quad ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Vediamo le equazioni in forma canonica delle coniche.

1.1. La circonferenza. Si definisce *circonferenza* il luogo dei punti del piano aventi distanza costante r (detto *raggio*) da un punto fisso C (detto *centro*).

Se il centro ha coordinate $C(\alpha, \beta)$, la *circonferenza di centro C e raggio r* ha equazione

$$(1.3) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Svolgendo i quadrati nel precedente si ottiene l'equazione equivalente

$$(1.4) \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

dove si è posto

$$a = -2\alpha, \quad b = -2\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Si osservi che, nota l'equazione della circonferenza nella seconda forma, si risale alle coordinate del centro e al raggio per mezzo delle identità

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$$

1.1.1. Problemi relativi alla circonferenza. Diamo alcuni metodi risolutivi per particolari problemi relativi alla circonferenza:

A) Intersezione tra circonferenza e retta

Data la circonferenza C e la retta r , la loro intersezione è data risolvendo il sistema delle equazioni che le rappresentano. Tale sistema può avere:

- (i) due soluzioni: la retta seca la circonferenza in due punti;
- (ii) una soluzione: la retta è tangente alla circonferenza nel punto di intersezione;
- (iii) nessuna soluzione: la retta è esterna alla circonferenza.

B) *Intersezione tra due circonferenze*

Date le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, di centri C e C' e di raggi r e r' , la loro intersezione è data dal sistema delle equazioni che le rappresentano. Detta d la distanza tra i centri, tale sistema può avere:

- (i) due soluzioni: le circonferenze si intersecano in due punti (e si ha $d < r + r'$);
- (ii) una soluzione: in tal caso, se $d = r + r'$, le circonferenze sono tangenti esterne, mentre se $d = |r - r'|$ le circonferenze sono tangenti interne;
- (iii) nessuna soluzione: in tal caso, se $d > r + r'$ le circonferenze sono disgiunte esterne, se $d < |r - r'|$ le circonferenze sono disgiunte interne, mentre se $d = 0$ le circonferenze sono concentriche.

C) *Circonferenza passante per tre punti*

Dati i tre punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, l'equazione della circonferenza passante per essi si ottiene risolvendo il sistema

$$(1.5) \quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c .

D) *Retta tangente ad una circonferenza passante per un punto*

Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, $P(x_0, y_0)$ un punto nel piano (esterno o sulla circonferenza). Si osservi che per P passano infinite rette di equazione

$$r: \quad y - y_0 = m(x - x_0), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Per trovare quali tra queste rette sono tangenti alla circonferenza data si procede al modo seguente:

- (i) si scrive il sistema tra l'equazione di $\mathcal{C}$ e quella di r , ottenendo una equazione di II grado in x a coefficienti dipendenti da m ;
- (ii) si impone che il discriminante di tale equazione sia uguale a zero, in modo da ottenere una equazione nella sola incognita m ;
- (iii) si risolve quest'ultima equazione: le sue radici sono i coefficienti angolari delle rette tangenti alla circonferenza data.

1.2. La parabola. La parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da una retta fissa d , detta *direttrice*, e un punto fisso F , detto *fuoco*.

Una parabola è poi caratterizzata da altri due elementi: un *asse di simmetria* s , perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco, e un *vertice* V , giacente sull'asse di simmetria. L'equazione generale di una parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, è

$$(1.6) \quad y = ax^2 + bx + c$$

e in tal caso, si ha per i suoi elementi caratteristici

$$V \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right), \quad F \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a} \right),$$

$$d: \quad y = -\frac{1+\Delta}{4a}, \quad s: \quad x = -\frac{b}{2a},$$

dove si è posto $\Delta = b^2 - 4ac$.

Per quanto riguarda i problemi relativi alla parabola, si rimanda a quelli già illustrati per la circonferenza.

1.3. L'ellisse. L'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali risulta costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 detti *fuochi*.

Supponiamo che i fuochi abbiano coordinate $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, dove $c > 0$ (cosicché la distanza tra i fuochi è pari a $2c$). Indicata con $2a$ la somma delle distanze di un punto dai due fuochi (che implica la condizione $a > c$), si ottiene l'equazione generale dell'ellisse

$$(1.7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove $b^2 = a^2 - c^2$. I punti

$$V_1(a, 0), \quad V_2(-a, 0), \quad V_3(0, b), \quad V_4(0, -b),$$

si dicono *vertici* dell'ellisse. I segmenti V_1V_2 e V_3V_4 , di lunghezze rispettive $2a$ e $2b$ si dicono *asse maggiore* e *asse minore* dell'ellisse. La costante $e = c/a$ si dice *eccentricità*.

1.4. L'iperbole. L'iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali risulta costante la differenza delle distanze da due punti fissi F_1, F_2 detti *fuochi*.

Supponiamo che i fuochi abbiano coordinate $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, dove $c > 0$ (cosicché la distanza tra i fuochi è pari a $2c$). Indicata con $2a$ la differenza delle distanze di un punto dai due fuochi (che implica la condizione $a < c$), si ottiene l'equazione generale dell'iperbole riferita ai suoi assi

$$(1.8) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove $b^2 = c^2 - a^2$. I punti

$$V_1(a, 0), \quad V_2(-a, 0), \quad V_3(0, b), \quad V_4(0, -b),$$

si dicono *vertici* dell'iperbole (i primi due *reali* in quanto appartengono all'iperbole, gli altri due *immaginari* in quanto non appartenenti ad essa). I segmenti V_1V_2 e V_3V_4 , di lunghezze rispettive $2a$ e $2b$ si dicono *asse reale* e *asse immaginario* dell'iperbole. La costante $e = c/a$ si dice *eccentricità*. Inoltre le due rette

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

vengono dette *asintoti* dell'iperbole.

Nel caso in cui $a^2 = b^2$, cioè quando $c^2 = 2a^2$, l'equazione dell'iperbole si può riscrivere nella forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Operando allora una rotazione di quarantacinque gradi del sistema di riferimento, l'equazione dell'iperbole (*iperbole equilatera*) diviene

$$(1.9) \quad xy = k, \quad k = -a^2/2.$$