Lezione 5

Geometria Analitica 1

Donato A. Ciampa

In questa lezione richiameremo alcune nozioni della geometria analitica, quali le trasformazioni del piano in se stesso e le varie equazioni relative alla retta. Analizzeremo, infine, i principali problemi legati alla retta stessa.

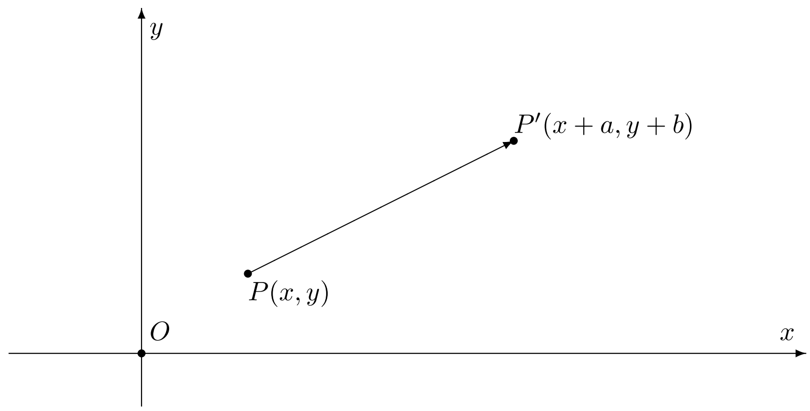
1. Richiami di geometria Analitica: Trasformazioni del piano e l'equazione della Retta

1.1. **Trasformazioni nel piano.** Dato un piano π diremo che è fissata una *trasformazione* del piano in sé se viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di esso, i.e. quando ad ogni punto P di π si può far corrispondere mediante una relazione ϕ uno ed un solo punto P' di π.
Nel seguito indicheremo con xOy il piano non soggetto alle trasformazioni, mentre con $x'O'y'$ il piano soggetto alle trasformazioni.

1.1.1. *La traslazione.* La traslazione trasforma un punto P in un punto P' spostato rispetto a P lungo un segmento orientato di lunghezza, direzione e verso costanti. La trasformazione delle coordinate, se il punto $O(0,0)$ viene mandato in $O'(a,b)$, è data da

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} . \tag{1.1}$$

In una traslazione, le dimensioni degli oggetti non vengono alterate, i.e. le distanze restano invariate. Si dice allora che la traslazione è un isometria.
L'applicazione successiva di due traslazioni di segmento (a,b) e (c,d) rispettivamente, risulta ancora una traslazione di segmento $(a+c, b+d)$. La traslazione di segmento $(0,0)$ si dice *identità*, la traslazione di segmento $(-a,-b)$ si dice *inversa* della traslazione di segmento (a,b). Si osservi che la composizione di una traslazione con la sua inversa dà luogo all'identità. Una traslazione di segmento (a,b) è illustrata nella figura seguente.

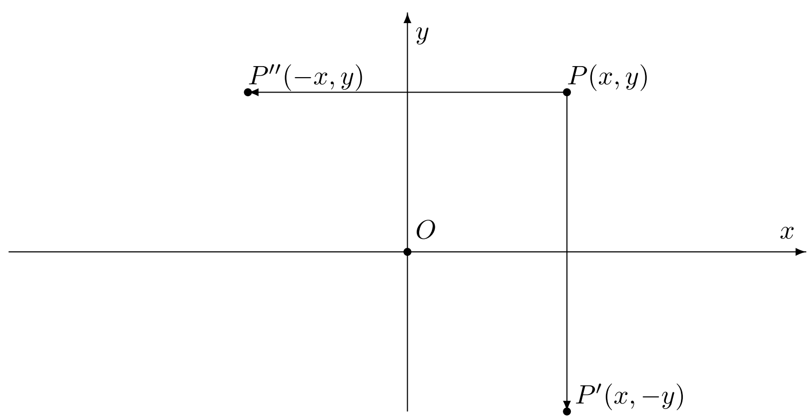


1.1.2. *Simmetria assiale.* Data una retta r nel piano, diciamo che il punto P' è il *simmetrico* di P rispetto a r quando il segmento PP' è perpendicolare a r e la interseca nel punto medio.
Di seguito diamo le equazioni delle simmetrie relative solo agli assi coordinati.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}, \qquad \text{simmetria rispetto all'asse } x. \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} x'' = -x \\ y'' = y \end{cases}, \qquad \text{simmetria rispetto all'asse } y. \tag{1.3}$$

Anche la simmetria assiale risulta un'isometria. Le simmetrie rispetto agli assi sono illustrate in figura.

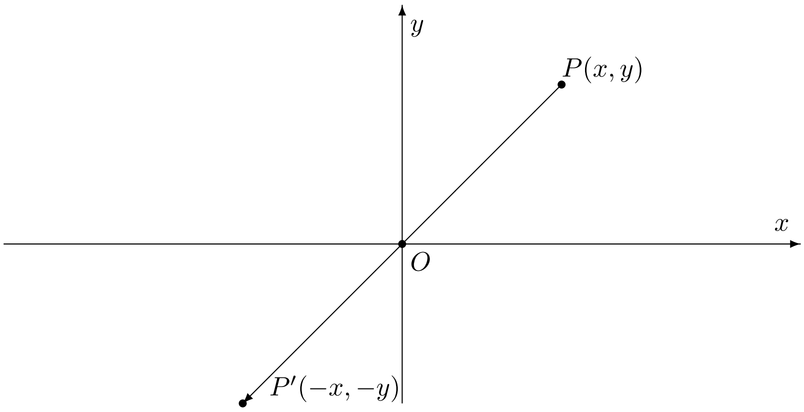


1.1.3. *Simmetria centrale.* Sia A un punto fissato del piano: si dice che il punto P' è *simmetrico* di P rispetto ad A quando il punto A coincide con il punto medio del segmento PP'.
Quella che segue è l'equazione della simmetria centrale relativa all'origine O del

sistema di riferimento:

$$\begin{cases} x' = -x \\ \\ y' = -y \end{cases} . \tag{1.4}$$

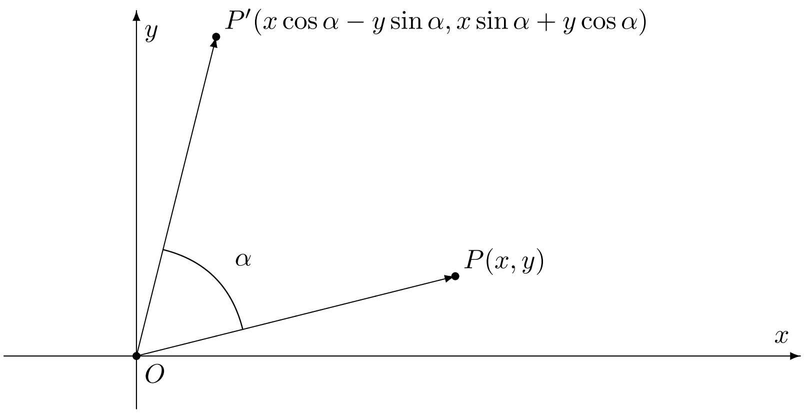
Ovviamente la simmetria centrale rispetto ad O si ottiene come composizione delle due simmetrie assiali precedenti e risulta, quindi, anch'essa un'isometria.



1.1.4. *Rotazione.* Sia A un punto fissato del piano e α un angolo fissato. Si dice che P' è la *rotazione* di angolo α e centro A del punto P se si ha $P\widehat{A}P' = \alpha$ e $\overline{PA} = \overline{P'A}$.
L'equazione della rotazione di centro O e angolo α è data da:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} . \tag{1.5}$$

Anche in tal caso abbiamo un'isometria.



1.1.5. *Omotetia.* Sia A un punto fissato, k un numero reale qualsiasi. Diciamo che il punto P' è *omotetico* a P di centro A e rapporto k se i segmenti AP e AP' sono paralleli (in realtà sono sovrapposti) e si ha che

$$\frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}} = k.$$

In particolare, se $k > 0$ si parla di omotetia *diretta*, se $k < 0$ di omotetia *inversa*. Le equazioni di una omotetia di centro O e rapporto k sono date da

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}. \tag{1.6}$$

In tal caso, non abbiamo più un'isometria, in quanto le distanze vengono dilatate (o contratte, a seconda di $|k| > 1$ o $|k| < 1$) del rapporto k.

1.1.6. *Affinità.* L'affinità è una generalizzazione dell'omotetia: mentre nel caso precedente i rapporti risultano uguali nelle varie direzioni, in questo caso essi risultano differenti per le direzioni. In generale l'equazione di un'affinità si scrive infatti

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases}. \tag{1.7}$$

con $k \neq h$.
Si noti che, mentre le omotetie conservano gli angoli (infatti vengono anche dette similitudini) le affinità variano anche questi ultimi, oltre alle distanze.

Nel seguito, si identifica $\mathbb{R}^2$ con il Piano Cartesiano ortogonale xOy. Le lettere maiuscole $A, B, C, \dots$ indicheranno punti del piano di coordinate rispettive $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), \dots$, mentre le lettere minuscole indicheranno punti sulla retta reale $\mathbb{R}$.

Dati due punti $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ nel piano, la loro *distanza* (*euclidea*) è data da

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \tag{1.8}$$

mentre il *punto medio* M ha coordinate

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{1.9}$$

1.2. **La retta.**

1.2.1. *Equazione della retta parallela agli assi cartesiani.*

$$y = k, \qquad k \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

equazione della retta parallela all'asse delle ascisse (eq: $y = 0$).

$$x = k, \qquad k \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

equazione delle retta parallela all'asse delle ordinate (eq: $x = 0$).

1.2.2. *Equazione della retta passante per l'origine.*

$$y = mx, \qquad m \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

dove la costante m è detta *coefficiente angolare* della retta.

1.2.3. *Equazione della retta generica.*

$$y = mx + q, \qquad m, q \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

dove m è come prima e q viene detto *intercetta all'origine.*

1.2.4. *Equazione generale di una retta.*

$$ax + by + c = 0, \qquad , a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

in cui, a seconda delle scelte di a, b, c, si ricavano i casi precedenti.

1.2.5. *Problemi relativi alla retta.* Diamo di seguito alcune informazioni sulla risoluzione di problemi relativi alle rette.

A) Condizione di parallelismo
Due rette r, r' sono parallele se e solo se i loro coefficienti angolari m, m' sono uguali.

B) Condizione di perpendicolarità
Due rette r, r' sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari m, m' sono l'uno l'antireciproco dell'altro, i.e.

$$m' = -\frac{1}{m}. \tag{1.15}$$

C) Retta per un punto e di dato coefficiente angolare
Dato il punto $A(x_0, y_0)$, l'equazione della retta passante per esso e di coefficiente angolare dato m è

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{1.16}$$

D) Retta passante per due punti
Dati i punti $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, l'equazione della retta passante per essi è

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{1.17}$$

dove

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{1.18}$$

è l'espressione del coefficiente angolare di tale retta.

E) Intersezione tra due rette
Date due rette r, r' i loro punti di intersezione si ricavano risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni. Si possono verificare tre casi distinti:
(i) il sistema ammette una sola soluzione: le rette si intersecano in un solo punto;
(ii) il sistema ammette infinite soluzioni: le rette sono coincidenti;
(iii) il sistema non ammette soluzioni: le rette sono parallele.

F) Distanza di un punto da una retta
Sia $P(x_0, y_0)$ un punto non appartenente alla retta r di equazione $y = mx + q$ o $ax + by + c = 0$. La distanza del punto P dalla retta r è data da

$$d = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{1 + m^2}}, \tag{1.19}$$

nel primo caso e

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{1.20}$$

nel secondo caso.

G) Equazione dell'asse di un segmento
L'equazione dell'asse del segmento di vertici $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ è data dalla seguente formula

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \tag{1.21}$$

H) Equazione delle bisettrici degli angoli individuati da due rette incidenti
Date due rette incidenti r ed s di equazioni $ax + by + c = 0$, e $a'x + b'y + c' = 0$, rispettivamente, le equazioni delle bisettrici degli angoli che tali rette formano nel loro punto di intersezione sono date dalle formule

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}. \tag{1.22}$$