Lezione 4

Progressioni, logaritmi ed esponenziali.

Donato A. Ciampa

1. Successioni e progressioni

Una *successione*, indicata con il simbolo $\{a_n\}$ è un'applicazione che ad ogni numero naturale n associa un numero reale a_n. Particolari tipi di successioni sono le *progressioni*.

1.1. **Progressioni aritmetiche.** Una *progressione aritmetica* è una succesione $\{a_n\}$ (finita o infinita) di termini tali che la differenza tra un termine e il precedente risulta costante: tale costante viene detta *ragione della progressione*. In simboli

$$a_{n+1} - a_n = d, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che i termini di una progressione aritmetica si scrivono in forma generale come

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Si osservi che, essendo

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d, \ldots \end{aligned}$$

ne segue la seguente formula chiusa per il generico termine di una progressione aritmetica

$$a_{n+1} = a_1 + nd. \tag{1.1}$$

Dalla precedente si ricavano anche le seguenti formule:

$$d = \frac{a_{n+1} - a_1}{n}, \qquad n = \frac{a_{n+1} - a_1}{d}. \tag{1.2}$$

In generale, noto il termine a_s, il generico termine a_n con $n > s$ è dato da

$$a_n = a_s + (n - s)d. \tag{1.3}$$

La somma di n termini di una progressione aritmetica è data dalla seguente formula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \tag{1.4}$$

1.2. **Progressioni geometriche.** Una *progressione geometrica* è una succesione $\{a_n\}$ (finita o infinita) di termini tali che il rapporto tra un termine e il precedente risulta costante: tale costante viene detta *ragione della progressione*. In simboli

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che i termini di una progressione geometrica si scrivono in forma generale come

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Si osservi che, essendo

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2, \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3, \ldots \end{aligned}$$

ne segue la seguente formula chiusa per il generico termine di una progressione geometrica

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n. \tag{1.5}$$

Dalla precedente si ricavano anche le seguenti formule:

$$q = \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}, \qquad n = \frac{\log a_{n+1} - \log a_1}{\log q}. \tag{1.6}$$

In generale, noto il termine a_s, il generico termine a_n con $n > s$ è dato da

$$a_n = a_s \cdot q^{n-s}. \tag{1.7}$$

La somma di n termini di una progressione aritmetica è data dalla seguente formula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{1.8}$$

Si osservi che, se la progressione geometrica consiste di infiniti termini, si hanno i seguenti due casi per la somma:

(i) se $|q| > 1$, poiché q^n cresce indefinitamente per n sempre più grande, la somma risulta infinita;

(ii) viceversa, se $|q| < 1$, q^n tende a divenire sempre più prossimo a 0 per n grande, e quindi la somma è pari a

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

2. Funzioni esponenziali e logaritmiche

Sia a un numero reale positivo e diverso da 1. La funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = a^x,$$

si dice *funzione esponenziale*. Il suo dominio coincide con tutto $\mathbb{R}$, mentre la sua immagine coincide con $\mathbb{R}_+$. Inoltre essa è crescente per $a > 1$ e decresente per $0 < a < 1$.

Si ricordano le proprietà più importanti della funzione esponenziale:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad a^x : a^y = a^{x-y};$$
$$(a^x)^y = a^{xy}; \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

Sotto le stesse ipotesi fatte in precedenza per a, si definisce la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log_a x,$$

detta *funzione logaritmo* (in base a). Si osservi che, per definizione

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y,$$

da cui le due identità

$$y = \log_a a^y, \qquad x = a^{\log_a x}.$$

Il dominio della funzione logaritmo è $\mathbb{R}_+$, mentre il suo codominio è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre essa è crescente per $a > 1$ e decrescente per $0 < a < 1$.

Si hanno le proprietà

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad x, y > 0;$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \qquad x, y > 0;$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x, \qquad x > 0, y \in \mathbb{R};$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad x > 0.$$