Lezione 3

Equazioni e disequazioni

Donato A. Ciampa

In questa lezione studieremo le equazioni e disequazioni dei seguenti tipi: primo e secondo grado, razionali fratte e irrazionali.

1. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI I E II GRADO

Una equazione di I Grado si riduce alla forma normale

$$ax = b$$

ed ha come soluzione

$$(1.1) \quad x = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0,$$

mentre risulta impossibile se $a = 0, b \neq 0$ e indeterminata se $a = b = 0$.

Una equazione di II Grado si riduce alla forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Per essa si applica la formula risolutiva

$$(1.2) \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

la quale, a seconda dei valori assunti dal *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$, ammette:

(i) due soluzioni reali distinte per $\Delta > 0$,

(ii) due soluzioni reali coincidenti, pari a $-b/(2a)$ per $\Delta = 0$,

(iii) nessuna soluzione reale (due soluzioni complesse coniugate) per $\Delta < 0$.

Le radici dell'equazione soddisfano poi alle relazioni

$$(1.3) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

La disequazione di primo grado

$$ax + b \leq (\geq) 0$$

ammette come soluzione

$$(1.4) \quad x \leq (\geq) -\frac{b}{a}, \quad a > 0,$$

$$(1.5) \quad x \geq (\leq) -\frac{b}{a}, \quad a < 0.$$

Per la risoluzione della disequazione

$$ax^2 + bx + c > (<) 0, \quad a > 0,$$

si faccia riferimento alla seguente tabella (i casi per $a < 0$ si trattano in maniera analoga cambiando opportunamente i segni).

Δ	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
> 0	$x < x_1, x > x_2, (x_1 < x_2)$	$x_1 < x < x_2$
$= 0$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
< 0	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

2. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una equazione irrazionale è della forma

$$(1) \quad \sqrt[n]{f(x)} = g(x).$$

(i) n dispari.

L'equazione (1) è equivalente a

$$f(x) = [g(x)]^n.$$

(ii) n pari.

L'equazione (1) è equivalente a

$$f(x) = [g(x)]^n,$$

con la condizione aggiuntiva $f(x) \geq 0$.

Diamo di seguito lo schema risolutivo delle disequazioni della forma

$$(2) \quad f(x) > \sqrt[n]{g(x)}, \quad (3) \quad f(x) < \sqrt[n]{g(x)}.$$

(i) n dispari.

La disequazione (2) diviene semplicemente

$$[f(x)]^n < g(x).$$

Analogamente la (3)

$$[f(x)]^n > g(x).$$

(ii) n pari.

L'equazione (2) equivale al sistema

$$(2.1) \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ (f(x))^n > g(x) \end{cases}.$$

L'equazione (3) corrisponde ai due sistemi di equazioni

$$(2.2) \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ (f(x))^n < g(x) \end{cases}.$$