Lezione 2

Funzioni

Donato A. Ciampa

In questa lezione introdurremo il concetto di funzione e le proprietà fondamentali di queste. Analizzeremo in particolare le funzioni polinomiali, radicali e razionali fratte, di cui daremo le principali proprietà.

1. Applicazioni e funzioni

Dati due insiemi A e B si dice *funzione* (o *applicazione*) da A in B e si denota con $f : A \longrightarrow B$ una legge f di corrispondenza che ad ogni elemento $x \in A$ associa un unico elemento $y \in B$, e si usa scrivere $y = f(x)$. L'elemento $f(x)$ si dice *immagine* di x via f. L'insieme

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : y = f(x)\},$$

si dice *immagine di* f. L'insieme A viene detto *dominio* di f, mentre B si dice *codominio* di f.

Sia $y \in B$ un elemento fissato. L'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\},$$

si dice *preimmagine* di y via f, mentre, se $C \subseteq B$, l'insieme

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$$

è detto *preimmagine* di C via f.

Due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ si dicono *uguali* se hanno stesso dominio $A = C$, stesso codominio $B = D$ e associano la stessa immagine ad ogni x, cioè $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$.

L'insieme

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y = f(x) \in B\},$$

si dice *grafico* di f.

Vi sono particolari tipi di funzioni, alcune delle quali hanno proprietà generali molto importanti. Vediamone alcune.

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice *iniettiva* se

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Una funzione si dice *suriettiva* se

$$\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A : y = f(x).$$

Una funzione si dice *biiettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ si chiama *funzione composta* di f e g la funzione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall\, x \in A.$$

In particolare, se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, allora ha senso parlare sia di $f \circ g : B \longrightarrow B$ che di $g \circ f : A \longrightarrow A$. Si dimostra che

Teorema 1.1. *$f \circ g \neq g \circ f$, cioè la composizione di funzioni non è commutativa.*

Sia dato un insieme A. La funzione $1_A : A \longrightarrow A$ definita da $1_A(x) = x$ per ogni $x \in A$ prende il nome di *funzione identica*. Vale il seguente risultato.

Teorema 1.2. *Siano $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ tre funzioni. Allora*

$$f \circ 1_A = f, \qquad 1_B \circ f = f,$$
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Il Teorema precedente asserisce che le funzioni identiche sono elementi neutri per l'operazione di composizione di funzioni e che la composizione è associativa.

Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.

Proposizione 1.3. *Se f è invertibile, la sua inversa è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano due funzioni g, h che invertono f. Allora, sfruttando le relazioni di Teorema 1.2

$$h = 1_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ 1_B = g,$$

e quindi $h = g$. □

Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ l'unica funzione che la inverte viene denotata col simbolo $f^{-1} : B \longrightarrow A$ e viene detta *inversa* di f. Vale il seguente risultato.

Teorema 1.4. *Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. f è invertibile se e solo se f è biiettiva.*

2. I polinomi

Supporremo note le principali nozioni riguardo i polinomi e il calcolo letterale. In questa sede ci soffermeremo a richiamare soltanto le principali proprietà, quali prodotti notevoli e decomposizioni.

Diamo un elenco dei principali prodotti notevoli:

(i) *Potenze di Binomio*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{2.1}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{2.2}$$

Indicato con

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{2.3}$$

il *fattoriale di n* e con

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \tag{2.4}$$

il *coefficiente binomiale di n su k*, la potenza n-sima di binomio è data da

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2.5}$$

(*ii*) *Quadrato di polinomio*

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \tag{2.6}$$

In generale se il polinomio è costituito da n termini $a_1, \dots, a_n$, abbiamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j. \tag{2.7}$$

(*iii*) *Identità per scomposizioni*

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \tag{2.8}$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{2.9}$$

3. Potenze e radicali

3.1. **Potenze.** Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Il numero a^n si dice *potenza di grado n del numero a*. Vediamo le principali proprietà delle potenze:

(*i*) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
(*ii*) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;
(*iii*) $a^n : a^m = a^{n-m}$;
(*iv*) $a^n : b^n = (a/b)^n$;
(*v*) $(a^n)^m = a^{nm}$;
(*vi*) $a^0 = 1, a^1 = a$ per ogni $a \neq 0$;
(*vii*) $a^{-n} = 1/a^n$;

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.

3.2. **Radicali.** Sia $a \in \mathbb{R}$, n un numero naturale. Per *radicale del radicando a di indice n* si intende il numero

$$\sqrt[n]{a}.$$

Si osservi che, quando n è pari, è necessario che $a \geq 0$, viceversa le radici di indice dispari si intendono per qualsiasi numero reale. Inoltre, nel caso pari parleremo di *radice aritmetica* di a quando la si sceglierà senza segno (o, per meglio dire, con segno positivo), mentre parleremo di radice *algebrica di a* intendendo quella con segno positivo o negativo (ciò è dovuto al fatto che un numero positivo e il suo opposto, elevati ad una potenza pari, danno lo stesso valore). Nel caso delle radici dispari, invece, il segno della radice sara concorde a quello del numero a. Utilizzeremo spesso anche la seguente notazione:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Valgono allora le seguenti proprietà per i radicali:

3.2.1. *Somma.* Due radicali si possono sommare se e solo se hanno uguale indice e uguale radicando.

3.2.2. *Prodotto.* Si ha

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n},$$

o equivalentemente

$$a^{1/n} \cdot b^{1/m} = (a^m \cdot b^n)^{1/(nm)}.$$

3.2.3. *Quoziente.* Si ha
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m : b^n},$$
o equivalentemente
$$a^{1/n} : b^{1/m} = (a^m : b^n)^{1/(nm)}.$$

3.2.4. *Potenza.* Si ha
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$
o equivalentemente
$$(a^{1/n})^m = a^{m/n}.$$

3.2.5. *Radice.* Si ha
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a},$$
o equivalentemente
$$(a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(nm)}.$$

3.2.6. *Razionalizzazione.* Quando un radicale si presenta al denominatore di una frazione è conveniente razionalizzare tale espressione, i.e. rendere il denominatore un numero razionale. Nel seguito riportiamo alcuni casi importanti:

$$(i) \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}, \qquad m < n.$$

$$(ii) \qquad \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}.$$

$$(iii) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}.$$

3.2.7. *Radicale doppio.* Consideriamo la radice della forma
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}},$$
con la condizione
$$a^2 - b \text{ è un quadrato perfetto.}$$
Allora vale la formula
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

4. Funzioni elementari

Di seguito analizzeremo il comportamento di alcune funzioni elementari che hanno come dominio l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. In particolare ci sofferemeremo sulle funzioni *potenza* e sulle funzioni razionali e irrazionali fratte.

4.1. **La funzione potenza.** Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale. La funzione $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = x^n,$$

si dice *potenza di grado n*. Il dominio di tale funzione coincide con tutto $\mathbb{R}$ mentre la sua immagine varia al variare di n al modo seguente:

$$f_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & n = 2h+1, h \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+ \cup \{0\} & n = 2h, h \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dove $\mathbb{R}_+$ è l'insieme dei reali positivi[1].

Si può estendere il concetto di potenza anche ad esponenti non naturali. Se $n \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & n \geqslant 0 \\ 1/x^{|n|} & n < 0 \end{cases}$$

dove, nel primo caso il dominio è ancora tutto $\mathbb{R}$ mentre nel secondo caso il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se invece $q = 1/n \in \mathbb{Q}$, definiamo

$$f_q(x) = x^q = \sqrt[n]{x},$$

e in tal caso il dominio è dato da

$$\mathrm{Dom}(f_q) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1/(2h+1),\ h \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+ \cup \{0\} & q = 1/(2h),\ h \in \mathbb{N} \end{cases}$$

In generale, se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora possiamo definire la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^\alpha,$$

il cui dominio è $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}_+$.

In generale una funzione polinomiale

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ha come dominio tutto l'asse reale.

La funzione radice pari

$$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)},$$

è definita per tutti i valori di x per cui $g(x) \geqslant 0$, e quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant 0\},$$

mentre la funzione radice dispari è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Infine, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{g(x)},$$

è definita per i valori di x che non rendono nullo il denominatore, quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}.$$

---

[1] Cioè

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty).$$