12 Diagonalizzazione

Un'applicazione lineare $f: V \to V$ si dice diagonalizzabile se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta f è una matrice diagonale. Vi sono vari criteri di diagonalizzazione di un'applicazione lineare.

Primo criterio. Un'applicazione lineare $f: V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base in V formata da autovettori di f.

Dimostrazione. Supponiamo f diagonalizzabile; allora esiste una base

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta f è diagonale. Ma allora per definizione di matrice rappresentativa si ha

$$f(b_1) = a_1 b_1, \dots, f(b_n) = a_n b_n$$

per certi coefficienti $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Ne segue che $b_1, \dots, b_n$ sono autovettori per f. Viceversa supponiamo che esista una base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ di V formata da autovettori di f; allora

$$f(b_1) = a_1 b_1, \dots, f(b_n) = a_n b_n$$

per certi coefficienti $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Dunque la matrice che rappresenta f rispetto a B è diagonale.

Secondo criterio. Un'applicazione lineare $f: V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se V è somma diretta degli autospazi.

Dimostrazione. Supponiamo f diagonalizzabile; allora esiste una base di autovettori $b_1, \dots, b_n$ per cui è ovvio che V si decompone nella somma diretta degli autospazi associati agli autovettori b_i. Viceversa se V si decompone nella somma diretta di autospazi $V_1, \dots, V_k$ allora se denotiamo con $B_1, \dots, B_k$ basi disgiunte rispettivamente degli spazi $V_1, \dots, V_k$, si ha che $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ è una base per V formata da autovettori di f.

Esempio. Per il secondo criterio l'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

è diagonalizzabile. Infatti abbiamo verificato che ammette tre autovalori distinti, e di conseguenza le dimensioni degli autospazi sono tutte pari a 1. Essendo gli autospazi in somma diretta ed essendo V di dimensione 3 si conclude.