Le fondamenta della cultura matematica

Raccolta di vari argomenti matematici

Indice

Voci

Matematica **1**

Matematica 1
Storia della matematica 11

Aritmetica **38**

Aritmetica 38
Teoria dei numeri 40

Algebra **43**

Algebra 43
Algebra elementare 46
Algebra astratta 49
Algebra lineare 50
Algebra commutativa 52
Algebra universale 53
Sistema di algebra computazionale 55

Geometrie **59**

Geometria 59
Geometria euclidea 68
Teorema della bisettrice 70
Criteri di congruenza dei triangoli 71
Teorema della mediana 73
Teorema di Pappo 74
Teorema di Pasch 75
Teorema di Pitagora 76
Primo teorema di Euclide 85
Secondo teorema di Euclide 87
Similitudine (geometria) 90
Teorema di Talete 93
Geometria piana 98
Poligono 99
Poligono regolare 103
Poligono stellato 107

Sezione conica 109
Rappresentazione matriciale delle coniche 116
Geometria solida 118
Volume 119
Faccia (geometria) 123
Spigolo 124
Vertice (geometria) 124
Geometria analitica 125
Spazio vettoriale 127
Piano (geometria) 133
Distanza (matematica) 134
Prodotto scalare 137
Intersezione 144
Sistema di riferimento cartesiano 146
Geometria affine 149
Spazio affine 150
Sottospazio affine 152
Trasformazione affine 156
Geometria algebrica 160
Varietà algebrica 163
Varietà affine 165
Geometria proiettiva 166
Spazio proiettivo 169
Piano proiettivo 172
Retta proiettiva 175
Coordinate omogenee 177
Trasformazione di Möbius 180
Teorema di Desargues 183
Teorema dell'esagono di Pappo 184
Geometria differenziale 185
Varietà differenziabile 187
Geometria non euclidea 188
Geometria ellittica 195
Geometria iperbolica 198
Geometria sferica 205
Geometria descrittiva 211
Analisi **216**

Analisi matematica 216

Riferimenti

Fonti e autori del articolo 221
Fonti, licenze e autori delle immagini 224

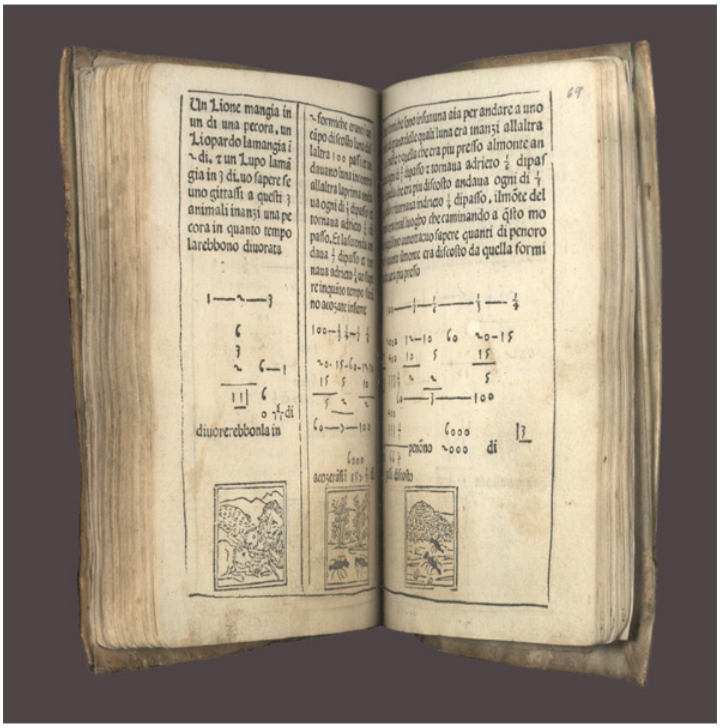
Licenze della voce

Licenza 228

Matematica

Matematica

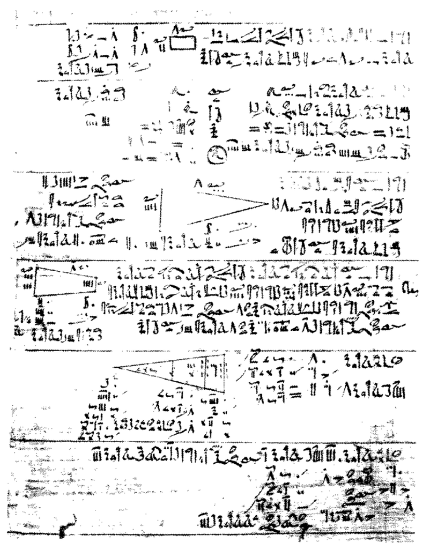
La parola **matematica** deriva dal greco μάθημα (*máthema*), traducibile con i termini "scienza", "conoscenza" o "apprendimento"; μαθηματικός (*mathematikós*) significa "incline ad apprendere". Con questo termine di solito si designa la disciplina (ed il relativo corpo di conoscenze) che studia problemi concernenti quantità, estensioni e figure spaziali, movimenti di corpi, e tutte le strutture che permettono di trattare questi aspetti in modo generale. La matematica fa largo uso degli strumenti della logica e sviluppa le proprie conoscenze nel quadro di sistemi ipotetico-deduttivi che, a partire da definizioni rigorose e da assiomi riguardanti proprietà degli oggetti definiti (risultati da un procedimento di astrazione, come triangoli, funzioni, vettori ecc.), raggiunge nuove certezze, per mezzo delle dimostrazioni, attorno a proprietà meno intuitive degli oggetti stessi (espresse dai teoremi).



Trattato di aritmetica di Filippo Calandri del 1491.

La potenza e la generalità dei risultati della matematica le ha reso l'appellativo di *regina delle scienze*: ogni disciplina scientifica o tecnica, dalla fisica all'ingegneria, dall'economia all'informatica, fa largo uso degli strumenti di analisi, di calcolo e di modellizzazione offerti dalla matematica.

Evoluzione e finalità della matematica



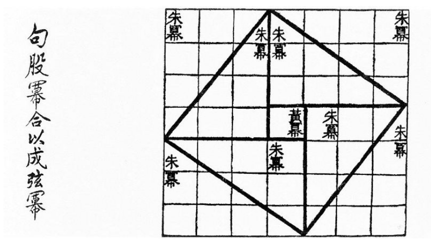
Papiro egiziano che tratta di matematica

La matematica ha una lunga tradizione presso tutti i popoli della storia antica e moderna; è stata la prima disciplina a dotarsi di metodi di elevato rigore e portata; ha progressivamente ampliato gli argomenti della sua indagine e progressivamente ha esteso i settori ai quali può fornire aiuti computazionali e di modellizzazione. È significativo che in talune lingue e in talune situazioni al termine singolare si preferisce il plurale *matematiche*.

Nel corso della sua lunga storia e nei diversi ambienti culturali si sono avuti periodi di grandi progressi e periodi di stagnazione degli studi. Questo in parte è dovuto all'importanza dei singoli personaggi capaci di dare apporti profondamente innovativi e illuminanti e di stimolare all'indagine matematica grazie alle loro doti didattiche. Si sono avuti anche periodi di arretramento delle conoscenze e dei metodi: questi però si sono riscontrati solo in relazione a eventi distruttivi o a periodi di decadenza complessiva della vita intellettuale e civile. Nella → storia della matematica degli ultimi 500 anni, in relazione al miglioramento dei mezzi di comunicazione è comunque prevalsa la crescita progressiva del patrimonio di risultati e di metodi.

Questo è dovuto alla natura stessa delle attività matematiche. Esse sono costantemente tese alla esposizione precisa dei problemi e delle soluzioni e questo impone di comunicare avendo come fine ultimo la possibilità di chiarire tutti i dettagli delle costruzioni logiche e dei risultati (alcuni chiarimenti richiedono un impegno non trascurabile, talora molti decenni). Questo ha corrisposto alla definizione di un linguaggio per molti aspetti esemplare come strumento per la trasmissione e la sistemazione delle conoscenze.

Matematica teorica e applicata



→ Teorema di Pitagora in uno scritto cinese datato tra il 500 a.C. e il 200 a.C., questo teorema ha importanti ricadute pratiche e teoriche

Le attività matematiche sono naturalmente interessate alle possibili generalizzazioni e astrazioni, in relazione alle economie di pensiero e ai miglioramenti degli strumenti (in particolare degli strumenti di calcolo) che esse sono portate a realizzare. Le generalizzazioni e le astrazioni quindi spesso conducono a visioni più approfondite dei problemi e stabiliscono rilevanti sinergie tra progetti di indagine inizialmente rivolti ad obiettivi non collegati.

Nel corso dello sviluppo della matematica si possono rilevare periodi ed ambienti nei quali prevalgono alternativamente atteggiamenti generali e valori riconducibili a *due* differenti generi di motivazioni e di approcci: le *motivazioni applicative*, con la loro spinta a individuare procedimenti efficaci, e le esigenze di *sistemazione concettuale* con la loro sollecitazione verso generalizzazioni, astrazioni e panoramiche strutturali.

Si tratta di due generi di atteggiamenti tra i quali si costituisce una certa polarizzazione; questa talora può diventare contrapposizione, anche astiosa, ma in molte circostanze i due atteggiamenti stabiliscono rapporti di reciproco arricchimento e sviluppano sinergie. Nel lungo sviluppo della matematica si sono avuti periodi di prevalenza di uno o dell'altro dei due atteggiamenti e dei rispettivi sistemi di valori.

Del resto la stessa nascita della matematica può ragionevolmente ricondursi a due ordini di interessi: da un lato le esigenze applicative che fanno ricercare valutazioni praticabili; dall'altro la ricerca di verità tutt'altro che evidenti, forse tenute nascoste, che risponde ad esigenze immateriali, la cui natura può essere filosofica, religiosa o estetica.

Negli ultimi 30 o 40 anni tra i due atteggiamenti si riscontra un certo equilibrio non privo di tensioni riemergenti, ma con molteplici episodi di mutuo supporto. A questo stato di cose contribuisce non poco la crescita del mondo del computer, rispetto al quale il mondo della matematica presenta sia canali di collegamento (che è ormai assurdo cercare di interrompere) che differenze, ad esempio differenze dovute a diverse velocità di mutazione e a diversi stili comunicativi, che proiettano le due discipline agli antipodi.

Argomenti principali della matematica

Cerchiamo ora di segnalare a grandi linee i temi oggetto della indagine **matematica**, illustrando una sorta di itinerario guidato per un progressivo accostamento delle problematiche, delle argomentazioni e delle sistemazioni teoriche.

Aritmetica

I primi problemi che inducono ad accostarsi alla matematica sono quelli che si possono affrontare con l'→ aritmetica elementare: si tratta di calcoli eseguibili con le quattro operazioni che possono riguardare contabilità finanziarie, valutazioni di grandezze → geometriche o meccaniche, calcoli relativi agli oggetti ed alle tecniche che si incontrano nella vita quotidiana.

I più semplici di questi calcoli possono effettuarsi servendosi solo di numeri interi naturali, ma presto i problemi di calcolo richiedono di saper trattare i numeri interi relativi e i numeri razionali.

Algebra

I problemi aritmetici più semplici sono risolti mediante formule che forniscono risultati conseguenti. Ad esempio: l'area di un rettangolo con lati lunghi 3 e 5 è il loro prodotto $3 \times 5 = 15$. Complicando gli enunciati diventa necessario servirsi di equazioni. Ad esempio: per il → Teorema di Pitagora, se un triangolo rettangolo ha i lati più corti (cateti) di lunghezza 3 e 4, quello più lungo (ipotenusa) ha come lunghezza il numero positivo x che risolve l'equazione:

$$x^2 - 3^2 - 4^2 = 0.$$

Le equazioni più semplici sono le equazioni lineari, sia perché rappresentano le questioni → geometriche più semplici, sia perché sono risolvibili con procedimenti standard.

Nelle formule e nelle equazioni conviene far entrare parametri i cui valori si lasciano indeterminati: in tal modo si viene a disporre di strumenti di portata più generale, che permettono di conseguire evidenti economie di pensiero. Ad esempio: in un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza a e b, la lunghezza dell'ipotenusa è il numero positivo x tale che $x^2 - a^2 - b^2 = 0$.

Per meglio valutare le formule e per risolvere molti tipi di equazioni si rende necessario sviluppare un calcolo letterale che permetta di rimaneggiarle. Le regole di questo calcolo letterale costituiscono la cosiddetta → algebra elementare.

Geometria

Lo studio della → geometria piana e spaziale riguarda inizialmente i seguenti oggetti primitivi: il punto, la retta, il → piano. Combinando questi elementi nel → piano o nello spazio si ottengono quindi altri oggetti quali segmenti, angoli, angoli solidi, → poligoni e poliedri.

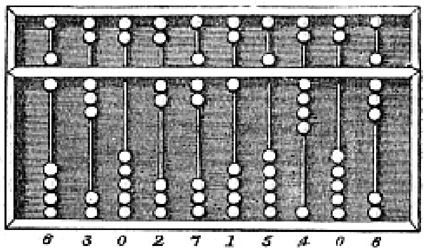
Punto, retta, → piano e spazio hanno dimensione rispettivamente 0, 1, 2 e 3. Tramite il calcolo vettoriale si definiscono e studiano spazi a dimensione più alta (anche infinita!). Gli analoghi "curvi" di questi spazi "piatti" sono le curve e le superfici, di dimensione rispettivamente 1 e 2. Uno spazio curvo in dimensione arbitraria si chiama → varietà. Dentro a questo spazio si possono spesso definire punti e rette (dette geodetiche), ma la → geometria che ne consegue può non soddisfare gli → assiomi di Euclide: una tale → geometria è generalmente detta → non euclidea. Un esempio è dato dalla superficie terrestre, che contiene triangoli aventi tutti e tre gli angoli retti!

Analisi

Lo studio dell'analisi riguarda principalmente il calcolo infinitesimale, introduce la fondamentale nozione di limite, e quindi di derivata e integrale. Con questi strumenti vengono analizzati i comportamenti delle funzioni, che spesso non hanno una descrizione esplicita ma sono soluzioni di una equazione differenziale, derivante ad esempio da un problema fisico.

Settori della matematica

Come riportato sopra, le discipline principali sviluppate all'interno della matematica sono nate dalla necessità di eseguire calcoli nel commercio, di capire i rapporti fra i numeri, di misurare la terra e di predire eventi astronomici. Questi quattro bisogni possono essere collegati approssimativamente con la suddivisione della matematica nello studio sulla quantità, sulla struttura, sullo spazio e sul cambiamento (cioè, → aritmetica, → algebra, → geometria e → analisi matematica). Oltre a queste, vi sono altre suddivisioni come la logica, la teoria degli insiemi, la matematica empirica di varie scienze (matematica applicata) e più recentemente allo studio rigoroso dell'incertezza.



Un abaco, un semplice mezzo di calcolo utilizzato fin dai tempi antichi

Quantità

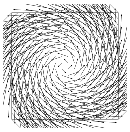
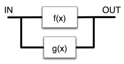
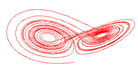
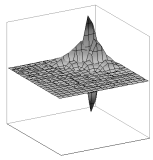
Lo studio sulle quantità inizia con i numeri, in primo luogo con i numeri interi naturali ("numeri interi") e tramite operazione aritmetiche su di essi. Le proprietà più profonde dei numeri interi sono studiate nella → teoria dei numeri, di cui costituisce un esempio famoso l'ultimo teorema di Fermat. La teoria dei numeri inoltre presenta due problemi non risolti, largamente considerati e discussi: la Congettura dei numeri primi gemelli e la congettura di Goldbach.

I numeri interi sono riconosciuti come sottoinsieme dei numeri razionali ("frazioni"). Questi, a loro volta, sono contenuti all'interno dei numeri reali, che sono usati per rappresentare le quantità continue. I numeri reali sono generalizzati ulteriormente dai numeri complessi. Queste sono i primi punti di una gerarchia dei numeri che continua ad includere i quaternioni e gli ottonioni. L'analisi dei numeri naturali conduce inoltre ai numeri infiniti.

$0, 1, 2, \ldots$	$0, 1, -1, \ldots$	$\frac{1}{2}, 0.7, \ldots$	$\pi, e, \sqrt{2}, \ldots$	$i, e^{i\pi/3}, \ldots$
Numeri naturali	Numeri interi	Numeri razionali	Numeri reali	Numeri complessi

Numero -- Numeri naturali -- Pi Greco -- Numeri interi -- Numeri razionali -- Numeri reali -- Numeri complessi -- Numeri ipercomplessi -- Quaternioni -- Ottetti -- Sedenioni -- Numeri iperreali -- Numeri surreali -- Numeri ordinali -- Numeri cardinali -- Numeri *p*-adici -- Successioni di interi -- Costanti matematiche -- Nome dei numeri -- Infinito

Strumenti

$36 \div 9 = 4$	$x^2 + 3x + 1 = 0$	$\int 1_S \, d\mu = \mu(S)$
→ Aritmetica	→ Algebra	→ Analisi
	$A^{\mu\nu} B_{\sigma\tau} = T^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ $A^{\mu}_{\nu} B^{\tau}_{\sigma} = T^{\mu\tau}_{\nu\sigma}$	$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$
Calcolo vettoriale	Calcolo tensoriale	Equazione differenziale
		
Teoria dei sistemi	Teoria del caos	Lista di funzioni

Strumenti informatici

Fra gli strumenti informatici negli ultimi anni si sono resi disponibili vari generi di pacchetti software volti ad automatizzare l'esecuzione di calcoli numerici, le elaborazioni simboliche, la costruzione di grafici e di ambienti di visualizzazione e, di conseguenza, volti a facilitare lo studio della matematica e lo sviluppo delle applicazioni che possano essere effettivamente incisive.

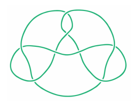
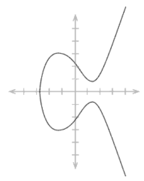
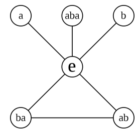
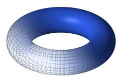
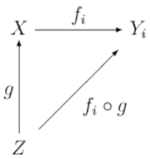
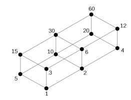
Particolare importanza ed efficacia vanno assumendo quelli che vengono chiamati → sistemi di algebra computazionale o addirittura con il termine inglese Computer algebra systems, abbreviato con → CAS.

Segnaliamo alcuni programmi open source o comunque gratuitamente disponibili per lo studio della matematica:

	Maxima è un *computer algebra system* completo scritto in Lisp. È basato su DOE-MACSYMA e distribuito con licenza GNU GPL.	http://maxima.sourceforge.net/ [1]
	Scilab è un software creato per il calcolo numerico, include un gran numero di funzioni sviluppate per le applicazioni scientifiche e ingegneristiche. È possibile aggiungere nuove funzioni scritte in vari linguaggi (C, Fortran...) e gestisce vari tipi di strutture (liste, polinomi, funzioni razionali, sistemi lineari..).	http://scilabsoft.inria.fr/ [2]
	R è un ambiente di sviluppo specifico per l'analisi statistica dei dati che utilizza un linguaggio di programmazione derivato e in larga parte compatibile con S. Venne scritto inizialmente da Robert Gentleman e Ross Ihaka.	http://www.r-project.org/ [3]
	GNU Octave è un linguaggio di alto livello pensato principalmente per il calcolo numerico ed elaborato inizialmente da J.W. Eaton e altri.	http://www.octave.org [4]

Strutture

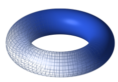
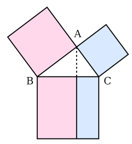
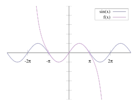
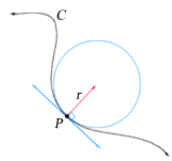
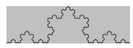
Molti oggetti matematici, come serie di numeri e funzioni, mostrano la loro struttura interna. Le proprietà strutturali di questi oggetti sono investigate nello studio di gruppi, anelli, campi e altri sistemi astratti, i quali sono a loro volta oggetti. Questo è il campo dell'→ algebra astratta. In questo campo un concetto importante è rappresentato dai vettori, generalizzati nello → spazio vettoriale, e studiati nell'→ algebra lineare. Lo studio di vettori combina tre tra le fondamentali aree della matematica: quantità, struttura, e spazio. Il calcolo vettoriale espande il campo in una quarta area fondamentale, quella delle variazioni.

		
→ Algebra astratta	→ Teoria dei numeri	Teoria dei gruppi
		
Topologia	Teoria delle categorie	Teoria degli ordini

→ Algebra astratta -- → Teoria dei numeri -- → Geometria algebrica -- Teoria dei gruppi -- Monoidi -- Analisi -- Topologia -- → Algebra lineare -- Teoria dei grafi -- → Algebra universale -- Teoria delle categorie

Spazi

Lo studio dello spazio inizia con la → geometria, in particolare con la → geometria euclidea. La Trigonometria poi combina simultaneamente spazio e numeri. Lo studio moderno dello spazio generalizza queste premesse includendo la → Geometria non euclidea (che assume un ruolo centrale nella teoria della relatività generale) e la topologia. Quantità e spazio sono trattati contemporaneamente in → geometria analitica, → geometria differenziale, e → geometria algebrica. Con la geometria algebrica si ha la descrizione di oggetti geometrici come insiemi di soluzioni di equazioni polinomiali combinando i concetti di quantità e spazio, e anche lo studio di gruppi topologici, i quali combinano a loro volte spazio e strutture. I gruppi di Lie sono usati per studiare lo spazio, le strutture e le variazioni. La Topologia in tutte le sue molte ramificazioni può essere considerata la zona di sviluppo più grande nella matematica del XX secolo ed include la congettura di Poincaré e il controverso teorema dei quattro colori, di cui l'unica prova, eseguita a computer, non è mai stata verificata da un essere umano.

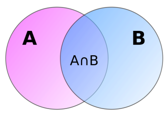
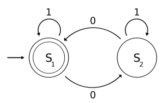
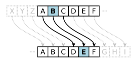
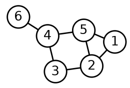
				
Topologia	→ Geometria	Trigonometria	→ Geometria differenziale	Geometria frattale

Topologia -- → Geometria -- Trigonometria -- → Geometria algebrica -- → Geometria differenziale -- Topologia differenziale -- Topologia algebrica -- → Algebra lineare -- Geometria frattale -- Teoria della misura -- Analisi funzionale

Matematica discreta

Matematica discreta è il nome comune per i campi della matematica utilizzati nella maggior parte dei casi nell'informatica teorica. Questa include teoria della computazione, teoria della complessità computazionale, e informatica teorica. La teoria della computazione esamina le limitazioni dei vari modelli di computer , compresi i modelli più potenti conosciuti - la Macchina di Turing. La teoria della complessità è lo studio delle possibilità di trattazione da parte di un calcolatore; alcuni problemi, nonostante siano teoricamente risolvibili attraverso un calcolatore, sono troppo costosi in termini di tempo o spazio tanto che risolverli risulta praticamente impossibile, anche prevedendo una rapida crescita delle potenze di calcolo. Infine la teoria dell'informazione si interessa della quantità di dati che possono essere immagazzinati su un dato evento o mezzo e quindi di concetti come compressione dei dati e entropia.

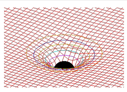
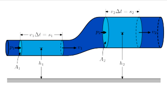
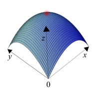
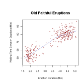
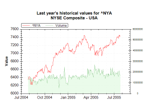
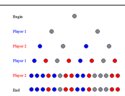
Come campo relativamente nuovo, la matematica discreta possiede un numero elevato di problemi aperti. Il più famoso di questi è il problema " P=NP?" uno dei Problemi per il millennio.[5]

$[1,2,3]$ $[1,3,2]$ $[2,1,3]$ $[2,3,1]$ $[3,1,2]$ $[3,2,1]$				
Calcolo combinatorio	Teoria ingenua degli insiemi	Teoria della computazione	Crittografia	Teoria dei grafi

Calcolo combinatorio -- -- Combinatorica -- Teoria della computazione -- -- Crittografia -- Teoria dei grafi -- Teoria dei giochi -- Teoria dei codici

Matematica applicata

La matematica applicata considera l'utilizzo della matematica teorica come strumento utilizzato per la risoluzione di problemi concreti nelle scienze, negli affari e in molte altre aree. Un campo importante della matematica è la statistica, la quale utilizza la teoria della probabilità e permette la descrizione, l'analisi, e la previsione di fenomeni aleatori. La maggior parte degli esperimenti, delle indagini e degli studi d'osservazione richiedono l'utilizzo della statistica (molti statistici, tuttavia, non si considerano come veri e propri matematici, ma come parte di un gruppo collegato ad essi). L'analisi numerica investiga metodi computazionali per risolvere efficientemente una vasta gamma di problemi matematici che sono, in genere, troppo grandi per le capacità di calcolo umane; essa include lo studio di vari tipi di errore che generalmente si verificano nel calcolo.

						
Fisica matematica	Fluido dinamica matematica	Ottimizzazione	Probabilità	Statistica	Matematica finanziaria	Teoria dei giochi

Teoremi e congetture famose

Ultimo teorema di Fermat -- Ipotesi di Riemann -- Ipotesi del continuo -- Complessità P e NP -- Congettura di Goldbach -- Congettura dei numeri primi gemelli -- Teoremi di incompletezza di Gödel -- Congettura di Poincaré -- Argomento diagonale di Cantor -- → Teorema di Pitagora -- Teorema del limite centrale -- Teorema fondamentale del calcolo integrale -- Teorema fondamentale dell'algebra -- Teorema fondamentale dell'aritmetica -- Teorema dei quattro colori -- Lemma di Zorn -- Identità di Eulero -- Congettura di Scholz -- Teorema del punto fisso di Brouwer -- Congettura di Collatz -- Teorema di Dandelin -- Teorema di Lagrange

Fondazioni e metodi

Filosofia della matematica -- Intuizionismo matematico -- Costruttivismo matematico -- Fondamenti della matematica -- Logica matematica -- Teoria dei modelli -- Teoria assiomatica degli insiemi -- Teoria delle categorie -- Theorem-proving -- Matematica inversa -- Tabella dei simboli matematici -- Logica

Matematica e storia

- Panoramica storica delle notazioni matematiche
- Cronologia della matematica
- Storia dell'insegnamento della matematica

Persone, premi e competizioni

- Astronomi
- Statistici celebri
- Medaglia Fields -- Premio Nevanlinna -- Premio Abel
- Premio Bartolozzi -- Premio Caccioppoli -- Premio Tricerri -- Premio Vinti -- Premio Fichera
- Premio Clay -- Premio Schock -- Premio Steele
- Premio Balzan
- Olimpiadi della matematica

Comunità della matematica

- Organismi associativi dei matematici
- Matematica su Internet

Documentazione della matematica

- Classificazione delle ricerche matematiche, MSC

Matematica, arte e intrattenimento

- Matematica ricreativa
- Etnomatematica

Aforismi e opinioni sulla matematica

- *Le scienza matematica in particolare mostra ordine, simmetria e limitazione; e queste sono le più meravigliose forme della bellezza.* (Aristotele, 384 a.C.-322 a.C.)
- *La matematica è la porta e la chiave delle scienze.* (Ruggero Bacone, 1214-1294)
- *La matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo.* (Galileo Galilei, 1564-1642)
- *La matematica è più di una forma d'arte.* (Takakazu Seki, 1642-1708)
- *La matematica è la Vita degli Dei.* (Novalis, 1772-1801)
- *La matematica è la regina delle scienze, l'aritmetica è a regina della matematica.* (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)
- *La matematica è un linguaggio.* (Josiah Gibbs, 1839-1903)
- *L'essenza della matematica è nella sua libertà.* (Georg Cantor, 1845-1918)
- *In realtà le matematiche esigono molta immaginazione, è impossibile essere un buon matematico se non si è, nello stesso tempo, un po' poeta.* (Sofia Kovalevskaya, 1850-1891)

- *La matematica può essere definita come la scienza in cui non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che diciamo è vero.* (Bertrand Russell, 1872-1970)
- *Un matematico, come un pittore o un poeta, apre dei sentieri. Se i suoi durano più dei loro, è perché sono fatti con le idee.* (Godfrey Harold Hardy 1877-1947)
- *I* matematici *sono dei sarti impazziti: confezionano "tutti gli abiti possibili" sperando di fare anche qualcosa adatto ad essere effettivamente indossato.* (Attribuito a David van Dantzig, 1900-1959)
- *Il linguaggio della matematica si rivela irragionevolmente efficace nelle scienze naturali […] un dono meraviglioso che non comprendiamo né meritiamo.* (Eugene Wigner, 1902-1995)
- *La matematica è linguaggio […] più logica.* (Richard Feynman, 1918-1988)
- *All'inizio e alla fine abbiamo il mistero. Potremmo dire che abbiamo il disegno di Dio. A questo mistero la matematica si avvicina, senza penetrarlo.* (Ennio De Giorgi, 1928-1996)
- *La matematica è quella parte della scienza che potresti continuare a costruire anche se domattina, svegliandoti, scopri che l'universo non c'è più.* (Citato da Dave Rusin)

Bibliografia

Letture introduttive

- Richard Courant, Herbert Robbins, Ian Stewart (1996): *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd ed., Oxford University Press, ISBN 0-19-510519-2 [trad. it. *Che cos'è la matematica*, seconda edizione riveduta da Ian Stewart, Bollati Boringhieri, 2000]
- Gian-Carlo Rota (1997): *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, ISBN 0-8176-3866-0
- Keith Devlin (2000): *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*, Owl Books, ISBN 0-8050-7254-3 [trad. it. *Il linguaggio della matematica*, Bollati Boringhieri, 2002]
- Timothy Gowers (2002): *Mathematics, a very short introduction*, Oxford University Press, ISBN 0-19-285361-9 - trad. italiana *Matematica - un'introduzione*, Giulio Einaudi (2004).
- Davis, Philip J. and Hersh, Reuben: *The Mathematical Experience*. Birkhäuser, Boston, Mass., (1980).

Matematica del XX secolo

- Morris Kline (1981): *Mathematics - The loss of Certainty*. Oxford University Press (1980). (Esposizione di livello medio dei cambiamenti di concezione della matematica che si sono imposti nel XX secolo.)
- Björn Engquist, Wilfried Schmid eds. (2001): *Mathematics Unlimited - 2001 and beyond*, Springer. Raccolta di una ottantina di articoli di matematici militanti sullo stato corrente e sulle prospettive della ricerca matematica.

Testi universitari

- Alvino A., Trombetti G.: Elementi di Matematica I, ed Liguori.
- Alvino A., Carbone L., Trombetti G.: Esercitazioni di Matematica I/1,2, ed Liguori.
- Bramanti, Pagani, Salsa: Matematica, ed Zanichelli
- Marcellini, Sbordone: Elementi di Matematica, ed Liguori

Altri progetti

- **Wikisource** contiene opere originali riguardanti la **Matematica**
- **Wikibooks** contiene testi o manuali di **Matematica**
- **Wikizionario** contiene la voce di dizionario «**Matematica**»
- **Wikiquote** contiene citazioni di o su **Matematica**

Collegamenti esterni

- www.ripmat.it [6] - Spiegazioni ed esercizi di analisi matematica.

Categorie delle macroaree per le voci riguardanti la matematica

Matematica generale | Logica matematica | Algebra | Topologia | Analisi matematica | Geometria

Matematica applicata | Matematica e società

Classificazione delle ricerche matematiche: sezioni di livello 1

00-XX 01 03 05 06 08 | 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 22 | 26 28 30 31 32 33 34 35 37 39 40 41 42 43 44 45 46 47 49 |

51 52 53 54 55 57 58 | 60 62 65 68 | 70 74 76 78 | 80 81 82 83 85 86 | 90 91 92 93 94 97-XX

ckb:بیرکاری mwl:Matemática

Riferimenti

[1] http://maxima.sourceforge.net/
[2] http://scilabsoft.inria.fr/
[3] http://www.r-project.org/
[4] http://www.octave.org
[5] Clay Mathematics Institute (http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/) P=NP
[6] http://www.ripmat.it/index.html

Storia della matematica

L'area di studio nota come **storia della matematica** riguarda le indagini sull'origine delle scoperte matematiche e, in misura minore, una indagine sui metodi e le notazioni matematiche del passato.

Illustrazione degli Elementi di Euclide. Una figura magistrale femminile, forse allegorica, insegna la geometria a dei discepoli (1309-1316 circa).

La parola "→ matematica" deriva dalla parola greca μάθημα (màthema) che significa "conoscenza o apprendimento"; μαθηματικός (mathematikós) significava invece "appassionato del conoscere". Oggi il termine si riferisce ad un corpo di conoscenze tendenzialmente ben definito che riguarda lo studio dei problemi concernenti quantità, forme spaziali, processi evolutivi e strutture formali, studio che si basa su definizioni precise e di procedimenti deduttivi rigorosi.

L'attività svolta dai matematici moderni è molto diversa da quella dei primi matematici delle civiltà antiche. Inizialmente la matematica si basò sul concetto di numero, concetto sviluppatosi nella preistoria. La matematica è stata una tra le prime discipline a svilupparsi. Evidenze archeologiche mostrano la conoscenza rudimentale di alcune nozioni matematiche molto prima dell'invenzione della scrittura.

I testi matematici più antichi provengono dall'antico Egitto, nel periodo del Regno di mezzo, (2000-1800 a.C. ca., papiro di Mosca), dalla Mesopotamia, (1900-1700 a.C.ca, tavoletta Plimpton 322) e dall'India, (800 - 600 a.C. ca, Sulba Sutras). Tutti questi testi toccano il cosiddetto → teorema di Pitagora, che sembra essere il più antico e diffuso risultato matematico che va oltre l'aritmetica e la geometria elementari.

Un aspetto importante della storia della matematica consiste nel fatto che essa si è sviluppata indipendentemente in culture completamente differenti che arrivarono agli stessi risultati. Spesso un contatto o una reciproca influenza tra popoli differenti ha portato all'introduzione di nuove idee e a un avanzamento delle conoscenze matematiche. A volte si è vista invece una decadenza improvvisa della cultura matematica presso alcuni popoli che ne ha rallentato lo sviluppo. La → matematica moderna ha invece potuto avvalersi dei contributi di persone di tutti i paesi.

Matematica primitiva

Prima che apparissero i primi documenti scritti si trovano disegni che testimoniano conoscenze della matematica e della misurazione del tempo basata sull'osservazione delle stelle. Altri artefatti preistorici scoperti in Africa e Francia, datati tra il 35.000 a.C. e il 20.000 a.C., indicano i primi tentativi di quantificazione del tempo.[1] Si suppone che i primi conteggi coinvolgessero donne che registravano i loro cicli mensili o le fasi lunari.

L'osso d'Ishango, su cui forse è incisa la sequenza dei numeri primi, risale probabilmente a venti millenni fa.

Parallelamente si andò sviluppando il concetto di numero: è probabile che le prime considerazioni riguardassero i branchi di animali e la distinzione tra i concetti di "uno" "due" e "molto", come ancor oggi fanno gli zulu, i pigmei africani, i nativi delle Isole Murray, i kamilarai australiani, e i botocudos brasiliani.[2] . Altre popolazioni sono in grado di aumentare la capacità di conteggio visivo ricorrendo all'uso, secondo un preciso ordine, di parti del proprio corpo, arrivando in tal modo a contare fino a 17, 33, 41 in funzione dei riferimenti corporali utilizzati.

Sul piano fisiologico sembrerebbe che la capacità di percepire visivamente, senza dover contare, il numero di elementi si fermi a quattro. È significativo a riguardo che in taluni linguaggi vi sia la declinazione delle forme al singolare, duale, triale, quattriale e plurale; anche in latino solo i primi quattro numeri (*unus, duo, tres, quatuor*) sono declinabili. Alcuni esperimenti effettuati sulle cornacchie indicano la capacità di distinguere fino a quattro elementi di un insieme.[3]

Successivamente tali concetti si palesarono con tacche e incisioni. Si andavano sviluppando anche le prime, semplici nozioni geometriche. I paleontologi hanno scoperto rocce di ocra in una caverna del Sud Africa adornate di configurazioni → geometriche che risalgono al 70.000 a.C. .[4]

L'osso d'Ishango, ritrovato nell'area delle sorgenti del Nilo (nord est del Congo), presenta delle incisioni che potrebbero indicare una primitiva conoscenza della sequenza dei numeri primi[5] . Monumenti megalitici che in Egitto risalgono fino al V millennio AC e in Inghilterra e Scozia a partire dal III millennio AC, con il loro disegno concretizzano idee geometriche come quelle di cerchio, ellisse e terna pitagorica e una possibile comprensione della misurazione del tempo basata sui movimenti delle stelle.[6] Intorno al 2600 a.C. le tecniche per le grandi costruzioni mostrano la padronanza della geodesia di precisione.

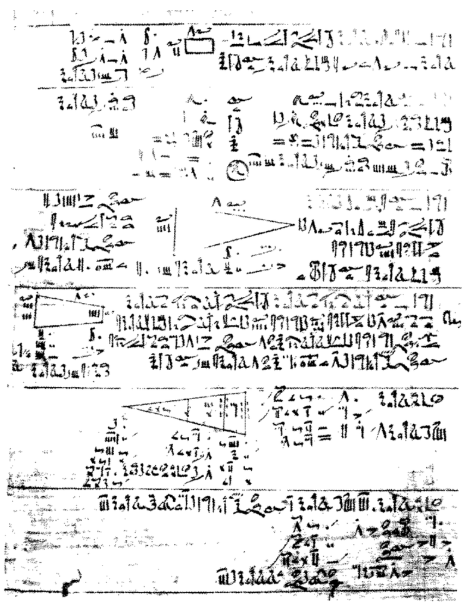
Le prime nozioni matematiche che ci sono giunte dall'antica India risalgono al periodo 3000 a.C. - 2600 a.C., prevalentemente nell'India settentrionale e nel Pakistan. Furono sviluppati un sistema di pesi e misure uniformi il quale si serviva di frazioni decimali, una tecnologia dei mattoni sorprendentemente avanzata che utilizzava i rapporti di strade disposte secondo perfetti angoli retti e di una enorme varietà di forme e figure geometriche (parallelepipedo rettangolo, botte, cono, cilindro e figure di cerchi e triangoli concentrici ed intersecati). Tra gli strumenti matematici scoperti vi sono una accurata riga con suddivisioni decimali precise e ravvicinate, uno strumento a conchiglia che serviva da compasso per misurare angoli sulle superfici piane secondo multipli di 40 − 360 gradi e uno strumento per la misura delle posizioni delle stelle per la navigazione.

La scrittura dell'Indo non è ancora stata decifrata; quindi si conosce ben poco delle forme scritte della Matematica indiana. L'evidenza archeologica ha condotto alcuni storici a credere che questa civiltà usasse un sistema di numerazione in base 8 e possedesse la nozione del rapporto fra lunghezza della circonferenza di un cerchio e del suo diametro, cioè un valore di π.[7]

Civiltà antiche

Matematica dell'Antico Egitto (2000 a.C. - 600 a.C.)

Il più antico testo egizio finora scoperto è il papiro di Mosca, datato fra il 2000 a.C. e il 1800 a.C. Come molti testi matematici antichi si presenta come un problema basato su una storia, apparentemente scritto a scopi ricreativi. La parte ritenuta più interessante è quella nella quale si espone un metodo corretto per trovare il volume di un tronco di piramide: il solido viene scomposto in parallelepipedi e prismi; sommando poi i volumi si ottiene il volume cercato. [8]



Una parte del papiro di Rhind.

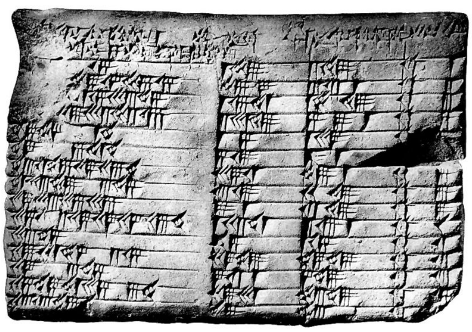
Un altro testo importante è il papiro di Rhind[9] (datato intorno al 1650 a.C.), un manuale di istruzione di aritmetica e geometria. Oltre a fornire formule per aree e procedimenti di moltiplicazione, divisione e operazioni con frazioni a numeratore unitario, contiene l'evidenza di altre nozioni matematiche come numero primo, media aritmetica, media geometrica, media armonica e numeri perfetti. Vi si trova anche una spiegazione primitiva del crivello di Eratostene e il metodo per la soluzione di una equazione lineare del primo ordine.[10]

Inoltre gli Egizi preferivano esprimere i numeri razionali come somma di frazioni con numeratore unitario oppure della frazione 2/3: per esempio 2/15 viene espressa come 1/10 + 1/30. Ancora oggi ci si riferesce a questa tecnica come frazione egiziana.[11]

Il papiro di Rhind contiene anche nozioni di geometria non banali come un metodo per ottenere un'approssimazione di π con un'imprecisione inferiore all'1%, un primo tentativo di effettuare la quadratura del cerchio e il primo uso conosciuto di un tipo di cotangente.

Nel periodo ellenistico gli studiosi dell'Egitto per i loro scritti abbandonarono l'antica lingua e adottarono la greca. Da quel momento la matematica degli egizi si fuse con quella greca dando vita alla grande matematica ellenistica.

Matematica dell'antica Mesopotamia (1900 a.C. - 300 a.C.)



La tavoletta Plimpton 322.

Diversamente dalla scarsità di fonti che ci sono rimaste riguardo alla matematica egizia, la nostra conoscenza della matematica babilonese deriva dal ritrovamento, risalente alla metà del XIX secolo, di più di 400 tavolette di argillascritte in carattere cuneiforme. La maggior parte è datata dal 1800 al 1600 a.C. e tratta argomenti che includono frazioni, → algebra, equazioni di secondo grado ed il calcolo di terne pitagoriche.[12] Le tavolette includono inoltre tavole di moltiplicazione, tavole trigonometriche e metodi risolutivi per equazioni lineari e quadratiche. La tavoletta "YBC 7289" fornisce un'approssimazione di radice di 2 accurata alla quinta cifra decimale. Una delle più importanti è certamente Plimpton 322 dove vengono elencate su tre colonne molte terne pitagoriche dimostrando così una probabile conoscenza del → Teorema di Pitagora.[13]

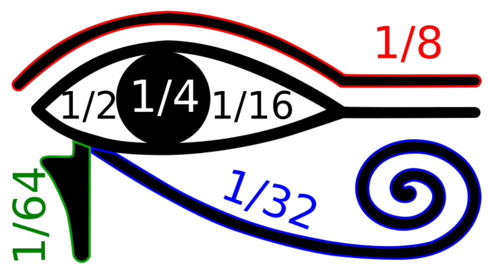
L'→ algebra babilonese fu probabilmente la più avanzata dell'intero bacino mediterraneo per secoli. I babilonesi sapevano infatti risolvere le equazioni di secondo grado con formule analoghe a quelle usato oggi (si veda approfondimento). Inoltre, anche se i problemi erano basati sulla geometria, si trattava di manipolazioni molto astratte che dimostrano un elevato grado di versatilità.

Problemi dal Papiro di Rhind

Il papiro di Rhind (o papiro di Ahmes) è una delle più importanti testimonianze della matematica egizia. Vi vengono esposti alcuni problemi e la loro risoluzione:

Il problema 26 recita: «Una quantità, il suo quarto (aggiunto) su di essa fa 15»,

che nella notazione moderna può essere scritto come:



Le sei parti che compongono l'occhio di Horus, evidenziate con colori diversi.

$$x + \frac{1}{4}x = 15.$$

L'equazione di primo grado vien risolta tramite il metodo di falsa posizione: viene assegnato il valore provvisorio *x = 4*. L'uguaglianza diviene 4 + 1 = 15. Notando che il rapporto tra 15 e 5 è 3 se ne conclude che anche il rapporto tra l'ingonita e 4 è 3. Viene dunque trovato il valore di corretto *x = 12*.

Nel problema 30 un problema analogo viene risolto col metodo comune

In un altro problema si chiede di trovare l'area del cerchio di diametro 9, eguagliandola a quella di un quadrato di lato 8. Ciò pone un valore di pi greco che corrisponde a 3,16.

Vengono anche affrontate le progressioni geometriche: secondo un mito egizio infatti l'occhio del dio Horus era stato diviso in sei parti. Nel papiro si dice che le sei parti sono sono le potenze negative del due da 1/2 a un 1/64. Si chiede poi di trovare l'area che è 63/64.

La matematica babilonese faceva uso di un sistema di numerazione posizionale sessagesimale (cioè a base 60). Lo sviluppo della matematica babilonese probabilmente fu favorito da questo particolare sistema di numerazione, possedendo il numero 60 numerosi divisori. L'uso di un sistema posizionale per rappresentare i numeri (come quello arabico in uso in tutto il mondo oggi) differenzia i Babilonesi da Egiziani, Greci e Romani: nella rappresentazione babilonese le cifre scritte nella colonna sinistra rappresentano valori più grandi. Tuttavia in un primo tempo i Babilonesi non usavano la cifra zero. Questo faceva sì che spesso il valore posizionale di una cifra dovesse essere dedotto dal contesto. Successivamente fu introdotta una cifra che faceva da zero ma sembra che i Babilonesi non la usassero nella posizione delle unità (i numeri 22 e 220 erano, per esempio, indistinguibili).[14]

Matematica dell'antica India (900 a.C. - 200)

Dopo il collasso della Civiltà della valle dell'Indo nel 1500 a.C., la scrittura scomparve dall'Asia meridionale per lungo tempo. Sono assai controverse le date nelle quali la pratica dello scrivere riemerse nell'India e in cui la scrittura Brahmi fu sviluppata. Recenti evidenze archeologiche la datano intorno al 600 a.C., mentre alcuni studiosi propongono anche il 1000 a.C.. Se le date più lontane sono corrette, forse Pitagora visitò l'India come sostenuto alcuni storici (Florian Cajori) altrimenti la matematica indiana può aver beneficiato del contatto con il mondo greco in seguito alla invasione di Alessandro magno. È anche possibile (come sostenuto dalla maggioranza degli studiosi) che le due tradizioni matematiche si siano sviluppate indipendentemente.

Nell'era vedica la matematica non era studiata solo per scopi scientifici, ma si incontrano esposizioni matematiche avanzate diffuse in tutto il grande corpo dei testi indiani di questo periodo. La Yajur-Veda composta dal 900 a.C., per prima affronta il concetto di infinità numerica. Yajnavalkya (900-800 a.C. circa) calcolò il valore di π con 2 cifre decimali..[15] , Le Sulba Sutras (800-600 a.C. circa) sono testi di → geometria che usano numeri irrazionali, numeri primi, la regola del tre e radici cubiche, danno un metodo approssimato per la quadratura del cerchio.[16] , risolvono equazioni lineari ed equazioni quadratiche, determinano algebricamente terne pitagoriche e danno un enunciato e una dimostrazione numerica del → teorema di Pitagora. Inoltre viene espressa un algoritmo infinito per il calcolo di radice di 2 [17] con cui vengono clacolate le prime 5 cifre decimali.

Pingala (IV secolo a.C.-III secolo a.C.) inventò un sistema binario, studiò quelli che in seguito verranno definiti la sequenza di Fibonacci e il triangolo di Pascal; inoltre formulò la definizione di matrice. Tra il IV secolo a.C. ed il III secolo d.C. i matematici indiani cominciarono ad impostare i loro studi in una prospettiva unicamente speculativa. Furono i primi a sviluppare ricerche su teoria degli insiemi, logaritmi, equazioni di terzo grado, equazioni di quarto grado, serie e successioni, permutazioni e combinazioni, estrazione di radici quadrate, potenze finite e infinite. Il *Manoscritto Bakshali*, composto tra il III secolo a.C. ed il III secolo d.C., include soluzioni di equazioni lineari con più di cinque incognite, la soluzione di equazioni quadratiche, geometriche, sistemi di equazioni, l'uso del numero zero e i numeri negativi. Vi si trovano anche accurati algoritmi per il calcolo di numeri irrazionali.

Matematica greco-ellenistica (circa 550 a.C. — 400 d.C.)

Per quella che spesso viene chiamata *matematica greca* è opportuno distinguere due periodi. Nel primo periodo, quello della massima importanza economica e politica delle città greche e delle loro colonie, si colloca la matematica sviluppata dai matematici di queste città. Nel successivo periodo ellenistico (che si può far iniziare nel 323 a.C. e concludere intorno al V secolo dopo Cristo) si colloca la produzione di tutti gli autori che operarono nel mondo ellenistico accomunati dell'uso della lingua greca. Molte delle più grandi menti di questo periodo come Archimede e Apollonio non vissero nell'area geografica corrispondente all'attuale Grecia, pur essendo protagonisti della cultura ellenistica di lingua greca diffusasi in molte aree mediterranee.

Per quanto i più antichi testi di matematica trovati in greco siano stati scritti posteriormente al periodo ellenistico, parecchi di essi vengono ritenuti copie di opere scritte durante e anche prima di questo periodo. Nondimeno, la datazione della matematica greca è più attendibile rispetto a quella degli scritti matematici più antichi, poiché esistono numerose cronologie che, sovrapponendosi, riportano gli avvenimenti anno per anno fino ad oggi.

Matematica greca arcaica (600-300 a.C)

La matematica greca è molto più moderna di quella sviluppata dalle precedenti culture quali quella egiziana e babilonese, in quanto tali precedenti culture utilizzavano il ragionamento empirico che sfrutta le osservazioni ripetute per fondare le regole della matematica. La matematica greca antica, all'opposto, si basa sul ragionamento deduttivo, che partendo da assiomi più o meno scontati usa rigorosi ragionamenti per dimostrare teoremi..[20] Su questa idea ancor oggi si basa tutta la matematica moderna. I Greci si occuparono quasi esclusivamente di → Geometria e, secondo i loro canoni si potevano usare solo due strumenti per la costruzione e lo studio di figure geometriche: la riga (non taccata) e il compasso (che si chiudeva non appena sollevato dal foglio, e quindi non poteva servire per riportare una misura). Ragionamenti che coinvolgevano altri strumenti erano a volte utilizzati, ma venivano considerati non rigorosi.

Si ritiene che la matematica greca abbia avuto inizio con Talete di Mileto (624-546 a.C. ca.) e Pitagora di Samo (582 — 507 a.C. ca.). Questi furono probabilmente influenzati dalle idee della matematica egiziana, della matematica babilonese anche se riuscirono certamente a rieaborare in modo originale le conoscenze di questi popoli. [21]

Talete si occupò di geometria, scoprendo per esempio il teorema secondo il quale un triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre rettangolo e molte proposizioni riguardanti i triangoli simili. Grazie a tali teoremi, secondo la leggenda, riuscì a determinare l'altezza della piramide di Cheope misurando la sua ombra.

Pitagora invece fu il fondatore della Scuola pitagorica, una setta i cui membri si dedicavano alla ricerca matematica. La scuola pitagorica presentava anche connotazioni filosofiche e mistiche: i membri per esempio seguivano ideali di perfezione nel numero cinque (e quindi al pentagono e al dodecaedro) e nella sfera. Tutta la filosofia della setta era fondata sui numeri naturali e sui loro quozienti, i numeri razionali. Inoltre i pitagorici credevano nella metempsicosi ed erano vegetariani.[22] Questa comunità diede importanti contributi alla geometria, primo fra tutti la dimostrazione del → Teorema di Pitagora (sembra già trovato empiricamente da egiziani e babilonesi) e alla → teoria dei numeri, come la classificazione e lo studio dei numeri figurati e dei numeri perfetti, la scoperta delle terne pitagoriche e del crivello di Eratostene.

Euclide

Paradossalmente la scoperta più importante della comunità fu forse la dimostrazione che il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato (ossia radice di 2) non è esprimibile come rapporto di due interi. Questa scoperta, che prova l'esistenza dei numeri irrazionali, andava contro a tutta la filosofia della setta. Secondo la tradizione riportata da alcuni autori posteriori, il pitagorico Ippaso di Metaponto fece tale scoperta durante un viaggio in nave, ed ebbe l'infelice idea di comunicarla senza indugio agli altri adepti della setta, i quali comprendendone immediatamente le conseguenze gettarono lo stesso Ippaso in mare. Altri autori menzionano semplicemente il fatto che Ippaso morì in un naufragio. Di fatto, se pure ci fu un tentativo dei pitagorici di tenere nascosta la scoperta, questo non riuscì. Oggi si ritiene più probabile che la dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ sia più tarda e che i pitagorici abbiano osservato l'irrazionalità della diagonale del pentagono di lato unitario (ossia sezione aurea)[23] .

Più tardi la matematica greca si diffuse e nacquero per esempio i tre problemi classici: la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, da risolvere usando solo riga e compasso. L'impossibilità di risolvere questi problemi è stata provata solo nell'epoca moderna; già nell'antichità furono trovate soluzioni che però coinvolgevano altri strumenti oltre ai due "canonici". Nello studiare questi problemi si distinsero matematici come Archita di Taranto, Ippia di Elide e Ippocrate di Chio. Quest'ultimo riuscì nella difficile impresa della quadratura delle lunule circolari ossia parti di paino racchiuse da due circonferenze passanti per due punti dati. [24] Eudosso di Cnido fu invece il primo a cercare di approssimare un cerchio tramite poligoni regolari (metodo di esaustione). Importante in quel periodo fu anche l'opera logica di Aristotele che, nell' *Organon*, sviluppò il concetto di sillogismo.

Matematica greca ellenistica (300 a.C.-400 d.C.)

Successivamente, con la fondazione ad Alessandria della Biblioteca e del Museo, che raccoglievano le più grandi menti dell'epoca, la città egizia divenne il centro culturale più importate dell'età ellenistica. In questo periodo si situa l'opera di Apollonio di Perga (262-190 a.C ca.), di Euclide (367-283 a.C. ca.) e di Archimede di Siracusa (284-218 a.C. ca.). Il primo è noto soprattutto per l'imponente opera *Le Coniche* nella quale definiva e studiava le sezioni coniche: ellisse, parabola e iperbole e che ebbe grande importanza nel mondo europeo.


Archimede di Siracusa

L'opera più importante di Euclide sono invece gli *Elementi* in cui egli raccoglie tutti i teoremi elementari di Aritmetica ma soprattutto di Geometria, per esempio i principali teoremi di geometria piana e solida come il → Teorema di Pitagora e la costruzione dei solidi regolari o una dimostrazione dell'infinità dei numeri primi . Gli *Elementi* sono stati considerati il più attendibile manuale di matematica per secoli e secoli. L'importanza di questo capolavoro sta anche nel fatto che Euclide basa su pochi assiomi fondamentali (in particolare su cinque che riguardano la → geometria) tutta la matematica elementare e dà prova di un uso esemplare della logica matematica. La fama del trattato era tale che questo era conosciuto da tutte le persone colte dell'Occidente fino al XX secolo.[25] Si dice inoltre che Isaac Newton abbia riso una sola volta: quando gli chiesero se valeva la pena studiare gli Elementi.[26]

Archimede è da molti considerato il più grande matematico del periodo greco ellenistico[27] ed è inoltre considerato il padre della fisica → matematica.[28] Lasciò innumerevoli opere nelle quali dà prova di una grande inventiva. Riuscì ad approssimare π circoscrivendolo tra due numeri limite, a scoprire la formula per calcolare il volume e la superficie della sfera e l'area del cerchio. Descrisse la costruzione dei solidi semiregolari o archimedei. Anticipò in molti testi il calcolo infinitesimale come per esempio nell'opera *Sulle spirali* dove trova la tangente e la lunghezza di un arco di spirale archimedea o nella *Quadratura della parabola* dove in appendice calcola addirittura il risultato di una serie geometrica [29] . Fu anche un ingegnere valente e molte sono le opere meccaniche che secondo la leggenda avrebbe costruito. Tramite queste macchine, in particolare gli specchi ustori, avrebbe difeso la città di Siracusa dall'assedio romano. Una volta conquistata la città, nonostante il console Marcello avesse ordinato di non ucciderlo, sarebbe stato ucciso da un soldato penetrato in casa sua mentre il matematico era intento nei suoi calcoli. In realtà lo stesso Plutarco tramanda ben tre versioni della morte di Archimede nell'assedio di Siracusa. [30]

Ipparco di Nicea stilò la prima tavola trigonometrica con l'ausilio della quale poteva riolvere qualsiasi triangolo.[31] [32] Il suo lavoro fu ripreso da Claudio Tolomeo che ricavò inoltre le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno. Entambi furono anche valenti astronomi.

Dopo questi sviluppi la matematica ellenistica entrò in crisi: i romani, fatte salve le nozioni che servivano loro per l'ingegneria, non ebbero alcun interesse verso la → matematica che fu sempre più emarginata e assimilata all'astrologia. Secondo alcuni anche l'inadeguatezza dell'algebra geometrica greca può aver contribuito al tramonto della matemtica greco-ellenistica. [33] [34]

Gli ultimi matematici degni di nota furono Diofanto di Alessandria che nella sua *Aritmetica* gettò le basi per la teoria delle equazioni diofantee e lo studioso di Geometria Pappo di Alessandria che dimostrò immportanti teoremi come il → Teorema dell'esagono e il teorema di Pappo Guldino.

Anche i cristiani e le popolazioni barbariche dimostrarono poco interesse per la matematica: anche se formalmente aritmetica e geometria facevano parte del Quadrivio, le nozioni studiate erano davvero minimali. Sant'Agostino parlò contro i matematici (assimilati comunque agli astrologi) arivando a ventilare la possibilità che i matematici avessero stipulato un patto col diavolo. [35] La matematica europea si stava avviando a un lungo declino.

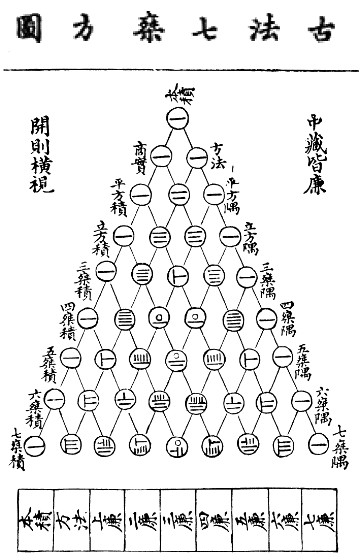
Matematica medioevale

Matematica delle civiltà precolombiane

Il periodo classico della civiltà Maya si situa tra il 200 e l' 800 d.C. Gli sviluppi della matematica Maya furono dovuti principalmente ai loro studi astronomici. Essi usarono un sistema posizionale a base venti nel quale appariva anche lo 0. Tuttavia i Maya non considerarono mai lo 0 come un numero ma solo come una cifra.

La civiltà Inca (1400-1530) invece sviluppò un sistema di numerazione a 10. Per indicare i numeri essi usavano i cosiddetti quipu, un insieme di lunghi fili paralleli. Ogni filo rappresentava una potenza di dieci e il numero di nodi la cifra in quella posizione.

Matematica cinese (200 a.C. - 1200)



Triangolo di Tartaglia disegnato dal matematico cinese Zhu Shijie nel 1303.

In Cina, nel 212 a.C. (alla fine del lungo periodo della guerra civile degli Stati combattenti) l'imperatore Qin Shi Huang (Shi Huang-ti) ordinò il rogo di tutti i testi scritti. Benché alcuni testi si siano salvati, molto poco è conosciuto della matematica cinese precedente a questa data. Un altro fattore che non ha favorito la nostra conoscenza è il fatto che gran parte delle opere erano scritte sul bamboo, molto deperibile.

Del precedente periodo Shang (1500 a.C. - 1027 a.C.) il più antico reperto di interesse per la storia della matematica consiste in un guscio di tartaruga su cui sono incisi dei numeri che usano una specie di notazione decimale.[36] [37] Il numero 123 ad esempio è scritto con il simbolo di 1 seguito da quello di centinaia, il simbolo di due seguito da quello di decine e il simbolo di 3. Non sappiamo con precisione quando questo sistema, che era il più avanzato al mondo in quel periodo, fu inventato.

Delle conoscenze precedenti al rogo dei libri ci rimangono pochissime testimonianze. La più importante di queste è *I nove capitoli dell'Arte matematica* che consiste in una raccolta di 246 problemi riguardanti l'agricoltura, il commercio e l'ingegneria.Molti dei problemi esposti nel libro riguardano canne di bambù spezzate [38] che formano dei triangoli rettangoli. la soluzione si ottiene tramite applicazione del → Teorema di Pitagora.

I matematici cinesi svilupparono una particolare predilezione per i quadrati magici. Secondo la leggenda il primo di questi venne comunicato all'imperatore da una tartaruga uscita dal fiume.[39] Questo interesse portò i cinesi a studiare i sistemi di equazioni lineari e a scoprire la cosidetta Regola di Horner. [40]

Zu Chongzhi (quinto secolo) calcolò il valore di π con sette cifre decimali esatte. Questa fu la miglior stima della costante per i successivi mille anni.[18]

Nello studio dei sistemi furono anche i primi a sviluppare concetti analoghi a quelli di matrice.[41] Fu inevece il matemtico Seki Kōwa (in realtà giapponese) a introdurre nel 1683, dieci anni prima di Leibniz, il concetto di determinante.

I Cinesi vedevano analogie tra numeri e sessi: i numeri pari erano femminili quelli dispari maschili. I dispari non primi erano considerati effeminati. [42] Inoltre indicavano il numeratore di una frazione come figlio e i denominatore come madre. [43]

Già nel secolo IV, in Cina si studiavano le equivalenti dell nostre congruenze lineari. per la risoluzione di queste fu fondamentale la scoperta del Teorema cinese del resto.

Nei successivi secoli la → matematica cinese si sviluppò velocemente ,superando quella europea del tempo. Le conoscenze cinesi includevano i numeri negativi, il Teorema binomiale e il Teorema cinese del resto. I cinesi svilupparono anche il Triangolo di Pascal (o di Tartaglia) che si trova nel frontespizio del trattato *Ssu Yuan Yu* scritto dal matematico Zhu Shijie.[44]

Matematica indiana classica (400 - 1500)

Aryabhata

Non si trova continuità negli sviluppi della → matematica indiana: infatti i contributi importanti sono separati da lunghi intervalli di stagnazione in cui non si raggiunse nessun risultato. [45]

Il *Surya Siddhanta* scritto circa nel 400 introduceva le funzioni trigonometriche del seno, coseno e le loro inverse. Gli indiani si occuparono anche di astronomia riuscendo a compilare precise tavole astronomiche che descrivevano il movimento apparente degli astri in cielo. Calcolarono l'anno siderale in 365.2563627 giorni, un valore inferiore di 1,4 secondi a quello accettato al giorno d'oggi. Questi lavori, durante il medioevo, furono tradotti in Arabo e in Latino.

Nel 499 Aryabhata introdusse il senoverso e compilò le prime tavole trigonometriche. Nell' *Aryabhata* illustrò i metodi di calcolo di aree e volumi dei principali enti geometrci (non tutti corretti) e inoltre in questa opera apparela notaizone posizionale decimale. Calcolò il valore di π con quattro cifre decimali. [46]

Nel VII secolo invece Brahmagupta (598– 668) per primo nel *Brahma-sphuta-siddhanta* usò senza riserve lo 0 e il sistema decimale. Scoprì inoltre l'identità e la formula che portano il suo nome non capendo tuttavia che era valida solo per i quadrilateri ciclici; cioè inscivilibili in una circonferenza. Esplicitò le regole di moltiplicazione tra numeri positivi e negativi.[47] È da una traduzione del testo che i matematici arabi accettarono il sistema decimale.

Nel XII secolo, Bhaskara (1114 – 1185) scoprì le formule di addizione e sottrazione delle funzioni trigonometriche e concepì dei metodi molto vicini al calcolo differenziale.[48] introducendo concetti simili alla derivata: per calcolare l'angolo di posizione dell'eclittica ad esempio calcolò correttamente l'equivalente delle derivate delle funzioni trigonometriche.[49] Provò anche un equivalente del Teorema di Rolle e studiò l'equazione di Pell. Afferma che qualsiasi quantità divisa per 0 dà infinito.[50] Si dice che avesse predetto la data in cui sua figlia Lilavati si sarebbe dovuta sposare per avere un matrimonio felice; tuttavia una perla cadde nel compelsso meccanismo che doveva contare il tempo e così Lilavati rimase vedova. Per conolarla il padre diede il suo nome al suo più importante trattato di matematica. [51]

Dal XIV secolo Madhava di Sangamagrama scoprì l'attuale espansione in serie di Taylor della funzione arcotangente ottenendo poi varie serie infinite che danno come risultato π (tra cui la formula di Leibniz per pi) grazie alle quali riuscì a calcolare le prime 11 cifre decimali del numero. [52] . Creò la scuola del Kerala i cui membri nei successivi secoli svilupparono il concetto di virgola mobile e utilizzarono metodi iterativi per la soluzione delle equazioni non lineari. Trovarono inoltre le espansioni in serie di Taylor delle altre funzioni trigonometriche.[53] Nonstante si fossero avvicinati a concetti quale quello di derivata i matemtici della scuola del Kerala non riuscirono mai a sviluppare una teoria globale del calcolo.[54]

Nel XVI secolo per la matematica indiana, anche per via di un periodo di forte instabilità politica, iniziò il declino.

Matematica persiana e araba (750 - 1400)

Una pagina di un manoscritto di al-Khwarizmi.

L'Impero islamico arrivò a dominare, nell'VIII secolo d.C. il Nord Africa, la Penisola iberica e parte dell'India. Entrarono così in contatto con la matematica ellenistica e con quella indiana. Nella seconda metà del VIII secolo Baghdad divenne un nuovo centro del sapere a livello mondiale. Sovrani come al-Mansur, Harun al-Rashid e al-Ma'mun si dimostrarono attenti nei confronti della matematica e preservarono dalla distruzione molte opere matematiche greche che altrimenti sarebbero probabilmente andate perse.[55] . Thābit ibn Qurra fondò una scuola di traduttori che tradusse in arabo le opere di Archimede, Euclide e Apollonio. Gli Arabi tradussero, inoltre, molti testi indiani. Questi fatti contribuirono non poco alla nascita della matematica islamica. Molti tra i più grandi matematici islamici erano persiani.

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 Ca), un matematico persiano, scrisse importanti volumi sul sistema di numerazione indiano e sui metodi per risolvere equazioni. La parola "algoritmo" deriva dal suo nome e "→ Algebra" dal titolo della sua opera più importante, l'*al-Jabr wa al-muqābala*. In questa opera Al-Khwarizmi oltre a intordurre il sistema decimale nel mondo arabo trova metodi grafici e analitici per la risoluzione delle equaizoni di secondo grado con soluzioni positive (vedi approfondimento)[56] . Il nome *al-jabr* si riferisce al nome che il matemtico dà all'operazione di riduzione di termini uguali da parti oppote dell'uguale tramite sottrazione.[57] Per questi motivi egli è considerato da molti il fondatore dell'→ algebra moderna.

Ibn Qurra studiò i numeri amicabili. Altri sviluppi alla materia furono apportati da Abu Bakr al-Karaji (953-1029) nel suo trattato *al-Fakhri*. Nel X secolo, Abu l-Wafa tradusse le opere di Diofanto in arabo e studiò la trigonometria ottenendo le formule di addizione e sottrazione per il seno. Alhazen studiò invece l'ottica.

Omar Khayyam (1048-1131) fu poeta e matematico. Scrisse le *Discussioni sulle difficoltà in Euclide* nel quale tentava di dimostrare il quinto postulato di Euclide riguardante le rette parallele (data una retta e un punto fuori di essa esiste solo una parallela alla retta data passante per quel punto) partendo dagli altri quattro; impresa che sarebbe poi diventata un "chiodo fisso" per i matematici. Diede una soluzione geometrica all'equazione di terzo grado ma non riuscì a risolverla per radicali. Il matematico Nasir al-Din Tusi sviluppò invece nel XIII secolo la trigonometria sferica e scoprì la legge dei seni per il triangolo sferico.[58]

Nel XIV secolo, Ghiyath al-Kashi calcolò il valore di π con 16 decimali. Al-Kashi trovò anche la regola di Ruffini per scoprire la radice ennesima di un'equazione. Inoltre nella sua opera si torva il primo esempio conosciuto di dimostrazione per induzione tramite la quale viene dimostrato il teorema binomiale. Il matemtico era anche a consocenza del triangolo di Tartaglia.[59]

Nel XIII secolo e nel XIV secolo la matematica araba entrò in crisi a causa di un periodo di forte instabilità politica e religiosa, nonché per il diffondersi sette di movimenti ostili al sapere matematico).[60] I molti popoli che si susseguirono nel mondo arabo dal XII secolo contribuirono al definitivo declino della scienza e della matematica arabe.

Matematica medioevale europea (1000-1400)


Frate Luca Pacioli autore di una *Summa* dove era raccolto tutto il sapere matemtico del XV secolo.

Subito dopo la caduta dell'impero romano gran parte della matematica greca andò persa. Molte biblioteche, come quella di Alessandria, andarono distrutte. Gli studiosi cristiani non diedero importanza alla matematica nei loro lavori, ma anzi in alcuni casi parlarono anche contro di essa. [61]

Nei primi secoli dopo la fine dell'Impero romano non ci fu quasi nessun progresso nel sapere matematico.[33] Anche se la matematica faceva parte del Quadrivio le nozioni matematiche studiate riguardavano soprattutto l'agrimensura. L'astrologia invece fu assimilata alla matematica.

Verso l'XI secolo la cultura occidentale entrò in contatto con quella araba, scientificamente molto superiore e, grazie anche alla scuola di treduttori di Toledo e a persone come Adelardo di Bath, iniziarono a circolare in Europa le traduzioni dall'arabo di classici matematici antichi come gli *Elementi* ma anche di lavori arabi quali l'*Algebra* di al-Khwarizmi e greci come l'*Almagesto* di Tolomeo. [62] Verso quel periodo si situa anche la rinascita economica dell'Occidente che portò i commercianti a fare sempre più uso della matematica.

Leonardo Pisano, detto anche Leonardo Fibonacci (1170-1250 ca) fu probabilmente il più grande matematico del periodo. [63] Nel suo *Liber Abaci* fece conoscere in Europa il sistema dei numerazione decimale e lo zero. Nel trattato si trovano molti problemi di natura pratica o commerciale, alcuni di essi comunque svelano le grandi doti di matematico di Fibonacci come quello della moltiplicazione dei conigli che genera la sequenza di Fibonacci.

Inoltre espone le regole per trasformare una qualunque frazione in una frazione egizia. Nella sua opera vengono esposte anche l'identità di Fibonacci e il metodo di falsa posizione e quello della doppia falsa posizione.

Nei secoli successivi lo sviluppo della matematica accelerò. Nicola Oresme (1323 – 1382) anticipò anche i concetti di potenza irrazionale e grafico di una funzione: fu infatti il primo a avere l'idea di rappresentare il movimento con un grafico alla maniera moderna .[64] Fu uno dei primi ad occuparsi di serie infinite, scoprendo i risultati di molte di esse e dimostrando la divergenza della serie armonica.[65] Lo studio delle serie infinite fu forse l'argomento più innovativo della matematica medioevale. Oresme rimane una delle menti più innovative di tutta la → matematica medioevale europea ma molte delle sue idee furono dimenticate e dovettero aspettare secoli per essere riscoperte e rielaborate.

Nel XV secolo si può situare la nascita della matematica europea moderna. Le opere del tedesco Regiomontano apportarono un enorme sviluppo alla trigonometria. Luca Pacioli (1445-1514) riassunse tutta le conoscenze matematiche del tempo nella sua *Summa*. Gli artisti Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Albrecht Durer si interessarono invece di prospettiva e di geometria descrittiva.

XVI secolo


Niccolò Tartaglia.

Nell'Europa del cinquecento, e in particolare in Italia, si diffuse un forte interesse per l'→ algebra. In questo secolo si cominciarono ad accettare i numeri negativi chiamati spesso "falsi". I matematici iniziarono a sfidarsi pubblicamente a risolvere alcuni problemi. Su queste competizioni si basava gran parte della fama dei matematici; è dunque comprensibile come molte scoperte rimanessero per molto tempo segrete, in modo da poter servire come "arma" nei confronti pubblici.

Fu questo il caso della soluzione per radicali dell'equazione di terzo grado, scoperta nel 1510 da Scipione del Ferro, ma tenuta segreta e riscoperta successivamente da Niccolò Tartaglia (1550-1557), uno dei più importanti matematici del periodo e autore fra l'altro di una traduzione degli *Elementi* in italiano. Tartaglia riuscì così a diventare uno dei matematici più in vista dell'epoca e confidò, sembra sotto giuramento, il metodo risolutivo a un altro protagonista della matematica rinascimentale, Girolamo Cardano (1501-1576). Egli non esitò però a pubblicarlo risolutivo nella sua opera *Ars magna* del 1545. Ciò fece nascere una disputa tra i due che si concluse con la sconfitta di Tartaglia (Si veda l'approfondimento per maggiori informazioni).

Nell' *Ars magna* veniva anche esposto il metodo risolutivo dell'equazione di quarto grado, scoperto non da Cardano, bensì dal suo allievo Ludovico Ferrari. Molti considerano la pubblicazione dell' *Ars magna* come il vero atto d'inizio della matematica moderna. [66]

Cardano fu il primo ad accorgersi che in certi casi la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado richiedeva di calcolare la radice quadrata di un numero negativo, nel caso in cui c'erano tre soluzioni (reali). Rafael Bombelli (1526-1573), nella sua *Algebra*, propose di trattare le radici quadrate dei numeri negativi (chiamati da Bombelli, più di meno) come se fossero dei numeri a tutti gli effetti, fintantoché venissero eliminati alla fine delle operazioni di risoluzione. Bombelli dimostrò un'apertura notevole, visto che alcuni fra i suoi contemporanei faticavano persino ad accettare la nozione di numero negativo.[67]

François Viète (1540-1603) dette importanti contributi alla trigonometria scoprendo le formule di prostaferesi. Scoprì inoltre la famosa formula di Viète per il calcolo di pi greco. A lui e a Albert Girard sid evono anche le formule che colegano i coefficienti e le radici di un'equazione. Risolse anche una particolare equazione di quarantaciquesimo grado utilizzando metodi trigonometrici e trovò anche un altro modo per risolvere l'equazione di terzo grado (vedi approfondimento).

Forse la scoperta più innovativa del periodo furono i logaritmi descritti da John Napier nel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Questa scoperta facilitò enormemente i calcoli soprattutto astronomici, riducendo le moltiplicazioni a somme e l'elevazione a potenza a moltiplicazioni.

Nel XVI secolo vi fu anche un'ampia rivoluzione della notazione matematica: nel 1489 Johann Widman usò per primo i segni + e -, nel 1557 Robert Recorde inventò il segno =, successivamente William Oughtred utilizzò il segno *x* per indicare la moltiplicazione e Thomas Harriot i segni > e <. Viète fu invece il primo ad usare lettere per indicare i coefficienti delle equazioni, pratica che si sarebbe evoluta fino alla forma attuale assunta con Cartesio.

XVII secolo


Pierre de Fermat

Nel XVII secolo la matematica europea ricevette un forte impulso. Gli uomini di scienza iniziarono a riunirsi in accademie o società come la Royal Society e la Académie française e furono istituite le prime cattedre di → matematica nelle università. Ciò indubbiamente favorì lo sviluppo delle tecniche matematiche.

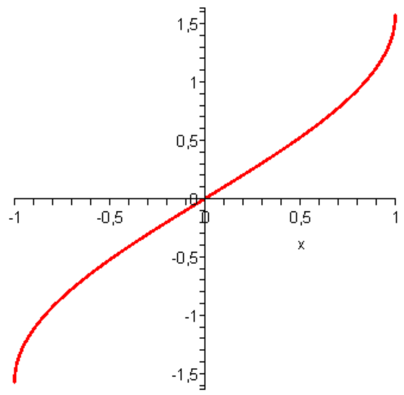
Gli italiani Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e Evangelista Torricelli (1608-1647) inventarono il cosiddetto "metodo degli indivisibili" che lavorava sulle figure solide come composte da infiniti piani di spessore infinitesimo. Nonostante questo tipo di geometria fosse fondato su basi poco rigorose e soggetto perciò a molte critiche, usandolo si giunse ad importanti risultati come il teorema di Pappo Guldino e il principio di Cavalieri. Il metodo era in realtà una prima formulazione della geometria integrale ma ancora i concetti che stavano alla base dell'→ analisi non erano molto chiari.

Un ulteriore sviluppo della geometria si ebbe nel 1637 quando Descartes (Cartesio) (1596-1650) pubblicò *La Gèometrie* nel quale illustrava i concetti fondamentali della → geometria analitica, già scoperti in realtà da Fermat. Il principio della geometria analitica consisteva nel tracciare nel piano due assi perpendicolari detti appunto cartesiani (ascissa e ordinata) e di descrivere una curva come l'insieme di soluzioni di un'equazione a due incognite. La geometria si riduceva così allo studio di equazioni algebriche. Questa scoperta portò una rivoluzione concettuale enorme poiché da quel punto in poi linee piani e curve furono visti in maniera algebrica, e non il contrario come si era fatto fino ad allora.

Successivamente Gilles Roberval, Christian Huygens, John Wallis, Christopher Wren e Blaise Pascal (1623-1662) applicarono la geometria analitica per risolvere vari problemi riguardanti quadrature di archi e di aree sottese da varie curve. Pierre Fermat (1601-1665) e Cartesio si occuparono invece del problema delle tangenti (la determinazione della tangente in un dato punto di una curva) dando due interpretazioni diverse. Il metodo di Fermat è il più moderno dei due e anticipa il concetto di derivata anche se Fermat non riuscì a giustificare del tutto alcuni passaggi. Questo problema avrebbe portato alla nascita del calcolo differenziale.

Pascal oltre che di geometria si occupò di combinatoria riuscendo a capire la correlazione di questa disciplina con il coefficiente binomiale. Utilizzò poi il Triangolo di Pascal anche se esso era già noto ad alti matematici come Tartaglia. Sviluppò queste idee in una corrispondenza con Fermat nella quale si ponevano anche le fondamenta del moderno calcolo delle probabilità.

Fermat fu uno dei matematici più produttivi del secolo nonostante fosse un magistrato e si occupasse della materia da dilettante. Oltre ai già citati contributi alla geometria, Fermat diede un enorme contributo alla → Teoria dei numeri: studiò l'equazione di Pell (chiamata anche equazione di Pell-Fermat); introdusse i numeri primi di Fermat; congetturò infine una quantità impressionante di teoremi come il piccolo teorema di Fermat e il teorema di Fermat sulle somme di due quadrati. La maggior parte di questi teoremi fu dimostrata da Euler ma per la congettura più famosa del matematico francese, ossia l'ultimo teorema di Fermat, si dovette attendere addirittura fino al 1994.



Un esempio di curva nella → geometria analitica.

In questo secolo lo studio degli algoritmi infiniti quali serie e prodotti infiniti divenne una branca centrale della matematica. John Wallis (1616-1703) fu uno dei matematici più produttivi in questo campo. Tra i suoi contributi più importanti si ricordano il prodotto di Wallis pubblicato nella *Arithmetica Infinitorum* (1655) che costituisce il suo capolavoro. In questo volume Wallis si avvicina molto al calcolo infinitesimale compiendo delle vere e proprie integrazioni. Pietro Mengoli e Nicolaus Mercator scoprirono le serie che oggi portano il loro nome. Un altro contributo importante venne da Gottfried Leibniz (1646-1716) a cui si deve, tra l'altro, la formula di Leibniz per pi. Isaac Barrow e James Gregory portarono ulteriormente avanti queste idee e riuscirono ad arrivare a tecniche estremamente simili al calcolo infinitesimale.

Il calcolo infinitesimale nacque compiutamente pochi anni dopo, grazie all'opera di Isaac Newton (1642-1727) e Leibniz che svilupparono contemporaneamente le idee fondamentali come quelle di derivazione e integrazione e dimostrarono il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. Newton tenne per sé le sue scoperte e quando le pubblicò molti anni dopo scoppiò una violenta disputa che lo vide contrapposto al tedesco. Il calcolo si diffuse rapidamente, nonostante alcune riserve dovute soprattutto ai concetti usati, definiti allora in modo poco rigoroso.

Tra i sostenitori del calcolo ci furono i fratelli Jakob (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), due membri di una prodigiosa famiglia che avrebbe dato al mondo più di un talento matematico. I due svilupparono il calcolo affrontando problemi come quello della brachistocrona e della rettificazione della lemniscata. Jakob studiò poi la spirale logaritmica trovandone molte proprietà e il calcolo delle probabilità enunciando la legge dei grandi numeri e il paradosso di San Pietroburgo. Insieme a Leibniz iniziarono per primi a studiare le equazioni differenziali aprendo così la strada per gli sviluppi futuri.

Anche il marchese de l'Hopital studiò il calcolo scoprendo la cosiddetta regola di de l'Hopital (scoperta in realtà da Bernoulli). Brook Taylor invece scoprì le serie di Taylor (già note in realtà ad altri matematici) che avrebbero avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo dell'analisi complessa.

In questo secolo apparvero anche le prime macchine calcolatrici meccaniche. Pascal ne inventò una capace di fare somme e sottrazioni, mentre una macchina di Leibniz eseguiva anche moltiplicazioni e divisioni.

XVIII secolo

Leonhard Euler

Il campo di studio fondamentale del XVIII secolo fu l'→ analisi matematica. Proseguendo l'opera dei Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783) (chiamato anche Eulero) trovò la soluzione al problema di Basilea, introdusse la costante di Eulero-Mascheroni e le funzioni gamma e beta. Trovò poi molti metodi per la soluzione delle equazioni differenziali usati anche oggi e insieme all'amico Jean d'Alembert (1717-1783) affrontò molti problemi di meccanica razionale come la determinazione esatta del moto della Luna. Insieme a d'Alembert e a Daniel Bernoulli (figlio di Jakob) studiò poi il moto dei fluidi.

D'Alembert riuscì invece a risolvere l'equazione differenziale nota come equazione di d'Alembert. Studiò poi vari problemi di teoria dei giochi e il calcolo delle probabilità. Si occupò anche di → algebra cercando a più riprese di dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra. Nonostante queste dimostrazioni fossero in parte lacunose e il teorema sarebbe stato dimostrato rigorosamente solo da Gauss, il teorema è spesso chiamato teorema di d'Alembert.

Eulero fu uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.[68] Produsse più di 886 pubblicazioni su ogni branca della matematica nonostante nell'ultima parte della sua vita fosse divenuto cieco. Diede importanti contributi alla notazione matematica introducendo i simboli oggi accettati per le funzioni trigonometriche, la sommatoria, la funzione generica e per i numeri *e* ed *i*. Diffuse anche l'uso del simbolo π

Fu anche un importante teorico dei numeri, materia che ebbe un notevole sviluppo in questo secolo. Scoprì il prodotto di Eulero, grazie al quale fornì una dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, dando così di fatto inizio alla teoria analitica dei numeri che usa procedimenti analitici per raggiungere risultati aritmetici. Dimostrò poi molti dei teoremi lasciati indimostrati da Fermat e introdusse la funzione phi di Eulero.

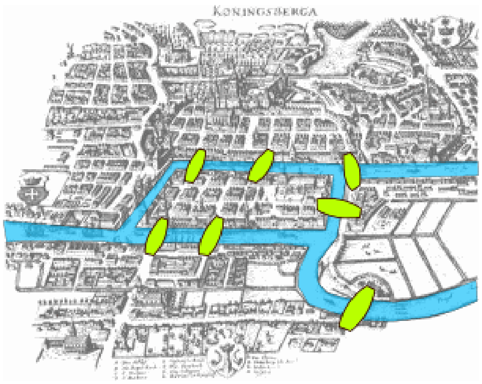
Christian Goldbach enunciò la sua famosa congettura tutt'oggi irrisolta che afferma che ogni numero pari eccetto 2 è esprimibile come somma di due numeri primi.

In questo periodo i numeri immaginari e quelli complessi furono accettati completamente. L'analisi complessa divenne una branca importante della matematica: Eulero studiò le serie di Taylor trovando le espansioni in serie di molte funzioni. Grazie a ciò riuscì a scoprire le estensioni di moltissime funzioni reali in campo complesso, come per esempio le funzioni trigonometriche, la funzione logaritmica e la funzione esponenziale. Grazie a quest'ultima estensione trovò l'identità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

considerata da molti la più bella formula della matematica. Altri contributi alla materia giunsero da Abraham de Moivre.

In questo secolo si assistette anche alla nascita della topologia e della teoria dei grafi soprattutto per via delle scoperte di Eulero. Egli infatti risolse il problema dei ponti di Königsberg che chiedeva se fosse possibile attraversare i tutti i ponti della città di Königsberg (Kaliningrad) una sola volta e tornare al punto di partenza. Eulero scoprì che ciò non era possibile e il ragionamento che usò sta alla base della moderna teoria dei grafi. Il matematico svizzero scoprì poi anche la formula che mette in relazione il numero dei vertici delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso. Queste scoperte possono essere considerate come l'inizio della moderna topologia.



La città di Königsberg ai tempi di Eulero con i ponti messi in evidenza

Lorenzo Mascheroni dimostrò che se una retta si considera nota quando sono stati individuati due suoi punti allora tutte le figure costruibili con riga e compasso sono costruibili col solo compasso. Vi furono anche diversi tentativi di dimostrare il quinto postulato di Euclide partendo dagli altri quattro. Tra questi si ricordano quello di Girolamo Saccheri e di Jean-Henri Lambert. Quest'ultimo si avvicinò molto alla → geometria non euclidea. Lambert è ricordato anche per aver dimostrato che π è irrazionale (vedi dimostrazione della irrazionalità di π).

Ci furono sviluppi anche nel campo del calcolo delle probabilità: Thomas Bayes dimostrò il teorema che porta il suo nome e Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon diede inizio al metodo Monte Carlo con il famoso problema dell'ago di Buffon.

Nella seconda metà del secolo Parigi divenne il più importante centro matematico e scientifico del tempo. Questo avvenne grazie alla presenza di matematici come Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Joseph-Louis Lagrange (1736-1837) e all'istituzione di scuole di carattere scientifico come l'École polytechnique e l'École normale supérieure che fornirono validi matematici alla Francia.

Laplace e Lagrange si occuparono di meccanica celeste. Dopo il lavoro di Newton essa divenne uno degli argomenti più trattati del secolo.

Laplace nella sua *Mécanique Céleste* dimostrò che il sistema solare sarebbe rimasto stabile per un lungo intervallo di tempo. Introdusse le armoniche sferiche la trasformata di Laplace e il Laplaciano. Fu uno dei primi a utilizzare il concetto di potenziale dimostrando che esso soddisfa sempre l'equazione di Laplace. Si occupò anche di teoria della probabilità e statistica riscoprendo il teorema di Bayes e fornendo una dimostrazione rigorosa del metodo dei minimi quadrati.

Lagrange invece nella sua *Mécanique analytique* introdusse il concetto di funzione lagrangiana. Insieme ad Eulero fu tra i creatori del calcolo delle variazioni ricavando le equazioni di Eulero-Lagrange. Studiò inoltre il problema dei tre corpi trovando i punti di Lagrange. Scoprì il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la risoluzione delle equazioni differenziali. Introdusse la notazione usata ancora oggi per il calcolo differenziale e trovò un metodo per la soluzione delle equazioni di qualunque grado che però si rivela utile solo fino al quarto. Dimostrò poi il teorema di Lagrange e contribuì molto anche alla → teoria dei numeri dimostrando ad esempio il teorema dei quattro quadrati. Studiò anche la → geometria analitica solida ottenendo discreti risultati.

Un altro importante matematico del periodo fu Adrien-Marie Legendre (1752-1833) che studiò gli integrali ellittici introducendo quelli della prima e della seconda specie. Congetturò il metodo dei minimi quadrati indipendentemente da Gauss. Fu anche un brillante teorico dei numeri: dimostrò l'ultimo teorema di Fermat per il caso n=5, dimostrò l'irrazionalità di π^2e scoprì la legge di reciprocità quadratica esponendola nella sua forma attuale. Sempre indipendentemente da Gauss congetturò il Teorema dei numeri primi.

Gaspard Monge dette invece contributi fondamentali alla → geometria descrittiva.

XIX secolo

Questo secolo è spesso chiamato *L'età dell'oro della matematica*. Durante il XIX secolo nacquero i primi periodici matematici come il Journal di Crelle e il Journal di Liouville. I matematici iniziarono a riunirsi nelle facoltà universitarie. Nacquero le prime società matematiche, come la London Mathematical Society. Fu confermato il primato di Parigi grazie a una geniale generazione di matematici, ma nella seconda parte del secolo il centro più importante per gli studi matematici divenne Gottinga dove risiedevano matematici come Gauss, Riemann e Dirichlet.


Carl Friedrich Gauss

Algebra

L'algebra ricevette nei primi anni del XIX secolo un grande impulso: Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu il primo a dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra nel 1799. Nella sua dimostrazione introdusse il piano complesso che avrebbe avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo dell'analisi complessa. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Carl Jacobi (1804-1851) chiarirono il concetto di determinante di una matrice e dimostrarono importanti teoremi di → algebra lineare. Jacobi introdusse poi il concetto di matrice jacobiana.

Evariste Galois (1811-1832) e Niels Abel (1802-1829), entrambi morti giovanissimi, studiarono la risolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto. Abel dimostrò il teorema di Abel-Ruffini che stabilisce l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado. Galois invece stabilì la non risolubilità per radicali delle equazioni di grado superiore al quinto e il suo lavoro è all'origine della teoria di Galois, importante branca dell'→ algebra astratta.

Analisi

L'analisi matematica fu invece posta su basi sempre più ben definite. Cauchy definì rigorosamente il concetto di derivata come limite del rapporto incrementale tra la funzione e la variabile e quello di funzione continua. Chiarì anche il concetto di limite anche se Karl Weierstrass formalizzò meglio la sua definizione. Bernhard Riemann chiarì invece il concetto di integrale (integrale di Riemann). Bernhard Bolzano aveva sviluppato molte di queste definizioni precedentemente, ma la sua opera restò purtroppo sconosciuta per decenni.

Grazie a questi passi avanti, Cauchy riuscì a estendere i concetti del calcolo infinitesimale alle funzioni a variabile complessa scoprendo il teorema integrale e la formula integrale di Cauchy. Scoprì anche il criterio di convergenza di Cauchy. Oltre ai già menzionati contributi all'→ algebra lineare Cauchy si occupò anche di statistica (variabile casuale di Cauchy), meccanica e soprattutto → teoria dei numeri. Arrivò vicino a dimostrare l'ultimo teorema di Fermat.

Partendo da un precedente lavoro di Abel, Jacobi diede importanti contributi alla comprensione degli integrali ellittici scoprendo la doppia periodicità di alcuni di essi e introducendo le funzioni ellittiche jacobiane. Joseph Fourier invece studiò il movimento ondulatorio e il calore. Introdusse poi le serie di Fourier e la trasformata di Fourier.

Teoria dei Numeri

Carl Gauss fu senza dubbio uno dei matematici più importanti del secolo e di tutti i tempi. Visse buona parte della sua vita a Gottinga che divenne ben presto uno dei centri più importanti della matematica europea. Ricercò in quasi tutte le branche della matematica. Dopo aver dimostrato il teorema fondamentale dell'algebra, si occupò soprattutto di → teoria dei numeri pubblicando nel 1801 le *Disquisitiones Aritmeticae*. La teoria dei numeri vide in questo secolo l'introduzione di nuovi concetti sempre più legati ai metodi analitici. Nelle *Disquisitiones* Gauss introduceva il l'aritmetica modulare che avrebbe facilitato moltissimo la scrittura e la comprensione di teoremi relativi a questo campo d'indagine. Sempre in questo volume introduceva il concetto di intero gaussiano. Congetturò poi indipendentemente da Legendre il metodo dei minimi quadrati e il teorema dei numeri primi che mette in relazione la distribuzione di questi con la funzione logaritmica. Il teorema sarà dimostrato solo nel 1894 da Jacques Hadamard e Charles de La Vallée-Poussin. Gauss fu anche un grande statistico. La variabile casuale normale che descrive la distribuzione degli errori è dovuta a lui.

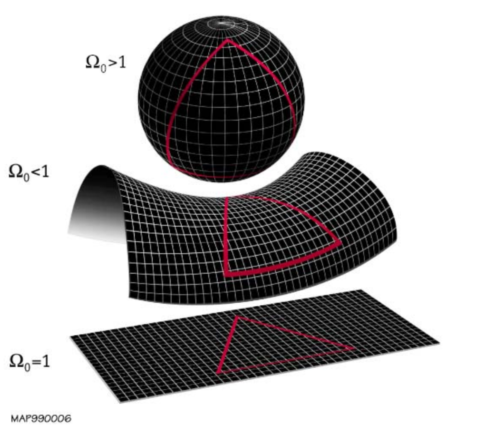
Alla morte di Gauss, Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) gli successe nel suo posto di insegnante. Egli dimostrò il teorema secondo il quale in tutte le progressioni aritmetiche si trovano infiniti numeri primi, (teorema di Dirichlet) usando complessi metodi analitici. Introdusse anche la convoluzione di Dirichlet.

Il lavoro più importante nella → teoria dei numeri fu però quello di Bernhard Riemann (1826-1866), il successore di Dirichlet a Gottinga che in un articolo del 1859 introdusse formalmente la funzione zeta di Riemann. Egli capì il collegamento di questa con la distribuzione dei numeri primi e studiando i valori complessi della funzione zeta congetturò che tutti i suoi zeri complessi avessero parte reale un mezzo. Questa congettura nota come ipotesi di Riemann non è ancora stata risolta; se lo fosse, potrebbero essere dimostrati moltissimi teoremi, tra cui una formula che approssima la distribuzione dei numeri primi nella maniera migliore possibile.

Joseph Liouville dimostrò nel 1844 l'esistenza di numeri trascendenti costruendo appositamente alcuni esempi come la costante di Liouville. Successivamente Charles Hermite dimostrò la trascendenza di e e Ferdinand von Lindemann quella di π. Grazie a queste ed altre scoperte si dimostrò la non risolubilità con riga e compasso dei tre problemi classici dell'antica Grecia.

Geometria

Nel XIX secolo la → geometria, dopo un secolo in cui non aveva fatto praticamente progressi, ritornò ad essere una materia importante di studio. Gauss trovò le condizioni per cui un poligono regolare poteva essere costruito usando solo riga e compasso, risolvendo un problema che restava aperto da millenni. Sempre Gauss diede inizio ad una nuova branca della geometria, la → geometria differenziale, introducendo il concetto di curvatura di una superficie.



Schema delle principali geometrie: ellittica, iperbolica ed euclidea

Jakob Steiner (1796-1863) dimostrò che tutte le figure costruibili usando riga e compasso possono essere costruite usando solo la riga e una circonferenza iniziale. Abbozzò poi la prima dimostrazione del problema isoperimetrico che sarebbe stata completata da altri. Julius Plucker introdusse il metodo delle notazioni geometriche abbreviate e dimostrò il principio di dualità. Studiò la possibilità di una geometria a quattro o più dimensioni spaziali. Insieme ad August Ferdinand Möbius introdusse le → coordinate omogenee. Moebius introdusse poi la funzione di Moebius e studiò la topologia (nastro di Moebius).

Ma l'innovazione più importante del secolo in geometria furono le → geometrie non euclidee. Gauss, cercando di dimostrare il V postulato di Euclide, arrivò alla rivoluzionaria conclusione che potevano esistere geometrie indipendenti dal postulato e iniziò a studiare la → geometria iperbolica. Janos Bolyai arrivò alla stessa conclusione. Tuttavia il vero sviluppatore della geometria iperbolica fu il russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). In questa geometria per un punto passano infinite rette che non incontrano una retta data, e la somma degli angoli di un triangolo è sempre inferiore a 180°.

Il già menzionato Riemann diede un contributo fondamentale allo studio delle geometrie non euclidee definendo il concetto di linea retta come di geodetica di uno spazio. Studiò poi la geometria costruita sulla superficie di una sfera; la → geometria ellittica o riemanniana. In questa geometria non esistono rette parallele, in quanto una retta è un cerchio massimo, e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre superiore a 180°. Riemann si occupò anche di topologia introducendo le superfici di Riemann. Anticipò il concetto di metrica e di tensore. Einstein usò i suoi risultati per descrivere lo spazio della relatività generale.

Il concetto rivoluzionario che stava alla base di queste geometrie faticò molto ad essere accettato. Henri Poincaré (1854-1912), Felix Klein(1849-1925) e Eugenio Beltrami dimostrarono la coerenza e l'indipendenza dal V postulato di queste geometrie, sancendo così la loro accettazione. Inoltre scoprirono il disco di Poincaré e la pseudosfera, due modelli fisici di → geometria iperbolica. Poincaré fu anche l'inventore di quella importante branca della topologia nota come topologia algebrica. È perciò spesso considerato come il padre della topologia moderna. Si occupò di quasi tutte le branche della matematica dell'epoca apportando numerosi sviluppi. Scoprì le funzioni fuchsiane. Formulò poi la famosa congettura di Poincaré e introdusse l'attrattore strano ponendosi così tra i precursori della teoria del caos. Si occupò anche di meccanica. Felix Klein invece introdusse il concetto algebrico di gruppo in → geometria ottenendo definizioni molto generali. Scoprì anche la famosa superficie topologica nota come bottiglia di Klein.

Algebra astratta

Verso la meta del XIX secolo nacque l'→ algebra astratta. Galois fu precursore in questo campo introducendo i concetti di gruppo e di permutazione. La teoria dei gruppi anticipata già da lavori di Lagrange e Cauchy ma soprattutto di Abel (gruppo abeliano). Galois fu il primo a collegarla con la teoria dei campi nei suoi lavori sulla risolubilità delle equazioni. Questi lavori vennero poi formalizzati e sviluppati da Leopold Kronecker.

Le nuove teorie algebriche ricevettero attenzione in Inghilterra dove da più di un secolo la matematica era caduta in una fase di torpore. L'irlandese William Rowan Hamilton (1805-1865), volendo estendere alla terza dimensione il piano di Gauss, introdusse i quaternioni, creando così un'algebra del tutto nuova dove non valevano tutte le regole di quella ordinaria, venendo a mancare la proprietà commutativa della moltiplicazione. Hamilton introdusse anche l'operatore hamiltoniano e dimostrò il teorema di Cayley-Hamilton. Arthur Cayley studiò invece l'algebra delle matrici definendo i concetti di moltiplicazione e somma su questi enti. Studiò l'algebra degli ottetti chiamata spesso anche algebra di Cayley.

George Boole (1815-1864), infine, definì le operazioni algebriche per gli insiemi, dando inizio così alla cosiddetta algebra di Boole. Questa teoria avrebbe avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo della logica matematica, di cui Boole può benissimo essere considerato il padre, e della teoria dell'informazione.

Logica, Teoria degli insiemi

Nella seconda metà del secolo si inziò a studiare il concetto di numero, cercando di definirlo logicamente. Weiestrass e Richard Dedekind definirono il concetto di numero reale partendo da quello di numero naturale e di numero razionale. Il logico Gottlob Frege (1848-1925) cercò di definire il concetto di numero naturale su basi logiche, riconducendo così l'intera matematica alla logica. Tuttavia la sua definizione che si basava sul concetto di cardinalità di un insieme fu messa in crisi all'inizio del secolo successivo. Giuseppe Peano (1858-1932) tentò invece di basare la matematica in modo assiomatico. Introdusse quindi cinque assiomi che descrivevano il concetto di numero naturale spesso chiamati assiomi di Peano. Anche questo tentativo era però destinato a fallire.

Dedekind definì per primo l'infinità di un insieme come il fatto che un suo sottoinsieme potesse essere messo in corrispondenza biunivoca con esso. Partendo da questo lavoro Georg Cantor (1845-1918) iniziò a studiare gli insiemi infiniti, scoprendo che i numeri interi sono tanti quanti i numeri razionali (ossia i due insiemi hanno la stessa potenza) ma che l'insieme infinito dei numeri reali è più grande di quello dei razionali. Congetturò poi che non vi fossero altre potenzialità di infinito tra questi due insiemi. La congettura è chiamata ipotesi del continuo. Queste scoperte paradossali generarono scetticismo nella comunità dei matematici ma le idee di Cantor sono alla base della moderna teoria degli insiemi

XX secolo

Prima del ventesimo secolo, il numero di matematici creativi attivi contemporaneamente nel mondo era inferiore al centinaio. I matematici erano di norma benestanti o supportati da ricchi possidenti. Vi erano pochi impieghi possibili, quali insegnare nelle università o nelle scuole superiori. La professione del matematico divenne realtà solo nel ventesimo secolo. I matematici iniziarono a lavorare in gruppo. Il centro dell'attività matematica nella prima metà del secolo fu Gottinga per poi divenire negli anni '50 Princeton. Furono istituiti vari premi matematici, a partire dalla medaglia Fields (1936) e il premio Wolf per la → matematica (1978), mentre manca il premio Nobel per la matematica.


David Hilbert

In questo secolo si vide una moltiplicazione di teoremi e scoperte matematiche. Per stabilire delle linee guida, David Hilbert (1862-1947) in un congresso del 1900 enunciò 23 problemi che avrebbero dovuto fare da guida nella matematica novecentesca. Molti di questi problemi sono stati risolti, positivamente o negativamente, ma restano aperti l'ottavo e il dodicesimo. Hilbert fu un matematico di prim'ordine. Dimostrò il teorema di finitezza e studiò le equazioni integrali introducendo gli spazi di Hilbert. La sua opera più importante fu comunque un'assiomatizzazione completa e rigorosa della → geometria ottenuta nel suo Grundlagen der Geometrie.

Teoria degli insiemi

Nel 1901 invece Bertrand Russell (1872-1970) espose, in una lettera a Frege, il così detto paradosso di Russell che metteva in discussione la sua formulazione della teoria degli insiemi e dunque della → matematica. Questa scoperta portò Ernst Zermelo e Adolf Fraenkel a riformulare la teoria su base assiomatiche: il cosiddetto sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel. Solitamente a questi viene aggiunto anche l'assioma della scelta senza il quale non si possono dimostrare alcuni importanti teoremi (il sistema risultante è solitamente chiamato ZFC). L'indipendenza di questo assioma dal sistema di Zermelo-Fraenkel è stata provata da Paul Cohen nel 1963. Anche Russell cercò parallelamente di rifondare la → matematica su degli assiomi. Insieme a Alfred North Whitehead scrisse il monumentale Principia Mathematica. Il "fallimento" di queste impostazioni assiomatiche (inclusa quella tentata da Giuseppe Peano) fu decretato nel 1931 da Kurt Gödel (1906-1978) con il suo famoso teorema di incompletezza di Gödel secondo il quale in ogni sistema assiomatico coerente esistono proposizioni indecidibili (che non possono essere né dimostrate né confutate). Lo sgomento causato dal teorema aumentò quando Gödel e Cohen dimostrarono che l'ipotesi del continuo è indipendente dal sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel.

Analisi

In analisi Henri Lebesgue riformulò nel 1902 il concetto di integrale introducendo la misura di Lebesgue (integrale di Lebesgue). Ciò comporta un ampliamento della classe delle funzioni integrabili rispetto alla definizione data da Riemann. Furono poi introdotte funzioni improprie come la funzione gradino di Heaviside e la funzione delta di Dirac. Tramite il concetto di distribuzione Laurent Schwartz estese il concetto di derivata alle funzioni integrabili secondo Lebesgue. Abraham Robinson definì i numeri iperreali, estensione di quelli reali con cui diede vita alla cosiddetta Analisi non standard che recupera, definendoli in modo rigoroso, molti dei concetti intuitivi usati da Leibniz come quello di infinitesimo. Successivamente furono introdotti i numeri surreali.

Algebra

Ernst Steinitz apportò importanti contributi all'→ algebra e allo studio dei campi. Ciò portò a una classificazione dei campi algebricamente chiusi. La classificazione dei gruppi semplici finiti fu invece più difficoltosa. Daniel Gorenstein annunciò il programma per la loro classificazione nel 1972. Questa tenne impegnati un centinaio di matematici, tra cui John Conway (1937-), fino al 1985, anno in cui fu completata. Durante questa classificazione fu anche trovato il "Mostro", un gruppo semplice costituito da circa 10^{53}elementi. Si è scoperto poi che le strutture algebriche hanno molta importanza nella fisica delle particelle.

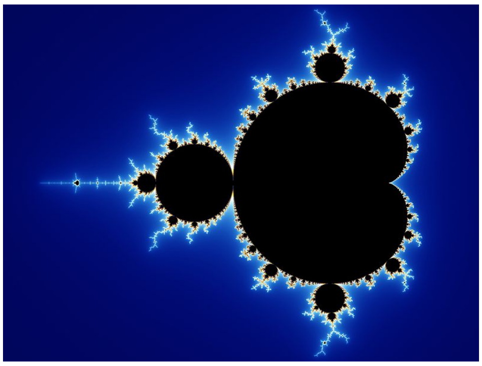
Topologia

Uno dei campi di studio principali del secolo fu la topologia. Nel 1910 Luitzen Brouwer dimostrò l'importante teorema del punto fisso. Si iniziarono a studiare le superfici minime ottenendo risultati importanti come la risoluzione del problema di Plateau. In topologia differenziale, John Milnor scoprì che una varietà topologica può ammettere più strutture differenti come varietà differenziale. Stephen Smale risolse la congettura di Poincarè per tutte le dimensioni superiori a 5. La dimostrazione fu quindi estesa in dimensione 5, e in dimensione 4 da Michael Freedman all'inizio degli anni 80. Nello stesso periodo William Thurston introdusse nuove prospettive geometriche nello studio delle varietà tridimensionali, culminanti nella Congettura di geometrizzazione. Nel ventesimo secolo ci si interessò anche alla Teoria dei nodi, e si cercò di classificarli introducendo nuovi invarianti.

Teoria dei numeri

Anche la → teoria dei numeri ricevette un grande impulso. Srinivasa Ramanujan (1887-1920) dimostrò molti importanti teoremi e formule. Tra queste molte che consentono di calcolare pi e la funzione di partizione. Introdusse la funzione mock theta. Aleksander Gelfond dimostrò il teorema di Gelfond, risolvendo parzialmente la congettura sui numeri trascendenti contenuta nel settimo problema di Hilbert. Atle Selberg (1917-2007) e Paul Erdös (1913-1996) dettero nel 1949 una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi. Erdös fu un matematico molto prolifico. Operò soprattutto in → teoria dei numeri, calcolo combinatorio e teoria dei grafi ottenendo risultati importanti. In suo onore i matematici hanno definito il numero di Erdös. Nel 1994, dopo anni di lavoro, Andrew Wiles dimostrò l'Ultimo teorema di Fermat. la sua dimostrazione usa molte tecniche di algebra moderna. Alcuni di questi strumenti erano stati oggetto di lavoro di André Weil, un matematico che si era interessato di equazioni diofantine, curve ellittiche e gruppi di Lie.

Geometria


Il frattale di Mandelbrot

In → geometria, dopo la classificazione dei 230 gruppi di simmetria spaziali e dei 7 lineari, furono classificati i 17 tipi di simmetrie planari e si iniziò a studiare le tassellature. Roger Penrose scoprì la tassellatura di Penrose che copre il piano in modo aperiodico. Alain Connes sviluppò la geometria non commutativa. Due importanti congetture sono state risolte usando in modo massiccio il computer: la congettura di Keplero (1998) riguardante gli impacchettamenti sferici e il Teorema dei quattro colori (1976) secondo il quale ogni mappa più essere colorata senza che due regioni abbiano lo stesso colore usando soltanto 4 colori. L'uso del computer è stato fondamentale nello studio dei frattali, curve dotate di area finita e perimetro infinito che non hanno dimensione intera. Questo studio, iniziato all'inizio del secolo da Gaston Julia (insieme di Julia) e Helge von Koch (curva di Koch) e incagliatosi per le difficoltà di calcolo fu ripreso da Benoit Mandelbrot (1924-) negli anni '80. Si deve a Mandelbrot la definizione degli oggetti frattali, fra questi il famoso insieme di Mandelbrot, oltre alle applicazioni in vari campi, fra cui l'economia.

Informatica

Alan Turing (1912-1954), considerato uno dei padri dell'informatica, introdusse idee fondamentali per il successivo nascere di questa materia. Introdusse i concetti di macchina di Turing e Test di Turing. I suoi lavori sono alla base dell'Intelligenza artificiale. Durante la Seconda Guerra Mondiale aiutò gli alleati a decifrare i messaggi in codice nazisti. Dopo la guerra, in quanto omosessuale, fu costretto a subire una cura ormonale che lo portò al suicidio. John von Neumann (1903-1957), una figura dominante nella matematica novecentesca, invece introdusse l'importante concetto di architettura di von Neumann e studiò la possibilità di una macchina autoreplicante. Successivamente George Dantzig introdusse il metodo di programmazione lineare chiamato metodo del simplesso. Claude Shannon sviluppò la teoria dell'informazione. Grazie alla sua analisi del gioco degli scacchi oggi i computer possono vincere giocando a scacchi con dei campioni.

Teoria dei giochi ed economia

A von Neumann, ed in buona parte anche a Morgenstern, si deve anche lo sviluppo della teoria dei giochi. La teoria dei giochi si occupa della modellizzazione di una situazione di interazione strategica ed analizza quali possano essere le strategie migliori da utilizzare. Tra i più importanti lavori di von Neumann in questo campo c'è la dimostrazione del teorema di minimax. Successivamente John Nash (1928-) introdusse il concetto fondamentale di equilibrio di Nash, importante anche in economia. Strettamente connessa alla teoria dei giochi è la trattazione matematica dell'economia già iniziata negli ultimi anni del secolo precedente. Nel secondo dopoguerra vi è stato uno straordinario sviluppo dei metodi matematico-formali in economia, in particolare utilizzando la teoria dei giochi: fra i risultati più significativi, il teorema di esistenza dell'equilibrio economico generale, dimostrato da Kenneth Arrow e Gerard Debreu.


John von Neumann

Andrey Nikolaevich Kolmogorov riuscì, facendo ricorso alla misura di Lebesgue, ad assiomatizzare il calcolo delle probabilità. Von Neumann invece assiomatizzò la meccanica quantistica. Nel ventesimo secolo si iniziò ad analizzare matematicamente la struttura del linguaggio. Axel Thue definì in termini matematici il concetto di grammatica. Noam Chomsky classificò invece i vari tipi di linguaggi in base al tipo di produzioni grammaticali permesse.

Edward Norton Lorenz, studiando metodi per la previsione del tempo atmosferico, scoprì il cosiddetto attrattore di Lorenz, dando così inizio alla teoria del caos. Questa studia i sistemi caotici, quei sistemi, cioè, in cui piccole variazioni delle condizioni iniziali portano a variazioni consistenti nel tempo. La teoria ha importanti applicazioni nella meteorologia.

Filosofia matematica

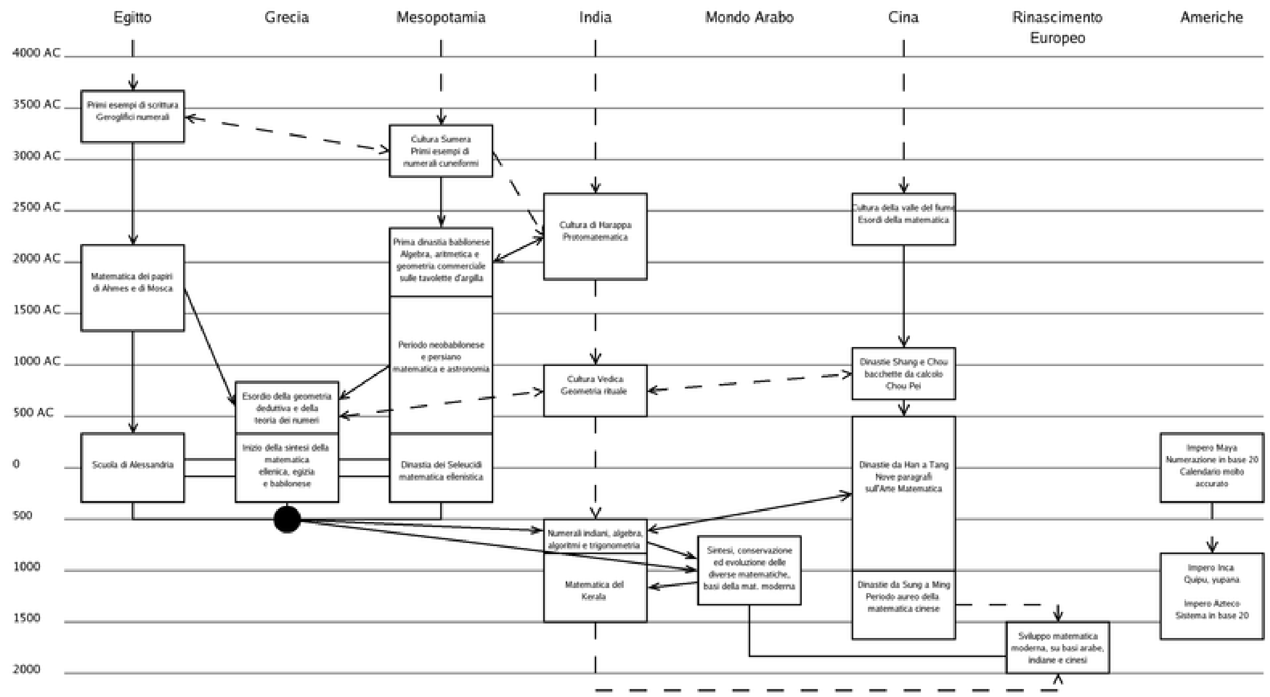
Nel novecento si crearono due scuole di pensiero opposte riguardo al significato della matematica. I realisti (Kurt Gödel) credono che le entità matematiche in qualche modo *esistano* e che le verità matematiche siano verità assolute. Invece i formalisti (David Hilbert) credono che gli enunciati matematici siano in realtà conseguenze di alcuni assiomi e regole deduttive e che gli enunciati matematici non abbiano una validità assoluta ma limitata al sistema preso in considerazione.

Si crearono poi le scuole di pensiero costruttivista e intuizionista. Queste correnti di pensiero rigettano alcuni principi matematici come il principio del terzo escluso e l'infinito attuale (e di conseguenza tutti gli algoritmi infiniti). L'intuizionismo, sviluppato da Luitzen Brouwer, in particolare sostiene che i principi fondamentali della → matematica siano nella intuizione individuale e nella mente del matematico.

XXI secolo

A imitazione dei problemi di Hilbert, nel 2000 l'Istituto matematico Clay ha compilato una lista di sette problemi per il millennio, offrendo un milione di dollari per la risoluzione di ciascuno di essi. L'unico ad essere stato risolto di questi è la congettura di Poincaré; essa è stata dimostrata nel 2006 da Grigori Perelman, il quale ha però rifiutato il premio e la medaglia Fields. Tra i problemi del millennio vi sono anche alcuni problemi matematici tutt'oggi (2009) irrisolti come l'Ipotesi di Riemann e il problema P contro NP. Restano ancora irrisolte anche la congettura di Goldbach e la congettura dei numeri primi gemelli.

Cronologia



Cronologia della matematica: le linee continue indicano contatti confermati, quelle tratteggiate indicano contatti possibili.

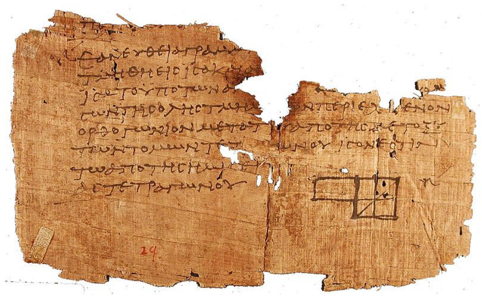
Bibliografia

- Carl Benjamin Boyer, *Storia della matematica*, tradotto da Adriano Carugo, Mondadori, 1991. ISBN 88-04-33431-2
- Paolo Rossi (diretta da), *Storia della scienza* vol 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- Piergiorgio Odifreddi, *La matematica del Novecento* ISBN 8806151533
- Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*
- Asger Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics* New York, Random House, 1964.
- Amy Dahan-Dalmedico, Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, Editions du Seuil, 1986 ISBN 2-02-009138-0
- Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders, 1990, ISBN 0-03-029558-0,
- Hoffman, Paul, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*. New York: Hyperion, 1998 ISBN 0-7868-6362-5.
- van der Waerden, B. L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, 1983, ISBN 0387121595.
- O'Connor, John J. and Robertson, Edmund F., *The MacTutor History of Mathematics Archive* [69].
- Stephen M. Stigler, *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900.* Belknap Press, 1990. ISBN 0-674-40341-X
- E.T. Bell, *Men of Mathematics* Simon and Schuster, 1937.
- E.T. Bell, *I grandi matematici* Sansoni editrice, 1990 ISBN 88-383-1180-3.
- Richard J. Gillings, *Mathematics in the time of the pharaohs* Cambridge, MA, M.I.T. Press, 1972.
- Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics* Dover, 1981. ISBN 0-486-24073-8
- Karl W. Menninger., *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers* MIT Press, 1969. ISBN 0-262-13040-8
- Burton, David M., *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw Hill: 1997.
- Katz, Victor J., *A History of Mathematics: An Introduction* Addison-Wesley: 1998.

- Morris Kline, *Mathematics - The loss of Certainty*. Oxford University Press, 1980. (Esposizione di livello medio dei cambiamenti di concezione della matematica che si sono imposti nel XX secolo.)

Voci correlate

- Cronologia della matematica
- Storia dell'insegnamento della matematica
- Storia delle funzioni trigonometriche
- Storia della nozione di funzione matematica
- Storia dei numeri
- Società Italiana di Storia delle Matematiche
- Annals of mathematics
- MacTutor
- Aritmogeometria



Questo papiro da Ossirinco contiene uno dei più antichi e completi diagrammi degli "Elementi di geometria" di Euclide. Vi è disegnato il diagramma che riguarda la quinta preposizione del secondo libro degli Elementi

Altri progetti

- **Wikisource** contiene opere originali redatte da **storici delle matematiche**

Collegamenti esterni

- (EN) The MacTutor History of Mathematics archive [70] sito di MacTutor
- La storia della matematica: dalle origini al sec. XVII, con tavole interattive [71]
- I matematici del mondo islamico [72]
- La nascita del calcolo infinitesimale [73]
- Indice delle biografie di matematici italiani [74] nel sito Pristem
- Un'ontologia della storia della matematica [75]
- Un itinerario attraverso la matematica italiana contemporanea [76] di Enrico Giusti e Luigi Pepe

Riferimenti

[1] Mathematics in (central) Africa before colonization (http://etopia.sintlucas.be/3.14/Ishango_meeting/Mathematics_Africa.pdf)
[2] Geoges Ifrah, *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori (1989)
[3] Boyer 1990, pp. 1-2
[4] Sean Henahan. Art Prehistory (http://www.accessexcellence.org/WN/SU/caveart.html) in *Science Updates*. The National Health Museum, 2002. URL consultato il 2006-05-06.
[5] Scott W. Williams. An Old Mathematical Object (http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html) in *Mathematicians of the African diaspora*. SUNY Buffalo mathematics department, 2005. URL consultato il 2006-05-06.
[6] Thom, Alexander and Archie Thom, "The metrology and geometry of Megalithic Man", pp 132-151 in C.L.N. Ruggles, ed., *Records in Stone: Papers in memory of Alexander Thom*, (Cambridge: Cambridge Univ. Pr., 1988) ISBN 0-521-33381-4
[7] Ian G. Pearce. Early Indian culture - Indus civilisation (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Pearce/Lectures/Ch3.html) in *Indian Mathematics: Redressing the balance*. School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews, 2002. URL consultato il 2006-05-06.
[8] Boyer 1990, pagg.24-25
[9] disponibile qui (http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/RhindPapyrus.shtm)
[10] Papiro di Rhind (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html)
[11] Egyptian Unit Fractions (http://www.mathpages.com/home/kmath340/kmath340.htm) at MathPages
[12] Asger Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, New York, Random House, 1998. 30-31
[13] "Plimpton 322" (http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html)
[14] Boyer 1990, pagg.31-32
[15] (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Projects/Pearce/Chapters/Ch4_1.html)
[16] Harv Cooke 2005 pp. 199-200

[17] Harv Cooke 2005 p.200
[18] Yoshio Mikami, *Development of Mathematics in China and Japan*, B. G. Teubner, 1913. 22+355&dq=intitle:Development+intitle:22China+and+Japan%22+355&lr=&as_brr=0&as_pt=ALLTYPES&ei=84EbSrD1E4OYlQSwv4HlCQ&pgis=1 (http://books.google.com/books?id=4e9LAAAAMAAJ&q=intitle:Development+intitle:"China+and+Japan)
[19] Definita la più bella formula della matemtica da Richard Feynman*Richard Feynman,* Chapter 22: Algebra *in* The Feynman Lectures on Physics: Volume I*, , 1970. 10*. Nel 1988, i lettori del *Mathematical Intelligencer* la votarono come "La più bella formula matematica di sempre" *Wells, David (1990)* Are these the most beautiful? . *Mathematical Intelligencer **12** (3): 37–41. DOI: 10.1007/BF03024015* (http://dx.doi.org/10.1007/BF03024015).
Wells, David (1988) Which is the most beautiful? . *Mathematical Intelligencer **10** (4): 30–31. DOI: 10.1007/BF03023741* (http://dx.doi.org/10.1007/BF03023741).
[20] Martin Bernal, "Animadversions on the Origins of Western Science", pp. 72–83 in Michael H. Shank, ed., *The Scientific Enterprise in Antiquity and the Middle Ages*, (Chicago: University of Chicago Press) 2000, p. 75.
[21] Boyer 1991 p. 53
[22] Boyer 1991 pp. 62-64
[23] Boyer 1990, pagg.86-87
[24] qui (http://www.galgani.it/matematica/storia_matematica/quadratura.htm)
[25] Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders, 1990, ISBN 0030295580 p. 141: "No work, except The Bible, has been more widely used...."
[26] Fisher, Ernest Peter (1997) *Aristotele, Einstein e gli altri* : 139.
[27] Boyer 1991 p. 143
[28] Boyer 1991 p. 145
[29] Boyer 1991 p. 153
[30] Plutarco, Vita di Marcello, 19, 9
[31] O'Connor (1996)
[32] Boyer, pp. 158–168.
[33] Boyer 1991 p. 205
[34] B.L. van der Waerden, ciece awening 1961 pp. 265-266

« Il buon cristiano deve stare in guardia contro i matematici e tutti coloro che fanno profezie vacue. Esiste già il pericolo che i matematici abbiano fatto un patto col diavolo per oscurare lo spirito e confinare l'umanità nelle spire dell'inferno. »

De genesi ad litteram libro 2, 17.37

[36] Development of Mathematics in Ancient China (http://www.saxakali.com/COLOR_ASP/chinamh1.htm)
[37] The use of the decimal system (http://www.chinaculture.org/gb/en_madeinchina/2005-08/18/content_71974.htm)
[38] Boyer 1991 p.231
[39] Boyer 1991 p.231
[40] Boyer 1991 p.239
[41] Boyer 1990, pp. 231-32
[42] Du Sautoy, L'enigma dei numeri primi 2004 p. 46
[43] Boyer 1991 p. 234
[44] Boyer 1991 p. 241-242
[45] Boyer 1991 p. 243
[46] Boyer 1991 pp. 246-248
[47] Boyer 1991 pp. 257-258
[48] **Shukla**, Kripa Shankar (1984) *Use of Calculus in Hindu Mathematics* . Indian Journal of History of Science **19**: 95–104.
[49] Roger Cooke, *The Mathematics of the Hindus* in *The History of Mathematics: A Brief Course*, Wiley-Interscience, 1997. 213–214
[50] Boyer 1991 p. 259
[51] Boyer 1991 p. 260
[52] Biografia di Madhava in Mac Tutor (http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Madhava.html)
[53] Roy Ranjan 1990 "Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory, and Nilakantha." *Mathematics Magazine* (Mathematical Association of America) 63(5):291-306
[54] Katz, V. J. 1995. "Ideas of Calculus in Islam and India." *Mathematics Magazine* (Mathematical Association of America), 68(3):163-174.
[55] Boyer 1991 pp. 266
[56] Boyer 1991 pp. 268-9
[57] Boyer 1991 p.268
[58] J. Lennart Berggren, *Mathematics in Medieval Islam* in *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*, Princeton University Press, 2007.
[59] Victor J. Katz (1998). *History of Mathematics: An Introduction*, pp. 255–59. ISBN 0321016181.
[60] Boyer 1990, p. 284

[62] Boyer 1991 pp. 293-294
[63] Boyer 1991 p. 298
[64] Boyer 1991 p. 308-309
[65] Boyer 1991 p. 312
[66] Umberto Bottazzini *La "grande arte": l'algebra nel Rinascimento* in *Storia della Scienza* Vol. 1 (a cura di) Paolo Rossi p. 69
[67] Uno dei più grandi matematici del periodo François Viète riuscendo a risolvere un'equazione di grado 45 con l'utilizzo della trigonometria considerò tuttavia solo le soluzioni positive cit. Boyer 1991 p. 358
[68] William Dunham, *Euler, the master of us all*, The Mathematical Association of America, 1999, ISBN 0-88385-328-0
[69] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/
[70] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/
[71] http://www.galgani.it/matematica/storia_matematica/
[72] http://www.arab.it/islam/la_matemtica_del_mondo_islamico.htm
[73] http://www.fisicamente.net/index-845.htm&h=293&w=561&sz=177&hl=it&start=5&um=1&tbnid=GY3AYllCTlTN-M:&tbnh=69&tbnw=133&prev=/images%3Fq%3Dmetodo%2Bdi%2Besaustione%26svnum%3D10%26um%3D1%26hl%3Dit%26lr%3D%26sa%3DN
[74] http://matematica.unibocconi.it/indice.htm
[75] http://www.dm.unipi.it/~tucci/index.html
[76] http://web.math.unifi.it/archimede/matematicaitaliana/schede_opere/saggio.html

Aritmetica

Aritmetica

L'**aritmetica** (dal greco *αριθμός* = numero) è il ramo più antico e più semplice della → matematica. Essa è praticata quotidianamente da tutti per scopi molto semplici, come contare oggetti, valutare costi, stabilire distanze; essa viene utilizzata anche per scopi avanzati, ad esempio in complessi calcoli finanziari o nella tecnologia delle comunicazioni (v. crittografia). Il termine si riferisce a quella branca di matematica che studia le proprietà elementari delle *operazioni* sui numeri, specialmente i numeri interi.

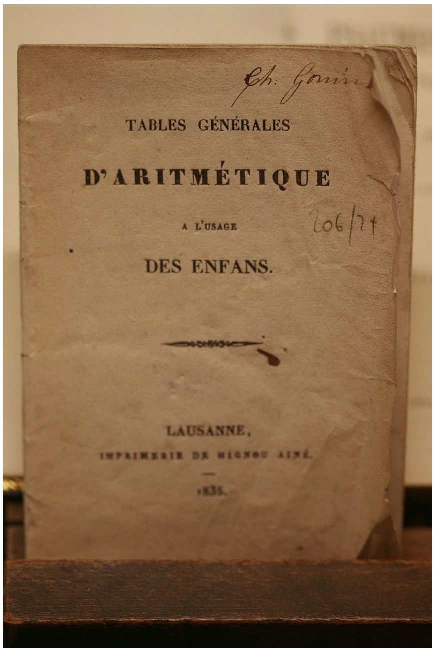


Tavola aritmetica per bambini, Lausanne 1835

I matematici talvolta usano il termine aritmetica per indicare la → teoria dei numeri; questa disciplina però tratta problemi più avanzati e specifici rispetto all'aritmetica elementare e non viene presa in considerazione nel presente articolo.

Storia

La preistoria dell'aritmetica si limita ad un piccolo numero di piccoli artefatti che testimoniano una chiara concezione dell'addizione e della sottrazione; la prima fonte è l'osso d'Ishango rinvenuto nell'Africa centrale, datata circa tra il 20,000 e il 18,000 a.C.

È chiaro che i babilonesi avevano una solida conoscenza di quasi tutti gli aspetti dell'aritmetica elementare già intorno al 1800 a.C., anche se gli storici possono solo avanzare congetture sopra i metodi utilizzati per ottenere i risultati delle operazioni aritmetiche; questo è il caso dei risultati presentati nella tavoletta d'argilla Plimpton 322, che si presenta come una lista di terne pitagoriche; non si ha invece la possibilità di mostrare in qual modo questa lista sia stata originariamente prodotta. Similmente gli egizi, attraverso il Papiro di Rhind (che risale al 1650 a.C. ca., ma che, con ogni evidenza, è una copia di un vecchio testo del 1850 a.C. ca.) testimoniano che le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione venivano effettuate all'interno di un sistema basato su frazioni unitarie.

Nicomaco (60 - 120 d.C.) nella sua opera *Introduzione all'aritmetica* ha presentato concisamente l'approccio filosofico pitagorico ai numeri, e alle loro mutue relazioni. In quei tempi le operazioni aritmetiche di base costituivano attività molto complesse ed impegnative; è stato il metodo noto come il "Metodo degli indiani" (in latino *Modus Indorum*), che ha condotto all'aritmetica che conosciamo oggi. L'aritmetica indiana è stata molto più semplice di quella greca, a causa della semplicità del sistema di numerazione indiano, che per primo è riuscito a servirsi del numero zero e di una notazione posizionale. Nel VII secolo il vescovo siriaco Severo Sebokht menzionava questo metodo con ammirazione, precisando tuttavia che il metodo degli indiani si presentava senza alcuna descrizione. Gli arabi appresero questo nuovo metodo e lo chiamarono *hesab*. Fibonacci (noto anche come Leonardo di Pisa), ha introdotto in Europa il "metodo degli indiani" nel 1202. Nel suo libro*Liber Abaci*, Fibonacci afferma che, rispetto a questo nuovo metodo, tutti gli altri metodi sono stati sbagliati. Nel Medioevo, l'aritmetica era una delle sette Arti Liberali e veniva insegnata nelle università.

I moderni algoritmi dell'aritmetica (utilizzati sia per calcoli manuali che per calcoli automatici) sono stati resi possibili dalla introduzione dei numerali arabi e della loro notazione numerica posizionale e decimale. L'aritmetica araba basata sui numerali era stata sviluppata dai grandi matematici indiani Aryabhatta, Brahmagupta e Bhāskara I. Aryabhatta ha tentato di usare diverse notazioni posizionali e Brahmagupta ha arricchito dello zero il sistema numerico indiano. Brahmagupta ha messo a punto i procedimenti moderni per moltiplicazione, divisione, l'addizione e sottrazione basate sulle cifre decimali. Sebbene oggi siano ormai considerati elementari, questi procedimenti per la loro semplicità costituiscono il punto di arrivo di migliaia di anni di sviluppo della matematica. Per contrasto l'antico matematico Archimede ha dedicato un'intera opera,*l'Arenario* , a mettere a punto una notazione per un certo numero intero molto grande. Alla fioritura dell'→ algebra nel mondo islamico medievale e nell'Europa Rinascimentale ha contribuito in misura significativa anche l'enorme semplificazione dei calcoli numerici consentita dalla notazione decimale.

Aritmetica decimale

Il sistema numerico decimale è un sistema di numerazione posizionale che rappresenta i numeri a partire dalle cifre base da 0 a 9. Un numero decimale consiste in una sequenza di queste cifre base. Il valore di ciascuna cifra che compone il numero dipende dalla posizione che la cifra occupa nella notazione. Una parte essenziale di questo sistema (e un grande ostacolo da superare) è stato pensare allo 0 come ad un numero comparabile alle altre cifre base.

Operazioni aritmetiche

Le operazioni aritmetiche tradizionali sono addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, sebbene vengano a volte incluse nella materia anche operazioni più avanzate come l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice, i logaritmi e l'uso delle percentuali. I calcoli aritmetici vengono effettuati rispettando l'ordine delle operazioni. Qualunque insieme su cui possono essere effettuate tutte e quattro le operazioni aritmetica (eccetto la divisione per zero), e in cui le quattro operazioni godono delle comuni proprietà, è chiamato campo.

Teoria dei numeri

Il termine *aritmetica* è usato anche per riferirsi alla → teoria dei numeri. Quest'ultima studia le proprietà degli interi collegate ai numeri primi, la divisibilità, e le soluzioni intere delle equazioni, che sono argomenti in rapida crescita nella matematica moderna. È in questo contesto che si incontrano il teorema fondamentale dell'aritmetica e le funzioni aritmetiche.

Insegnamento dell'aritmetica nella scuola italiana

In generale nella scuola elementare vengono insegnati gli algoritmi di calcolo manuali per eseguire le quattro operazioni nell'insieme dei numeri naturali e dei numeri razionali positivi nella forma decimale; nelle medie inferiori gli algoritmi di queste stesse operazioni eseguite su frazioni e vengono introdotti l'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri reali.

Sempre alle medie inferiori si studiano le operazioni di elevamento a potenza, di estrazione di radice (in particolare la radice quadrata), di massimo comune divisore e di minimo comune multiplo. Tradizionalmente si insegnava l'algoritmo manuale di estrazione di radice quadrata, ma ciò ora non è più sempre vero, visto che molti insegnanti preferiscono insegnare l'uso delle tavole numeriche o quello del calcolatore tascabile. Viene inoltre appreso il metodo di approssimazione dei risultati. Vengono introdotte le proporzioni e la proporzionalità e le sue applicazioni alla risoluzione di problemi del tre semplice e del tre composto, di ripartizione e di applicazioni di matematica finanziaria.

Nelle scuole medie superiori si studiano i logaritmi; anche qui si è passati dall'apprendimento dell'uso del regolo calcolatore a quello del calcolatore o del computer. Entrambi questi strumenti sono ampiamente utilizzati terminati gli studi per eseguire calcoli numerici.

Voci correlate

- addizione
- inverso additivo
- associatività
- commutatività
- proprietà distributiva
- retta dei numeri

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Aritmetica**

mwl:Aritmética

Teoria dei numeri

« La matematica è la regina delle scienze e la teoria dei numeri è la regina della matematica »
(Carl Friedrich Gauss)

Tradizionalmente, la **teoria dei numeri** è quel ramo della → matematica pura che si occupa delle proprietà dei numeri interi e contiene molti problemi aperti che possono essere facilmente compresi anche da chi non è un matematico. Più in generale, la materia è giunta ad occuparsi di una più ampia classe di problemi che sono sorti naturalmente dallo studio degli interi. La teoria dei numeri può essere divisa in diversi campi a seconda dei metodi utilizzati e dei problemi studiati.

Il termine "→ aritmetica" viene anche utilizzato per riferirsi alla teoria dei numeri. Questo termine è piuttosto vecchio, e non è più popolare come era una volta. Tuttavia, il termine rimane prevalente, ad esempio, nel nome dei "campi" matematici (geometria algebrica aritmetica e l'aritmetica delle curve ellittiche e delle superfici). Questo significato della parola aritmetica non dovrebbe essere confuso con la branca della logica che studia l'aritmetica intesa come sistema formale.

Branche e caratteristiche della teoria dei numeri

Nella **teoria dei numeri elementare**, gli interi sono studiati senza l'uso di tecniche provenienti da altri settori della matematica. Rientrano in questa parte le questioni di divisibilità, l'algoritmo di Euclide per calcolare il massimo comune divisore, la fattorizzazione di interi in numeri primi, lo studio dei numeri perfetti e le congruenze. Tipiche asserzioni sono il piccolo teorema di Fermat e il teorema di Eulero (che è una sua generalizzazione), il teorema cinese del resto e la legge di reciprocità quadratica. Vengono indagate le proprietà delle funzioni moltiplicative come la funzione di Möbius e la funzione φ di Eulero; come pure le successioni di interi come i fattoriali e i numeri di Fibonacci.

Molti problemi della teoria dei numeri elementare sono eccezionalmente profondi e (allo stato attuale) richiedono nuove idee. Esempi sono:

- la congettura di Goldbach che riguarda l'espressione dei numeri pari come somma di numeri primi,

- la congettura dei numeri primi gemelli riguardo all'esistenza di infiniti primi gemelli, e
- la congettura di Collatz che riguarda le condizioni di terminazione di un algoritmo iterativo.
- Il teorema di Matiyasevich ha dimostrato che la teoria delle equazioni diofantee è *indecidibile* (vedi il decimo problema di Hilbert).

La **teoria dei numeri analitica** sfrutta i meccanismi del calcolo infinitesimale e dell' analisi complessa per affrontare problemi sui numeri interi. Alcuni esempi sono il teorema dei numeri primi e la collegata ipotesi di Riemann. Anche problemi della teoria dei numeri elementare come il problema di Waring (rappresentare un numero dato come somma di quadrati, cubi, ecc.), la congettura dei numeri primi gemelli e la congettura di Goldbach vengono attaccati con metodi analitici. Anche le dimostrazioni di trascendenza delle costanti matematiche, come π o *e*, vengono classificate nella teoria dei numeri analitica. Mentre le affermazioni sui numeri trascendenti sembrerebbero non riguardare i numeri interi, esse studiano in realtà la possibilità di certi numeri di essere rappresentati come radici di un polinomio a coefficienti interi; i numeri trascendenti sono inoltre strettamente collegati all'approssimazione Diofantea, che studia la precisione con cui un dato numero reale può essere approssimato da un numero razionale.

Nella **teoria dei numeri algebrica**, il concetto di numero viene generalizzato a quello di numero algebrico che è radice di un polinomio a coefficienti interi. Questi domini contengono elementi analoghi agli interi, chiamati interi algebrici. In questo ambiente, è possibile che le proprietà familiari dei numeri interi (come l'unicità della fattorizzazione) non siano più verificate. La forza degli strumenti utilizzati -- teoria di Galois, coomologia dei campi, teoria dei campi delle classi, rappresentazioni dei gruppi e funzioni L -- è quella di consentire (almeno in parte) di recuperare l'ordine per questa nuova classe di numeri.

Molti problemi di teoria dei numeri vengono attaccati più facilmente studiandole *modulo p* per tutti i numeri primi *p* (vedi campi finiti). Questo metodo è chiamato *localizzazione* e porta alla costruzione dei numeri p-adici; questo settore di studi è chiamato analisi locale e nasce dalla teoria dei numeri algebrica.

La **teoria geometrica dei numeri** incorpora tutte le forme di geometria. Comincia con il teorema di Minkowski sui punti reticolari negli insiemi convessi e lo studio dell'impacchettamento delle sfere. Viene spesso impiegata anche la → geometria algebrica, specialmente la teoria delle curve ellittiche. Il famoso ultimo teorema di Fermat fu dimostrato utilizzando queste tecniche.

Infine, la **teoria dei numeri computazionale** studia algoritmi importanti nella teoria dei numeri. Algoritmi efficienti per la verifica della primalità e la fattorizzazione di interi hanno importanti applicazioni nella crittografia.

Storia della teoria dei numeri

La *teoria dei numeri*, uno degli argomenti preferiti presso gli antichi greci, vide la sua rinascita nel sedicesimo e nel XVII secolo nelle opere di Viète, Bachet de Meziriac, e soprattutto Pierre de Fermat. Nel XVIII secolo Euler e Lagrange diedero importanti contributi alla teoria, e al suo termine la disciplina iniziò ad avere una forma scientifica grazie ai grandi lavori di Legendre (1798), e Gauss (1801). Con le *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) di Gauss può dirsi iniziata la moderna teoria dei numeri.

Chebyshev (1850) fornì utili margini per il numero di primi compresi tra due limiti. Riemann (1859) congetturò una formula asintotica migliorata per il teorema dei numeri primi, introdusse l'analisi complessa nella teoria della funzione zeta di Riemann, e, dai suoi zeri, derivò le formule esplicite della teoria dei numeri primi.

La teoria delle congruenze si può far risalire alle *Disquisitiones* di Gauss. Egli introdusse la notazione:

$$a \equiv b \pmod{c},$$

ed esplorò la maggior parte della materia. Nel 1847 Chebyshev pubblicò un lavoro in Russo sull'argomento, che fu reso popolare in Francia da Serret.

Oltre a riassumere il lavoro precedente, Legendre enunciò la legge di reciprocità quadratica. Questa legge, scoperta per induzione matematica ed enunciata da Eulero, fu provata per la prima volta da Legendre nel suo *Théorie des Nombres* (1798), sebbene soltanto per casi particolari. Indipendentemente da Eulero e Legendre, Gauss scoprì la legge intorno al 1795, e fu il primo a dare una dimostrazione generale. Altri personaggi eminenti che contribuirono alla materia sono: Cauchy; Dirichlet, di cui *Vorlesungen über Zahlentheorie* (*Lezioni di teoria dei numeri*) è un classico; Jacobi, che introdusse il simbolo di Jacobi; Liouville, Eisenstein, Kummer, e Kronecker. La teoria viene generalizzata per includere la legge di reciprocità cubica e biquadratica, (Gauss, Jacobi, Kummer).

È dovuta a Gauss anche la rappresentazione di interi in forme quadratiche. Cauchy, Poinsot (1845), Lebesgue(?) (1859, 1868), e specialmente Hermite contribuirono all'argomento. La teoria delle forme ternarie fu studiata da Eisenstein, e a lui ed a H. J. S. Smith sono dovuti notevoli progressi nella teoria delle forme in generale. Smith diede una classificazione completa delle forme ternarie quadratiche, e estese le ricerche di Gauss sulle forme quadratiche reali alle forme complesse. Gli studi riguardanti la rappresentazione dei numeri come somma di 4, 5, 6, 7, 8 quadrati furono portati avanti da Eisenstein e la teoria fu completata da Smith.

Dirichlet fu il primo a tenere delle lezioni sulla materia in una università tedesca. Tra i suoi contributi vi è l'estensione dell'ultimo teorema di Fermat , che Eulero e Legendre avevano risolto per $n = 3, 4$; Dirichlet provò che $x^5 + y^5 \neq az^5$. Tra gli ultimi scrittori francesi vi sono Borel; Poincaré, le cui memorie sono numerose e importanti; Tannery, e Stieltjes. Tra i personaggi più eminenti in Germania vi sono Kronecker, Kummer, Schering, Bachmann, e Richard Dedekind. In Austria l'opera *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* di Stolz (1885-86), e in Inghilterra la *Theory of Numbers* (Part I, 1892) di Mathews sono tra i lavori più completi. Genocchi, Sylvester, e Glaisher diedero altri contributi alla teoria.

Voci correlate

- 11-XX *sigla della sezione della MSC dedicata alla teoria dei numeri*

Collegamenti esterni

- History of Modern Mathematics by David Eugene Smith, 1906 [1] (adapted public domain text)

Bibliografia

- Tom M. Apostol: (2008): *http://dlmf.nist.gov/27/ Functions of Number Theory*, Chapter 27 della NIST Digital Library of Mathematical Functions
- Oystein Ore (1948): *Number Theory and Its History*, Dover Publications, Inc., ISBN 0-486-65620-9
- Richard Dedekind (1963), *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Inc., ISBN 0-486-21010-3
- Richard K. Guy (1981): *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, ISBN 0-387-90593-6
- Harold Davenport, *Aritmetica superiore*. Zanichelli, Bologna, 1994. ISBN 88-08-09154-6
- Melvyn B. Nathanson (2000): *Elementary methods in number theory*, Springer, ISBN 0-387-98912-9
- Kenneth Ireland, Michael Rosen (1990): *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., Springer, ISBN 0-387-97329-0

Riferimenti

[1] http://www.gutenberg.net/etext05/hsmmt10p.pdf

Algebra

Algebra

L'**algebra** è una branca della → matematica che tratta lo studio di strutture algebriche, relazione e quantità.

Il termine algebra (dall'arabo الجبر, *al-ğabr* che significa "unione", "connessione" o "completamento", ma anche "aggiustare") deriva dal nome del libro del matematico persiano arabo Muḥammad ibn Mūsā al-Ḵwārizmī, intitolato *Al-Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala* ("Compendio sul Calcolo per Completamento e Bilanciamento"), che tratta la risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado.

Il primo a usare il termine nel mondo occidentale latino fu il "maestro d'abaco" fiorentino Raffaello di Giovanni Canacci, autore dei *Ragionamenti di algebra*.

Pagina di *Algebra* di al-Khwarizmi

Algebra elementare

L'algebra può essere introdotta come generalizzazione ed estensione dell'→ algebra elementare. Quest'ultima, insegnata nelle scuole secondarie, estende a sua volta l'→ aritmetica tramite l'introduzione di oggetti simbolici, chiamati *variabili* e denotati con delle lettere dell'alfabeto.

Alle variabili si applicano le usuali operazioni aritmetiche di addizione, differenza (unite in un'operazione chiamata somma algebrica), moltiplicazione e divisione. In questo modo vengono introdotti e studiati oggetti come le equazioni ed i polinomi e i metodi di risoluzione per trovarne le radici.

Algebra astratta

L'→ algebra astratta è un'estensione dell'algebra elementare, nata nel XIX secolo e sviluppatasi enormemente nel XX secolo. L'algebra astratta definisce e studia le strutture algebriche: insiemi muniti di operazioni che soddisfano determinati assiomi. Questi insiemi estendono gli usuali insiemi numerici, quali i numeri interi o razionali, e le loro ordinarie operazioni di somma o prodotto.

Esempi di strutture algebriche sono i gruppi, gli anelli, i campi e gli → spazi vettoriali.

Algebra lineare

L'→ algebra lineare è l'algebra utile a studiare le equazioni lineari. Protagonista dell'algebra lineare è lo → spazio vettoriale, una struttura che generalizza il piano cartesiano e permette di definire spazi di dimensione arbitraria.

L'algebra lineare è di importanza fondamentale in molte discipline scientifiche.

Algebra associativa

Teoria dei gruppi

Il gruppo è una struttura algebrica caratterizzata da una singola operazione binaria che soddisfa alcune proprietà. Può essere data una struttura di gruppo ad esempio ai numeri interi (con l'operazione somma), oppure l'insieme delle simmetrie di un particolare oggetto geometrico (con l'operazione di composizione di funzioni).

La teoria dei gruppi studia queste strutture. Fornisce risultati che si applicano in tutta la → geometria, e in particolare alla topologia, e allo studio delle simmetrie. Ha anche una forte correlazione con la combinatoria: l'insieme delle permutazioni di un insieme è ad esempio un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

Teoria degli anelli

Un anello è una struttura algebrica che arricchisce quella di gruppo commutativo, aggiungendovi una seconda operazione binaria: le due operazioni binarie devono soddisfare degli assiomi simili a quelli che valgono per le operazioni di somma e prodotto dei numeri interi. Tra gli insiemi che risultano essere degli anelli, troviamo l'insieme dei polinomi o delle matrici (con opportune operazioni di somma e prodotto) e l'insieme Q (numeri razionali).

La teoria degli anelli studia queste strutture. Si applica allo studio delle radici di un polinomio, all'→ algebra lineare (tramite ad esempio lo studio delle matrici, o di strumenti raffinati quali il polinomio caratteristico e il polinomio minimo), e in un modo più avanzato alla → geometria algebrica.

Teoria dei campi

Un campo è un anello che deve soddisfare degli assiomi ulteriori, che molte strutture semplici non soddisfano: ad esempio gli interi non sono un campo, mentre i razionali sì.

La teoria dei campi studia queste strutture. I campi sono l'oggetto base necessario per la definizione degli → spazi vettoriali e quindi per tutta l'→ algebra lineare. Sono anche i protagonisti della teoria di Galois.

Algebra non associativa

Altre branche dell'algebra astratta

Oltre alle strutture già descritte, l'algebra ne studia molte altre, tra cui semigruppi, reticoli, moduli, algebre su campo, bialgebre, algebre di Hopf, superalgebre.

L'→ algebra commutativa studia gli anelli commutativi e le loro applicazioni in → geometria algebrica. L'algebra non commutativa, per contro, si occupa degli anelli non commutativi.

- La teoria delle rappresentazioni studia le realizzazioni mediante matrici di varie strutture algebriche, in particolare dei gruppi finiti, dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie.
- L'→ algebra universale studia le proprietà comuni a tutte le strutture algebriche sopra accennate o almeno a estese collezioni di strutture algebriche caratterizzate da proprietà dei rispettivi sistemi di assiomi; questo settore dell'algebra ha molti punti in comune con la teoria delle categorie.
- L'algebra computazionale studia gli algoritmi per la manipolazione simbolica di oggetti matematici.
- L'algebra applicata si occupa delle applicazioni dell'algebra, come quelle riguardanti la crittografia.

Altri usi

Il termine "algebra" viene usato per indicare varie specie di strutture algebriche composite:

- Algebra di Boole
- Algebra di Kleene
- Sigma-algebra
- Algebra di incidenza
- Algebra di Lie
- Algebra di Clifford
- Algebra di Jordan
- Algebra di Cayley-Dickson
- Algebra di Poisson
- Algebra di Virasoro
- Algebra di gruppo
- Algebra di divisione
- Algebra alternativa
- Algebra quadratica
- Algebra di Hopf
- Algebra di Banach
- *-algebra
  - B*-algebra
  - C*-algebra
- Algebra differenziale
- Algebra di insiemi

Bibliografia

- Serge Lang (2002): *Algebra*, 3rd edition, Springer, ISBN 0-387-95385-X. Chap. IV, VI

Voci correlate

Sono numerosi i settori della matematica non prettamente algebrici che si servono approfonditamente di strutture algebriche. A questo proposito, si vedano le voci:

- Gruppo fondamentale
- Spazio vettoriale topologico -
- Spazio di Hilbert -
- Spazio di Banach -
- → Geometria affine -
- → Geometria proiettiva -
- → Geometria algebrica -
- Topologia algebrica
- Diofanto, "padre dell'algebra"
- Mohammed al-Khwarizmi
- Algebra simmetrica

Altri progetti

- **Wikiquote** contiene citazioni di o su **Algebra**

mwl:Álgebra

Algebra elementare

Calcolo letterale
Monomio
Binomio
Trinomio
Polinomio
Prodotti notevoli
Divisione dei polinomi
Divisibilità dei polinomi
Teorema di Ruffini
Regola di Ruffini
Divisibilità di binomi notevoli

L'**algebra elementare** è il più semplice tipo di → algebra insegnata agli studenti che si presume non abbiano alcuna conoscenza → matematica oltre ai principi di base dell'→ aritmetica. Mentre in aritmetica compaiono solo numeri (prevalentemente numeri interi e razionali) e le operazioni (come +, −, ×, ÷), in algebra si usano anche simboli (come *a*, *x*, *y*) per indicare numeri. Ciò è di grande utilità perché:

- consente la formulazione generale di leggi aritmetiche (come $a + b = b + a$ per ogni *a* e *b*), e quindi è il primo passo per un'esplorazione sistematica delle proprietà del sistema dei numeri reali
- consente di riferirsi a numeri incogniti e quindi di formulare delle equazioni e di sviluppare tecniche per risolverle (per esempio: "trova un numero *x* tale che $3 \cdot x + 2 = 10$)
- consente la formulazione di relazioni funzionali (come la seguente: "se si vendono *x* biglietti, allora il profitto sarà $10x - 5$ euro")

Un'espressione algebrica può contenere numeri, variabili ed operazioni aritmetiche; esempi sono $a + 3$e $x^2 - 3$.
Un'equazione è l'affermazione che due espressioni sono uguali in alcuni casi. Alcune equazioni sono vere per ogni valore delle variabili incognite (per esempio $a + (b + c) = (a + b) + c$); esse sono conosciute come identità.
Altre equazioni contengono dei simboli per le variabili incognite e siamo quindi interessati a trovare quei particolari valori che rendono vera l'uguaglianza: $x^2 - 1 = 4$. Essi sono detti *soluzioni* o zeri dell'equazione.
Le equazioni più semplici da risolvere sono quelle lineari, come

$$2x + 3 = 10$$

La tecnica fondamentale è quella di aggiungere, sottrarre, moltiplicare o dividere entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero, e, ripetendo più volte questo processo, arrivare ad esprimere direttamente il valore della *x*. Nell'esempio precedente, se noi sottraiamo 3 da entrambi i membri, otteniamo

$$2x = 7$$

e dividendo entrambi i membri per 2, otteniamo la soluzione

$$x = \frac{7}{2}$$

Equazioni come

$$x^2 + 3x = 5$$

sono note come equazioni quadratiche e si risolvono con una formula risolutiva.

Espressioni o affermazioni possono contenere molte variabili, da cui potrebbe essere possibile o impossibile ricavare il valore di alcune variabili. Per esempio:

$$(x-1)^2 = 0y$$

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici, possiamo dedurre che $x = 1$, ma non possiamo dedurre quale sia il valore di y. Comunque, se noi avessimo avuto un'altra equazione nelle incognite x e y, avremmo potuto ottenere la risposta tramite un sistema di equazioni. Per esempio:

$$4x + 2y = 14$$
$$2x - y = 1$$

Ora, moltiplichiamo la seconda per 2, ottenendo le seguenti espressioni:

$$4x + 2y = 14$$
$$4x - 2y = 2$$

Poiché abbiamo moltiplicato l'intera equazione per due (ossia entrambi i membri), abbiamo in realtà ottenuto un'affermazione equivalente. Ora possiamo combinare le due equazioni, sommando membro a membro:

$$8x = 16$$

In questo modo abbiamo ottenuto una equazione in una sola incognita, che possiamo facilmente risolvere dividendo per 8 e ottenendo $x = 2$.

Ora scegliamo una delle due equazioni di partenza.

$$4x + 2y = 14$$

Sostituiamo 2 al posto di x.

$$4(2) + 2y = 14$$

Semplifichiamo

$$8 + 2y = 14$$
$$2y = 6$$

E risolviamo per y, ottenendo 3. La soluzione di questo problema è $x = 2$ e $y = 3$, ossia la coppia (2, 3).

Leggi di algebra elementare (su un campo)

- L'addizione è un'operazione commutativa.
  - La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.
  - Sottrarre equivale ad aggiungere un numero negativo:

$$a - b = a + (-b)$$

- La moltiplicazione è un'operazione commutativa.
  - La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.
  - Dividere è lo stesso che moltiplicare per il reciproco:

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

- Se $ab = 0$, allora $a = 0$ o $b = 0$ (legge di annullamento del prodotto).
- L'elevamento a potenza non è un'operazione commutativa.
  - L'elevamento a potenza ha due operazioni inverse: il logaritmo e la radice.

- Esempi: se $3^x = 10$ allora $x = \log_3 10$. Se $x^2 = 10$ allora $x = 10^{1/2}$.
- La radice quadrata di -1 è i.
- La proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $c(a+b) = ca + cb$.
- La proprietà distributiva dell'esponenziazione rispetto alla divisione: $(ab)^c = a^c b^c$.
- Come combinare gli esponenti: $a^b a^c = a^{b+c}$.
- Se *a* = *b* e *b* = *c*, allora $a = c$ (proprietà transitiva dell'uguaglianza).
- $a = a$ (proprietà riflessiva dell'uguaglianza).
- Se $a = b$ allora $b = a$ (proprietà simmetrica dell'uguaglianza).
- Se $a = b$ e $c = d$ allora $a + c = b + d$.
  - Se $a = b$ allora $a + c = b + c$ per ogni *c*, per via della riflessività dell'uguaglianza.
- Se $a = b$ e $c = d$ allora ac = bd .
  - Se $a = b$ allora $ac = bc$ per ogni *c* per via della riflessività dell'uguaglianza.
- Se due simboli sono uguali, allora uno può essere sostituito con l'altro.
- Se $a > b$ e $b > c$ allora $a > c$ (transitività della disuguaglianza).
- Se $a > b$ allora $a + c > b + c$ per ogni *c*.
- Se $a > b$ e $c > 0$ allora $ac > bc$.
- Se $a > b$ e $c < 0$ allora $ac < bc$.

Voci correlate

- Binomio
- Distributività
- Frazione

.

Algebra astratta

L'**algebra astratta** è il campo della → matematica che si occupa dello studio delle strutture algebriche come gruppi, anelli e campi. Essa parte dallo studio degli "insiemi privi di struttura" (o insiemistica vera e propria), per analizzare, via via, insiemi sempre più strutturati, cioè dotati di una o più leggi di composizione.

L'espressione "algebra astratta" viene utilizzata per distinguere questo campo di studi dall'"→ algebra elementare" che invece si occupa delle regole per manipolare le formule e le espressioni algebriche che utilizzano numeri reali e complessi.

Storicamente, le strutture algebriche sono solitamente nate prima in altri campi della matematica, dove furono specificate assiomaticamente, e furono quindi studiate come oggetti a sé stanti nell'algebra astratta. Per questo motivo, l'algebra astratta è fruttuosamente connessa con quasi tutti i rami della matematica.

Esempi di strutture algebriche con una singola operazione binaria sono:

- semigruppi
- monoidi
- quasigruppi
- loop
- gruppi

Esempi più complessi includono:

- anelli e campi
- moduli e → spazi vettoriali
- algebre associative e algebre di Lie
- reticoli e algebre di Boole

Nell'→ algebra universale, tutte queste definizioni e proprietà sono raccolte per essere applicate a tutte le strutture algebriche nello stesso modo. Tutte le classi di oggetti elencate sopra, insieme con la nozione di omomorfismo, formano delle categorie, e la teoria delle categorie fornisce spesso il formalismo necessario per tradurre tra differenti strutture algebriche e per confrontarle.

Collegamenti esterni

- John Beachy: *Abstract Algebra On Line* [1], Una lista esauriente di definizioni e teoremi.
- Joseph Mileti: *Museo Matematico: Abstract Algebra* [2], una buona introduzione all'argomento in termini di vita reale.

Bibliografia

- Lucio Lombardo-Radice, *Istituzioni di algebra astratta*. Feltrinelli, Milano 1965.

Riferimenti

[1] http://www.math.niu.edu/~beachy/aaol/contents.html
[2] http://www.math.dartmouth.edu/~mileti/museum/algebra.html

Algebra lineare

L'**algebra lineare** è la branca della → matematica che si occupa dello studio dei vettori, → spazi vettoriali (o spazi lineari), trasformazioni lineari, e sistemi di equazioni lineari. Gli spazi vettoriali sono un tema centrale nella → matematica moderna; così, l'algebra lineare è usata ampiamente nell'→ algebra astratta, nella → geometria e nell'analisi funzionale. L'algebra lineare ha inoltre una rappresentazione concreta nella → geometria analitica.

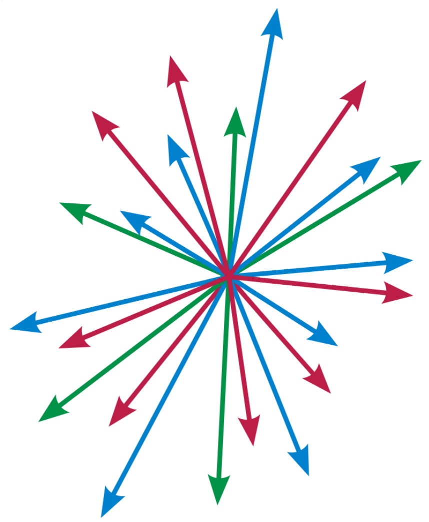
Con l'algebra lineare si studiano completamente tutti i fenomeni fisici "lineari", cioè quelli in cui intuitivamente non entrano in gioco distorsioni, turbolenze e fenomeni caotici in generale. Anche fenomeni più complessi, non solo della fisica ma anche delle scienze naturali e sociali, possono essere studiati "approssimando il sistema" con un modello lineare.

Storia

La storia dell'algebra lineare moderna inizia negli anni 1843 e 1844. Nel 1843, William Rowan Hamilton (che ha introdotto il termine *vettore*) inventò i quaternioni. Nel 1844, Hermann Grassmann pubblicò il suo libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (vedi i Riferimenti). Arthur Cayley introdusse le matrici (2×2), una delle idee fondamentali dell'algebra lineare, nel 1857.

Introduzione elementare

L'algebra lineare ha le sue origini nello studio dei vettori negli spazi cartesiani a due e tre dimensioni. Un vettore, in questo caso, è un segmento orientato, caratterizzato da lunghezza (o magnitudine), direzione e verso. I vettori possono essere usati per rappresentare determinate entità fisiche come le forze, e possono essere sommati fra loro e moltiplicati per uno scalare, formando quindi il primo esempio di → spazio vettoriale sui reali.



Uno spazio vettoriale è una collezione di oggetti, chiamati "vettori", che possono essere sommati e riscalati.

L'algebra lineare moderna è stata estesa per comprendere spazi di dimensione arbitraria o infinita. Uno spazio vettoriale di dimensione *n* è chiamato *n*-spazio. Molti dei risultati utili nel 2-spazio e nel 3-spazio possono essere estesi agli spazio di dimensione maggiore. Anche se molte persone non sanno visualizzare facilmente i vettori negli *n*-spazi, questi vettori o n-uple sono utili per rappresentare dati. Poiché i vettori, come *n*-uple, sono liste *ordinate* di *n* componenti, molte persone comprendono e manipolano i dati efficientemente in questa struttura. Ad esempio, in economia, si può creare e usare vettori 8-dimensionali (ottuple) per rappresentare il Prodotto Interno Lordo di 8 stati. Si può decidere di visualizzare il PIL di 8 stati per un particolare anno, ad esempio (Stati Uniti, Gran Bretagna, Francia, Germania, Spagna, India, Giappone, Australia), usando un vettore (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) dove il PIL di ogni stato è nella sua rispettiva posizione.

Uno spazio vettoriale è definito sopra un campo, come il campo dei numeri reali o il campo dei numeri complessi. Gli operatori lineari mappano elementi da uno spazio vettoriale su un altro (o su sé stesso), in modo che sia mantenuta la compatibilità con l'addizione e la moltiplicazione scalare definiti negli spazi vettoriali. L'insieme di tutte queste trasformazioni è anch'esso uno spazio vettoriale. Se è fissata una base per uno spazio vettoriale, ogni trasformazione lineare può essere rappresentata da una tabella chiamata matrice. Nell'algebra lineare si studiano quindi le proprietà delle matrici, e gli algoritmi per calcolare delle quantità importanti che le caratterizzano, quali il rango, il determinante e l'insieme dei suoi autovalori.

Uno spazio vettoriale (o spazio lineare), come concetto puramente astratto sul quale proviamo teoremi, è parte dell'→ algebra astratta, e ben integrato in questo campo: alcuni oggetti algebrici correlati ad esempio sono l'anello delle mappe lineari da uno spazio vettoriale in sé, o il gruppo delle mappe lineari (o matrici) invertibili. L'algebra lineare gioca anche un ruolo importante in → analisi, specialmente nella descrizione delle derivate di ordine superiore nell'analisi vettoriale e nella risoluzione delle equazioni differenziali.

Concludendo, si può dire semplicemente che i problemi lineari della matematica - quelli che esibiscono "linearità" nel loro comportamento - sono quelli più facili da risolvere, e che i problemi "non lineari" vengono spesso studiati approssimandoli con situazioni lineari. Ad esempio nell'→ analisi, la derivata è un primo tentativo di approssimazione lineare di una funzione. La differenza rispetto ai problemi non lineari è molto importante in pratica: il metodo generale di trovare una formulazione lineare di un problema, in termini di algebra lineare, e risolverlo, se necessario con calcoli matriciali, è uno dei metodi più generali applicabili in matematica.

Generalizzazione e argomenti correlati

I metodi dell'algebra lineare sono stati estesi ad altre branche della matematica, grazie al loro successo. Nella teoria dei moduli si sostituisce il campo degli scalari con un anello. L'algebra multilineare si occupa dei problemi che mappano linearmente 'molte variabili' in un numero differente di variabili, portando inevitabilmente al concetto di tensore. Nella teoria spettrale degli operatori si riescono a gestire matrici di dimensione infinita applicando l'→ analisi matematica in una teoria non puramente algebrica. In tutti questi casi le difficoltà tecniche sono maggiori. Inoltre, l'algebra lineare viene a essere fondamentale per ambiti riguardanti l'ottimizzazione, in particolare la Ricerca Operativa.

Bibliografia

- (**EN**) Serge Lang (2002): *Algebra. Revised 3rd edition*, Springer, ISBN 0-387-95385-X
- (**EN**) Steven Roman (1992): *Advanced linear algebra*, Springer, ISBN 0-387-97837-2
- (**EN**) de Boor, Carl, Applied Linear Algebra [1], (University of Wisconsin-Madison, 2002).
- (**EN**) Rife, Susan A, Matrix Algebra. [2] (Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1996)
- (**EN**) Delatorre, Anthony R. e Cooke, William K., Matrix Algebra. [3] (Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1998)
- (**EN**) Beezer, Rob, *A First Course in Linear Algebra* [4], licenza GFDL.
- (**EN**) J. H. M. Wedderburn *Lectures on Matrices* [5] (American Mathematical Society, Providence, 1934) ISBN:0-8218-3204-2
- (**EN**) Fearnley-Sander, Desmond, Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra [6], American Mathematical Monthly **86** (1979), pp. 809–817.
- (**EN**) Grassmann, Hermann, *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert* [7], O. Wigand, Leipzig, 1844.

Voci correlate

- Progetto:Matematica/Elenco di voci sull'algebra lineare
- → Spazio vettoriale
- Matrice

Collegamenti esterni

- (**EN**) Linear Algebra Toolkit [8].
- (**EN**) Linear Algebra Workbench [9]: moltiplica e inverte matrici, risolve sistemi, trova autovalori, ecc.
- (**EN**) Linear Algebra [10] su MathWorld.

Riferimenti

[1] http://digital.library.wisc.edu/1793/11635
[2] http://handle.dtic.mil/100.2/ADA316035
[3] http://handle.dtic.mil/100.2/ADA350689
[4] http://linear.ups.edu/index.html
[5] http://www.ams.org/online_bks/coll17/
[6] http://www.maths.utas.edu.au/People/dfs/Papers/GrassmannLinAlgpaper/GrassmannLinAlgpaper.html
[7] http://books.google.com/books?id=bKgAAAAAMAAJ
[8] http://www.math.odu.edu/~bogacki/lat/
[9] http://www.algebra.com/algebra/college/linear/
[10] http://mathworld.wolfram.com/topics/LinearAlgebra.html

Algebra commutativa

In → algebra astratta, l'**algebra commutativa** è il settore che studia strutture algebriche commutative (o abeliane) come gli anelli commutativi, i loro ideali e strutture più ricche costruite sui suddetti anelli come i moduli e le algebre. Attualmente costituisce la base algebrica della → geometria algebrica e della teoria dei numeri algebrica.

Il vero fondatore del soggetto, ai tempi in cui veniva chiamata *teoria degli ideali*, dovrebbe essere considerato David Hilbert. Sembra che egli abbia pensato a ciò (attorno al 1900) come approccio alternativo che potesse sostituire uno strumento impegnativo come la teoria delle funzioni complesse. Va considerato che secondo Hilbert gli aspetti computazionali erano meno importanti di quelli strutturali. Il concetto di modulo, presente in qualche forma nei lavori di Kronecker, costituisce un miglioramento tecnico rispetto all'atteggiamento di lavorare utilizzando solo la nozione di ideale. La larga adozione di questo concetto è attribuita all'influenza di Emmy Noether.

Facendo riferimento al concetto di schema, l'algebra commutativa può essere vista come teoria locale o teoria affine nell'ambito della → geometria algebrica.

Lo studio delle strutture algebriche basate su anelli non necessariamente commutativi è chiamato algebra non commutativa; esso è perseguito, oltre che in teoria degli anelli, nella teoria delle rappresentazioni ed in aree non strettamente algebriche come la teoria delle algebre di Banach.

Argomenti legati all'algebra commutativa:

- anello commutativo
- dominio d'integrità
- campo dei quozienti
- dominio ad ideali principali
- dominio di Dedekind
- chiusura integrale
- teorema cinese del resto

- anello locale
- valutazione
- anello noetheriano
- teorema della base di Hilbert
- spettro di un anello
- 13-XX, sezione dello schema di classificazione MSC 2000

Bibliografia

- (**EN**) M.F. Atiyah, I.G. Macdonald (1969) : *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.
- (**EN**) Robert Gilmer (1972) : *Multiplicative ideal theory*, Pure and Applied Mathematics, No. 12. Marcel Dekker, Inc., New York.
- (**EN**) Irving Kaplansky (1974): *Commutative rings*, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London.
- (**EN**) Hideyuki Matsumura (1989): *Commutative ring theory* , Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-36764-6
- (**EN**) David Eisenbud (1995): *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer, ISBN 0-387-94269-6
- (**EN**) David Cox, John Little, Donald O'Shea (1997): *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2nd ed., Springer, ISBN 0-387-94680-2

Algebra universale

L'**algebra universale** è il settore della → matematica che studia le idee comuni a tutte le strutture algebriche. Essa si collega ai vari argomenti della sezione 08-XX dello schema di classificazione MSC2000.

Idee di base

Dal punto di vista dell'algebra universale, una **algebra** (o **algebra astratta**) è un insieme A dotato di un insieme di operazioni su A. Una ***operazione n*-aria** su A è una funzione che accetta n elementi di A e ritorna un singolo elemento di A. Così, una operazione 0-aria (o *operazione nullaria*) è semplicemente un elemento di A, o una *costante*, spesso indicata con una lettera come a. Una operazione 1-aria (o *operazione unaria*) è semplicemente una funzione da A a A, spesso indicata con un simbolo posto davanti al suo argomento, come $\sim x$. Una operazione 2-aria (o *operazione binaria*) è spesso indicata come un simbolo posto in mezzo ai suoi argomenti, come $x * y$. Le operazioni di arità superiore o indeterminata sono solitamente indicate da simboli di funzione, con gli argomenti posti sotto parentesi e separati da virgole, come $f(x,y,z)$ o $f(x_1,...,x_n)$. In alcuni casi si ammettono operazioni infinitarie, come $\bigwedge_\alpha x_\alpha$, permettendo alla teoria dei reticoli completi di essere studiata.

Quando le operazioni sono state specificate, la natura dell'algebra può essere ulteriormente limitata da assiomi, che nell'algebra universale devono prendere la forma di equazioni. Un esempio è l'assioma associativo per un'operazione binaria, dato dall'equazione $x * (y * z) = (x * y) * z$. L'assioma è considerato valido per tutti gli elementi x, y, e z dell'insieme A.

Secondo Yde Venema, "l'algebra universale può essere vista come una branca speciale della teoria dei modelli, dove ci occupiamo di strutture aventi solo operazioni (cioè, non relazioni), e nelle quali il linguaggio che usiamo per parlare di queste strutture usa solo equazioni." In altre parole le strutture sono tali che possono essere definite in ogni categoria dotata di *prodotto finito*.

Gruppi

Per vedere come funziona, si consideri la definizione di un gruppo. Normalmente un gruppo è definito in termini di una singola operazione binaria *, soggetta ai seguenti assiomi:

- Associatività: $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- Elemento identità: Esiste un elemento e tale che $e * x = x = x * e$.
- Elemento inverso: Per ogni x, esiste un elemento i tale che $x * i = e = i * x$.

(Talvolta si può incontrare un assioma chiamato "chiusura", che afferma: $x * y$ appartiene all'insieme A se x e y vi appartengono. Ma dal punto di vista dell'algebra universale, questo è già sottointeso quando si definisce * una operazione binaria.)

Ora questa definizione di gruppo è problematica dal punto di vista dell'algebra universale. La ragione è che l'assioma dell'elemento identità e dell'inverso non sono espressi puramente in termini di equazioni ma coinvolgono la frase "esiste... tale che". Questo "non è permesso" nell'algebra universale. La soluzione non è difficile: si aggiunge una operazione nullaria e e un'operazione unaria ~, in aggiunta all'operazione binaria *, e quindi si riscrivono gli assiomi nel seguente modo:

- Associatività: $x * (y * z) = (x * y) * z$.
- Elemento identità: $e * x = x = x * e$.
- Elemento inverso: $x * (\sim x) = e = (\sim x) * x$.

(Naturalmente, scriviamo "x^{-1}" al posto di "$\sim x$", cosa che mostra come la notazione delle operazioni di bassa arità può cambiare.)

ora, è necessario controllare se tutto questo cattura la definizione di gruppo. Infatti potrebbe essere necessario specificare ulteriori informazioni rispetto alla definizione usuale di gruppo. Dopotutto, niente nella definizione di gruppo afferma che l'elemento identità e è *unico*; se esiste un altro elemento e', allora il valore dell'operatore nullario e è ambiguo. Comunque, questo non è un problema perché gli elementi identità sono sempre unici. Quindi la definizione di gruppo dell'algebra universale è equivalente alla definizione usuale.

Moduli

Vedi Modulo (algebra).

Ulteriori questioni

Una volta definite le operazioni e gli assiomi per l'algebra, è possibile definire la nozione di omomorfismo *fra* due algebre A e B. Un omomorfismo h: $A \to B$ è semplicemente una funzione dall'insieme A all'insieme B tale che, per ogni operazione f (di arità, diciamo, n), $h(f_A(x_1,...,x_n)) = f_B(h(x_1),...,h(x_n))$. (Sono stati usati qui differenti pedici su f per indicare le diverse versioni di f in A o in B. In teoria, è possibile stabilirlo dal contesto, così di solito i pedici sono omessi). Per esempio, se e è una costante (operazione nullaria), allora $h(e_A) = e_B$. Se ~ è un'operazione unaria, allora $h(\sim x) = \sim h(x)$. Se * è un'operazione binaria, allora $h(x * y) = h(x) * h(y)$. E così via. Vedi anche Omomorfismo.

Il numero di risultati dell'algebra universale è molto vasto. La motivazione per il campo sono i numerosi esempi di algebre (nel senso dell'algebra universale), come monoidi, anelli, e reticoli. Prima che arrivasse l'algebra universale, molti teoremi (specialmente i teoremi sugli isomorfismi) erano provati separatamente in ognuno di questi campi, ma con l'algebra universale, si possono provare una volta per tutte in ogni tipo di sistema algebrico.

Un programma ancora più generale lungo questa linea è portato avanti dalla teoria delle categorie. La teoria delle categorie si applica in molte situazioni nelle quali l'algebra universale non si applica, estendendo la portata dei teoremi. Al contrario, alcuni teoremi che valgono nell'algebra universale non si generalizzano in nessun modo nella teoria delle categorie. Quindi entrambi i campi sono utili. La connessione è che, data una lista di operazioni e assiomi, le algebre e gli omomorfismi corrispondenti sono oggetti e morfismi di una categoria.

Bibliografia

- J. Levy Bruhl (1968): Introduction aux structures algebriques, Dunod
- G. Graetzer (1979): *Universal algebra*, 2nd. edition, Springer
- Paul Moritz Cohn (1981): *Universal algebra*, D. Reidel Publishing Company
- S. N. Burris, H. P. Sankappanavar (1981): *A Course in Universal Algebra*, Springer. Ora anche disponibile liberamente in linea [1]
- Bergman, George M.: *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions* [2] (Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708) 1998, 398 pp. ISBN 0-9655211-4-1.

Collegamenti esterni

- (EN) A Course in Universal Algebra [1] is a free on-line book by Stanley N. Burris and H.P. Sankappanavar

Riferimenti

[1] http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html
[2] http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/

Sistema di algebra computazionale

Con il termine **sistema di algebra computazionale** (o anche con il termine inglese **computer algebra system** e con il suo acronimo **CAS**) si intende un sistema software in grado di facilitare la esecuzione di elaborazioni simboliche. La funzionalità di base di un CAS è la manipolazione di espressioni matematiche in forma simbolica. Lo studio degli algoritmi e delle strutture informative concretamente utilizzabili per i sistemi CAS viene detto **algebra computazionale** o anche **computer algebra**.

Tipi di espressioni

Le espressioni che un CAS è in grado di manipolare tipicamente comprendono polinomi e funzioni razionali in una e più variabili; funzioni elementari standard (potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, varianti iperboliche, funzioni inverse, ...); varie funzioni speciali (gamma, zeta, erf, Bessel, ...); composizioni delle funzioni precedenti; derivate, integrali, somme, prodotti delle espressioni trattabili; serie troncate con coefficienti dati da espressioni, matrici di espressioni e così via. In modo più preciso l'insieme delle espressioni manipolabili da un CAS viene individuato da una definizione ricorsiva alla quale corrispondono i meccanismi interni per il riconoscimento delle espressioni e la determinazione degli schemi per le loro manipolazioni e valutazioni.

Manipolazioni simboliche eseguibili

Le manipolazioni simboliche supportate in genere comprendono

- semplificazione, inclusa la semplificazione automatica e la semplificazione con presunzioni;
- sostituzione di valori simbolici o numerici per le espressioni;
- cambiamenti di forma delle espressioni mediante: sviluppo di prodotti e di potenze, riscrittura sotto forma di frazioni parziali, riscrittura di funzioni trigonometriche come esponenziali, ... ;
- differenziazione rispetto a una o più variabili;
- ottimizzazione globale simbolica sotto vincoli o senza vincoli;
- fattorizzazione parziale e completa;
- soluzione di equazioni lineari e di alcune equazioni non lineari su vari domini;
- soluzione di alcune equazioni differenziali e di alcune equazioni alle differenze;

- valutazione di limiti;
- integrazione indefinita e integrazione definita di varie funzioni, inclusi gli integrali multidimensionali;
- trasformate integrali;
- sviluppi in serie di Taylor, di Laurent e di Puiseux opportunamente troncati;
- sviluppi di alcune serie infinite;
- Sommazione di alcune serie;
- operazioni su matrici, come somme, prodotti, inversioni, prodotti diretti, ... ;
- presentazione bidimensionale delle espressioni matematiche secondo le forme della tradizionale tipografia matematica, spesso utilizzando sistemi per la composizione tipografica simili a TeX (vedi anche pretty print)

La parola "alcuni" in molte espressioni precedenti pone in rilievo che un sistema CAS è in grado di effettuare una data operazione solo su determinati insiemi di espressioni, ovvero solo su determinati insiemi di funzioni. Va rilevato che tutti i sistemi CAS che riescono a rimanere sul mercato vanno progressivamente ampliando questi insiemi.

Altre funzioni

Molti sistemi CAS consentono di effettuare operazioni numeriche:

- algebra lineare numerica;
- valutazione di espressioni per particolari valori delle variabili e dei parametri;
- calcoli di precisione molto elevata (aritmetica di precisione illimitata), che, ad esempio, permettono di valutare numeri algebrici come $2^{1/3}$ con 10.000 cifre decimali;
- tracciamento di grafici e diagrammi parametrici di funzioni che si sviluppano in due e tre dimensioni.

Molti sistemi CAS dispongono anche di un proprio specifico linguaggio di programmazione di alto livello il quale consente agli utenti di implementare propri algoritmi e proprie funzioni. Talora questi linguaggi possono essere sviluppati in ambienti di sviluppo dotati di buoni strumenti per i programmatori.

Infine alcuni sistemi dispongono di strumenti per la gestione di files e archivi di dati da utilizzare nelle elaborazioni o prodotti dalle stesse.

I tempi di esecuzione dei programmi che richiedono prevalentemente operazioni numeriche implementati nei sistemi CAS sono normalmente superiori a quelli di programmi equivalenti che possono essere implementati in sistemi computazionali come MATLAB e GNU Octave oppure mediante linguaggi di livello medio-basso come Fortran e C, in quanto i CAS sono programmati per riuscire a governare elaborazioni simboliche di elevata generalità e tendenzialmente non sono in grado di far intervenire nel modo più diretto le operazioni numeriche di macchina per gran parte delle loro funzionalità.

Cenni storici

I primi sistemi di algebra computazionale sono diventati disponibili nei primi anni 1970, anche come derivati dalla ricerca in intelligenza artificiale; i due settori dell'algebra computazionale e della intelligenza artificiale si sono però presto separati piuttosto nettamente. I primi sistemi a raggiungere la popolarità sono stati Reduce, Derive e Macsyma, tutti sistemi ancora commercialmente disponibili; una versione copyleft di Macsyma chiamata Maxima viene attivamente manutenuta. Gli attuali leaders di mercato sono Mathematica e Maple; entrambi sono ampiamente utilizzati per ricerca e sviluppo da matematici, scienziati e ingegneri. Un altro diffuso sistema commerciale è MuPAD; esso è disponibile in una versione gratuita con una interfaccia con leggere limitazioni per usi di ricerca senza scopo di lucro e per attività didattiche. Sono inoltre disponibili molti altri sistemi di algebra computazionale che concentrano le proprie prestazioni su aree computazionali specifiche; per taluni ristretti campi di applicazione spesso questi sistemi specializzati sono molto più efficienti di quelli di portata più generale, in quanto implementano algoritmi validi per situazioni molto particolari; questi sono tipicamente sviluppati in ambienti accademici e sono gratuiti.

Nozioni matematiche usate nei sistemi di algebra computazionale

- Integrazione simbolica
- Base di Gröbner
- Massimo comun divisore
- Fattorizzazione dei polinomi

Altre voci correlate

- A sharp
- 20-GATE
- Prolog
- Graphing Calculator
- Elenco di sistemi di algebra computazionale
- Confronto di sistemi di algebra computazionale

Bibliografia

- Richard J. Fateman (1972): "Essays in algebraic simplification". Technical report MIT-LCS-TR-095. *(Rapporto tecnico di interesse storico per le prime direzioni della ricerca nell'algebra computazionale. accessibile nel sito di MIT LCS* [1]*)*

Collegamenti esterni

Elenco di sistemi di algebra computazionale

- http://compalg.inf.elte.hu/compalg/coindex.html
- http://www-mri.math.kun.nl/systems_and_packages/systems_and_packages.html
- http://www.cs.kun.nl/~freek/digimath/
- http://www.mat.univie.ac.at/~slc/divers/software.html
- http://www.lapcs.univ-lyon1.fr/~nthiery/CalculFormelLibre/
- SAL list of computer algebra systems [2]
- Software matematico [3] su Open Directory Project (Segnala [4] su DMoz un collegamento pertinente all'argomento "Software matematico")

Siti di sistemi di algebra computazionale

- Axiom [5]
- Behavioural Calculus [6]
- CoCoA [7]
- Derive: (North America [8], Europe [9])
- DoCon [10]
- Eigenmath [11]
- GAP [12]
- GiNaC [13]
- PARI-GP [14]
- Maple [15]
- Mathematica [16]

- Mathomatic [17]
- Maxima [1]
- MuPAD [18]
- REDUCE [19]
- SAGE [20], Open Source Mathematica-like software
- Singular [21]
- DCAS [22]
- Algebrator [23]

Riferimenti

[1] http://www.lcs.mit.edu/publications/specpub.php?id=663
[2] http://sal.kachinatech.com/A/1/
[3] http://www.dmoz.org/Science/Math/Software/
[4] http://www.dmoz.org/cgi-bin/add.cgi?where=Science/Math/Software/
[5] http://wiki.axiom-developer.org/SiteIndex
[6] http://www.orfeobernardo.com/bc/
[7] http://cocoa.dima.unige.it/
[8] http://education.ti.com/us/product/software/derive/features/features.html
[9] http://www.derive-europe.com
[10] http://www.haskell.org/docon/
[11] http://www.eigenmath.net
[12] http://www.gap-system.org/
[13] http://www.ginac.de/
[14] http://pari.math.u-bordeaux.fr/
[15] http://www.maplesoft.com/
[16] http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html
[17] http://www.mathomatic.com
[18] http://www.mupad.de/
[19] http://reduce-algebra.com
[20] http://www.sagemath.org/
[21] http://www.singular.uni-kl.de
[22] http://sourceforge.net/projects/dcas/
[23] http://www.softmath.com

Geometrie

Geometria

La **geometria** (dal greco antico *γεωμετρία*, composto da *γεω*, *geo* = "terra" e *μετρία*, *metria* = "misura", tradotto quindi letteralmente come *misurazione della terra*) è quella parte della scienza → matematica che si occupa delle forme nel → piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni.

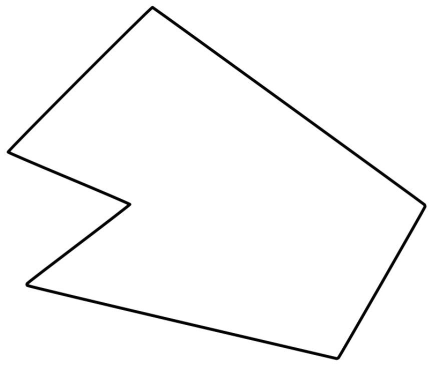
Illustrazione trecentesca: una donna insegna geometria

Geometria euclidea

Euclide nei suoi *Elementi* formula per primo una descrizione assiomatica della geometria.

La geometria coincide fino all'inizio del XIX secolo con la geometria euclidea. Questa definisce come concetti primitivi il punto, la retta e il → piano, e assume la veridicità di alcuni assiomi, gli Assiomi di Euclide. Da questi assiomi vengono quindi dedotti dei teoremi anche complessi, come il → Teorema di Pitagora ed i teoremi della → geometria proiettiva.

La scelta dei concetti primitivi e degli assiomi è motivata dal desiderio di rappresentare la realtà, e in particolare gli oggetti nello spazio tridimensionale in cui viviamo. Concetti primitivi come la retta ed il piano vengono descritti informalmente come "fili e fogli di carta senza spessore", e d'altro canto molti oggetti della vita reale vengono idealizzati tramite enti geometrici come il triangolo o la piramide. In questo modo, i teoremi forniscono fin dall'antichità degli strumenti utili per le discipline che riguardano lo spazio in cui viviamo: meccanica, architettura, geografia, navigazione, astronomia.



Un esagono non convesso. La somma degli angoli interni in un esagono è sempre 720°.

Geometria piana

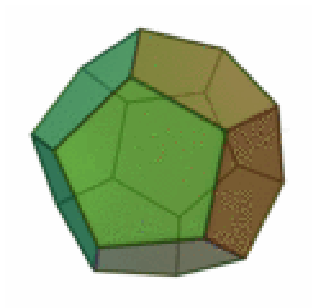
La → geometria piana si occupa delle figure geometriche nel piano. A partire dal concetto primitivo di retta, vengono costruiti i segmenti, e quindi i → poligoni come il triangolo, il quadrato, il pentagono, l'esagono, ecc..

Le quantità numeriche importanti nella geometria piana sono la lunghezza, l'angolo e l'area. Ogni segmento ha una lunghezza, e due segmenti che si incontrano in un estremo formano un angolo. Ogni poligono ha un'area. Molti teoremi della geometria piana mettono in relazione le lunghezze, angoli e aree presenti in alcune figure geometriche. Ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo risulta essere un angolo piatto, e l'area di un rettangolo si esprime come prodotto delle lunghezze dei segmenti di *base* e *altezza*. La trigonometria studia le relazioni fra gli angoli e le lunghezze.

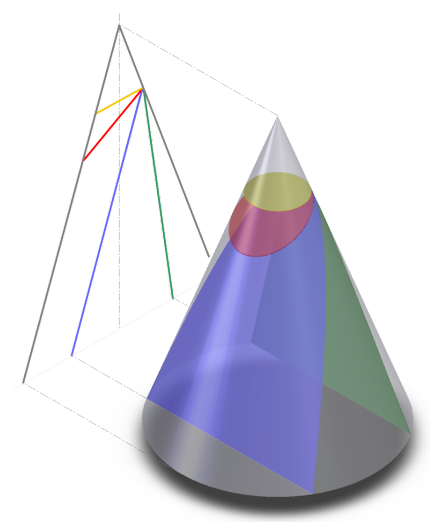
Geometria solida o Stereometria

La → geometria solida studia le costruzioni geometriche nello spazio. Con segmenti e poligoni si costruiscono i poliedri, come il tetraedro, il cubo e la piramide.

I poliedri hanno vertici, spigoli e facce. Ogni spigolo ha una lunghezza, ed ogni faccia ha un'area. In più, il poliedro ha un → volume. Si parla inoltre di angoli diedrali per esprimere l'angolo formato da due facce adiacenti in uno spigolo. Molti teoremi mettono in relazione queste quantità: ad esempio il volume della piramide può essere espresso tramite l'area della figura di base e la lunghezza dell'altezza.



Il dodecaedro è uno dei cinque solidi platonici. Platone nel Timeo ritenne che il dodecaedro rappresentasse la forma dell'universo.



Le → sezioni coniche (ellisse, parabola, iperbole) sono ottenute come intersezione di un cono con un piano.

Figure curve

La geometria euclidea considera anche alcune figure curve. Le figure "base" sono la circonferenza nel piano e la sfera nello spazio, definite come luogo dei punti equidistanti da un punto fissato. Partendo da queste figure, ne vengono definite altre come il cono. A queste figure vengono associate grandezze analoghe ai poliedri: si parla quindi di lunghezza della circonferenza, di area del cerchio e di volume della sfera.

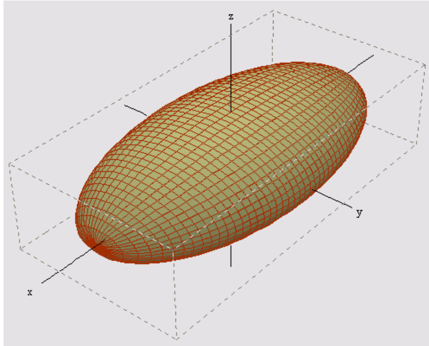
L'intersezione nello spazio di un cono con un piano forma una nuova figura curvilinea: a seconda dell'inclinazione del piano, questa è una ellisse, una parabola, un'iperbole o una circonferenza. Queste → sezioni coniche sono le curve più semplici realizzabili nel piano.

Ruotando una figura intorno ad una retta, si ottengono altre figure curve. Ad esempio, ruotando un'ellisse o una parabola si ottengono l'ellissoide ed il paraboloide. Anche in questo caso, il volume dell'oggetto può essere messo in relazione con altre quantità.

La geometria euclidea non fornisce però sufficienti strumenti per dare una corretta definizione di lunghezza e area per molte figure curve.

Geometria cartesiana

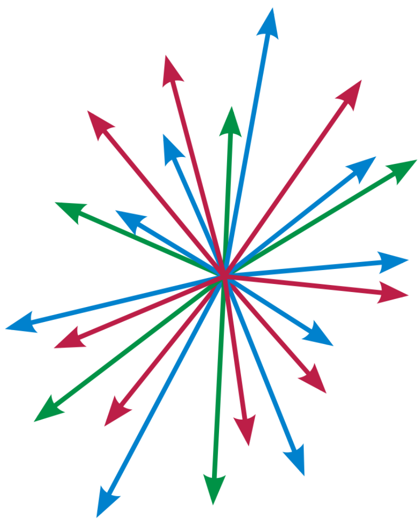
La geometria cartesiana (o analitica) ingloba le figure ed i teoremi della geometria euclidea, introducendone di nuovi grazie a due altre importanti discipline della matematica: l'→ algebra e l'→ analisi. Lo spazio (ed il piano) sono rappresentati con delle coordinate cartesiane. In questo modo ogni figura geometrica è descrivibile tramite una o più equazioni (o disequazioni).



Un ellissoide può essere rappresentato in geometria analitica come luogo di punti che soddisfano una certa equazione, del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$, nelle variabili x, y, z associate ai tre assi cartesiani.

Rette e piani sono oggetti risultanti da equazioni di primo grado, mentre le coniche sono definite tramite equazioni di secondo grado. Equazioni polinomiali di grado superiore definiscono nuovi oggetti curvi.

Il calcolo infinitesimale permette di estendere con precisione i concetti di lunghezza e area a queste nuove figure. L'integrale è un utile strumento analitico per determinare queste quantità. Si parla in generale quindi di curve e superfici nel piano e nello spazio.


Uno spazio vettoriale è una collezione di oggetti, chiamati "vettori", che possono essere sommati e riscalati.

Spazi vettoriali

Retta (passante per l'origine), piano (contenente l'origine) e spazio sono esempi di → spazi vettoriali di dimensione rispettivamente 1, 2 e 3: infatti ogni punto è esprimile rispettivamente con 1, 2 o 3 coordinate. La geometria cartesiana è facilmente estendibile alle dimensioni superiori: in questo modo si definiscono spazi di dimensione 4 e oltre, come insiemi di punti aventi 4 o più coordinate.

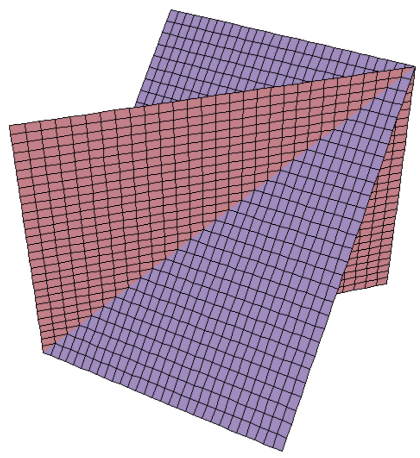
Grazie all'→ algebra lineare, lo studio delle rette e dei piani nello spazio può essere esteso allo studio dei sottospazi di uno spazio vettoriale, di dimensione arbitraria. Lo studio di questi oggetti è strettamente collegato a quello dei sistemi lineari e delle loro soluzioni.

In dimensione più alta, alcuni risultati possono contrastare con l'intuizione geometrica tridimensionale a cui siamo abituati. Ad esempio, in uno spazio di dimensione 4, due piani possono intersecarsi in un punto solo.

Geometria affine

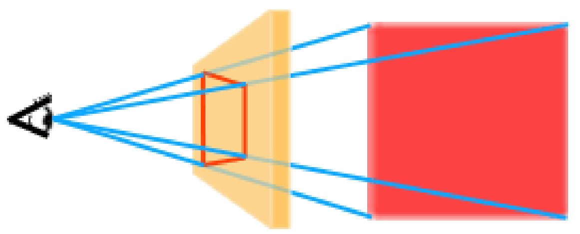
In uno spazio vettoriale l'origine (cioè il punto da cui partono gli assi, di coordinate tutte nulle) gioca un ruolo fondamentale: per poter usare in modo efficace l'→ algebra lineare, si considerano infatti solo sottospazi passanti per l'origine. In questo modo si ottengono delle relazioni eleganti fra i sottospazi, come la formula di Grassmann.

Nella → geometria affine il ruolo predominante dell'origine è abbandonato. I sottospazi non sono vincolati, e possono quindi essere paralleli: questo crea una quantità considerevole di casistiche in più. In particolare, la formula di Grassmann non è più valida. Lo spazio affine è considerato (fino alla scoperta della relatività ristretta) come lo strumento migliore per creare modelli dell'universo, con 3 dimensioni spaziali ed eventualmente 1 dimensione temporale, senza "origini" o punti privilegiati.


Due piani nello spazio sono paralleli oppure si intersecano in una retta, come in figura.

Geometria algebrica

Dal XIX secolo in poi l'algebra diventa uno strumento preponderante per lo studio della geometria. Nel tentativo di "abbellire" il quadro, e di ricondurre molte proprietà e teoremi ad un numero sempre minore di proprietà fondamentali, la geometria analitica viene progressivamente inglobata in un concetto più ampio di geometria: si aggiungono i "punti all'infinito" (creando così la → geometria proiettiva), e si fanno variare le coordinate di un punto non solo nei numeri reali, ma anche in quelli complessi.


La geometria proiettiva è la geometria "vista da un occhio". In questa geometria due rette si incontrano sempre.

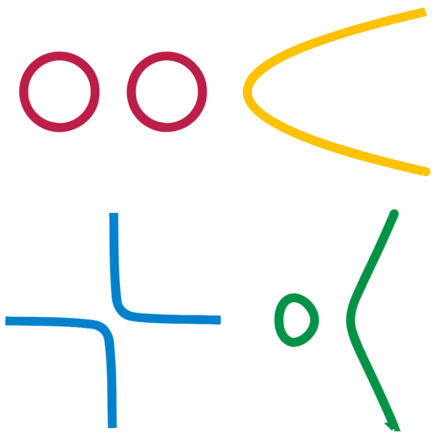
Geometria proiettiva

La → geometria proiettiva nasce come strumento legato al disegno in prospettiva, e viene formalizzata nel XIX secolo come un arricchimento della geometria cartesiana. La geometria proiettiva include i "punti all'infinito" ed elimina quindi alcune casistiche considerate fastidiose, come la presenza di rette parallele.

In questa geometria molte situazioni si semplificano: due piani distinti si intersecano sempre in una retta, e oggetti differenti della geometria analitica (come le coniche ellisse, parabola e iperbole) risultano essere equivalenti in questo nuovo contesto.

La geometria proiettiva è anche un esempio di compattificazione: similmente a quanto accade con la proiezione stereografica, aggiungendo i punti all'infinito lo spazio diventa compatto, cioè "limitato", "finito".

Varietà algebriche



Varietà algebriche definite da alcuni semplici polinomi nel piano: due circonferenze, una parabola, una iperbole, una *cubica* (definita da un'equazione di terzo grado).

La geometria algebrica verte essenzialmente sullo studio dei polinomi e delle loro radici: gli oggetti che tratta, chiamati → varietà algebriche, sono gli insiemi dello → spazio proiettivo, → affine o euclideo definiti come luoghi di zeri di polinomi.

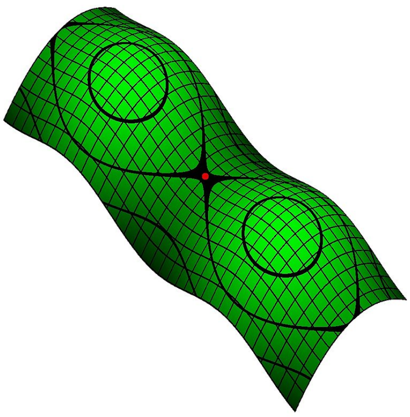
Nel XX secolo il concetto di varietà algebrica assume un'importanza sempre maggiore. Rette, piani, coniche, ellissoidi, sono tutti esempi di varietà algebriche. Lo studio di questi oggetti raggiunge risultati impressionanti quando le coordinate dello spazio vengono fatte variare nel campo dei numeri complessi: in questo caso, grazie al teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio ha sempre delle radici.

Questo fatto algebrico di grande importanza (esprimibile dicendo che i numeri complessi formano un campo algebricamente chiuso) ha come conseguenza la validità di alcuni teoremi potenti di carattere molto generale. Ad esempio, il teorema di Bézout asserisce che due curve di grado d e d' nel piano che non hanno componenti in comune si intersecano *sempre* in dd' punti, contanti con un'opportuna molteplicità. Questo risultato necessita che il "piano" sia proiettivo e complesso. In particolare, è certamente falso nell'ambito classico della geometria analitica: due circonferenze non devono intersecarsi necessariamente in 4 punti, possono anche essere disgiunte.

Lo studio della geometria nello spazio proiettivo complesso aiuta anche a capire la geometria analitica classica. Le curve nel piano cartesiano reale possono ad esempio essere viste come "sezioni" di oggetti più grandi, contenuti nel piano proiettivo complesso, ed i teoremi generali validi in questo "mondo più vasto e perfetto" si riflettono nel piano cartesiano, pur in modo meno elegante.

Come lo studio della → geometria affine fa largo uso dell'→ algebra lineare, quello delle varietà algebriche attinge a piene mani dall'→ algebra commutativa.

Geometria differenziale



Un punto di sella ha curvatura negativa

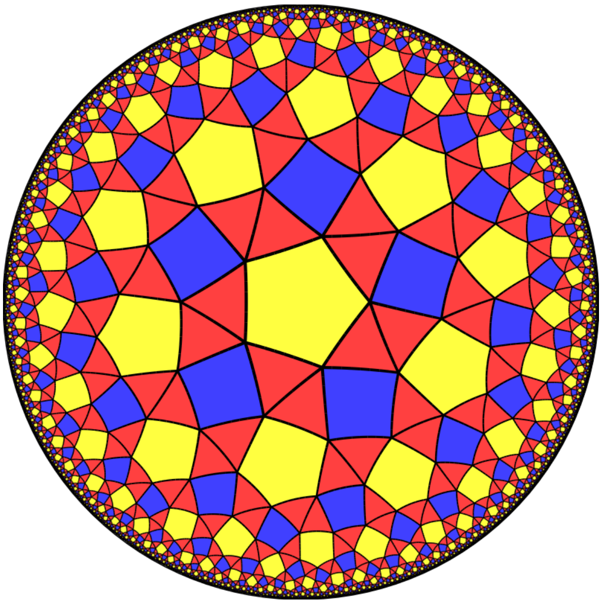
La → geometria differenziale è lo studio di oggetti geometrici tramite l'→ analisi. Gli oggetti geometrici non sono necessariamente definiti da polinomi (come nella geometria algebrica), ma sono ad esempio curve e superfici, cioè oggetti che, visti localmente con una lente di ingrandimento, sembrano quasi rettilinei o piatti. Oggetti cioè "senza spessore", e magari un po' curvi. Come la superficie terrestre, che all'uomo sembra piatta, benché non lo sia.

Questo concetto di "spazio curvo" è espresso tramite la nozione di → varietà differenziabile. La sua definizione non necessita neppure di "vivere" in uno spazio ambiente, ed è quindi usata ad esempio nella relatività generale per descrivere intrinsecamente la forma dell'universo. Una varietà può essere dotata di una proprietà fondamentale, la curvatura, che viene misurata tramite oggetti matematici molto complessi, come il tensore di Riemann. Nel caso in cui lo spazio sia una curva o una superficie, questi oggetti matematici risultano più semplici: si parla ad esempio di curvatura gaussiana per le superfici.

Su una varietà dotata di curvatura, detta varietà riemanniana, sono definite una → distanza fra punti, e le geodetiche: queste sono curve che modellizzano i percorsi localmente più brevi, come le rette nel piano, o i meridiani sulla superficie terrestre.

Geometrie non euclidee

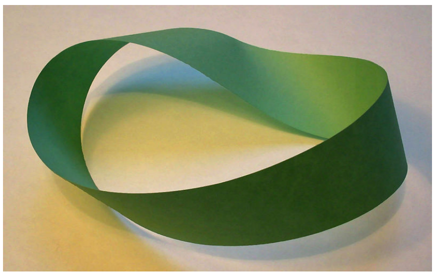
Con la geometria differenziale è possibile costruire un "piano" in cui valgono tutti i postulati di Euclide, tranne il quinto, quello *delle parallele*. Questo postulato ha avuto un'importanza storica fondamentale, perché ci sono voluti 2000 anni per dimostrare la sua effettiva indipendenza dai precedenti. Asserisce che, fissati una retta r ed un punto P non contenuto in r, esiste un'unica retta s parallela a r e passante per P.



Triangoli, quadrilateri e pentagoni formano una tassellazione del piano nella → geometria iperbolica qui rappresentata dal disco di Poincaré. Questa geometria non-euclidea è rappresentata in molte litografie di Maurits Escher.

Una → geometria non euclidea è una geometria in cui valgono tutti gli assiomi di Euclide, tranne quello delle parallele. La sfera, con le geodetiche che giocano il ruolo delle rette, fornisce un esempio semplice di geometria non euclidea: due geodetiche si intersecano *sempre* in due punti antipodali, e quindi non ci sono rette parallele. Un tale esempio di geometria è detta → ellittica. Esistono anche esempi opposti, in cui ci sono "così tante" rette parallele, che le rette s parallele a r e passanti per P sono infinite (e non una). Questo tipo di geometria è detta → iperbolica, ed è più difficile da descrivere concretamente.

Topologia



Il nastro di Möbius è una superficie non orientabile: ha infatti una "faccia" sola. Questo è un oggetto studiato in topologia.

La topologia è infine lo studio delle forme, e di tutte quelle proprietà degli enti geometrici che non cambiano quando questi vengono deformati in modo continuo, senza strappi. La topologia studia tutti gli oggetti geometrici (definiti in modo algebrico, differenziale, o quant'altro) guardando solo la loro forma. Distingue ad esempio la sfera dal toro, perché quest'ultimo ha "un buco in mezzo". Studia le proprietà di connessione (spazi "fatti di un pezzo solo") e di compattezza (spazi "limitati"), e le funzioni continue fra questi.

Le forme degli oggetti vengono codificate tramite oggetti algebrici, come il gruppo fondamentale: un gruppo che codifica in modo raffinato la presenza di "buchi" in uno spazio topologico.

Geometria e geometrie


Felix Klein

Nel 1872 Felix Klein elaborò un programma di ricerca, l'*Erlanger Programm*, in grado di produrre una grande sintesi delle conoscenze geometriche ed integrarle con altri settori della matematica quali la teoria dei gruppi.

Nella prospettiva di Klein una *geometria* consiste nello studio di proprietà di uno spazio che sono invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni:

- La → geometria euclidea si occupa di proprietà che sono invarianti rispetto a isometrie, cioè trasformazioni che preservano lunghezze e angoli.
- La → geometria affine si occupa di proprietà che sono invarianti per → trasformazioni affini. In ambito di geometria affine non ha più senso il concetto di "angolo" o di "lunghezza" e tutti i triangoli sono "equivalenti".
- La → geometria proiettiva studia le proprietà che sono invarianti per trasformazioni proiettive, cioè trasformazioni che possono essere ottenute mediante proiezioni. In ambito proiettivo tutte le coniche sono equivalenti potendo essere trasformata l'una nell'altra da una proiezione.
- La topologia studia proprietà che sono invarianti per deformazioni continue. Dal punto di vista topologico una tazza ed una ciambella diventano equivalenti potendo essere deformate l'una nell'altra ma rimangono distinte da una sfera che non può essere "bucata" senza una trasformazione discontinua.

Applicazioni

La → geometria analitica e l'→ algebra lineare forniscono importanti collegamenti tra l'intuizione geometrica e il calcolo algebrico che sono diventati ormai una parte costitutiva di tutta la matematica moderna e delle sue applicazioni in tutte le scienze.

La → geometria differenziale ha trovato importanti applicazioni nella costruzione di modelli per la fisica e per la cosmologia.

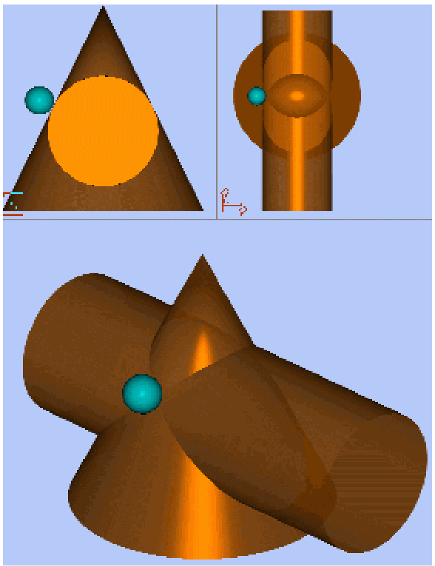
La geometria piana e dello spazio fornisce inoltre degli strumenti per modellizzare, progettare e costruire oggetti reali nello spazio tridimensionale: è quindi di fondamentale importanza in architettura e in ingegneria come anche nel disegno e nella computer grafica.

Geometria descrittiva

La → geometria descrittiva è una disciplina che permette, attraverso determinate costruzioni grafiche, di rappresentare oggetti tridimensionali già esistenti (rilievo) e/o da costruire (progettazione).

L'applicazione informatizzata della geometria descrittiva permette oggi la creazione di superfici e solidi, anche ad alta complessità tridimensionale. Inoltre, e soprattutto, ne permette il controllo in modo inequivocabile di ogni loro forma e dimensione.

I maggiori campi d'impiego della geometria descrittiva sono quelli dell'architettura, dell'ingegneria e quelli del design industriale.



esempio di raccordo tangenziale tra due quadriche di rotazione

Cenni storici

La nascita della Geometria si fa risalire all'epoca degli antichi Egiziani. Erodoto racconta che a causa dei fenomeni di erosione e di deposito dovuti alle piene del Nilo, l'estensione delle proprietà terriere egiziane variavano ogni anno e dovevano quindi essere ricalcolate a fini fiscali. Nacque così il bisogno di inventare tecniche di *misura della terra* (*geometria* nel significato originario del termine).

Lo sviluppo della Geometria pratica è molto antico, per le numerose applicazioni che consente e per le quali è stata sviluppata, e in epoche remote fu a volte riservata a una categoria di sapienti con attribuzioni sacerdotali.

Presso l'Antica Grecia si diffuse massicciamente l'uso della riga e del compasso (sebbene pare che questi strumenti fossero già stati inventati altrove) e soprattutto nacque l'idea nuova di usare tecniche dimostrative. La geometria greca servì di base per lo sviluppo della geografia, dell'astronomia, dell'ottica, della meccanica e di altre scienze, nonché di varie tecniche, come quelle per la navigazione. Nella civiltà greca, oltre alla geometria euclidea che si studia ancora a scuola e alla teoria delle coniche, nacquero anche la → geometria sferica e la trigonometria (piana e sferica).

Bibliografia

- Robin Hartshorne *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000, ISBN 0-387-98650-2
- Federigo Enriques *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna Zanichelli 1900
- Federigo Enriques, Ugo Amaldi *Elementi di Geometria ad uso delle scuole superiori*, Zanichelli Bologna 1903 (ristampe fino al 1992)
- Federigo Enriques *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, 4 volumi, Roma e Bologna 1925
- Federigo Enriques *Lezioni di geometria descrittiva*, Bologna 1893
- Guido Castelnuovo *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Roma, Milano, 1905
- Guido Castelnuovo *Elementi di geometria analitica e proiettiva* Roma, 1909
- Harold Coxeter *Introduction to Geometry* (1961)
- Harold Coxeter *Non-Euclidean Geometry* (1965)
- Harold Coxeter *Projective geometry* 2nd ed. (1974)
- Joseph Kouneiher, Dominique Flament, Philippe Nabonnand, Jean-Jacques Szczeciniarz, *Géométrie au XXe siècle : histoire et horizons*, Hermann, Paris (2005)

Voci correlate

- → Matematica
- → Algebra
- → Analisi matematica
- Storia della geometria

Altri progetti

- **Wikiquote** contiene citazioni di o su **Geometria**

Collegamenti esterni

- Geometria online [1] Calcola automaticamente aree, perimetri, ecc. di figure piane e solide.

ckb:ه□دن□س□ mwl:Geometrie

Riferimenti

[1] http://www.elvenkids.com/tools/geometria/Geometria_it.php

Geometria euclidea

La **geometria euclidea** è la → geometria che si basa sui cinque postulati di Euclide e in particolar modo sul postulato delle parallele.

Euclide

I cinque postulati

Gli elementi fondamentali della geometria euclidea sono il punto, la retta, ed il piano.

Di seguito si riportano i postulati di Euclide:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.
5. Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni *la cui somma* è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.

È soprattutto sulla violazione di quest'ultimo postulato che si fondano le geometrie non-euclidee come ad esempio la → geometria iperbolica.

Prime conseguenze

Dagli assiomi si possono dedurre delle relazioni di incidenza fra punti, rette e piani. Ad esempio:

- Per un punto passano infinite rette
- Per due punti distinti passa una ed una sola retta
- Per una retta nello spazio passano infiniti piani
- Per tre punti non allineati nello spazio passa un solo piano

Si definiscono quindi altre nozioni, quali ad esempio:

- Due rette nello spazio si dicono *complanari* quando giacciono sullo stesso piano.
- Se un punto divide la retta a metà, ciascuna delle due parti si dice semiretta: questa sarà dotata di un'origine,ma non di una fine.
- La parte di retta delimitata da due punti è detta segmento.

Teoremi principali

- → Teorema della bisettrice
- → Criteri di congruenza dei triangoli
- → Teorema della mediana
- → Teorema di Pappo
- → Teorema di Pasch
- → Teorema di Pitagora
- → Primo teorema di Euclide
- → Secondo teorema di Euclide
- Criteri di similitudine
- → Teorema di Talete

Versione assiomatizzata e corretta

Nel 1899 David Hilbert propone un sistema assiomatico corretto per la geometria. Perché se ne sentiva la necessità? Anzitutto, si cercava di dimostrare per assurdo la correttezza del quinto postulato, e poi perché nella versione originale sono impliciti alcuni altri assunti, ad esempio nel primo assioma è implicito che la retta esista e sia una sola, e che esistano due punti distinti, nella seconda che una retta possegga più di un punto, nel terzo che nel piano ci siano almeno tre punti non allineati, che si possa riportare un segmento di retta per traslazione senza deformarlo, e via di questo passo.

Venne così pubblicato *Grundlagen der Geometrie*, in cui veniva fornito un sistema assiomatico completo, fondato su 21 assiomi, per la geometria euclidea. Fatto questo, subito venne dimostrato da Henri Poincaré che la → geometria iperbolica sviluppata da Giovanni Girolamo Saccheri e da Eugenio Beltrami poteva essere messa in corrispondenza con la geometria euclidea, in modo che un'eventuale autocontraddizione dell'una avrebbe causato la rovina anche dell'altra.

Voci correlate

- V postulato di Euclide
- → Geometria algebrica
- → Geometria descrittiva
- Geometrie non euclidee
- → Geometria iperbolica
- → Geometria ellittica
- → Geometria sferica
- Spaziotempo

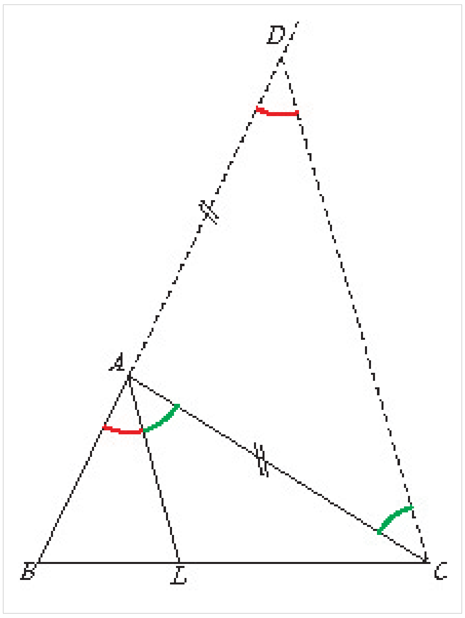
Teorema della bisettrice

Il **teorema della bisettrice** dell'angolo interno di un triangolo è un teorema della → geometria elementare che è una particolare conseguenza del → teorema di Talete.

Enunciato

In un triangolo due lati stanno fra loro come le parti in cui resta diviso il terzo lato dalla bisettrice dell'angolo interno ad esso opposto.

In altri termini, dato il triangolo ABC sia AL la bisettrice dell'angolo interno in A sussiste allora la proporzione:



$BA:AC=BL:LC$

Dimostrazione

Si conduca dal vertice C la parallela alla retta AL fino a incontrare il prolungamento del lato BA dalla parte di A nel punto D. Il triangolo ACD è isoscele perché i suoi angoli in C e in D sono congruenti.

Infatti:

$A\widehat{C}D=C\widehat{A}L$

perché alterni interni rispetto alle rette paralle AL e DC tagliate dalla trasversale AC,

$A\widehat{D}C=B\widehat{A}L$

perché corrispondenti rispetto alle rette paralle AL e DC tagliate dalla trasversale AD,

inoltre

$C\widehat{A}L = B\widehat{A}L$

perché parti uguali dello stesso angolo.

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza è allora

$A\widehat{D}C = A\widehat{C}D$

Si ha pertanto che i segmenti AC e AD sono congruenti. Per il → teorema di Talete sussiste la proporzione

$BA:AD = BL:LC$

e poiché AC e AD sono congruenti anche

$BA:AC = BL:LC$

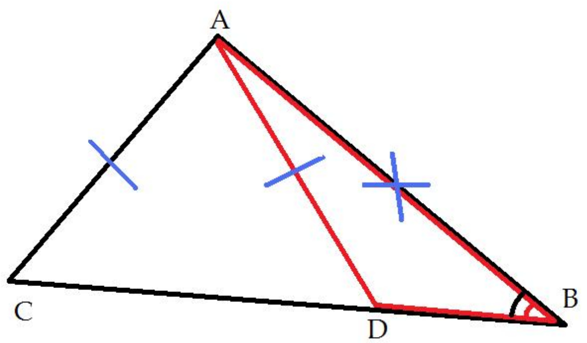
Criteri di congruenza dei triangoli

In → geometria, i **criteri di congruenza dei triangoli** sono un postulato e due teoremi tramite i quali è possibile dimostrare la congruenza fra triangoli, nel caso alcuni loro angoli o lati siano congruenti. I criteri di congruenza sono tre.

Primo criterio

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso tra essi equivalente

Questo criterio va preso come postulato. Euclide, negli Elementi, ne dà una dimostrazione, effettuata tramite il trasporto di segmenti e di angoli (I, 4). Questo metodo, tuttavia, non è valido secondo la matematica moderna, quindi l'intera dimostrazione viene invalidata, come ha fatto notare David Hilbert. [1] [2] Esso **NON** può essere generalizzato nella forma *due triangoli sono congruenti se hanno un angolo, uno dei lati ad esso adiacenti e il lato ad esso opposto ordinatamente congruenti*, come accade similmente nel *secondo criterio*. Viene chiamato anche *Criterio LAL* (Lato-Angolo-Lato).



Controesempio sulla possibilità di generalizzare il primo criterio di congruenza. Si nota evidentemente che i triangoli ABC e ABD non sono congruenti.

Secondo criterio

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli a esso adiacenti

Se si ammette valido il quinto postulato di Euclide, si può dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto; per questo motivo, se si conoscono due angoli di un triangolo è sempre possibile determinarne il terzo, e quindi il criterio è generalizzabile in: *Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti*.

Il secondo criterio (nella sua formulazione originale) è però dimostrabile senza far uso del quinto postulato di Euclide. Per questo i libri di testo sono soliti riportare entrambe le formulazioni, e spesso la seconda (quella che fa uso del teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo) viene detta *secondo criterio modificato*.

Altri testi, seguendo la linea dimostrativa degli Elementi di Euclide,[3] dimostrano anche un ulteriore criterio, il quale afferma che *due triangoli sono congruenti se hanno un lato, uno degli angoli ad esso adiacenti e l'angolo ad esso opposto ordinatamente congruenti*. Spesso questa formulazione viene detta *quarto criterio di congruenza* o *generalizzazione del secondo criterio di congruenza.*

Viene chiamato anche *Criterio ALA* (Angolo-Lato-Angolo).

Dimostrazione

Si considerino i triangoli ABC e A'B'C'. Per ipotesi, BC e B'C' sono congruenti, come gli angoli in B e in B'.

Ora ammettiamo, per assurdo che i due triangoli non siano congruenti. Allora AB > A'B' o AB < A'B'. Si consideri il caso in cui AB > A'B' (sarebbe analogo considerare l'altro caso.) Allora esiste un punto P interno ad AB tale che BP sia congruente ad A'B'.

I triangoli PBC e A'B'C' avrebbero:

- PB e A'B' congruenti;
- BC e B'C' congruenti (per ipotesi);
- Gli angoli in B e in B' congruenti (sempre per ipotesi);

Così, per il *primo criterio*, PBC sarebbe congruente ad A'B'C'. Allora l'angolo $P\hat{C}B$ sarebbe congruente con quello in C'. Ma, per ipotesi, anche $A\hat{C}B$ è congruente all'angolo in C'. Così per la proprietà transitiva della congruenza, $P\hat{C}B$ sarebbe congruente con $A\hat{C}B$.
Questo è assurdo: P è interno ad AB, il segmento CP è interno all'angolo $A\hat{C}B$, così $P\hat{C}B$ dovrebbe essere minore di $A\hat{C}B$. Non essendo la tesi falsa, essa è vera.
C.V.D.

Generalizzazione

Solo nella geometria euclidea, è possibile generalizzare il secondo criterio in questa forma: *Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente due angoli e un lato congruenti.*

Questo perché nel caso un angolo non fosse adiacente al lato, l'angolo mancante si può facilmente ricavare perché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale all'angolo piatto e si ricadrebbe così nel secondo criterio.

Terzo criterio

Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti

In *Elementi I, 8* Euclide dà una dimostrazione di questo teorema utilizzando il movimento meccanico. Come avviene per la proposizione I, 4 (primo criterio di congruenza), la dimostrazione euclidea non è valida, ma la matematica moderna si avvale di un'altra dimostrazione per la quale questo criterio non va considerato postulato.

Viene chiamato anche *Criterio LLL* (Lato-Lato-Lato).

Dimostrazione

Siano ABC, A'B'C' due triangoli con AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'. Si costruisca, nel semipiano creato da AB non contenente C un angolo uguale a quello in A' e il lato AA *congruente a A'B' e si tracci la congiungente A*C. Ora i triangoli A'B'C' e AA*B hanno due lati congruenti, e congruente l'angolo tra essi compreso. Dunque sono congruenti per il primo criterio. In particolare, A'C'=A*C da cui, per la proprietà transitiva, AC=A*C. Si tracci quindi la congiungente AA*. Essendo il triangolo BAA *isoscele (esso ha infatti due lati uguali), gli angoli BA*A e BAA *sono congruenti. Per lo stesso motivo CAA*=CAA. Ma quindi BA*A+CAA=*BA*A+CA*A, perché somme di angoli congruenti. I triangoli ABC e A*BC hanno allora due lati ed un angolo congruenti, quindi sono congruenti per il primo criterio. Ma anche A'B'C' è congruente ad A*BC, quindi, per la proprietà transitiva, ABC = A'B'C'.*

C.V.D

Triangoli rettangoli

Nel caso dei triangoli rettangoli, un angolo è sempre noto: quello retto. In più, grazie al → teorema di Pitagora, avendo due lati è sempre possibile determinare il terzo. Di conseguenza, i tre criteri possono essere semplificati:

- *due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno due cateti ordinatamente congruenti*
- *due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno uno degli angoli acuti e l'ipotenusa, oppure un cateto, ordinatamente congruenti*
- *due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno un cateto e l'ipotenusa ordinatamente congruenti*

Occorre tener presente il fatto che, anche se il teorema di Pitagora rende banale l'ultima delle tre affermazioni precedenti, esso non è però necessario ai fini della sua dimostrazione. Per la dimostrazione del teorema di Pitagora sono infatti necessari altri concetti oltre a quello di congruenza, e cioè quello di equivalenza (più precisamente, di equiscomponibilità) oppure quello di → similitudine

Riferimenti

[1] D. Hilbert, *Fondamenti della Geometria*, Cap. II, par. 11, p.45 (Milano: Feltrinelli, 1970)
[2] Hilbert dimostra che è possibile definire la lunghezza di un segmento in modo che tutti i postulati di Euclide siano soddisfatti, ma il 1° criterio non sia valido. Di conseguenza *il 1° criterio deve essere considerato come un postulato addizionale*. Esso costituisce l'assioma III.6 degli Assiomi di Hilbert.
[3] si tratta della proposizione 26 contenuta nel libro 1 degli Elementi: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI26.html

Teorema della mediana

Il **teorema della mediana** è un teorema di → geometria derivato dalla legge del coseno o teorema di Carnot.

Enunciato

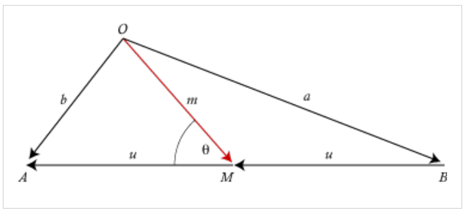
In un triangolo il doppio del quadrato della mediana relativa ad un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuito della metà del quadrato del primo lato.

In altri termini, con riferimento al triangolo *OAB* vale l'identità:

$\overline{2}OM^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\frac{\overline{AB}^2}{2}$, dove *M* è il punto medio di *AB*.

Prima dimostrazione

Ponendo:



$\overrightarrow{OA}=\vec{a} \quad \overrightarrow{OB}=\vec{b} \quad \overrightarrow{OM}=\vec{m}.$

Si ha:

$\vec{a}=\vec{m}-\vec{u}, \quad \vec{b}=\vec{m}+\vec{u}$

Elevando al quadrato → scalare i membri delle ultime uguaglianze si ha:

$\vec{a}^2=(\vec{m}-\vec{u})^2 \quad \vec{b}^2=(\vec{m}+\vec{u})^2$

sviluppando i calcoli si ottiene:

$\vec{m}^2 - 2\vec{m}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 = \vec{a}^2$

$\vec{m}^2 + 2\vec{m}\cdot\vec{u} + \vec{u}^2 = \vec{b}^2$

successivamente sommando membro a membro:

$2m^2 + 2u^2 = a^2 + b^2$

e infine:

$2m^2 = a^2 + b^2 - \frac{(2u)^2}{2}.$

Seconda dimostrazione

Ponendo:

$O\widehat{M}A = \theta, \quad O\widehat{M}B = \pi - \theta$

applicando, ora, il teorema del coseno ai triangoli *OMA* e *OMB*, si ha:

$b^2 = m^2 + u^2 - 2mu\cos\theta$

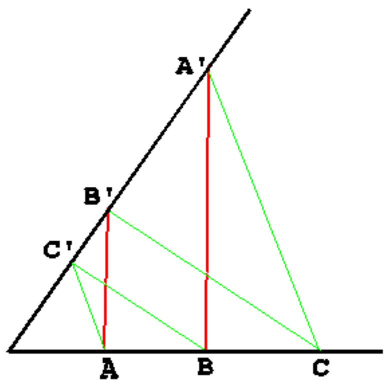
$a^2 = m^2 + u^2 - 2mu\cos(\pi - \theta) = m^2 + u^2 + 2mu\cos\theta$

Sommando quindi membro a membro le ultime uguaglianze si perviene all'identità richiesta.

Teorema di Pappo

Il **Teorema di Pappo** (o **Teorema di Pappo - Pascal**) afferma che, dati A, B e C punti su di una retta, aventi il corrispettivo A', B' e C' su di un'altra retta che interseca la prima in un punto O, allora:

> *se C'B è parallelo a B'C, e C'A è parallelo a A'C, allora anche BA' sarà parallelo ad AB'.*



Esposizione grafica

La dimostrazione di questo teorema può essere operata indipendentemente dall'assioma archimedeo, mediante gli assiomi dei gruppi I (1 - 3) e II - IV di David Hilbert.

Il teorema di Pappo permette di fondare un calcolo dei segmenti sostanzialmente equivalente al calcolo algebrico, poiché grazie ad esso possiamo giustificare le proprietà associativa e commutativa dell'addizione e della moltiplicazione tra segmenti. Mediante il calcolo dei segmenti basato sul teorema di Pappo - Pascal, è possibile fondare una teoria delle similitudini indipendente dall'assioma di Archimede.

Il teorema di Pappo è un teorema duale.

Voci correlate

Teoremi di Pappo-Guldino

Teorema di Pasch

Il **Teorema di Pasch** è un risultato, stabilito dal matematico Moritz Pasch nel 1882 che, nell'ambito della → geometria della retta, stabilisce la seguente proprietà dell'ordinamento dei punti:

Dati quattro punti su una retta

$$a, b, c, d$$

che si presentino ordinati come (a,b,c) e (b,c,d), se ne deduce che essi sono anche ordinati come (a,b,d).

Detto in altri termini, se b è tra a e c e c tra b e d allora b è anche tra a e d.

L'importanza del teorema risiede nel fatto che esso non può essere derivato dai soli Assiomi di Euclide senza fare ulteriori assunzioni. Per questo motivo, questa intuitiva proprietà dell'ordinamento di una retta, assume importanza in relazione al metodo assiomatico della geometria.

Bibliografia

- Weisstein, Eric W. "Pasch's Theorem." Da MathWorld--A Wolfram Web Resource [1]

Voci correlate

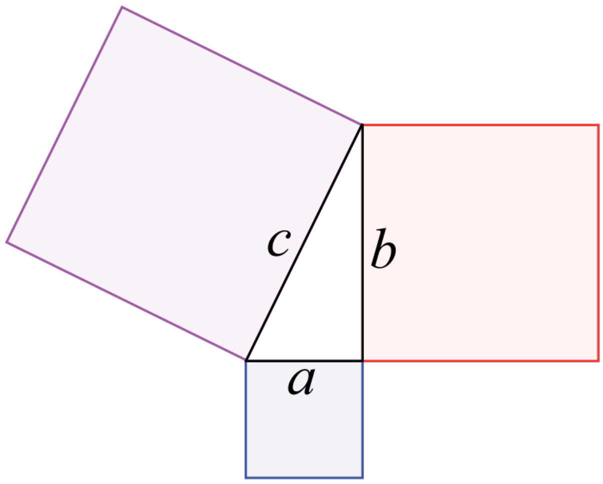
- Assiomi di Hilbert
- Geometria assoluta
- → Geometria euclidea
- Teorema di incompletezza di Gödel
- Teoria degli ordini

Riferimenti

[1] http://mathworld.wolfram.com/PaschsTheorem.html

Teorema di Pitagora

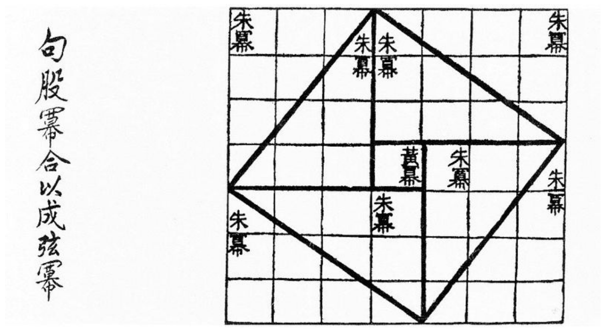
Il **teorema di Pitagora** è un teorema della → geometria euclidea che stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo ed è una versione limitata ad essi del Teorema di Carnot.



La somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti (blu e rosso) è equivalente all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (viola).

Origine

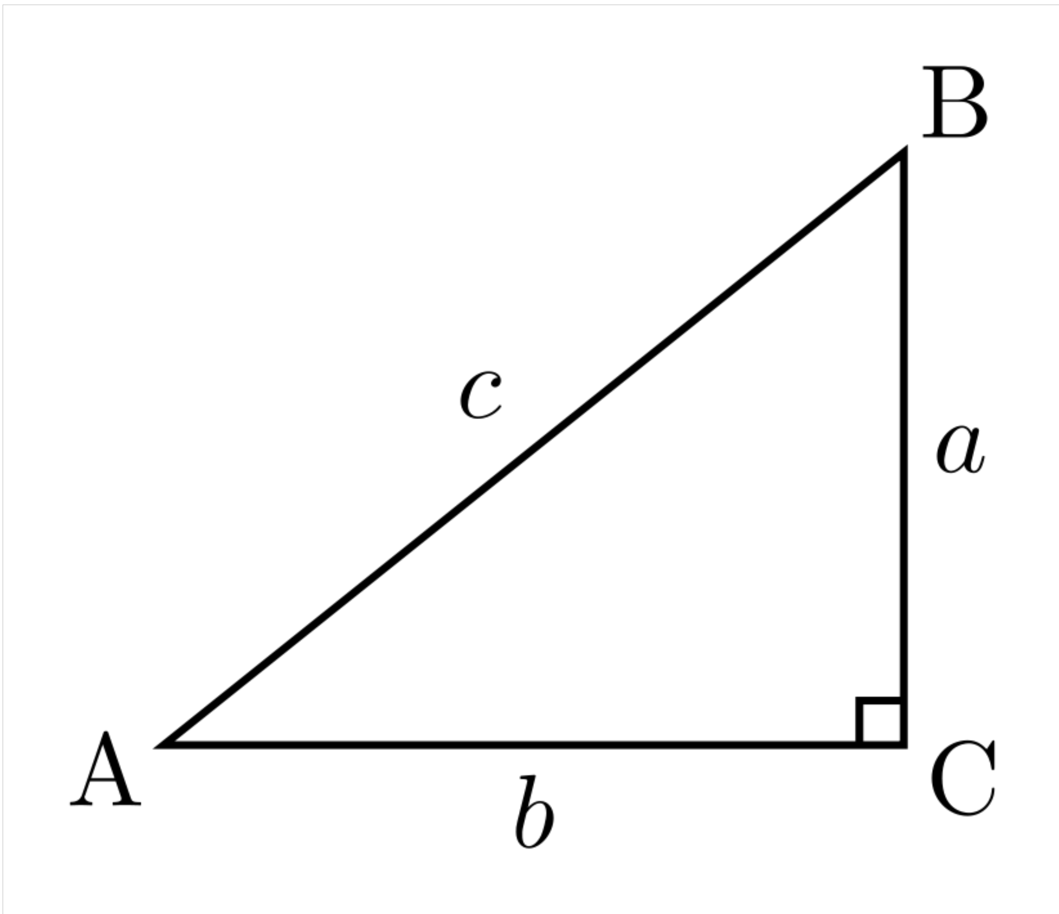
Quello che modernamente conosciamo come *teorema di Pitagora* viene solitamente attribuito al filosofo e → matematico Pitagora. In realtà il suo enunciato (ma non la sua dimostrazione) era già noto agli egizi e ai babilonesi, ed era forse conosciuto anche in Cina ed in India. La dimostrazione del teorema è invece con ogni probabilità successiva a Pitagora.



Visualizzazione del caso del triangolo (3,4,5) contenuta nel testo cinese Chou Pei Suan Ching (scritto tra il 200 a.C. e il 200 d.C.)

Enunciato

> *In ogni triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*



Dato un triangolo rettangolo di lati *a*, *b* e *c*, ed indicando con *c* la sua ipotenusa e con *a* e *b* i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

o, in alternativa, risolvendolo per *c*:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti:

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a.$$

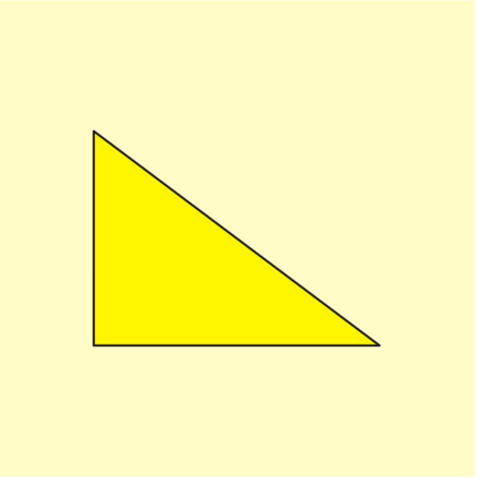
e

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b.$$

Se la terna a, b, c è costituita da numeri interi essa si chiama terna pitagorica.

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo: questo teorema, con la sua dimostrazione, appare negli *Elementi* immediatamente dopo il teorema di Pitagora stesso.

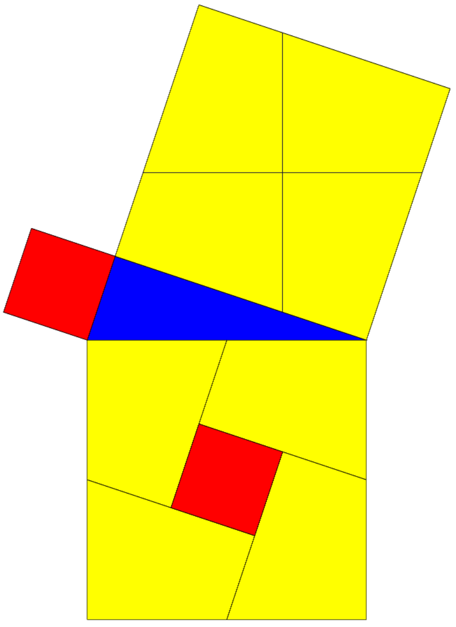
Dimostrazioni



Animazione di una dimostrazione

La dimostrazione classica del teorema di Pitagora completa il primo libro degli *Elementi* di Euclide, e ne costituisce il filo conduttore. Dato che richiede il postulato delle parallele, esso non vale nelle geometrie non-euclidee e nella geometria neutrale. Nel testo di Euclide la dimostrazione del teorema è immediatamente preceduta dalla dimostrazione della costruibilità dei quadrati. L'esistenza stessa dei quadrati dipende infatti dal postulato delle parallele e viene meno nelle geometrie non euclidee. Questo aspetto del problema è in genere trascurato nella didattica contemporanea, che tende spesso ad assumere come ovvia l'esistenza dei quadrati.

La dimostrazione del teorema di Pitagora più immediata e più diffusa nei libri scolastici consiste nel riempire uno stesso quadrato di lato uguale alla somma dei cateti prima con quattro copie del triangolo rettangolo più il quadrato costruito sull'ipotenusa e poi con quattro copie del triangolo rettangolo più i quadrati costruiti sui cateti, come in figura.



Dimostrazione di Perigal

Essendo il teorema uno dei più noti della → storia della matematica, ne esistono molte altre dimostrazioni, opera di astronomi, agenti di cambio, e anche una di Leonardo da Vinci. Probabilmente, insieme alla reciprocità quadratica, si contende la palma del teorema con più dimostrazioni in assoluto.

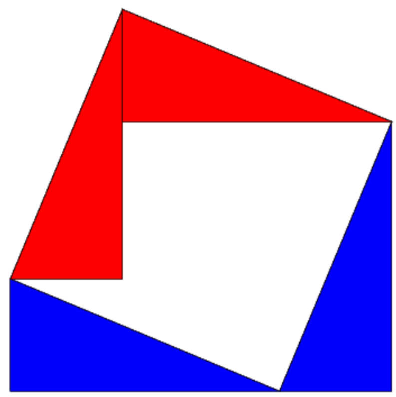
Dimostrazione di Perigal

Esaminiamone alcune interessanti. Quella proposta nel 1873 dall'agente di cambio Henry Perigal si basa sulla scomposizione del quadrato costruito sul cateto maggiore, in giallo nell'immagine: tagliandolo infatti con due rette passanti per il suo centro, una perpendicolare ed una parallela all'ipotenusa, si può ricomporre in maniera da incorporare l'altro quadrato, e formando il quadrato sull'ipotenusa, come nella figura.

Dimostrazione di Airy

Esiste anche una dimostrazione in forma poetica, dell'astronomo Sir George Airy, in inglese:

"*I am, as you can see,*
$a^2 + b^2$ - ab
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is plann'd
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read."



Dimostrazione di Airy

di cui una traduzione letterale è

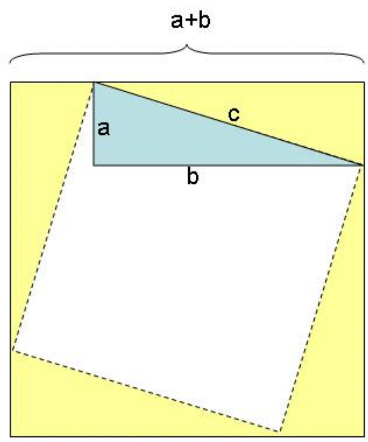
"*Come potete vedere, sono*
$a^2 + b^2$ - ab
Quando ci sono due triangoli sopra di me
È rappresentato il quadrato dell'ipotenusa
Ma se invece sto io sopra di loro
Si leggono i quadrati dei due lati"

I versi si riferiscono alla parte bianca: i primi due triangoli sono quelli rossi, i secondi quelli blu.

Sia quella di Perigal che quest'ultima sono interessanti, in quanto sono puramente geometriche, ossia non richiedono alcuna definizione di operazioni aritmetiche, ma solo congruenze di aree e di segmenti.

Quadrati concentrici di Pomi

Dimostrazione geometrica basata su due quadrati concentrici, di lati rispettivamente pari all'ipotenusa (c) e alla somma dei due cateti (a+b). Come si vede dalla figura, tolti i 4 triangoli rettangoli (in giallo di area $(a * b)/2$) al quadrato più grande, che corrisponde all'area $(a + b)^2$, si ottiene il quadrato più piccolo, rappresentato in bianco, che equivale invece all'area c^2.



Dimostrazione con quadrati concentrici

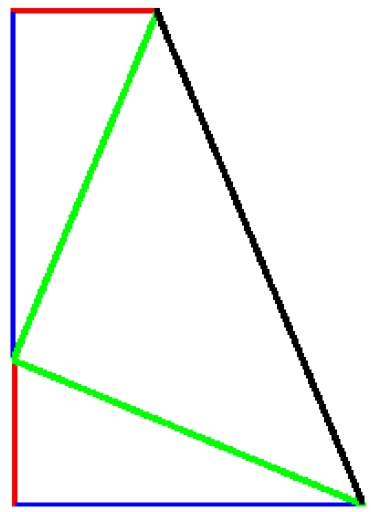
Quindi $(a + b)^2 - 4 * (a * b)/2 = c^2$

da sui risolvendo si ottiene : $a^2 + b^2 = c^2$

Questa dimostrazione ha il vantaggio di avere una rappresentazione visiva semplice e diretta, che non richiede lo spostamento e sovrapposizione di forme come le altre dimostrazioni geometriche formulate.

Dimostrazione di Garfield

Un'altra dimostrazione geometrica particolarmente significativa, in quanto nella costruzione non compare alcun quadrato, fu trovata nel 1876 da Garfield, che in seguito divenne il ventesimo Presidente degli Stati Uniti d'America. Allora nell'esercito, Garfield commentò il suo risultato: *"Questo è qualcosa su cui i due rami del parlamento potranno essere d'accordo"*.



Dimostrazione di Garfield

La dimostrazione è la seguente:

> consideriamo una copia del triangolo rettangolo in questione, ruotata di 90 gradi in modo da allineare i due cateti differenti (nella figura a lato il rosso ed il blu). Si uniscono poi gli estremi delle ipotenuse, e si ottiene un trapezio. Uguagliando l'area del trapezio alla somma di quelle dei tre triangoli retti, si dimostra il teorema.

In formule, detto **a** il cateto rosso, **b** il blu e **c** l'ipotenusa, e ricordando la potenza del binomio

$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \ \Rightarrow \ a^2 + b^2 = c^2$$

Con i numeri complessi

Una dimostrazione puramente → algebrica fa uso dei numeri complessi e della formula di Eulero: siano a, b i cateti e c l'ipotenusa. Se i cateti sono allineati sugli assi, abbiamo

$$a + ib = ce^{i\theta}$$

Consideriamo ora il complesso coniugato della parte a sinistra:

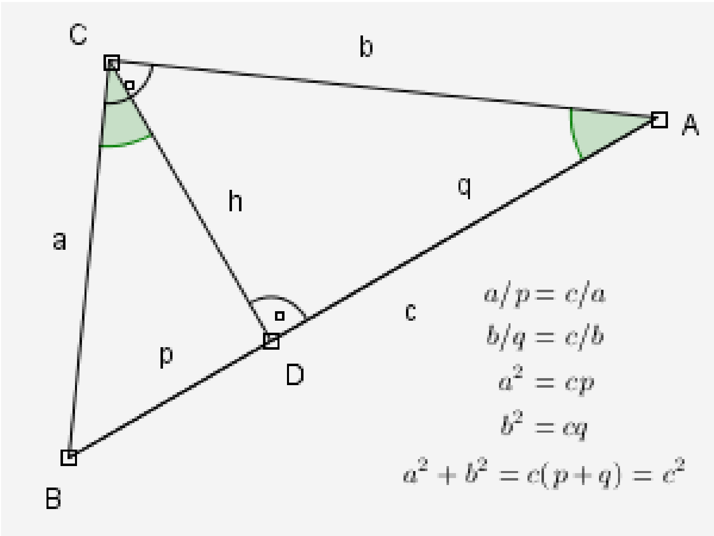
$$a - ib = ce^{-i\theta}$$

Moltiplicando tra loro otteniamo

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Con i teoremi di Euclide

Un'altra dimostrazione utilizza il → primo teorema di Euclide. Si traccia l'altezza sull'ipotenusa, di lunghezza h. Questa spezza l'ipotenusa in due segmenti, di lunghezza p e q. Il teorema di Euclide fornisce le relazioni



Dimostrazione con Euclide

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a}, \ \frac{b}{q} = \frac{c}{b},$$

da cui

$$a^2 = cp, \ b^2 = cq$$

e quindi

$$a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2.$$

Inverso

Vale anche l'inverso del Teorema di Pitagora (proposizione 48 del primo libro degli *Elementi* di Euclide): *Se in un triangolo di lati a, b e c vale la relazione* $a^2 + b^2 = c^2$ *allora il triangolo è rettangolo.*

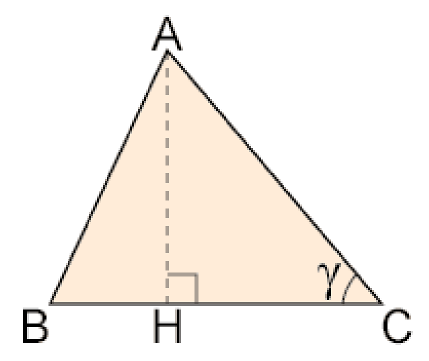
Dimostrazione: Sia T un triangolo di lati *a*, *b* e *c* tale che $a^2 + b^2 = c^2$. Consideriamo inoltre triangolo rettangolo T' che abbia i cateti pari ad *a* e *b* (è sempre possibile costruire un triangolo rettangolo dati i due cateti). Per il Teorema di Pitagora (diretto) l'ipotenusa del triangolo T' sarà pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$, ossia sarà uguale al lato *c* del triangolo T. I due triangoli T e T' risulteranno dunque congruenti per il terzo criterio di congruenza, avendo tutti e tre i lati ordinatamente uguali. Ma allora anche il triangolo T sarà rettangolo *(CVD).*

Generalizzazioni

Il teorema di Pitagora può essere generalizzato in vari modi. Solitamente, una generalizzazione è una relazione che si applica a tutti i triangoli, e che applicata ai triangoli rettangoli risulta essere equivalente al teorema di Pitagora.

Teorema del coseno

La generalizzazione più importante del teorema di Pitagora è forse il teorema del coseno, che si applica ad un triangolo qualsiasi (non necessariamente retto). In un triangolo con vertici e angoli indicati come in figura, vale l'uguaglianza:



Un triangolo qualsiasi.

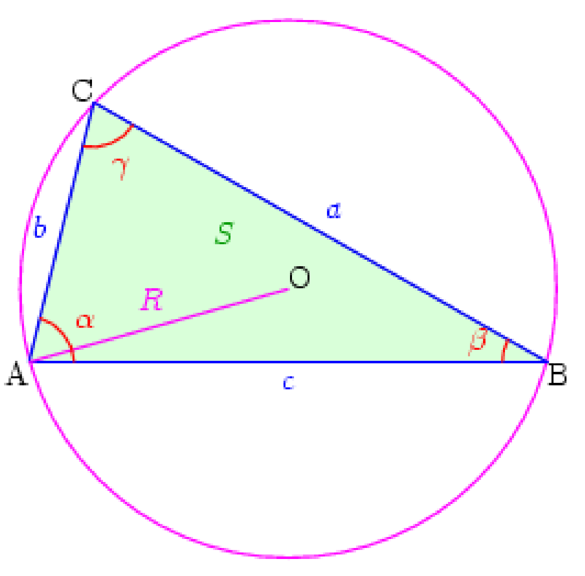
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos\gamma.$$

Nel caso in cui γ sia retto, vale $\cos\gamma = 0$ e quindi l'enunciato è equivalente al teorema di Pitagora. Il termine aggiuntivo può essere interpretato come il → prodotto scalare dei vettori CA e CB .

Teorema dei seni

Il teorema dei seni mette in relazione le lunghezze dei lati di un triangolo e i seni degli angoli opposti. Anche questa relazione si applica a qualsiasi triangolo e, nel caso in cui questo sia rettangolo, può essere ritenuta equivalente al teorema di Pitagora (benché in modo meno immediato rispetto al teorema del coseno).

Il teorema dei seni asserisce che in un triangolo qualsiasi, con le notazioni come in figura, valgono le relazioni seguenti:



Il teorema dei seni mette in relazione lunghezze dei lati e angoli opposti.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Elevando al quadrato:

$$c^2 = a^2 \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}, \quad b^2 = a^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

Sommando i termini si ottiene:

$$c^2 + b^2 = a^2 \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}.$$

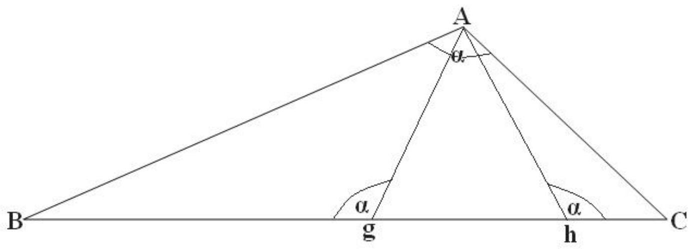
Quando α è un angolo retto, si ottiene $\beta = \pi/2 - \gamma$ e quindi

$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = \sin^2(\pi/2 - \beta) + \sin^2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Si ottiene quindi in questo caso il teorema di Pitagora

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

Generalizzazione che non fa uso di trigonometria



Generalizzazione del teorema di Pitagora.

È possibile estendere il teorema di Pitagora ad un triangolo qualsiasi senza fare uso di funzioni trigonometriche quali il seno ed il coseno. Dato un triangolo ABC come in figura, si tracciano due segmenti che collegano il vertice A con due punti g e h contenuti nel segmento opposto BC (oppure in un suo prolungamento), in modo tale che gli angoli AgB e AhC siano entrambi uguali all'angolo α del vertice A . La figura mostra un caso in cui l'angolo α è ottuso: se è acuto, i due punti g e h sono in ordine inverso (il primo a destra e il secondo a sinistra) e possono uscire dal segmento BC .

Vale la relazione seguente:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{Bg} + \overline{hC}).$$

Quando α è un angolo retto, i punti g e h coincidono e si ottiene il teorema di Pitagora

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{Bg} + \overline{hC}) = \overline{BC}^2.$$

La relazione generale può essere dimostrata sfruttando la → similitudine fra i triangoli ABC , gBA e hAC , che porta alle relazioni

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{Bg}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{hC}}{\overline{AC}}.$$

Si ottiene quindi

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{Bg}, \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{hC}.$$

Sommando le due eguaglianze si ottiene la relazione iniziale.

Bibliografia

- Carl B. Boyer, *Storia della matematica*. Mondadori, Milano, 1990. ISBN 978-88-04-33431-6
- Loria G. *Le scienze esatte nell'antica Grecia* 2^ ed, Milano 1914-

Voci correlate

- → Geometria
- Aritmogeometria
- Numero
- Radice quadrata
- Trigonometria
- Ipotenusa
- Teorema di Carnot
- Identità di Parseval

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Teorema di Pitagora**

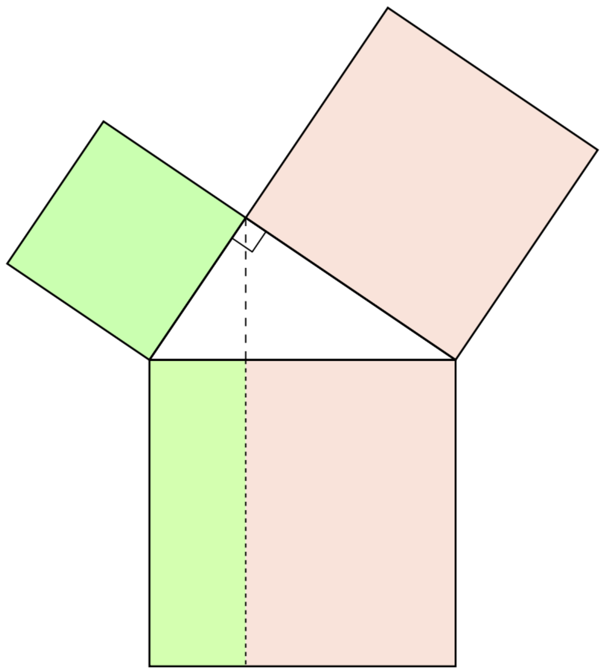
Collegamenti esterni

- Animazione della dimostrazione di Euclide [1]

Riferimenti

[1] http://www.walter-fendt.de/m14i/pyththeorem_i.htm

Primo teorema di Euclide



In → geometria, il **primo teorema di Euclide** è un teorema concernente il triangolo rettangolo che deriva, assieme al → secondo, dalla proposizione 8 del VI libro degli *Elementi* di Euclide; nei testi scolastici può essere enunciato in due modi diversi a seconda della proprietà che si desidera sottolineare:

1. mediante l'equivalenza tra figure:

   In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l' ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

2. mediante relazioni tra segmenti:

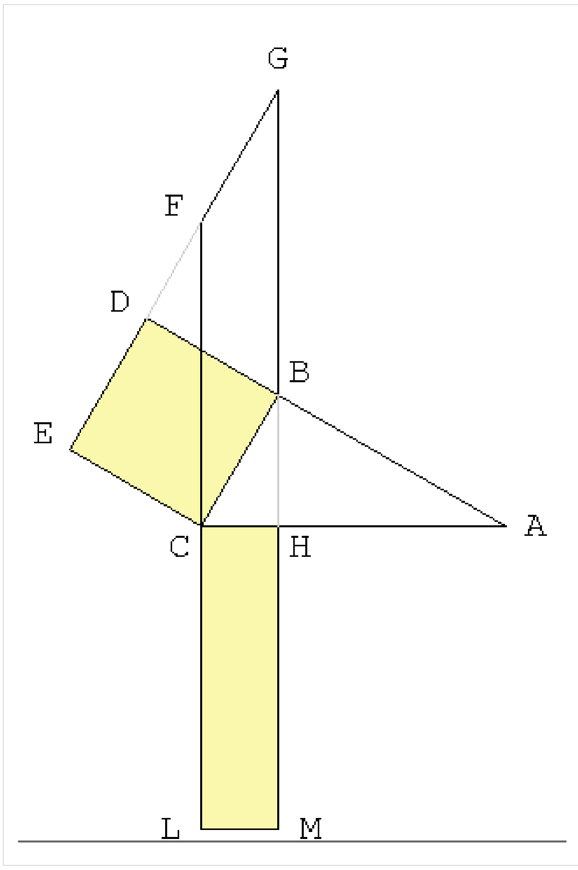
   In un triangolo rettangolo, il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la propria proiezione su di essa.

Le due enunciazioni sono equivalenti e mutualmente dimostrantesi.

Enunciato con l'equivalenza

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa stessa.

Dimostrazione



Facendo riferimento alla figura, si consideri il triangolo rettangolo ABC. Sul cateto BC si costruisca il quadrato $BDEC$ e sia CH la proiezione del cateto BC sull'ipotenusa CA. Si costruisca il rettangolo $HCLM$ avente CL congruente a CA. Si prolunghi il lato ED dalla parte di D fino ad incontrare in F la retta contenente il segmento CL e in G la retta contenente il segmento MH. Si vuole dimostrare che il quadrato $BDEC$ è equivalente al rettangolo $HCLM$.

Si considerino ora i triangoli ABC e CFE. Essi hanno:

- BC congruente a CE per costruzione,
- l'angolo ABC congruente all'angolo FEC perché retti,
- l'angolo BCA congruente all'angolo ECF perché entrambi complementari dello stesso angolo FCB.

Dunque, per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli ABC e CFE sono congruenti, e in particolare si ha che CA è congruente a CF.

Si considerino il quadrato $BDEC$ e il parallelogramma $FCBG$. Essi hanno la stessa base CB e la stessa altezza DB (perché DE e GF appartengono alla stessa retta) e quindi sono equivalenti.

Si considerino il parallelogramma $FCBG$ e il rettangolo $HCLM$. Essi hanno basi congruenti (infatti FC è congruente a CA per dimostrazione precedente, e CA è congruente a CL per costruzione, quindi FC è congruente a CL per la proprietà transitiva della congruenza) e la stessa altezza (infatti FC e CL appartengono alla stessa retta, e così pure BG e MH), quindi sono equivalenti. Q.E.D.

Allora, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, il quadrato $BDEC$ è equivalente al rettangolo $HCLM$.

Enunciato con la similitudine

In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

In formule, facendo riferimento al triangolo rettangolo in figura: $AC : BC = BC : CH$. In modo equivalente: $BC^2 = AC \cdot CH$.

Dimostrazione

Si considerino i triangoli ABC e BCH. Essi hanno tutti gli angoli congruenti (sono entrambi rettangoli e hanno l'angolo in C in comune), e quindi sono simili per il primo criterio di similitudine. Allora si può scrivere la proporzione $AC : BC = BC : CH$.

Q.E.D.

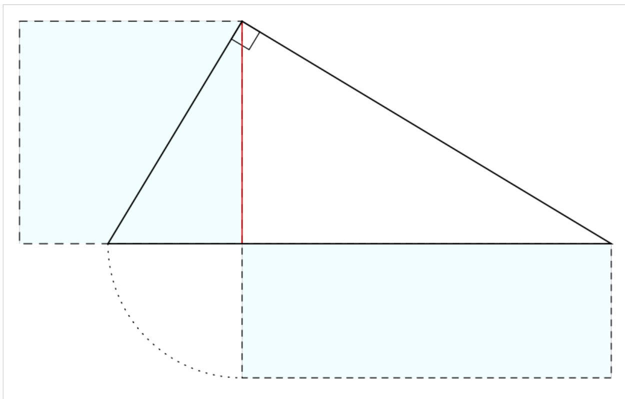
Equivalenza fra gli enunciati

È facile mostrare che i due enunciati sono fra loro equivalenti, una volta introdotto il concetto di misura. Infatti, con riferimento alla figura, il primo enunciato si può esprimere anche dicendo che l'area della superficie del quadrato $BDEC$ è uguale all'area della superficie del rettangolo $HCLM$. In formule: $BC \cdot BC = CH \cdot CL$. Dato che $CL = AC$ (per costruzione), allora si può scrivere che $BC \cdot BC = CH \cdot AC$, il che significa che $AC : BC = BC : CH$, che infine dimostra l'equivalenza fra i due enunciati.

Voci correlate

- → Secondo teorema di Euclide
- Euclide

Secondo teorema di Euclide



In → geometria, il **secondo teorema di Euclide** è un teorema concernente il triangolo rettangolo che deriva, assieme al → primo, dalla proposizione 8 del VI libro degli *Elementi* di Euclide; nei testi scolastici può essere enunciato in due modi diversi a seconda della proprietà che si desidera sottolineare:

1. mediante l'equiestensione tra figure:

   In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

2. mediante relazioni tra segmenti:

   In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

Le due enunciazioni sono equivalenti e mutualmente dimostrantesi.

Enunciato con l'equivalenza

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Dimostrazione

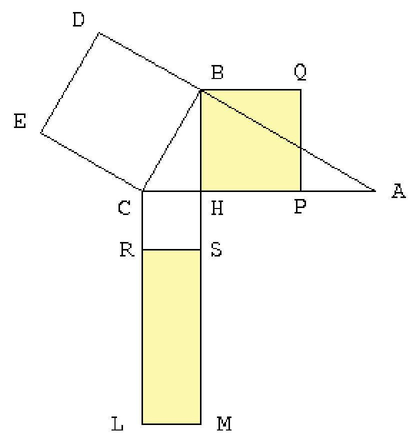
Facendo riferimento alla figura, sia CL congruente e perpendicolare a CA e CR congruente a CH.

Si vuole dimostrare che il quadrato $HPQB$ è equivalente al rettangolo $RLMS$.

Si consideri il triangolo rettangolo BCH e ad esso si applichi il → teorema di Pitagora. Si ottiene che il quadrato $CBDE$ è equivalente alla somma dei quadrati $HPQB$ e $CRSH$.

Si consideri ora il triangolo rettangolo ABC, e ad esso si applichi il → primo teorema di Euclide. Si ottiene che il quadrato $CBDE$ è equivalente al rettangolo $CLMH$, ma tale rettangolo può essere considerato come la somma del quadrato $CRSH$ e del rettangolo $RLMS$.

Allora la somma di $HPQB$ e $CRSH$ è equivalente alla somma di $CRSH$ e $RLMS$, quindi, per differenza, $HPQB$ è equivalente a $RLMS$.



Dimostrazione del secondo teorema di Euclide mediante l'equivalenza

C.V.D.

Enunciato con la similitudine

In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

In formule, facendo riferimento al triangolo rettangolo in figura: $CH : BH = BH : HA$. In modo equivalente: $BH^2 = CH \cdot HA$.

Dimostrazione

Si considerino i triangoli ABC e ABH. Dato che l'angolo BAH è complementare sia di BCA che di ABH, si può concludere che gli angoli ACB e ABH sono congruenti, e quindi i triangoli ABC e ABH sono simili per il primo criterio di similitudine. Si può quindi scrivere la proporzione $CH : BH = BH : AH$.

```
Q.E.D.
```

Dimostrazione con il → Teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora, applicato al triangolo ABC ci dice che:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Invece applicato al triangolo CHB

$$CH^2 + BH^2 = BC^2$$

E al triangolo AHB

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

Unendo le due uguaglianze abbiamo che:

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 + BH^2 = AH^2 + 2BH^2 + CH^2 = AC^2$$

Ma $AC = CH + AH$ e dunque

$$AH^2 + 2BH^2 + CH^2 = (CH + AH)^2 = CH^2 + AH^2 + 2AH \cdot CH$$

Togliendo i quadrati da entrambi i lati:

$$2BH^2 = 2AH \cdot CH$$

Ossia

$$BH^2 = AH \cdot CH$$

Che è l'equivalenza QED

Equivalenza fra gli enunciati

È facile mostrare che i due enunciati sono fra loro equivalenti, una volta introdotto il concetto di misura. Infatti, con riferimento alla figura, il primo enunciato si può esprimere anche dicendo che l'area della superficie del quadrato $HPQB$ è equivalente all'area della superficie del rettangolo $RLMS$. In formule: $BH \cdot BH = RS \cdot RL$. Avendo costruito la figura in modo che $RS = CH$ e che $LR = AH$, si può scrivere che $BH \cdot BH = CH \cdot AH$, il che significa che $CH : BH = BH : AH$, che infine dimostra l'equivalenza fra i due.

Voci correlate

- → Primo teorema di Euclide
- → Teorema di Pitagora
- Euclide

Similitudine (geometria)

La **similitudine** è una particolare trasformazione geometrica, contenuta nel → piano o nello spazio, che conserva i rapporti tra le distanze. Questo vuol dire che, per ogni similitudine *f*, esiste un numero reale positivo *k* tale che

Gli oggetti aventi lo stesso colore sono simili.

$$d(f(A), f(B)) = k \cdot d(A, B)$$

per ogni coppia di punti *(A,B)*.

Ogni similitudine si può ottenere dalla composizione di una *omotetia* ed una *isometria*, o viceversa.

Queste trasformazioni mantengono la "forma" dell'oggetto, pur cambiandone la posizione, l'orientazione o la grandezza; quindi due oggetti simili hanno la stessa "forma".

Esempi

Due circonferenze nel piano sono sempre simili. Tutti i quadrati sono simili: più in generale, tutti i → poligoni regolari con un numero fissato di lati sono simili.

Tutte le parabole sono simili fra loro, mentre ellissi ed iperboli non lo sono necessariamente.

Quando due oggetti P e Q sono simili, si scrive generalmente

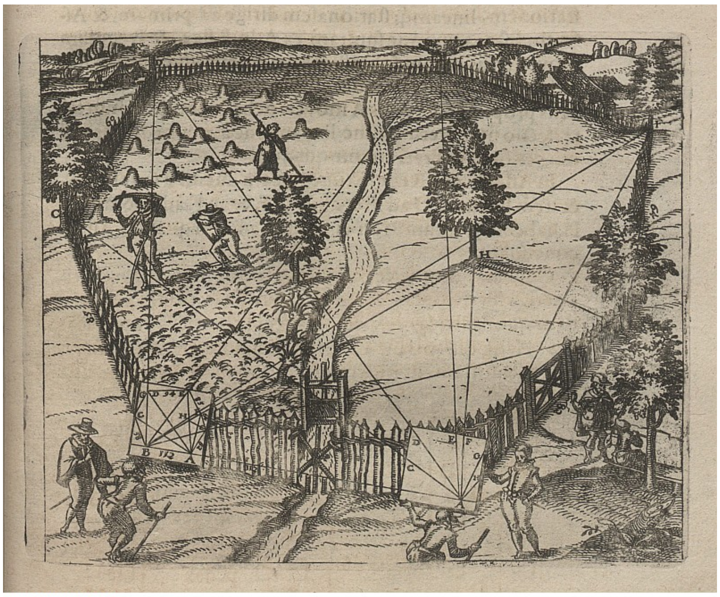
$$P \sim Q.$$

Poligoni

Triangoli simili

Esistono alcuni criteri che permettono di determinare se due triangoli sono simili, il primo è il più noto:

1. Due triangoli sono simili se e solo se hanno ordinatamente tre angoli congruenti.
    - **Corollario 1**. Due triangoli equilateri sono simili
    - **Corollario 2**. Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
    - **Corollario 3**. Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.



Quelle: Deutsche Fotothek

Misurazioni tramite il calcolo di poligoni primi (stampa del 1607)

2. Due triangoli ABC e DEF tali che:
    - $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
    - gli angoli in B e in E sono uguali,

    sono simili.
    - **Corollario**. Due triangoli rettangoli sono simili se hanno i cateti in proporzione
3. Due triangoli ABC e DEF tali che:

    $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

    sono simili.

Poligoni simili

Esistono criteri analoghi per due → poligoni arbitrari nel piano. Il più importante è il seguente:

Due poligoni sono simili se hanno lo stesso numero di lati, gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali.

In verità, non è necessario effettuare la verifica su tutti gli angoli e tutti i lati: è possibile escludere

- due lati qualsiasi consecutivi e l'angolo compreso tra essi, oppure
- due angoli qualsiasi consecutivi e il lato compreso tra essi, oppure
- tre angoli consecutivi.

Se il poligono non è un triangolo, *non* è vero che due poligoni aventi gli angoli interni uguali sono simili: ad esempio, due rettangoli hanno sempre gli stessi angoli interni, ma sono simili soltanto se hanno lo stesso rapporto fra i lati.

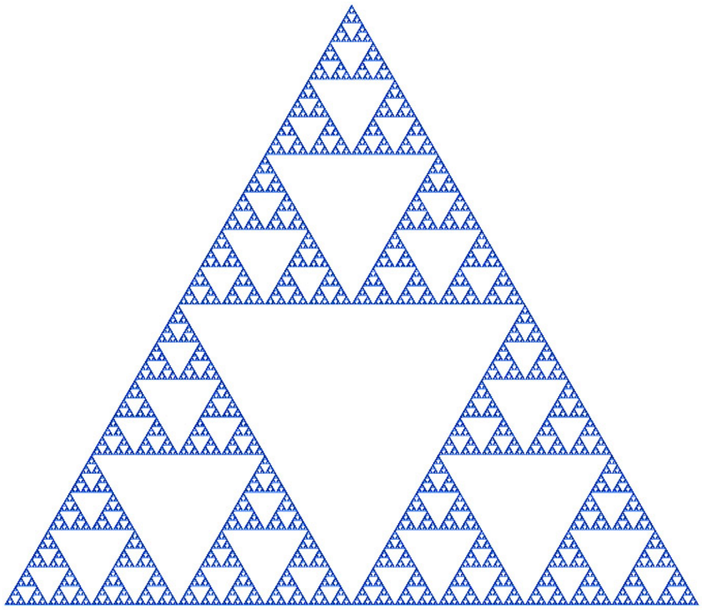
Numeri complessi e figure auto-similari

Numeri complessi

Ogni similitudine fra due oggetti nel piano può essere elegantemente espressa tramite l'uso dei numeri complessi. È sufficiente descrivere il piano come piano complesso: in questo modo, ogni similitudine è esprimibile tramite una trasformazione lineare del tipo

$$z \mapsto az + b$$

oppure



Il triangolo di Sierpinski è un frattale.

$$z \mapsto a\bar{z} + b$$

dove a e b sono due numeri complessi, e $\bar{z}$ è il complesso coniugato di z.

Frattali

Un frattale è un oggetto geometrico *autosimilare*: ogni sua piccola parte contiene un oggetto simile all'oggetto grande.

Teorema di Talete

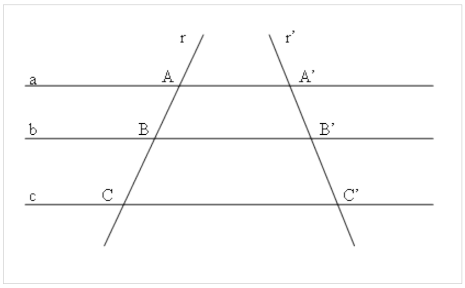
In → geometria, il **teorema di Talete** è un teorema riguardante i legami tra i segmenti omologhi creati sulle trasversali da un fascio di rette parallele.

L'enunciazione e la dimostrazione sono per tradizione, come vuole il nome, attribuite a Talete di Mileto, filosofo greco, a cui il mito attribuisce altri 4 teoremi geometrici, anche se gli storici della matematica sono concordi nell'attribuirgliene la conoscenza ma non la reale paternità, in quanto parrebbe che le proprietà di proporzionalità, espresse nel teorema, fossero già note fin dai tempi degli antichi babilonesi; tuttavia la prima dimostrazione di cui si abbia documentazione è quella contenuta negli *Elementi* di Euclide risalente al III sec a.C.

Una piccola curiosità: proprio l'attribuzione a Talete di ulteriori teoremi sta alla base della differenza con cui nel mondo anglosassone ci si riferisce col nome di "*Thales' Theorem*" al teorema dell'angolo retto inscritto nella semi-circonferenza, anch'esso solitamente ascritto dalla leggenda al *Primo filosofo*.

Enunciato

Un fascio di rette parallele intersecanti due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali



Il teorema afferma in pratica che se prese tre parallele $a,\ b,\ c$ taglianti due rette trasversali r e r' - rispettivamente nei punti $A\ B\ C$ e $A'\ B'\ C'$ -, allora il rapporto tra i segmenti omologhi dell'una e dell'altra è sempre costante.

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

Inoltre se presi AC e A'C', segmenti omologhi, si ha tra loro lo stesso rapporto di AB con A'B' e di BC con B'C', ovvero

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'}$$

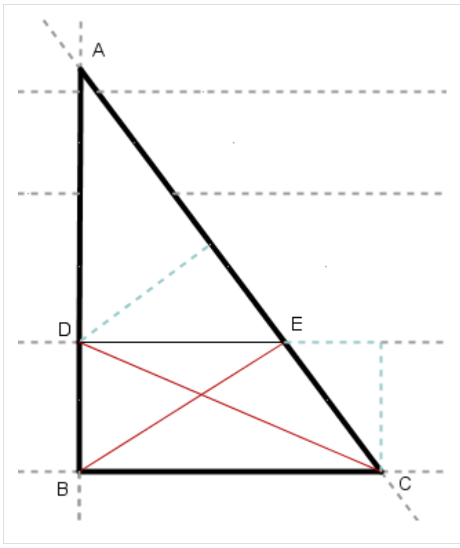
Queste relazioni permettono di trovare la lunghezza di uno qualsiasi dei segmenti della quaterna, a patto di averne almeno uno dello stessa traversa e due dell'altra, o la loro somma.

$$AB = \frac{A'B' \times BC}{B'C'} = \frac{AC \times (A'C' - B'C')}{A'C'} = \frac{BC \times A'B'}{A'C' - A'B'}$$

Ovviamente queste relazioni valgono presa qualsiasi coppia di segmenti omologhi.

Dimostrazione

Euclide dimostra[1] il teorema di Talete indirettamente, attraverso un mirabile uso delle proporzionalità fra le aree dei triangoli, pertanto potrebbe essere di non così immediata comprensione il legame fra la seguente dimostrazione e il risultato finale, la verifica del teorema in questione.



« *Se una linea retta è disegnata parallela ad uno dei lati di un triangolo, allora taglia proporzionalmente i lati del triangolo...* »

(Elementi, VI 2)

Sia dato un triangolo ABC, tagliato da un segmento DE parallelo a uno dei suoi lati (in questo caso BC). Si avrà quindi, secondo la tesi del teorema, che BD sta a AD come CE sta AE[2]

$$BD : AD = CE : AE$$

Si congiungano gli estremi di DE con gli opposti del lato parallelo, evidenziando così i due triangoli BDE e CDE. Tali triangoli sono equiestesi, hanno cioè la medesima area, in quanto possiedono la stessa base e sono tra le medesime parallele DE e BC[3] .

Il segmento DE ha anche creato il triangolo ADE e, siccome a “grandezze” uguali corrispondono rapporti uguali con la stessa “grandezza” [Prop. V.7], il triangolo BDE sta a ADE, esattamente come CDE sta a ADE [4] .

$$BDE : ADE = CDE : ADE$$

Ma il triangolo BDE sta a ADE come BD sta a DA, perché avendo la stessa altezza (nel caso in esempio DE) devono stare l’uno all’altro come le rispettive basi [Prop. VI.1], così come, per la stessa ragione, il triangolo CDE sta a ADE, come CE sta a EA. Per tanto BD sta a DA, come CE sta a EA. [5] .

$$BD : AD = CE : AE \text{ Cvd.}$$

Dal teorema di Talete, come si possono evincere dalla dimostrazione, si derivano due importanti corollari complementari, che assieme costituiscono per intero l'originaria proposizione di Euclide

Una retta parallela al lato di un triangolo determina segmenti proporzionali sugli altri due lati.

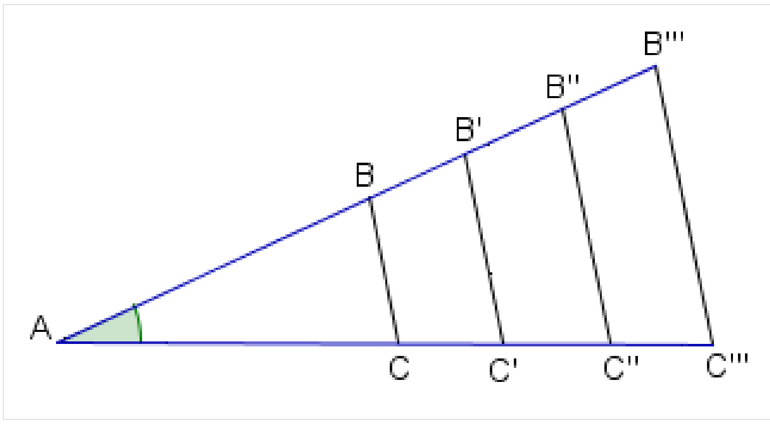
Una retta che determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

Conseguenze

Triangoli simili

L'applicazione del teorema di Talete ai triangoli è in grado di spiegare il secondo criterio di similitudine dei triangoli che afferma:

Due triangoli, aventi coppie di lati proporzionali e l'angolo ivi compreso congruente, sono simili.



Se, come afferma, infatti, la seconda parte della proposizione euclidea, tutti i segmenti omologhi sono in proporzione $\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{B'B''}{C'C''}$, allora B'C' e B''C'' non possono che essere paralleli a BC e dunque i triangoli ABC, AB'C' AB''C'', sono per forza triangoli simili.

Questo ci permette, ricollegandoci al fascio di rette, di stabilire una serie di legami non solo fra i segmenti omologhi delle traverse, ma anche sulle parallele.

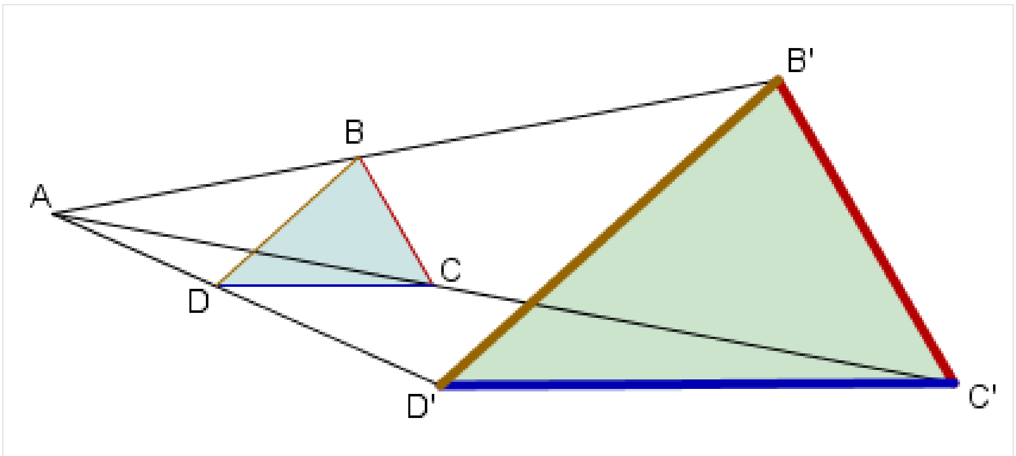
$$AB : AB' = AC : AC' = BC : B'C'$$ [6]

Condizione necessaria per la validità di tali rapporti è che $A=A'$, solo così, infatti, le trasversali sono assimilabili ai lati di un triangolo, dalla cui similitudine deriva la proporzionalità dei segmenti paralleli.

La cosa più importante è che permette di conoscere la lunghezza del generico segmento B'C', attraverso le seguenti relazioni. $B'C' = \dfrac{AB' \times BC}{AB}$

Omotetia

Nelle trasformazioni del piano il teorema di Talete è anche il grado di spiegare trasformazioni come l'omotetia sia in grado di mantenere invariate le proporzioni delle figure.



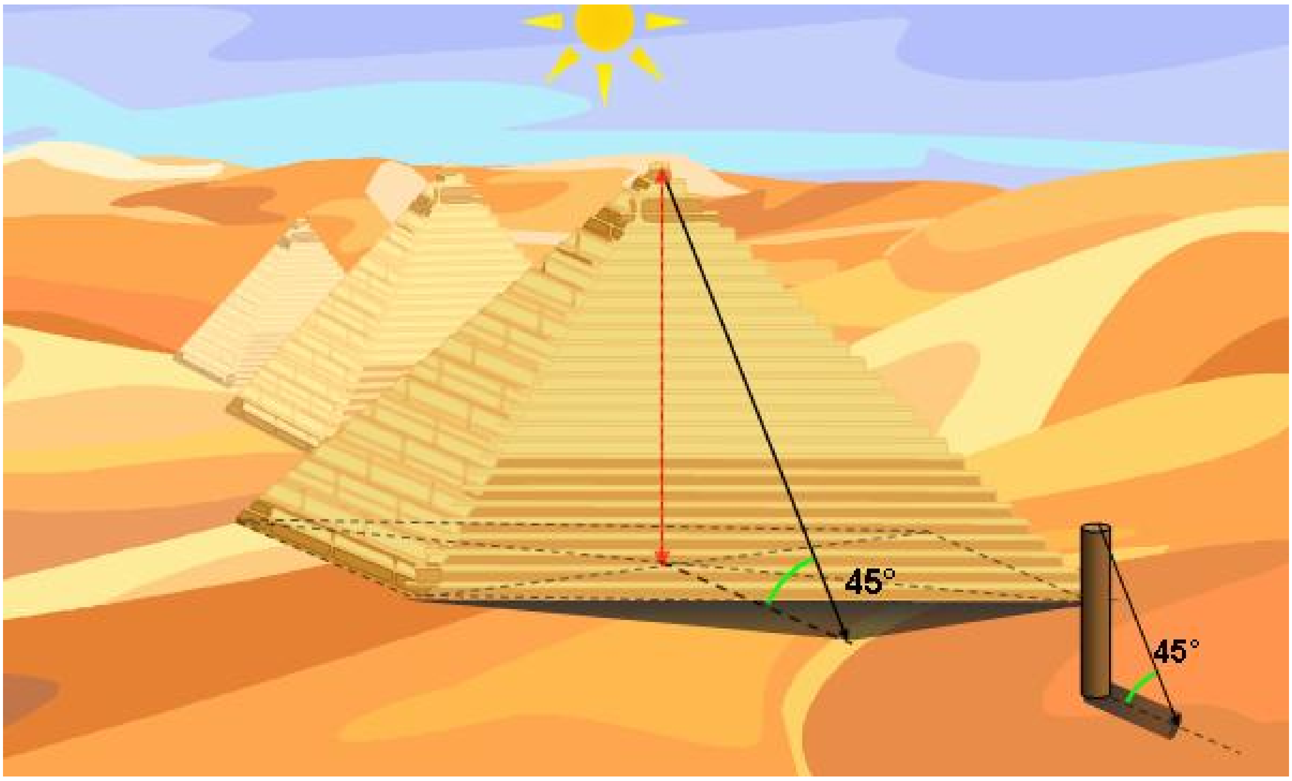
BCD e B'C'D' sono figure simili, tutti loro lati omologhi hanno lo stesso rapporto, se infatti prendiamo per esempio la coppia BC e B'C' rispetto ad A li possiamo concepire come i terzi lati di due triangoli simili, dove A rappresenta il *centro* dell'omotetia e AB/AB' come il *rapporto* della stessa.

Un po' di storia

Vuole la leggenda, come racconta Plutarco [7] , che Talete viaggiando per l'Egitto in cerca di sacerdoti della valle del Nilo da cui apprendere le conoscenze astronomiche, risalendo il fiume avrebbe sostato nei pressi della Piana di Giza, attirato dalla mole sorprendente della Piramide di Cheope, ove il faraone Amasis, giunto a conoscenza della fama del sapiente, lo sfidò a dargli la misura corretta dell'altezza.
Per qualunque persona, anche dotata dei più sofisticati strumenti dell'epoca, si sarebbe trattato di un'impresa che, se non ardua, avrebbe certamente richiesto una notevole quantità di tempo sia per compiere le misure che i calcoli, ma sempre le fonti ci narrano che Talete sapesse già che a una determinata ora del giorno la nostra ombra eguaglia esattamente la nostra altezza [8] ; e quindi non avrebbe fatto altro che attendere l'ora propizia e dimostrare le sue doti, sbalordendo lo stesso faraone che si disse:

« ...stupefatto del modo in cui [abbia] misurato la piramide senza il minimo imbarazzo e senza strumenti. Piantata un'asta al limite dell'ombra proiettata dalla piramide, poiché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli, [ha] dimostrato che l'altezza dell'asta e quella della piramide stanno nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre. »

(Plutarco, *Convivio dei Sette Sapienti*)



Non sappiamo se Talete abbia realmente dimostrato il teorema che porta il suo nome o se (molto più probabilmente) abbia semplicemente usato la proprietà espressa nel suo enunciato, dopo averla appresa da altri, magari dai Caldei, come sostengono alcuni studiosi; se però si vuole considerare l'aneddoto non infondato, bisogna per forza presumere che avesse buona conoscenza delle proprietà citate e delle implicazioni inerenti ai triangoli simili[9] .
Affinché la proiezione dell'ombra sia uguale all'altezza occorre che i raggi del sole colpiscano l'oggetto con un'inclinazione pari a 45°, come la diagonale di un quadrato, il che, dato i circa 30° di latitudine Nord della Grande Piramide, implica che Talete fosse presente sul luogo o nel giorno del 21 novembre o del 20 gennaio, eventualità abbastanza inverosimile; più facile è invece ipotizzare che abbia sì usato l'ombra della piramide per misurarne l'altezza, ma sfruttando il rapporto che ha con essa, prendendo a riferimento l'omologo rapporto tra il paletto e la sua proiezione, il che rafforza il pensiero che dovesse avere perlomeno delle buone conoscenze matematiche, sempre tenendo conto di quelle che erano le conoscenze dell'epoca.

Voci correlate

- Retta
- Talete
- Euclide

Collegamenti esterni

- Il teorema in versione Java [10]
- (**EN**) Gli Elementi di Euclide [11] (la dimostrazione tradotta dal greco)

Riferimenti

[1] Per agevolare l'individuazione delle altezze è stato preso a riferimento un triangolo rettangolo, ma la dimostrazione originale, offerta da Euclide, ha valore generale per ogni genere di triangolo.

[2] I lati del triangolo AB e AC possono essere intesi come segmenti delle trasversali r e r', e DE e BC come elementi di un fascio di rette parallele, pertanto la dimostrazione del teorema avviene verificando la relazione sui segmenti dei lati tagliati da DE.

[3] Alla 38^ proposizione del I libro degli elementi, viene dimostrato che due triangoli aventi la stessa base e contenuti dentro lo stesse parallele hanno la medesima area. La cosa è abbastanza intuibile già dalla formula dell'area $B * h/2$, poiché la base, costituita da DE, e le altezze, in un caso DB e nell'altro la proiezione in azzurro, sono uguali pure le aree dei due triangoli non possono che essere uguali.

[4] Il termine grandezza è un termine generico, cosi come Euclide ha usato nei suoi primi assiomi, ma si tratta di un'affermazione generale che in questo caso si riferisce alle aree dei triangoli, la cui relazione può essere così sintetizzata

[5] I triangoli vengono visti da un altro punto di vista, ma nulla cambia: BD e AD sono visti come le basi e DE come l'altezza, lo stesso avviene per CE e EA e la loro altezza h. Sostituendo ai rapporto le aree dei triangoli si verificano le proporzioni $\frac{BDE}{ADE} = \frac{BD \times DE/2}{AD \times DE)/2} = \frac{BD}{AD}$ e $\frac{CDE}{ADE} = \frac{CE \times h/2}{EA \times h/2} = \frac{CE}{EA}$

[6] questi rapporti sono talvolta noti col nome di *Piccolo Teorema di Talete*

[7] *Convivio dei Sette Sapienti* (2, 147 A)

[8] Diogene Laerzio,*Vite*

[9] A rafforzare la tesi, v'è un altro aneddoto, che vuole che Talete fosse stato il primo uomo a dimostrare come si potesse conoscere la distanza di una nave in mare solo osservandone l'altezza dell'albero maestro.

[10] http://www.math.it/cabri/talete.htm

[11] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/propVI2.html

Geometria piana

Per **geometria piana** si intende quel ramo della → geometria euclidea orientato, appunto, al → piano.

Geometria euclidea e analitica

I concetti fondamentali definiti nel piano sono il punto e la retta. A partire da questi due concetti se ne definiscono altri, come il segmento, la semiretta o l'angolo. Tutti questi concetti hanno trovato una formalizzazione assiomatica negli *Elementi* di Euclide e sono alla base della → geometria euclidea.

Tramite la → geometria analitica, è possibile "dare un nome" a ciascuno di questi enti ed usare gli strumenti dell'→ algebra e dell'→ analisi: questo è possibile grazie all'introduzione del piano cartesiano, ovvero di un sistema di coordinate che permette di chiamare ogni punto P del piano con una coppia $P = (x, y)$ di numeri reali. In questo modo è possibile definite rette, segmenti e altri enti geometrici come luogo di punti che soddisfano alcune condizioni algebriche. Ad esempio, una retta è il luogo degli (x, y) che soddisfano l'equazione

$$ax + by = c$$

dove a, b e c sono tre numeri reali fissati.

Molti enti e teoremi della geometria piana sono però trattabili senza l'ausilio di coordinate. Tra questi, i concetti di triangolo e → poligono, e le relazioni di parallelismo e ortogonalità fra rette o segmenti. Anche le sezioni coniche come la circonferenza o la parabola sono trattabili (con qualche difficoltà) senza coordinate, ma queste iniziano a diventare importanti nello studio di curve più complicate.

Principali figure geometriche

Poligoni

Un → poligono è una forma geometrica delimitata da una linea spezzata chiusa, ovvero da una successione ciclica di segmenti, ciascuno dei quali inizia dove finisce il precedente. Questi segmenti si chiamano *lati*, ed il numero di questi caratterizza il nome usato normalmente per il poligono: se sono 3 è un triangolo, se sono 4 è un quadrilatero, e così via. Un poligono ha almeno 3 lati.

Ogni poligono ha un perimetro ed un'area, ciascuno dei suoi lati una lunghezza, e due lati adiacenti determinano un angolo. Tutte queste grandezze sono strettamente correlate. Risultano normalmente utili quelle formule che permettono di determinare il perimetro o l'area del poligono a partire dalle altre grandezze.

Sezioni coniche

Le → sezioni coniche sono gli oggetti curvilinei più semplici. Tra questi vi è naturalmente la circonferenza, e quindi la parabola, l'ellisse e l'iperbole. A ciascuno di questi oggetti vengono associate varie grandezze, come il raggio della circonferenza.

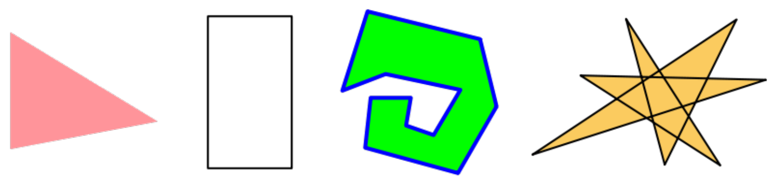
Voci correlate

- → Geometria solida
- → Geometria euclidea

Poligono

Un **poligono** è una particolare forma geometrica piana: è quella parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa. I segmenti che compongono la spezzata chiusa si dicono lati del poligono.

Definizione



Alcuni poligoni: i primi due sono *convessi*, il terzo è *concavo*, il quarto è *intrecciato* e → stellato.

Una definizione di poligono è la seguente.

Un **poligono** non intrecciato è la parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa non intrecciata.

Ricordiamo che una linea spezzata è l'unione finita di 3 o più segmenti consecutivi non adiacenti detti *lati*. Una linea spezzata è *chiusa* quando il secondo estremo dell'ultimo segmento coincide con il primo estremo del primo. Un linea spezzata è *non intrecciata* se due lati non consecutivi non si intersecano mai.

Il punto in comune a due lati consecutivi è detto *vertice*.

Sulla parte delimitata

Il fatto che una linea spezzata chiusa non intrecciata delimiti effettivamente una porzione di piano è, per quanto intuitivo, un risultato non banale della → geometria piana: si tratta di una conseguenza del teorema della curva di Jordan.

Una definizione costruttiva è la seguente: un punto P del piano appartiene al poligono se (con al più un numero finito di eccezioni) tutte le semirette uscenti in P intersecano la spezzata in un numero finito e dispari di punti distinti.

Poligoni particolari

Poligono convesso e concavo

Un poligono non intrecciato è **convesso** se e solo se tutti i suoi angoli interni sono minori o uguali di un angolo piatto. Equivalentemente, il poligono si trova tutto nello stesso semipiano, rispetto a ciascuna delle rette cui appartiene ogni suo lato.

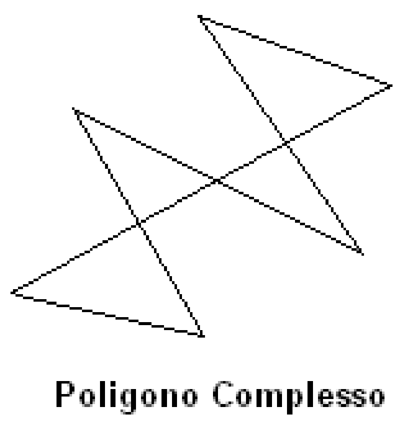
Un poligono (non intrecciato) non convesso è detto a volte **concavo**. Un poligono concavo possiede almeno un angolo interno maggiore di un angolo piatto.

Poligono regolare

Un → poligono regolare è un poligono in cui tutti i lati e tutti gli angoli sono uguali. Altrimenti il poligono è detto *irregolare*. Esempi di poligoni regolari sono il triangolo equilatero ed il quadrato. Esempi di poligoni irregolari sono il rombo generico (i lati sono uguali, gli angoli no), il rettangolo generico (gli angoli sono uguali, i lati no) ed il trapezio.

Poligono intrecciato

Generalmente, per "poligono" si intende un "poligono non intrecciato". Un **poligono intrecciato** è una parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa intrecciata. In questo caso, la nozione di "parte di piano delimitata" è meno intuitiva e può cambiare a seconda delle interpretazioni. Alcuni → poligoni stellati sono esempi di poligoni intrecciati.

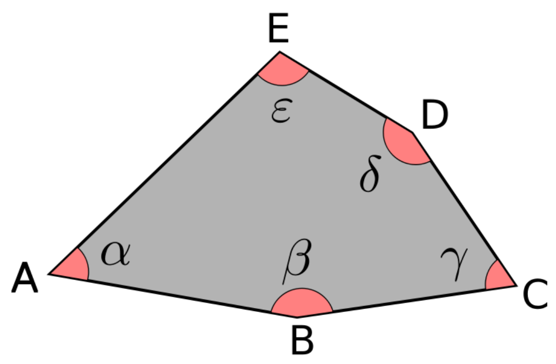


Un poligono intrecciato.

Proprietà

Angoli

La somma degli angoli interni di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i suoi lati (**l**), meno due:



Un poligono irregolare

$$180° \times (l-2)$$

Ad esempio, il poligono in figura ha cinque lati, e quindi:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=(5-2)\times 180° = 540°$$

La dimostrazione può essere svolta per induzione: in un triangolo la somma degli angoli è `180°`, e preso un qualunque poligono una sua diagonale lo divide in due altri poligoni con un numero minore di lati, per cui si può far valere l'ipotesi induttiva.

Analogamente, la somma degli angoli esterni di un poligono convesso con **l** lati è uguale a

$$(360° \times l) - [(l-2)\times 180°)] = 180° \times (l+2).$$

Questo perché la somma totale degli angoli esterni e interni è `360°*`**l**.

Area

Con la *Shoelace formula* è possibile calcolare l'area di un poligono con n vertici aventi coordinate cartesiane $(x_i;y_i)_{i=1\ldots n}$ nel modo seguente:

$$A=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_{i+1}-\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}y_i\right|$$

con la convenzione che $(x_{n+1};y_{n+1})=(x_1;y_1)$.

Classificazione

Distinzione in base al numero di lati e, quindi, di angoli:

N° lati	Nome
3	Triangolo
4	Quadrilatero
5	Pentagono
6	Esagono
7	Ettagono
8	Ottagono
9	Ennagono
10	Decagono
11	Endecagono

12	Dodecagono
13	Tridecagono
14	Tetradecagono
15	Pentadecagono
16	Esadecagono
17	Eptadecagono
18	Ottadecagono
19	Ennadecagono
20	Icosagono
21	Endeicosagono
22	Doicosagono
23	Triaicosagono
24	Tetraicosagono
25	Pentaicosagono
26	Esaicosagono
30	Triacontagono
50	Pentacontagono
1000	Chiliagono
10000	Miriagono

Voci correlate

- Poligono iperbolico
- → Poligono regolare
- → Poligono stellato
- Poliedro
- Politopo

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Poligono**

Collegamenti esterni

- (**FR**) poligoni, poliedri e politopi [1] da *Mathcurve*, *Encyclopédie des formes Mathématiques remarquables*

→ Poligoni
Triangolo	Quadrilatero	Pentagono	Esagono	Ettagono	Ottagono	Ennagono	Decagono	Endecagono	Dodecagono	Tridecagono	Tetradecagono	Pentadecagono	Esadecagono	Eptadecagono	Ottadecagono	Ennadecagono	Icosagono	Triacontagono	Pentacontagono	Chiliagono	Miriagono

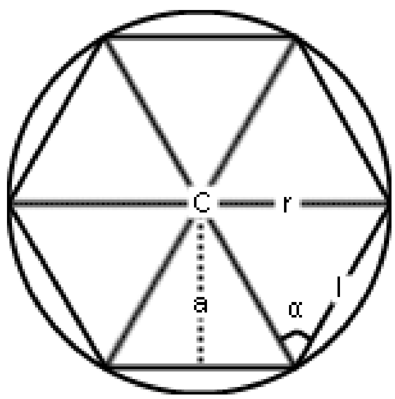
ckb:فر□گ□ش□

Riferimenti

[1] http://www.mathcurve.com/polyedres/polyedres.shtml

Poligono regolare

Un **poligono regolare** è un poligono avente tutti i lati e gli angoli congruenti fra loro.



Esagono regolare iscritto in una circonferenza.C = centro della circonferenza.r = raggio della circonferenza.l = lato del poligono.a = apotema del poligono.α = angolo di base del triangolo isoscele.

Si tratta cioè di una porzione di piano euclideo delimitato da una linea spezzata **chiusa**, formata da una successione di segmenti di uguale lunghezza (detti lati), che formano tra di loro angoli di uguale ampiezza. Il nome *poligono* individua una pluralità (*poli*) di angoli (*gonos*) ed il termine regolare sottende ad una loro uguaglianza. Si nota facilmente che, come in ogni poligono, il numero di lati risulta essere sempre uguale al numero di angoli, infatti, poiché ogni lato forma due angoli alle sue estremità con il lato precedente e quello successivo, si hanno 2 angoli per ciascun segmento; tuttavia, poiché ogni angolo è in comune a due lati, risulta conseguente che il numero di angoli sia uguale a quello dei lati.

La creazione di una spezzata con le suddette proprietà che individui una porzione di piano non nulla implica che il numero di lati sia maggiore o uguale a 3 e che il poligono sia convesso.

Un poligono regolare avente 3 angoli si definisce triangolo equilatero (per distiguerlo da un triangolo generico non regolare), con 4 quadrato, con 5 pentagono regolare, con 6 esagono regolare, e si procede per n angoli anteponendo il prefisso che individua il numero di angoli al suffisso -gono seguito dal termine *regolare* al fine di marcare la distinzione con un poligono generico.

Proprietà

Un poligono regolare avente n (con $n \geq 3$) lati risulta sempre:

- convesso;
- inscrivibile e circoscrivibile in due circonferenze aventi centro coincidente;
- suddivisibile in n triangoli isosceli uguali tra di loro;
- con n pari, avere centro di simmetria coincidente col centro della circonferenza.
- con n dispari, avere asse di simmetria coincidente con l'asse di un lato.

Inoltre, la somma dei suoi angoli interni sarà sempre pari a:

somma degli angoli interni = (numero dei lati – 2) · 180°

Invece la somma dei suoi angoli esterni sarà sempre pari a:

somma degli angoli esterni = 360°

Angoli interni

Per ricavare gli angoli interni di un poligono regolare consideriamo il triangolo isoscele che ha per vertici, gli estremi di un lato ed il centro della circonferenza circoscritta, questo ha, l'angolo al centro uguale, in radianti, a:

$$\beta = \frac{2\pi}{n}$$

o, in gradi:

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

e l'angolo alla base uguale, in radianti, a:

$$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{n-2}{2n}\pi$$

o, in gradi:

$$\alpha = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{n-2}{2n}180^\circ$$

Essendo, l'angolo interno del poligono regolare, somma di 2 angoli adiacenti, alla base dei triangoli isosceli, esso sarà, in radianti:

$$2\alpha = \frac{n-2}{n}\pi$$

ed in gradi:

$$2\alpha = \frac{n-2}{n}180^\circ$$

essendo il numero degli angoli interni, pari a n, è immediatamente dimostrato che la loro somma è pari a $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Angoli esterni

Si dicono angoli esterni gli angoli formati da un lato del poligono e dalla prosecuzione del lato consecutivo. Le prosecuzioni dei lati del poligono devono essere tutte in senso orario o antiorario.

Risulta evidente, dalla costruzione, che la misura dell'angolo esterno è data dalla sottrazione dall'angolo piatto costruito sul prolungamento del lato, dell'angolo interno del poligono, quindi, in radianti:

$$\gamma = \pi - \frac{n-2}{n}\pi = \frac{2\pi}{n}$$

ed in gradi:

$$\gamma = 180^\circ - \frac{n-2}{n}180^\circ = \frac{360^\circ}{n}$$

essendo il numero degli angoli esterni, pari a n, è immediatamente dimostrato che la loro somma è pari a 360°.

io vorrei sapere qual è il poligono dove la somma degli angoli interni è il doppio della somma degli angoli esterni? bho

Apotema

L'apotema è la distanza di ciascun lato del poligono con il centro della circonferenza circoscritta e coincide con il raggio della circonferenza inscrivibile nel poligono. Risulta essere una proprietà specifica di ciascun poligono regolare e si ricava con metodi trigonometrici: detti 2α l'angolo compreso tra due lati successivi (che è a sua volta una proprietà specifica di ciascun poligono) e r il raggio della circonferenza in cui il poligono è inscritto (ovvero la distanza fra il centro del poligono e ciascun vertice) si ha:

$$a(\alpha) = r \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = r \operatorname{sen}\alpha$$

che, sostituendo il valore di α , si esprime in funzione di n :

$$a(n) = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - \beta}{2} = \frac{n-2}{2n}\pi\right) = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = r \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

L'apotema può essere espresso anche in funzione della lunghezza del lato e del numero di lati del poligono regolare. Infatti, applicando la formula trigonometrica al triangolo rettangolo formato dall'apotema, metà lato del poligono ed il raggio della circonferenza circoscritta, abbiamo:

$$a(l, n) = \frac{1}{2} l \tan(\alpha) = \frac{1}{2} l \tan\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right)$$

Perimetro

Il perimetro P è definito come la lunghezza della spezzata che delimita il poligono. Detti n il numero di angoli (o lati) e l la lunghezza del lato, esso è calcolabile attraverso la formula:

$$P = nl$$

Il lato l , può essere calcolato in funzione della lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta e del numero di lati. Infatti, applicando la formula trigonometrica al triangolo rettangolo formato dall'apotema, metà lato del poligono ed il raggio della circonferenza circoscritta, abbiamo:

$$l = 2r\cos(\alpha) = 2r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Il lato l , può essere calcolato anche in funzione della lunghezza dell'apotema e del numero di lati. Infatti, considerando sempre lo stesso triangolo precedente ed applicando la formula trigonometrica appropriata, abbiamo:

$$l = 2a\cot(\alpha) = 2a\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2a\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Area: formula generalizzata

Poiché ogni poligono regolare è suddivisibile in n triangoli isosceli uguali tra loro, per calcolare la superficie del poligono è sufficiente calcolare la superficie di un triangolo A_t e moltiplicarla per n .

Dunque:

$$S = nA_t$$

Poiché $A_t = \frac{b_t h_t}{2}$ dove b_t e h_t sono rispettivamente la base e l'altezza del triangolo, si può scrivere:

$$S = n\frac{b_t h_t}{2} = nb_t\frac{h_t}{2}$$

Considerando che nel caso del poligono regolare: $b_t = l$ possiamo sostituire in questo modo:

$$S = nl\frac{h_t}{2} = P\frac{h_t}{2}$$

Giustificando la seconda uguaglianza con la formula del perimetro. La grandezza h_t , ovvero l'altezza di ciascuno dei triangoli rettangoli che compongono il poligono regolare, è chiamata *apotema* (a). In conclusione:

$$S = \frac{Pa}{2}$$

Sostituendo in questa formula, l'equazione dell'apotema, si può esprimere l'area del poligono regolare in funzione della lunghezza del lato e del numero di lati; infatti, ricordando che $P = nl$, si ha:

$$S(l, n) = \frac{1}{4}nl^2\tan\left(\frac{n-2}{2n}\pi\right) = \frac{1}{4}nl^2\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Da questa formula ricaviamo alcuni casi particolari:

- Quadrato $n = 4$

$$S = l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = l^2$$

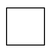
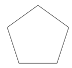
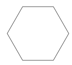
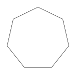
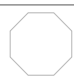
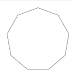
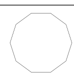
- Triangolo equilatero $n = 3$

$$S = \frac{3}{4} l^2 \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

- Esagono $n = 6$

$$S = \frac{3}{2} l^2 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$

Tabella riepilogativa

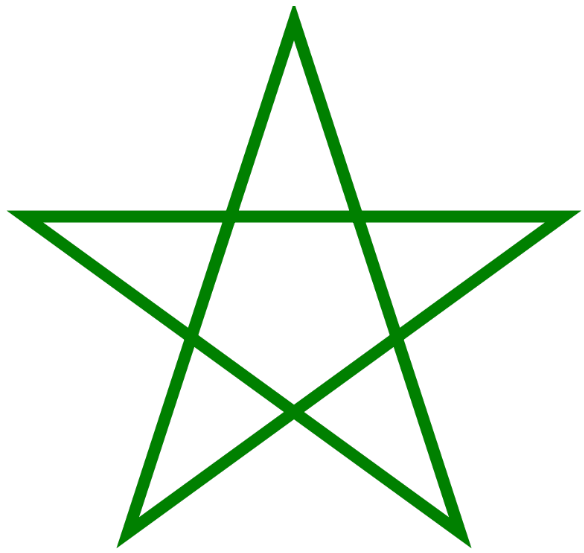
Numero di lati, angoli e vertici	Poligono	Disegno	Angolo interno
3	Triangolo equilatero		$60°$
4	Quadrato		$90°$
5	Pentagono		$108°$
6	Esagono		$120°$
7	Ettagono		$\simeq 128{,}57°$
8	Ottagono		$135°$
9	Ennagono		$140°$
10	Decagono		$144°$

Voci correlate

- → Geometria piana
- → Poligono

Poligono stellato

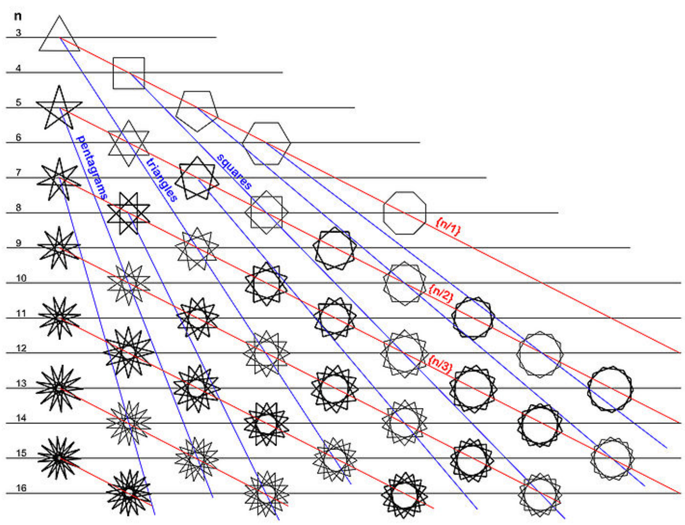
In → geometria piana, un **poligono stellato** è un "→ poligono" avente una forma stellata.



Un pentagono stellato

Definizione

Un **poligono stellato** è una linea spezzata chiusa che delimita un insieme stellato del piano. A differenza degli ordinari → poligoni, la linea spezzata può autointersecarsi: coppie di spigoli distinti possono cioè intersecarsi in un punto interno.



Poligoni regolari stellati con *n* lati.

Un poligono stellato è **regolare** se

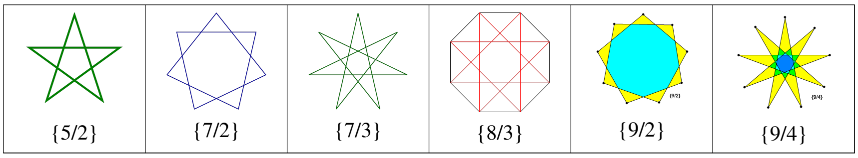
1. I suoi vertici coincidono con quelli di un → poligono regolare con n lati.
2. Gli spigoli connettono il vertice i -esimo con il vertice $(i+k)$ -esimo, per ogni i .

La seconda affermazione va intesa nel modo seguente: i vertici sono ordinati ciclicamente lungo la circonferenza lungo cui giacciono, ed il numero $(i+k)$ è da interpretare nell'aritmetica modulare modulo n : cioè, se $i+k>n$, il numero $(i+k)$ va interpretato in realtà come $i+k-n$.
Per $k=1$ si ottiene l'usuale → poligono regolare con n lati.

Un poligono stellato regolare ha spigoli tutti di eguale lunghezza, e angoli ai vertici di eguale ampiezza.

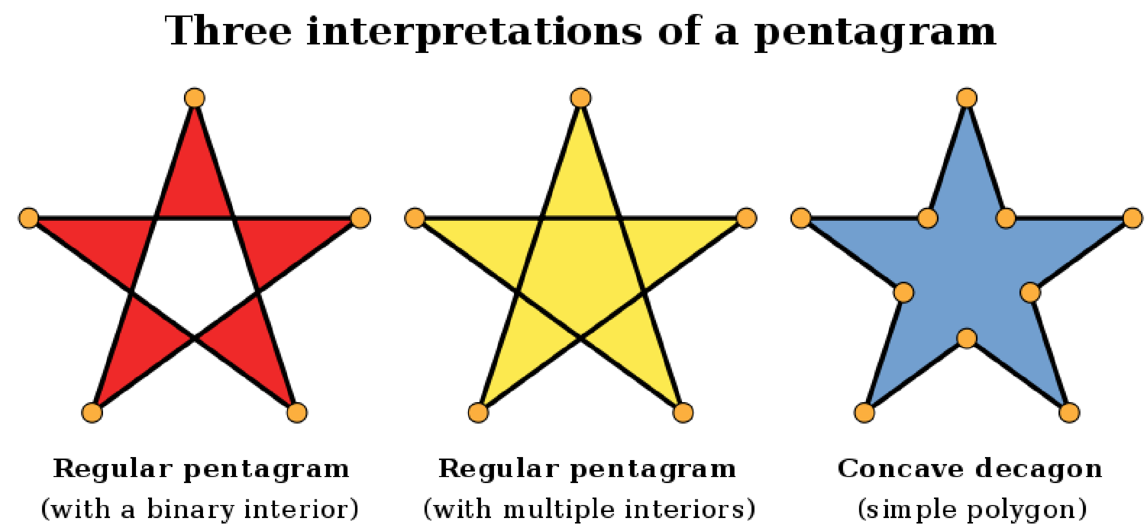
Esempi

Sono mostrati qui sotto i poligoni stellati regolari per i primi valori di $\{n/k\}$.

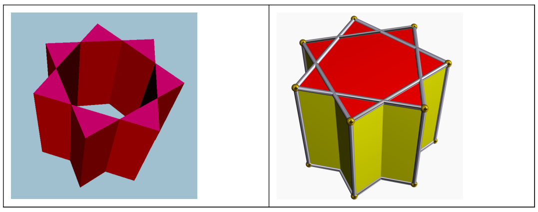


Parte interna dei poligoni stellati

La *parte interna* di un poligono stellato può essere interpretata in vari modi diversi, come mostrato nella figura seguente.



Tali interpretazioni si riflettono anche in alcuni poliedri definiti aventi facce stellate. Ad esempio, il prisma archimedeo stellato è definito come un prisma, ma con facce regolari stellate alle due basi.



Voci correlate

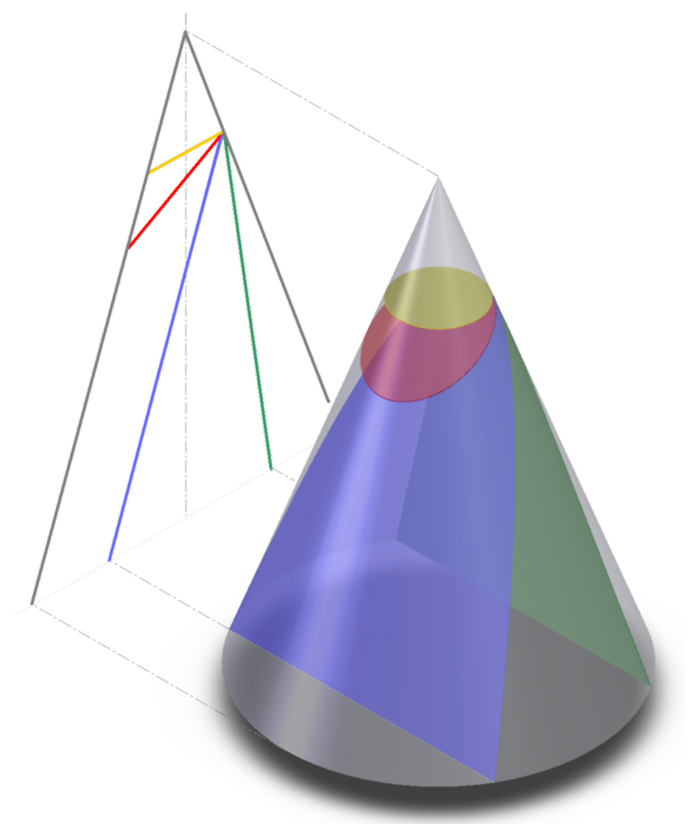
- → Poligono
- Poliedro stellato
- Prisma archimedeo stellato

Bibliografia

- (EN) Cromwell, P.; *Polyhedra*, CUP, Hbk. 1997, ISBN 0-521-66432-2. Pbk. (1999), ISBN 0-521-66405-5.
- (EN) Grünbaum, B.; G. C. Shephard; *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman & Co., (1987), ISBN 0-7167-1193-1.
- (EN) Grünbaum, B.; Polyhedra with Hollow Faces, *Proc of NATO-ASI Conference on Polytopes ... etc. (Toronto 1993)*, ed T. Bisztriczky et al, Kluwer Academic (1994) pp. 43-70.

Sezione conica

In → matematica, e in particolare in → geometria analitica e in → geometria proiettiva, con **sezione conica**, o semplicemente **conica**, si intende genericamente una curva piana che sia luogo dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un → piano.



Tipi di sezioni coniche: i piani, intersecando il cono, descrivono una circonferenza (in giallo), un'ellisse (in rosso), una parabola (in blu) e un'iperbole (in verde)

Le sezioni coniche sono state studiate accuratamente in epoca ellenistica, in particolare da Apollonio di Perga intorno al 200 a.C.; questi diede anche i nomi tuttora in uso per i tre tipi fondamentali di sezioni coniche: ellisse (la circonferenza ne è un caso degenere), parabola e iperbole.

Tipi di sezioni piane di un cono

Consideriamo il cono circolare retto costituito dalle rette generatrici che con il suo asse formano un angolo di ampiezza θ. Ricordiamo che i punti del cono si tripartiscono in tre sottoinsiemi: uno costituito solo dal suo vertice e due sottinsiemi separatamente connessi dette falde o nappe. Le ellissi si ottengono intersecando il cono con piani che con il suo asse formano angoli maggiori di θ e minori o uguali a π/2; ciascuna di tali intersezioni appartiene ad una sola delle due falde del cono ed è una curva chiusa. Le circonferenze sono casi particolari di ellissi ottenute dalla intersezione del cono con un piano perpendicolare al suo asse. Il fatto di essere curve chiuse rende le ellissi e le circonferenze facilmente visualizzabili. Se si interseca il cono con un piano parallelo a una sua retta generatrice si ottiene una conica chiamata parabola; ogni parabola appartiene ad una sola delle falde del cono e non è una curva chiusa. Infine intersecando il cono con piani che formano con il suo asse angoli inferiori a θ si determinano curve aperte (e illimitate) chiamate iperboli; questi piani intersecano entrambe le falde del cono ed ogni iperbole, in quanto insieme di punti, si bipartisce in due sottoinsiemi connessi detti **rami** della conica.

Le curve precedenti sono dette **coniche non degeneri**. Vi sono poi le cosiddette **coniche degeneri** ottenute servendosi di piani che passano per il → vertice del cono: si distinguono i tre casi che seguono.

Se si interseca il cono con un piano che con l'asse forma un angolo superiore a θ si ottiene un semplice punto, il vertice del cono.

Se si interseca il cono con un piano che con l'asse forma un angolo uguale ad θ si ottiene una linea retta, una generatice del cono.

Se si interseca il cono con un piano che con l'asse forma un angolo inferiore ad θ si ottiene una coppia di rette che coincidono con due generatrici del cono; esse hanno come bisettrice la retta intersezione del piano secante con il piano ad esso ortogonale e passante per l'asse del cono.

Coniche ed equazioni quadratiche

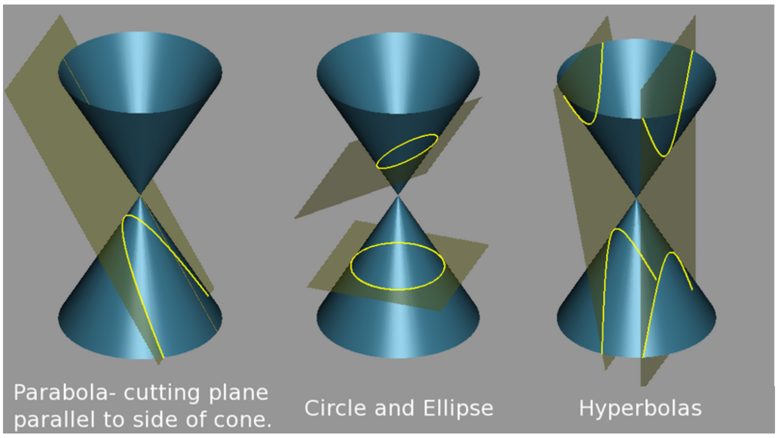
Il grafico di ogni equazione quadratica in due variabili reali, se i coefficienti soddisfano determinate condizioni che preciseremo, individua una sezione conica di un piano cartesiano, cioè di un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane. Si trova inoltre che tutte le sezioni coniche si possono ottenere in questo modo.

Se si considera l'equazione quadratica nella forma

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

si ha la seguente casistica:

- se $h^2 = ab$, l'equazione rappresenta una parabola;
- se $h^2 < ab$ e $a \neq b$ e/o $h \neq 0$, l'equazione determina una ellisse;
  - se $a = b = 1$ e $h = 0$, l'equazione esprime una circonferenza;
- se $h^2 > ab$, l'equazione rappresenta una iperbole;
  - se $a + b = 0$, l'equazione rappresenta una iperbole rettangolare.

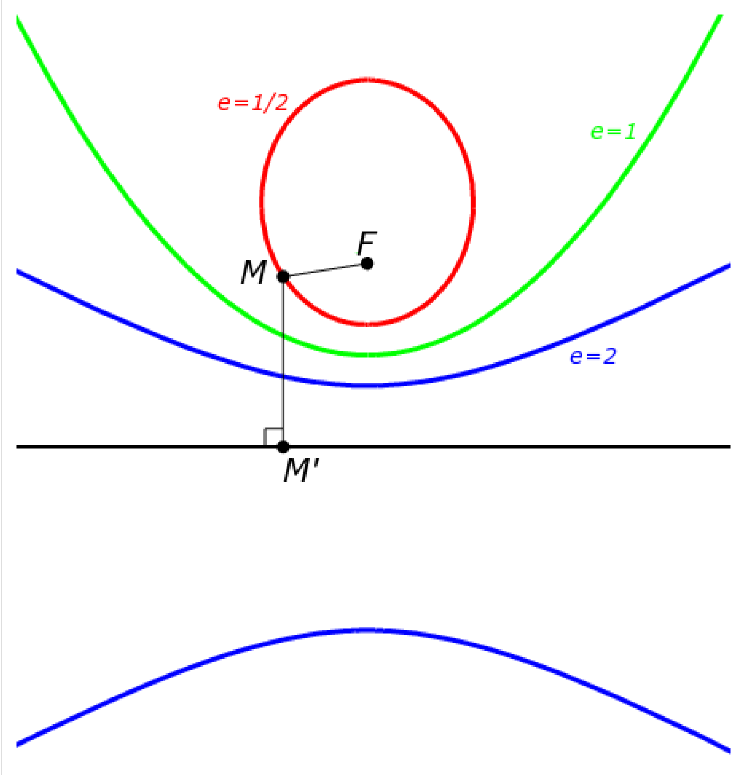


Visualizzazioni delle sezioni coniche

Eccentricità

Una definizione alternativa delle sezioni coniche parte con un punto F (con il ruolo di *fuoco*), una retta L (la *direttrice*) non contenente F e un numero non negativo e (la *eccentricità*). A tali enti si fa corrispondere la sezione conica consistente in tutti i punti la cui distanza da F è uguale al prodotto di e per la rispettiva distanza da L. Per $0 < e < 1$ si ottiene un'ellisse, per $e = 1$ una parabola e per $e > 1$ una iperbole.

Per una ellisse e una iperbole si possono assumere due coppie fuoco + direttrice, ciascuna fornendo la stessa intera curva. La distanza del centro dalla direttrice è $\frac{a}{e}$, dove a denota il semiasse maggiore dell'ellisse, oppure la distanza del centro da ciascuno dei punti di distanza minima dell'iperbole. La distanza del centro da un fuoco è ae.



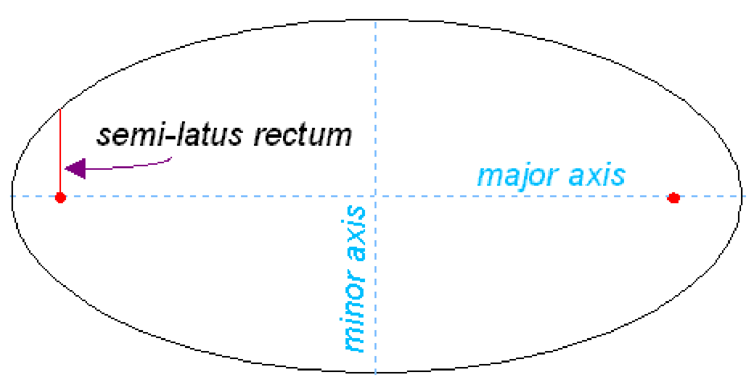
Nel caso della circonferenza *t* = 0 e si deve immaginare la retta direttrice a distanza infinita dal fuoco (retta all'infinito del piano). Questo caso non si può trattare a partire dalla richiesta che la circonferenza sia il luogo dei punti la cui distanza dal centro sia *e* volte la distanza da L, in quanto si avrebbe una forma indeterminata della forma zero per infinito; questo caso va trattato come caso limite di ellissi.

Si può dunque affermare che l'eccentricità di una sezione conica dia una misura di quanto essa si allontani dall'essere circolare.

Per una data lunghezza a del semiasse maggiore, quanto più e si avvicina a 1, tanto più piccolo è il semiasse minore.

Semiasse e coordinate polari

Si definisce **semilato retto** di una sezione conica C un segmento ortogonale all'asse maggiore che ha una estremità nel suo fuoco singolo o in uno dei suoi due fuochi e l'altra in un punto della C; la sua lunghezza di solito si denota con *l*. Questa grandezza viene collegata alle lunghezze dei semiassi *a* e *b* dall'uguaglianza $al = b^2$.



Semilato retto di un'ellisse

In coordinate polari, una sezione conica con un fuoco nell'origine e, se dotata di un secondo fuoco, con questo sul semiasse positivo delle *x*, è determinata dall'equazione

$$r(1 - e\cos\theta) = l.$$

Applicazioni

Le sezioni coniche sono importanti in astronomia: le orbite di due corpi (con masse elevate) che interagiscono secondo secondo la legge di gravitazione universale sono sezioni coniche rispetto al loro comune centro di massa considerato a riposo. Se tra di loro si esercita una attrazione sufficiente, entrambi percorrono un'ellisse; se l'attrazione reciproca è insufficiente si muovono con la possibilità di allontanarsi illimitatamente percorrendo entrambi parabole o iperboli. Si veda in proposito problema dei due corpi.

In → geometria proiettiva le sezioni coniche nel piano proiettivo sono considerate equivalenti, nel senso che possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una trasformazione proiettiva.

In epoca ellenistica la conoscenza delle coniche permise la costruzione di specchi parabolici, forse applicati in attività belliche (v. Specchi ustori) e nella costruzioni di fari di grande portata (v. Faro di Alessandria).

Sfere di Dandelin

Per una trattazione breve e abbastanza semplice delle sezioni coniche che mostra come esse si possono caratterizzare equivalentemente come intersezioni di un piano con un cono e in termini di fuochi o di un fuoco e una direttrice vedi Sfere di Dandelin.

Derivazione

Consideriamo un cono avente come asse l'asse delle z e il vertice nell'origine. Esso è determinato dall'equazione

$$x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0 \qquad (1)$$

dove

$$a = \tan\theta > 0$$

e θ denota l'angolo che ogni generatrice del cono forma con l'asse. Si noti che questa equazione individua due superfici una posta al di sopra e l'altra al di sotto del vertice; nel parlare comune ciascuna di queste superfici viene detta cono; i matematici preferiscono parlare di due **nappe** la cui unione costituisce il cono e la cui intersezione si riduce al vertice del cono.

Consideriamo un piano P che interseca il piano *Oxy* in una retta parallela all'asse delle *y* e che interseca il piano *Oxz* in una retta con una certa pendenza; la sua equazione è

$$z = mx + b \qquad (2)$$

dove

$$m = \tan\phi > 0$$

e ϕ è l'angolo che P forma con il piano *Oxy*.

Ci proponiamo di individuare l'intersezione del cono con il piano P: questo richiede la combinazione delle due equazioni (1) e (2). Queste si possono risolvere nella variabile z e le espressioni trovate si possono uguagliare. L'equazione (1) per la z fornisce

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}};$$

di conseguenza

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} = mx + b.$$

Elevati al quadrato i due membri e sviluppato il binomio del membro a destra si ottiene

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = m^2 x^2 + 2mbx + b^2 \cdot$$

Raggruppando le variabili si giunge alla

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-m^2\right)+\frac{y^2}{a^2}-2mbx-b^2=0. \qquad (3)$$

Si noti che questa è l'equazione della proiezione della sezione conica sul piano *Oxy*; Quindi questa equazione fornisce una figura ottenuta dalla sezione conica mediante una contrazione nella direzione dell'asse delle *x*.

Derivazione della parabola

Si ottiene una parabola quando la pendenza del piano P è uguale alla pendenza delle generatrici del cono. In questo caso gli angoli θ e ϕ sono complementari. Questo implica che

$$\tan\theta=\cot\phi\ ;$$

di conseguenza

$$m=\frac{1}{a} \qquad (4).$$

Sostituendo l'equazione (4) nell'equazione (3) si fa scomparire il primo termine nell'equazione (3) e rimane l'equazione

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{2}{a}bx-b^2=0.$$

Moltiplicando entrambi i membri per a^2,

$$y^2-2abx-a^2b^2=0;$$

a questo punto si può trovare un'espressione per la *x*:

$$x=\frac{1}{2ab}y^2-\frac{ab}{2}. \qquad (5)$$

L'equazione (5) descrive una parabola il cui asse è parallelo all'asse delle *x*. Altre versioni della equazione (5) si possono otteenere ruotando il piano intorno all'asse delle *z*.

Derivazione dell'ellisse

Si individua un'ellisse quando la somma degli angoli θ e ϕ è inferiore ad un angolo retto:

$$\theta+\phi<\frac{\pi}{2} \qquad \text{(ellisse)}$$

In tal caso la tangente della somma dei due angoli è positiva.

$$\tan(\theta+\phi)>0.$$

Ricordiamo ora la identità trigonometrica

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}\,;$$

questa implica

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{m+a}{1-ma}>0 \qquad (6)$$

Ma $m + a$ è positivo, in quanto è la somma di due numeri positivi; quindi la disuguaglianza (6) è positiva se anche il denominatore è positivo:

$$1-ma>0. \qquad (7)$$

Dalla disuguaglianza (7) si deducono:

$$ma<1,$$

$$m^2a^2<1,$$

$$1 - m^2a^2 > 0,$$
$$\frac{1}{m^2a^2} > 1,$$
$$\frac{1}{m^2a^2} - 1 > 0,$$
$$\frac{1}{a^2} - m^2 > 0 \qquad \text{(ellisse)}.$$

Riprendiamo ancora l'equazione (3),

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right) + \frac{y^2}{a^2} - 2mbx - b^2 = 0, \qquad (3)$$

ma questa volta assumiamo che il coefficiente di x^2 non si annulli ma sia invece positivo. Risolviamo per la y:

$$y = a\sqrt{b^2 + 2mbx - x^2\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)}. \qquad (8)$$

Questa equazione descriverebbe chiaramente un'ellisse, se non fosse presente il secondo termine sotto il segno di radice, $2\,m\,b\,x$: sarebbe l'equazione di una circonferenza dilatata proporzionalmente secondo le direzioni dell'asse delle x e dell'asse delle y. L'equazione (8) in effetti individua un'ellisse ma in modo non evidente; quindi occorre manipolarla ulteriormente per convincersi di questo fatto. Completiamo il quadrato sotto il segno di radice:

$$y = a\sqrt{b^2 - \left[x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right]^2 + \left(\frac{b^2}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right)}.$$

Raccogliamo i termini in b^2:

$$y = a\sqrt{b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right) - \left[x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right]^2}.$$

Dividiamo per a ed eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right).$$

La x presenta un coefficiente, mentre è opportuno far scomparire tale componente raccogliendolo a fattore fuori del secondo termine che è un quadrato:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)\left(x - \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2m^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)}}\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right).$$

Un'ulteriore manupolazione delle costanti finalmente conduce a

$$\frac{y^2}{1 - a^2m^2} + \left(x - \frac{mb}{\frac{1}{a^2} - m^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(1 - a^2m^2)^2}.$$

Il coefficiente del termine in y è positivo (per un'ellisse). Cambiando i nomi dei coefficienti e delle costanti ci conduce a

$$\frac{y^2}{A} + (x - C)^2 = R^2 \qquad (9)$$

che è chiaramente l'equazione di un'ellisse. In altri termini, l'equazione (9) descrive una circonferenza di raggio R e centro $(C,0)$ che viene poi dilatata verticalmente per un fattore $\sqrt{A}$. Il secondo termine del membro a sinistra (il termine nella x) non ha coefficiente ma è un quadrato, quindi deve essere positivo. Il raggio è un prodotto di quadrati e quindi deve essere anch'esso positivo. Il primo termine del membro a sinistra (il termine in y) ha un coefficiente positivo, e dunque l'equazione descrive un'ellisse.

Derivazione dell'iperbole

L'intersezione del cono con il piano P fornisce un'iperbole quando la somma degli angoli θ e ϕ è un angolo ottuso, maggiore di un angolo retto. La tangente di un angolo ottuso è negativa e tutte le disuguaglianze trovate per l'ellisse vengono cambiate nelle loro opposte. Quindi si ottiene

$$1 - a^2m^2 < 0 \qquad\qquad \text{(iperbole)}.$$

Di conseguenza per l'iperbole si trova l'equazione che differisce da quella trovata per l'ellisse solo per avere negativo il coefficiente *A* del termine in *y*. Questo cambiamento di segno fa passare da un'ellisse ad un'iperbole. Il collegamento fra ellissi e iperbole può descriversi anche osservando che l'equazione di un'ellisse con coordinate reali può interpretarsi come l'equazione di un'iperbole con una coordinata immaginaria e, simmetricamente, che l'equazione di un'iperbole con coordinate reali può interpretarsi come l'equazione di un'ellisse con una coordinata immaginaria (vedi numero immaginario). Il cambiamento di segno del coefficiente *A* equivale allo scambio fra valori reali e immaginari della funzione della forma *y=f(x)* che si legge nell'equazione (9).

Voci correlate

- Fuoco (geometria), proprietà delle sezioni coniche concernenti i loro fuochi.
- Quadrica, l'analogo multidimensionale delle coniche
- → Rappresentazione matriciale delle coniche.
- Funzione quadratica.

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Sezione conica**

Collegamenti esterni

- Special plane curves: Conic sections [1]
- Focus [2] in MathWorld
- Occurrence of the conics [3] in natura e altrove
- Nicola Fergola, Vincenzo Flauti Trattati analitici delle sezioni coniche e de' loro luoghi geometrici [4] (Napoli, 1840)

Riferimenti

[1] http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html
[2] http://mathworld.wolfram.com/Focus.html
[3] http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm
[4] http://books.google.com/books?id=-ekGAAAAYAAJ

Rappresentazione matriciale delle coniche

In → matematica, la **rappresentazione matriciale delle coniche** è una rappresentazione delle → coniche tramite matrici.

Invarianti delle coniche

È infatti possibile definire tre valori associati ad ogni conica, che si definiscono invarianti. Data una conica di equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

è possibile associare tre numeri:

l'**invariante cubico** I_3 è il seguente numero:

$$I_3 = det \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

l'**invariante quadratico** I_2 è definito nella maniera seguente:

$$I_2 = det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

l'**invariante lineare** I_1 è definito come segue:

$$I_1 = Tr \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a + c$$

Classificazione metrica delle coniche

In base a quanto detto sugli invarianti, è possibile classificare le coniche, e quindi stabilire se una curva sia un'ellisse, una parabola o un'iperbole, tramite la seguente distinzione:

se $I_3 = 0$ la conica è degenere e in particolare:

- se $I_2 < 0$, si riduce a due rette reali distinte
- se $I_2 = 0$, si riduce a

1) coppia di rette reali distinte parallele oppure complesse coniugate senza punti comuni (rango matrice completa =2)

2) coppia di rette reali coincidenti (rango matrice completa =1)

- se $I_2 > 0$, si riduce a due rette immaginarie coniugate.

se $I_3 \neq 0$ la conica non è degenere ed in particolare:

- è un'iperbole equilatera se $I_2 < 0$ e $I_1 = 0$,
- è un'iperbole non equilatera se $I_2 < 0$ ma $I_1 \neq 0$,
- è una parabola se $I_2 = 0$,
- è un'ellisse reale se $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$,
- è un'ellisse immaginaria se $I_2 > 0$ ma $I_1 I_3 > 0$.

Ad esempio, la conica di equazione: $x^2 - x = 0$, avendo $I_3 = 0$ e $I_2 = -\frac{1}{4}$, è una conica degenere in due rette reali distinte: $x = 0$ e $x = 1$.

Riduzione di una conica a forma canonica

Essendo fornita l'equazione di una conica del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

è possibile agire sui coefficienti, tramite gli invarianti, per ottenere la forma canonica della conica. Per forma canonica di una conica, si intende:

- per l'ellisse: deve avere come centro l'origine degli assi cartesiani e i suoi fuochi devono essere sull'asse x o sull'asse y
- per la parabola: deve avere vertice nell'origine e come asse uno degli assi cartesiani
- per l'iperbole: deve avere centro nell'origine degli assi e i fuochi devono appartenere all'asse x o all'asse y.

In generale un'equazione del tipo: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, fornisce una conica rototraslata rispetto all'origine degli assi: bisogna quindi ruotare la conica (1° passo) e poi traslarla fino a portare il centro o il vertice nell'origine (2° passo).

- 1° passo: la rotazione della conica si ottiene tramite l'annullamento del coefficiente di xy, cioè $2b$.

Dopo questa operazione, la conica si riduce nella forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, in cui λ_1 e λ_2 si ottengono nel seguente modo: bisogna diagonalizzare la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

e si otterrà la matrice

$$M' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

con λ_1 e λ_2 autovalori della matrice diagonale.

λ_1 e λ_2 saranno quindi i coefficienti del termini quadratici dell'equazione della conica. Naturalmente, nel caso della parabola, sarà nullo o il coefficiente di λ_1 oppure quello di λ_2, in quanto nell'equazione è presente un solo termine quadratico.

- 2° passo: con la traslazione, si ottiene un'equazione del tipo: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 = 0$ in cui λ_1 e λ_2 sono i valori ricavati con il passo precedente, mentre λ_3 si ottiene nella maniera seguente: se la conica è un'ellisse o un'iperbole,

$$\lambda_3 = \frac{I_3}{I_2}$$

mentre se la conica è una parabola,

$$\lambda_3 = \pm 2\lambda_2 \sqrt{\frac{-I_3}{I_1^3}}$$

in cui I_3, I_2 e I_1 sono gli invarianti cubico, quadratico e lineare.

Geometria solida

Viene chiamata **geometria solida** quella branca della → geometria che si interessa dei **solidi**, ovvero delle figure geometriche formate da punti tutti compresi in uno spazio $\mathbf{R}^3$.

Tale spazio, che è detto volumetrico, è caratterizzato da tre diverse dimensioni, ovvero dall'incrocio di tre assi tra loro perpendicolari: l'asse x , l'asse y e l'asse z ; è proprio la presenza di quest'ultimo asse che lo differenzia dallo spazio planare, provvisto di sole due dimensioni e generalmente detto cartesiano. Il punto in cui i suddetti tre assi si incrociano è chiamato origine, e viene indicato con una O maiuscola. Dei tre assi, l**'** x è la *larghezza*, l**'** y l**altezza** ***e lo*** **'** z la *profondità*.

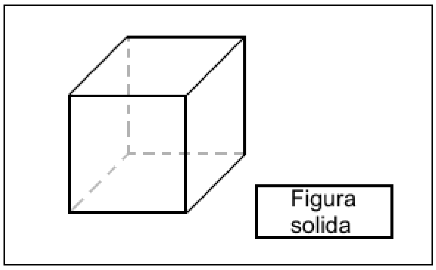
I solidi

I solidi, che come già detto sono le figure di cui la geometria solida si occupa, posseggono diversi elementi che le figure piane non hanno:

- Il → volume
- Le → facce
- Gli → spigoli
- I → vertici
- Gli angoli diedri

Il **volume** è tutto lo spazio interno alla figura solida. Esso, differentemente dall'area, si articola in tre dimensioni.

La **faccia** è, per quanto riguarda un poliedro, ciascuna delle forme geometriche o → poligoni che ne delimitano il volume. Le aree di tutte le facce del poliedro, se sommate, danno l'area superficiale del solido.



Elementi di geometria solida.

Lo **spigolo** è il segmento d'intersezione tra due facce poligonali.

Il **vertice** è in geometria quel punto in cui almeno tre facce di un poliedro convergono. Esso è dunque formato dall'intersezione di tre o più diversi spigoli.

L**'angolo diedro** è, come si intuisce dal nome, l'angolo tridimensionale formato da due facce e dallo spigolo compreso tra esse.

I poliedri sono divisibili in poliedri irregolari, piramidi e prismi. Mentre le varie componenti dei primi sembrano non seguire alcuna particolare regola di composizione, i secondi sono sempre formati da due → figure piane che fanno da basi (regolari o irregolari, ma in ogni caso tra loro uguali) e un numero di parallelogrammi pari al numero di lati delle figure di base. Le piramidi, invece, sono formate da una figura piana che fa da base (come prima, regolare o irregolare) e da un numero di triangoli pari al numero dei lati della base; tutti i suddetti triangoli hanno un vertice in comune.

I solidi di rotazione

Oltre che ai poliedri, la geometria solida si interessa anche ai cosiddetti solidi di rotazione, ovvero a quelle figure geometriche tridimensionali provviste di almeno una faccia curva. Questi solidi sono chiamati "di rotazione" perché derivano dalla rotazione di diverse figure geometriche piane, come parabole, cerchi, rettangoli, triangoli ed altre ancora. Tra i solidi di rotazione più importanti ricordiamo la sfera (dal cerchio), il cilindro (dal rettangolo o dal quadrato) ed il cono (dal triangolo).

Volume

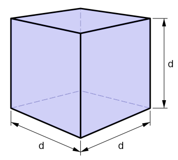
Il **volume** o **capacità** è la misura dello spazio occupato da un corpo. Viene valutato ricorrendo a molte diverse unità di misura. L'unità adottata dal Sistema Internazionale è il metro cubo, simbolo $\mathbf{m^3}$.

Il **volume** di un oggetto solido è un valore numerico utilizzato per descrivere a 3 dimensioni quanto spazio occupa il corpo. Ad oggetti ad una dimensione (come una linea) o a 2 dimensioni (come un quadrato) si assegna per convenzione volume 0 in uno spazio tridimensionale.

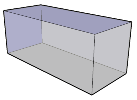
Matematicamente i volumi sono *definiti* mediante l'applicazione di calcolo integrale, come se il corpo fosse formato dalla somma di una grandissima quantità di piccoli cubi. La generalizzazione di volume, arbitrariamente esteso a più dimensioni, viene chiamato contenuto.

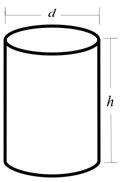
Il volume di alcuni solidi

- Volume del cubo:

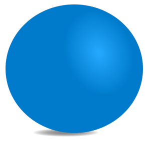


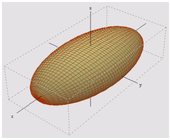
Cubo


Prisma rettangolare

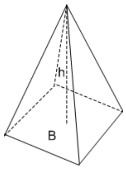


Cilindro

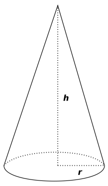

Sfera



Ellissoide



Piramide



Cono

$$s^3 = s \cdot s \cdot s$$

dove *s* è la lunghezza dei lati.

- Prisma rettangolare (o parallelepipedo rettangolo):

$$l \cdot w \cdot h$$

l è la lunghezza, *w* la larghezza, *h* l'altezza.

- Cilindro:

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

r il raggio del cerchio, *h* la distanza tra le basi.

- Sfera:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

r il raggio della sfera.

- Ellissoide:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c$$

a, *b*, *c* sono i tre semiassi dell'ellissoide.

- Piramide:

$$\frac{1}{3}A \cdot h$$

A è l'area di base, *h* l'altezza dalla base all'apice.

- Cono:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

r è il raggio del cerchio alla base, *h* la distanza dalla base alla punta.

- Qualsiasi prisma avente la sezione d'area costante lungo l'altezza:

$$A \cdot h$$

A è l'area di base, *h* l'altezza.

- Qualsiasi figura che richieda calcolo integrale:

$$\int A(h)dh$$

dove *h* è una figura con quasiasi dimensione e *A*(*h*) è la sezione d'area perpendicolare ad *h* descritta come una funzione della posizione lungo *h*; questa va bene per qualsiasi figura (non importa se il prisma è inclinato o la sezione trasversale cambia forma).

- Nel caso di solidi di rotazione si può sfruttare il secondo teorema di Pappo-Guldino, che afferma che il volume di un solido di rotazione Ωottenuto ruotando di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$attorno all'asse z una figura piana K è

$$V = \alpha \cdot x \cdot A$$

dove x è l'ordinata del baricentro della curva e A è l'area di K

Misure di volume: SI

L'unità di misura del Sistema Internazionale per il volume è il metro cubo (m^3); è tuttavia accettato nell'uso anche il litro, equivalente a un decimetro cubo: per fare un metro cubo sono perciò necessari 1000 litri.

Misure di volume: USA

- U.S. oncia liquida, circa 29.6 mL
- U.S. pinta liquida = 16 once liquide, o circa 473 mL
- U.S. pinta secca = 1/64 bushel U.S., o circa 551 mL
- U.S. quarto liquido = 32 once liquide o due pinte U.S., o circa 946 mL
- U.S. quarto secco = 1/32 U.S. bushel, o circa 1,101 L
- U.S. gallone = 128 once liquide o quattro quarti U.S., circa 3.785 L
- U.S. gallone secco = 1/8 U.S. bushel, o circa 4,405 L
- U.S. bushel secco = 2150,42 pollici cubi, o circa 35,239 L

Il **piede acro** viene usato spesso per misurare il volume di acqua in un serbatoio di un acquedotto. È il volume d'acqua che potrebbe coprire un'area di un acro della profondità di un piede. È equivalente a 43.560 piedi cubi o 1233,481 837 547 52 m^3.

- pollice cubico = 16,387 064 cm^3
- piede cubico = 1.728 in^3 ≈ 28.317 dm^3
- yarda cubica = 27 ft^3 ≈ 0.7646 m^3
- miglio cubico = 5.451.776.000 yd^3 = 3.379.200 piedi-acri ≈ 4,168 km^3

Misure di volume: UK

- UK oncia fluida, circa 28.4 mL (questo valore equivale al volume di un'oncia avoirdupois di acqua sotto certe condizioni)
- UK pinta = 20 once fluide, o circa 568 mL
- UK quarto = 40 once o due pinte, o circa 1.137 L
- UK gallon = 160 once o quattro quarti, o esattamente 4.546 L

Misure di volume: in cucina (paesi anglosassoni)

- cucchiaino da te = 1/6 once fluide U.S. (circa 4.929 mL)
- cucchiaino da te = 1/6 once imperiali fluide (circa 4.736 mL) (Canada)
- cucchiaino = 5 mL
- cucchiaino da tavola = 1/2 once fluide U.S. o 3 cucchiaini da te (circa 14.79 mL)
- cucchiaino da tavola = 1/2 once fluide imperiali o 3 cucchiaini da te (circa 14.21 mL) (Canada)
- cucchiaio da tavola = 15 mL o 3 cucchiaini da te
- cucchiaio da tavola = 5 dramme fluide (circa 17.76 mL) (Inglese)
- tazza = 8 Once fluide U.S. o 1/2 pinta liquida U.S. (circa 237 mL)
- tazza = 8 once fluide imperiali o 1/2 pinte fluide (circa 227 mL) (Canada)
- tazza = 250 mL

Relazione con la densità

Il rapporto tra una massa ed il volume da essa occupato è noto come densità. Il termine *volume specifico* si calcola dividendo il volume per la massa. Si può definire come il reciproco della densità di massa, espressa secondo il SI in chilogrammi su metro cubo (kg/m³).

Collegamenti esterni

- (**EN**) Conversione di unità di misura inglesi e americane di volume e capacità in unità di misura metriche [1]
- (**EN**) Convertitore online di unità di misura [2]
- (**EN**) Convertitore di unità accurato alla nona cifra decimale [3]
- (**EN**) Conversione di volume, capacità, metri cubi, kilogrammi - prefissi [4]
- (**IT**) Convertitore di unità - Volume, Pressione, Potenza, Temperatura, Portata, Energia [5]
- Conversione di volume [6]

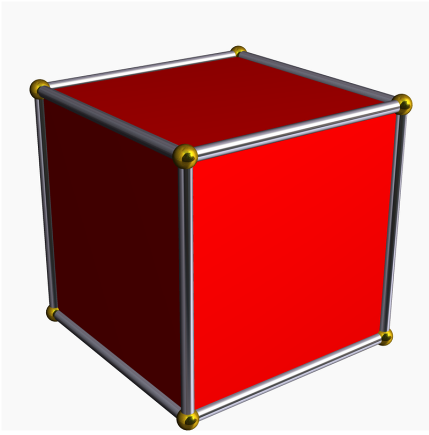
Riferimenti

[1] http://www.onlineconversion.com/volume.htm
[2] http://calc.skyrocket.de/en/
[3] http://www.ex.ac.uk/trol/scol/ccvol.htm
[4] http://www.sengpielaudio.com/Rechner-milliliter.htm
[5] http://www.pneumofore.com/assistenza/strumenti
[6] http://www.convertito.com

Faccia (geometria)

In → geometria, una **faccia** di un poliedro è uno dei → poligoni che compongono il suo bordo. Ad esempio, il cubo ha sei facce: queste sono i sei quadrati che compongono il suo bordo.

Assieme ai → vertici e agli → spigoli, le facce sono una componente fondamentale di un poliedro: il suffisso *-edro* è infatti derivato dal greco *hedra* che vuol dire proprio *faccia*.



Il cubo ha 6 facce quadrate: tre di queste sono adiacenti ad ogni vertice.

Relazione di Eulero

Il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro convesso formano tre quantità F, S e V che sono in relazione tramite la formula di Eulero

$$V - S + F = 2.$$

Ad esempio, il cubo ha 8 vertici, 12 spigoli e 6 facce. Infatti 8-12+6 = 2.

Generalizzazioni

Il concetto di faccia può essere esteso ad un politopo di dimensione arbitraria n. Un qualsiasi politopo di dimensione inferiore $k < n$ che compone il bordo è una faccia: si tratta di una faccia k -dimensionale. In questa ottica, vertici e spigoli sono rispettivamente le facce 0-dimensionali e 1-dimensionali.

Se il politopo è convesso, le facce sono esattamente le intersezioni del politopo con gli iperpiani che intersecano il politopo solo nel suo bordo.

Voci correlate

- → Vertice (geometria)
- → Spigolo

Spigolo

La parola **spigolo** (dal latino *spiculum*, diminutivo di *spica*, punta) è utilizzata nella → geometria solida per indicare i segmenti comuni a due facce di un poliedro, ovvero i lati di tali facce.

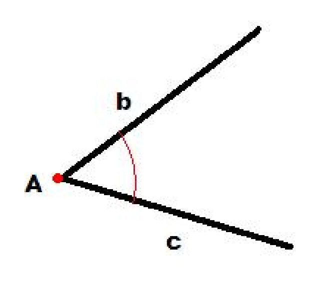
Secondo una relazione scoperta da Eulero, il numero di spigoli in un poliedro è pari alla somma fra il numero di facce e il numero di → vertici del poliedro stesso, diminuita di due.

Talora è detta spigolo anche la retta di → intersezione fra due → piani non paralleli.

Vertice (geometria)

Il **vertice**, nella → geometria piana è:

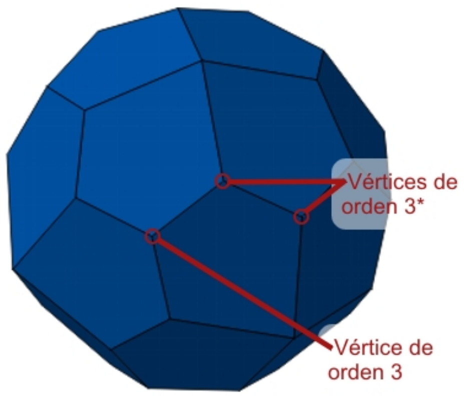
- il punto di incontro di due lati di un poligono (triangolo, quadrilatero, ecc).
- il punto di incontro di due semirette, che formano un angolo (vertice dell'angolo);



Il vertice nella geometria piana, punto di incontro di due semirette

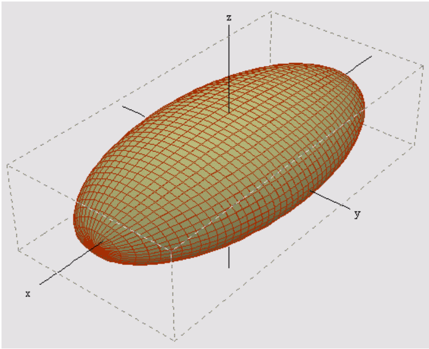
Il **vertice**, nella → geometria solida è:

- il punto in cui almeno tre facce di un poliedro convergono (ad esempio il vertice di una piramide). Esso è dunque formato dall'intersezione di tre o più diversi → spigoli.
- il punto di incontro della generatrice e dell'asse di un cono.



Vertice di un *icositetraedro pentagonale*

Geometria analitica



Un ellissoide

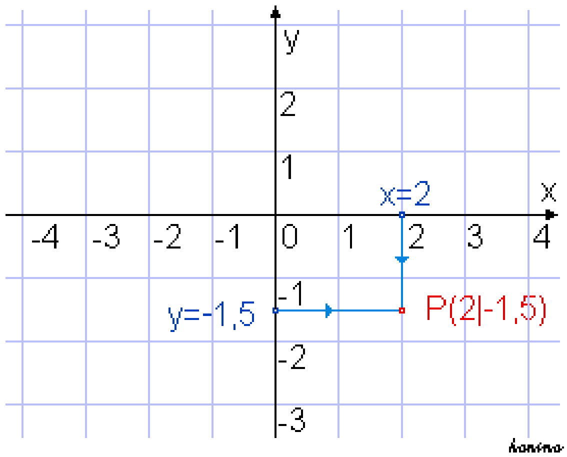
La **geometria analitica**, chiamata anche **geometria cartesiana**, è lo studio della → geometria attraverso il sistema di coordinate cartesiane.

Ogni punto del piano cartesiano o dello spazio è determinato dalle sue coordinate su due piani: ascisse (x) e ordinate (y), che determinano un vettore rispettivamente del tipo (x, y) oppure (x, y, z). Gli enti geometrici come rette, curve, → poligoni sono definiti tramite equazioni, disequazioni o insiemi di queste, detti sistemi.

Le proprietà di questi oggetti, come le condizioni di incidenza, parallelismo e perpendicolarità, vengono anch'esse tradotte in equazioni e quindi studiate con gli strumenti dell'→ algebra e dell'→ analisi matematica.

Il termine *geometria analitica* è stato usato anche da alcuni matematici moderni come Jean-Pierre Serre per definire una branca della → geometria algebrica che studia le varietà complesse determinate da funzioni analitiche.

Storia della geometria analitica



Le coordinate cartesiane.

René Descartes introdusse le basi della geometria analitica nel 1637 nel saggio intitolato *Geometria* incluso nel suo libro *Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze più la Diottrica, le Meteore e la Geometria che sono saggi di questo metodo* (la cui prefazione è il famoso *Discorso sul metodo*). Questo lavoro scritto in francese e i suoi principi filosofici, fornirono le fondamenta per il calcolo differenziale, che sarà successivamente introdotto da Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, in maniera autonoma fra loro.

I temi più importanti della geometria analitica sono:

- lo → spazio vettoriale
- definizione di → piano
- problemi sulla → distanza
- il → prodotto scalare per ottenere la proiezione fra due vettori
- il prodotto vettoriale per ricavare un vettore perpendicolare a due vettori conosciuti
- problemi di → intersezione

Molti di questi problemi comprendono l'→ algebra lineare.

Voci correlate

- Sistema di coordinate cartesiane

Bibliografia

- Domenico Chelini *Saggio di geometria analitica* [1] *(Roma: tipografia delle belle arti, 1838)*
- Ferdinando Aschieri *Geometria analitica del piano* [2] (Milano: U. Hoepli ,1887)
- Ferdinando Aschieri *Geometria analitica dello spazio* [3] (Milano: U. Hoepli ,1888)
- Enrico D'Ovidio *Geometria analitica* [4] (Torino: Fratelli Bocca, 1896)
- Enrico D'Ovidio *Teoria analitica delle forme geometriche fondamentali* [5] (Torino: E. Loescher, 1885).
- Guido Castelnuovo *Lezioni di geometria analitica e proiettiva (volume 1: geometria analitica del piano)* [6] (Roma: Algrighi, Segati & co., 1904)
- Ettore Bortolotti *Lezioni di geometria analitica* [7] (Bologna, N. Zanichelli, 1921)
- (**EN**) George Salmon *A treatise on the analytic geometry of three dimensions* [8] *(London: Longmans, Green and co.,1912-1915)*
- (**EN**) George Salmon *A treatise on conic sections* [9] (London : Longman, Brown, Green and Longmans, 1855)
- (**EN**) George Salmon *A treatise on the higher plane curves* [10] *(Dublin : Hodges and Smith, 1852)*

Collegamenti esterni

- (**EN**) Visualizzare oggetti di geometria analitica [11]

Riferimenti

[1] http://books.google.com/books?id=pY8LAAAAYAAJ
[2] http://name.umdl.umich.edu/ABR0985.0001.001
[3] http://name.umdl.umich.edu/ABN7861.0001.001
[4] http://name.umdl.umich.edu/ABR0034.0001.001
[5] http://name.umdl.umich.edu/ABR0038.0001.001
[6] http://www.archive.org/details/lezionidegeoanal00castrich
[7] http://www.archive.org/details/lezionidigeometr00bortuoft
[8] http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath&idno=ABN8143
[9] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF37268165
[10] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF37258942
[11] http://www.mygeometryteacher.com/

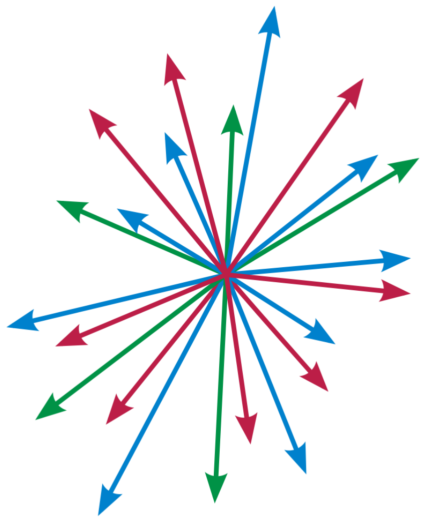
Spazio vettoriale

In → matematica, lo **spazio vettoriale** (chiamato più raramente **spazio lineare**) è una struttura algebrica di grande importanza. Si tratta di una generalizzazione dell'insieme formato dai vettori del piano cartesiano ordinario e dell'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale dotati delle operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale (cioè dell'ambiente nel quale si studiano i fenomeni della fisica classica, quella sviluppata da personalità quali Galileo, Newton, Lagrange, Laplace, Hamilton, Maxwell).

Si incontrano spazi vettoriali in numerosi capitoli della matematica moderna e nelle sue applicazioni: questi servono innanzi tutto per studiare le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari e delle equazioni differenziali lineari. Con queste equazioni si trattano moltissime situazioni: quindi si incontrano spazi vettoriali nella statistica, nella scienza delle costruzioni, nella meccanica quantistica, nella biologia molecolare, ecc. Negli spazi vettoriali si studiano anche sistemi di equazioni e disequazioni e in particolare quelli che servono alla programmazione matematica e in genere alla ricerca operativa.

Strutture algebriche preliminari agli spazi vettoriali sono quelle di gruppo, anello e campo. Vi sono poi numerose strutture matematiche che generalizzano e arricchiscono quella di spazio vettoriale; alcune sono ricordate nell'ultima parte di questo articolo.

Definizione formale



Uno spazio vettoriale è una collezione di oggetti, chiamati "vettori", che possono essere sommati e riscalati.

La definizione di uno spazio vettoriale richiede di servirsi di un campo: sono interessanti soprattutto il campo dei numeri reali **R** e quello dei complessi **C**; molti risultati dell'→ algebra lineare però si possono sviluppare servendosi del semplice campo dei numeri razionali **Q** e di notevole interesse sono anche i campi finiti e in particolare i campi delle classi di resto modulo p $\mathbf{F}_p$, per ogni p numero primo. In questa voce denotiamo con K un generico campo e indichiamo rispettivamente con 0 e 1 il suo zero e la sua unità.

Si dice che l'insieme V è sostegno di uno **spazio vettoriale** sul campo K se in V è definita un'operazione binaria interna (+) per la quale (V,+) è un gruppo commutativo (ossia un gruppo abeliano) ed è altresì definita una legge di composizione esterna (*) K×V→V - detta *prodotto esterno* o moltiplicazione per uno scalare - per la quale valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall\, a,b \in \mathrm{K}, \forall\, \mathbf{v} \in \mathrm{V} : a * (b * \mathbf{v}) = (a * b) * \mathbf{v}$
   Associatività del prodotto esterno.
2. $\forall\, \mathbf{v} \in \mathrm{V}, 1 * \mathbf{v} = \mathbf{v}$
   Neutralità di 1 rispetto al prodotto esterno.
3. $\forall\, a \in \mathrm{K}, \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathrm{V}, a * (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a * \mathbf{u} + a * \mathbf{v}$
   Distributività del prodotto esterno rispetto all'addizione di vettori.
4. $\forall\, a,b \in \mathrm{K}, \forall\, \mathbf{v} \in \mathrm{V}, (a + b) * \mathbf{v} = a * \mathbf{v} + b * \mathbf{v}$
   Distributività del prodotto esterno rispetto all'addizione di scalari.

La struttura algebrica così definità si simboleggia con (V,K) o semplicemente con V laddove non ci siano equivoci sul campo di definizione. Per uno spazio V sopra un campo K gli elementi di K sono detti **scalari** o *numeri*, mentre gli oggetti di V si dicono *vettori* o *punti*. I vettori si simboleggiano con caratteri in grassetto, sottolineati o sormontati da una freccia. Tale linguaggio consente di sostituire la dicitura *prodotto esterno* con *prodotto per uno scalare*.

Poiché la moltiplicazione per uno scalare è una legge di composizione esterna $K \times V \to V$ si dice che V ha struttura di spazio vettoriale *sinistro*. Nulla vieta di definire la composizione con uno scalare *a destra*; in tal caso si parlerà di spazio vettoriale *destro*.

Da queste proprietà, possono essere immediatamente dimostrate le seguenti formule, valide per ogni a in K e ogni $\mathbf{v}$ in V:

$a * \mathbf{0} = 0 * \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$-(a * \mathbf{v}) = (-a) * \mathbf{v} = a * (-\mathbf{v})$

dove 0 è lo zero in K e $\mathbf{0}$ è lo zero in V.

Uno **spazio vettoriale reale** o **complesso** è uno spazio vettoriale in cui K è rispettivamente il campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali o il campo $\mathbf{C}$ dei numeri complessi.

Primi esempi

In questo paragrafo dove si elencano alcuni importanti esempi di spazi vettoriali denotiamo con m ed n due interi positivi.

Spazi $\mathbf{K}^n$

L'insieme

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

formato da tutte le sequenze finite e ordinate di elementi di K, con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite termine a termine (*puntuali*), è detto l' ***n*-spazio numerico**, **spazio delle *n*-uple** o **spazio *n*-dimensionale delle coordinate** e può essere considerato il prototipo di spazio vettoriale.

Si osserva che gli spazi $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ posseggono una infinità continua di elementi, mentre $\mathbf{Q}^n$ ha cardinalità numerabile e per ogni p primo lo spazio $\mathbf{F}_p^n$ è costituito da un numero finito di vettori, per la precisione p^n.

Polinomi

L'insieme K $[x]$ dei polinomi a coefficienti in K e con variabile x, con le operazioni usuali di somma fra polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare, forma uno spazio vettoriale.

Matrici

L'insieme delle matrici $m \times n$ su K, con le operazioni di somma tra matrici e prodotto di uno scalare per una matrice, forma uno spazio vettoriale.

Funzioni

L'insieme $Fun(X, K)$ di tutte le funzioni da un fissato insieme X in K, dove:

- la somma di due funzioni f e g è definita come la funzione $(f + g)$ che manda x in $f(x)+g(x)$,
- il prodotto (λf) di una funzione f per uno scalare λ in K è la funzione che manda x in $\lambda f(x)$ è uno spazio vettoriale.

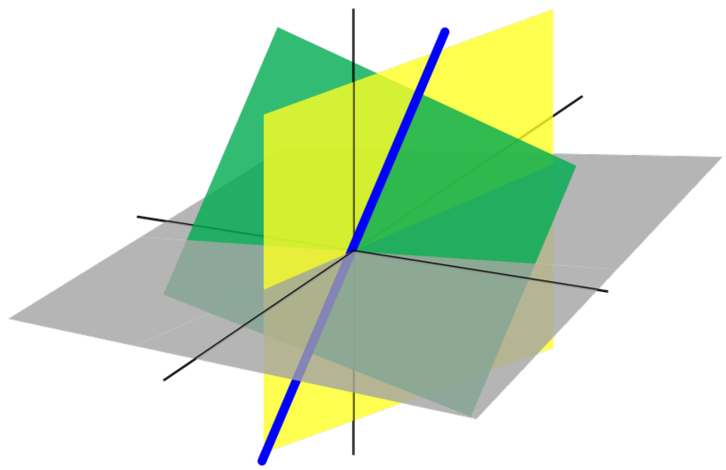
Ad esempio, l'insieme $Fun(X, \mathbf{R})$ di tutte le funzioni da un aperto X dello spazio euclideo $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale.

Nozioni basilari

Lo studio della specie di struttura di spazio vettoriale si svolge sviluppando le nozioni di sottospazio vettoriale, di trasformazione lineare (l'omomorfismo per questa specie di struttura), di base e di dimensione.

Sottospazi

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme W che eredita da V una struttura di spazio vettoriale. Per ereditare questa struttura, è sufficiente che W sia chiuso rispetto alle due operazioni di somma e prodotto per scalare. In particolare, W deve contenere lo zero di V.



Tre sottospazi distinti di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$: sono piani passanti per l'origine. Due di questi si intersecano in un sottospazio di dimensione 1, cioè una retta passante per l'origine (una di queste è disegnata in blu).

Esempi

Una retta passante per l'origine è un sottospazio vettoriale del piano cartesiano $\mathbf{R}^2$; nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ tutti i piani e tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi.

Gli spazi formati dalle matrici simmetriche o antisimmetriche sono sottospazi vettoriali dell'insieme delle matrici $m \times n$ su K.

Altri importanti sottospazi vettoriali sono quelli di *Fun*(X, $\mathbf{R}$), quando X è un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$: gli insiemi formati dalle funzioni continue, dalle funzioni differenziabili e dalle funzioni misurabili.

Generatori e basi

Una combinazione lineare di alcuni vettori $v_1, \ldots, v_n$ è una scrittura del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n.$$

Una combinazione lineare è l'operazione più generale che si può realizzare con questi vettori usando le due operazioni di somma e prodotto per scalare. Usando le combinazioni lineari è possibile descrivere un sottospazio (che è generalmente fatto da un insieme infinito di punti[1]) con un numero finito di dati. Si definisce infatti il sottospazio generato da questi vettori come l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari.

Un sottospazio può essere generato a partire da diversi insiemi di vettori. Tra i possibili insiemi di generatori alcuni risultano più economici di altri: sono gli insiemi di vettori con la proprietà di essere linearmente indipendenti. Un tale insieme di vettori è detto base del sottospazio.

Si dimostra che ogni spazio vettoriale possiede una base; alcuni spazi hanno basi costituite da un numero finito di vettori, altri hanno basi costituenti insiemi infiniti. Per questi ultimi la dimostrazione dell'esistenza di una base deve ricorrere al Lemma di Zorn.

Alla nozione di base di uno spazio vettoriale si collega quella di sistema di riferimento di uno → spazio affine.

Dimensione

Si dimostra che tutte le basi di uno spazio vettoriale posseggono la stessa cardinalità (questo risultato è dovuto a Felix Hausdorff). Questa cardinalità viene chiamata **dimensione di Hamel** dello spazio; questa entità in genere viene chiamata semplicemente *dimensione dello spazio*. La distinzione più rilevante fra gli spazi vettoriali vede da una parte gli spazi finito-dimensionali e dall'altra quelli di dimensione infinita.

Per ogni intero naturale n lo spazio $\mathbf{K}^n$ ha dimensione n: in effetti una sua base è costituita dalle n n-uple aventi tutte le componenti nulle ad eccezione di una uguale alla unità del campo. In particolare l'insieme costituito dal solo 0 del campo può considerarsi uno spazio a 0 dimensioni, la retta dotata di un'origine è uno spazio monodimensionale su $\mathbf{R}$, il piano cartesiano è uno spazio di dimensione 2, lo spazio $\mathbf{R}^3$ ha dimensione 3.

Anche i polinomi con grado al più n formano un sottospazio vettoriale di dimensione n+1, mentre la dimensione dell'insieme delle funzioni $Fun(X, K)$ è pari alla cardinalità di X.

Tra gli spazi infinito dimensionali si trovano quelli formati dall'insieme dei polinomi in una variabile o in più variabili e quelli formati da varie collezioni di funzioni ad esempio gli spazi Lp.

I vettori di uno spazio di n dimensioni, facendo riferimento ad una base fissata di tale spazio, possono essere rappresentati come n-uple di scalari: queste sono le loro coordinate. Questo fatto consente di affermare che ogni spazio n-dimensionale su $\mathbf{K}$ è sostanzialmente identificabile con $\mathbf{K}^n$.

Trasformazioni lineari e omomorfismi

Una trasformazione lineare fra due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo K è una applicazione che manda vettori di V in vettori di W rispettando le combinazioni lineari. Dato che le trasformazioni lineari rispettano le operazioni di somma di vettori e di moltiplicazioni per scalari, esse costituiscono gli omomorfismi per le strutture della specie degli spazi vettoriali. Per denotare l'insieme degli omomorfismi da V in W scriviamo Hom(V, W). Particolarmente importanti sono gli insiemi di endomorfismi; questi hanno la forma Hom(V, V).

Si osserva che per le applicazioni lineari di Hom(V, W) si possono definire le somme e le moltiplicazioni per elementi di K, come per tutte le funzioni aventi valori in uno spazio su questo campo. L'insieme Hom(V, W) munito di queste operazioni costituisce a sua volta uno spazio vettoriale su K, di dimensione dim(V)×dim(W). Un caso particolare molto importante è dato dallo spazio duale V^* := Hom(V, K); questo spazio ha le stesse dimensioni di V e in effetti i suoi vettori sono strettamente collegati ai vettori di V.

Spazio vettoriale libero

Un esempio particolare spesso usato in algebra (e una costruzione piuttosto comune in questo campo) è quello di **spazio vettoriale libero** su un insieme. L'obiettivo è creare uno spazio che abbia gli elementi dell'insieme come base. Ricordando che, dato un generico spazio vettoriale, si dice che un suo sottoinsieme U è una base se ogni vettore si può scrivere come combinazione lineare finita di elementi di U, la seguente definizione nasce naturalmente: uno spazio vettoriale libero V su B e campo K è l'insieme di tutte le combinazioni lineari formali di un numero finito di elementi di B a coefficienti in K, cioè i vettori di V sono del tipo

$$\sum_{b\in B} \alpha_b b, \quad \alpha_b \in \mathbb{K}$$

dove i coefficienti non nulli sono in numero finito, e somma e prodotto sono definite come segue

$$\sum_{b\in B} \alpha_b b + \sum_{b\in B} \beta_b b := \sum_{b\in B} (\alpha_b + \beta_b) b, \quad \forall \alpha_b, \beta_b \in \mathbb{K};$$
$$\gamma \sum_{b\in B} \alpha_b b := \sum_{b\in B} (\gamma \alpha_b) b, \quad \forall \alpha_b, \gamma \in \mathbb{K}.$$

Da tener ben presente che queste somme sono dette formali perché sono da considerarsi appunto dei puri simboli. In pratica gli elementi di B servono solo come "segnaposto" per i coefficienti. Oltre a questa definizione più intuitiva ne esiste una del tutto equivalente in termine di funzioni da B su K con supporto finito ($\operatorname{supp} f := \{ b \in B \mid f(b) \neq 0 \}$), cioè $V \cong \{ f\colon B \to K \mid \operatorname{supp} f \text{ è finito} \}$ dove per il secondo insieme le operazioni di somma e prodotto sono quelle naturali e la corrispondenza è

$$V \ni \sum_{b \in B} \alpha_b b \mapsto f, \qquad f : b \mapsto \alpha_b$$

Arricchimenti della struttura di spazio vettoriale

La nozione di spazio vettoriale è servita innanzi tutto a puntualizzare proprietà algebriche riguardanti ambienti ed entità geometriche; inoltre essa costituisce la base algebrica per lo studio di questioni di analisi funzionale, che possiamo associare ad una geometrizzazione dello studio di funzioni collegate ad equazioni lineari. La sola struttura di spazio vettoriale risulta comunque povera quando si vogliono affrontare in modo più efficace problemi geometrici e dell'analisi funzionale. Infatti va osservato che con la sola struttura di spazio vettoriale non si possono affrontare questioni riguardanti lunghezze di segmenti, distanze ed angoli (anche se la visione intuitiva degli spazi vettoriali a 2 o 3 dimensioni sembra implicare necessariamente queste nozioni di geometria elementare). Per sviluppare le "potenzialità" della struttura spazio vettoriale risulta necessario arricchirla in molteplici direzioni, sia con ulteriori strumenti algebrici (ad es. proponendo prodotti di vettori), sia con nozioni topologiche, sia con nozioni differenziali. In effetti si può prospettare una sistematica attività di arricchimento degli spazi vettoriali con costruzioni che si aggiungono a quella di combinazione lineare al fine di ottenere strutture di elevata efficacia nei confronti di tanti problemi matematici, computazionali e applicativi. Per essere utili, queste costruzioni devono essere in qualche modo compatibili con la struttura dello spazio vettoriale, e le condizioni di compatibilità variano caso per caso.

Spazio normato

Uno spazio vettoriale in cui è definita una norma, cioè una *lunghezza* dei suoi vettori, è chiamato spazio normato. L'importanza degli spazi vettoriali normati dipende dal fatto che a partire dalla norma dei singoli vettori si definisce la → distanza fra due vettori come norma della loro differenza e questa nozione consente di definire costruzioni metriche e quindi costruzioni topologiche.

Spazio di Banach

Uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta è detto spazio di Banach.

Spazio di Hilbert

Uno spazio vettoriale complesso (risp. reale) in cui è definito un → prodotto scalare hermitiano (risp. bilineare) definito positivo, e quindi anche i concetti di *angolo* e *perpendicolarità* di vettori, è chiamato spazio prehilbertiano. Uno spazio dotato di prodotto scalare è anche normato, mentre in generale non vale il viceversa.

Uno spazio dotato di prodotto scalare che sia completo rispetto alla metrica indotta è detto spazio di Hilbert.

Spazio vettoriale topologico

Uno spazio vettoriale munito anche di una topologia è chiamato spazio vettoriale topologico.

Algebra su campo

Uno spazio vettoriale arricchito con un operatore bilineare che definisce una moltiplicazione tra vettori costituisce una cosiddetta algebra su campo. Ad esempio, le matrici quadrate di ordine *n* munite del prodotto di matrici formano un'algebra. Un'altra algebra su un campo qualsiasi è fornita dai polinomi su tale campo muniti dell'usuale prodotto fra polinomi.

Moduli

Una generalizzazione del concetto di spazio vettoriale è invece quella di modulo; essa si basa su richieste analoghe a quelle viste, ma per *K* non si chiede che sia un campo, ma un più generico anello.

Bibliografia

- Marco Abate; Chiara de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, Milano, McGraw-Hill, 2006. ISBN 8838662894.
- Luciano Lomonaco, *Un'introduzione all'algebra lineare*, Roma, Aracne, 2005. ISBN 8854801445.
- Giulio Campanella, *Appunti di algebra*, Roma, Nuova Cultura, 2005. ISBN 8889362227.
- Werner Greub, *Linear Algebra*, 4ª ed. New York, Springer, 1995. ISBN 0387901108.
- Steven Roman, *Advanced linear algebra*, Springer, 1992. ISBN 0387978372.
- Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, 2ª ed. Torino, Bollati Boringhieri, 1989. ISBN 8833954471.
- Serge Lang, *Linear Algebra*, 3ª ed. New York, Springer, 1987. ISBN 0387964126.
- Georgi Evgen'evich Shilov, *Linear Algebra*, Tradotto da Richard Silverman, New York, Dover, 1977. ISBN 048663518X.
- Paul Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, 2ª ed. New York, Springer, 1974. ISBN 0387900934.
- Kenneth Hoffman; Ray Kuze, *Linear Algebra*, 2ª ed. Upper Saddle RIver, N.J., Prentice Hall, 1971. ISBN 0135367972.

Voci correlate

- Vettore (matematica)
- Applicazione lineare
- Dimensione
- Sottospazio vettoriale
- Spazio duale
- → Prodotto scalare
- Norma

Riferimenti

[1] Questo è sempre vero se il campo è infinito, come ad esempio **Q**, **R** e **C**, tranne nel caso in cui il sottospazio sia semplicemente un punto (lo zero).

Piano (geometria)

Il **piano** è un concetto primitivo della → geometria, ovvero un concetto che si suppone *intuitivamente comprensibile*, non necessitando quindi di una definizione in quanto universalmente acquisito (gli altri *concetti primitivi* della geometria sono il punto e la retta). Tuttavia, è possibile dare alcune descrizioni del piano servendosi degli strumenti forniti dal calcolo vettoriale e dalla → geometria differenziale. Rispettivamente:

- Inteso come luogo geometrico di punti, il piano, nello spazio tridimensionale, è l'insieme di tutti quei punti individuati dalla combinazione lineare di 2 vettori linearmente indipendenti applicati nel medesimo punto P.
- Dal punto di vista della → geometria differenziale il *piano* è quella superficie che ha entrambe le curvature fondamentali nulle.

Le relazioni che intercorrono tra un piano e i punti e le rette che esso contiene sono espresse dagli assiomi di Euclide e dagli assiomi di Hilbert.

Piani nello spazio tridimensionale

L'equazione canonica del piano nello spazio tridimensionale $\mathbf{R}^3$ è del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

in cui a, b, c, d sono i parametri direttori del piano, con a, b, c non tutti nulli.

Equazione cartesiana

Piano passante per tre punti

Siano (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) tre punti dello spazio non allineati. Allora per questi tre punti passa uno ed un solo piano. Per esprimere in modo esplicito la formula cartesiana del piano è sufficiente fare il seguente conto: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$

cioè annullare il determinante di una matrice i cui coefficienti sono dipendenti dai punti per cui passa il piano e da quelle che saranno le 3 variabili della formula finale.

Sviluppando il determinante con la regola di Laplace, si ottiene:

$$a(x - x1) + b(y - y1) + c(z - z1)$$

Posizioni reciproche di due piani

Si può studiare la posizione reciproca di due piani mettendo a sistema le loro equazioni. Quando la matrice dei coefficienti ha Rango due il sistema è compatibile e risulta ammettere infinito a uno soluzioni, che rappresentano tutti i punti della retta di intersezione tra i due piani. Quando la matrice dei coefficienti ha rango 1, le soluzioni ammesse sono infinito a due, e i piani risultano essere paralleli e coincidenti (Parallelismo Improprio). Se infine la matrice dei coefficienti ha rango 0, il sistema risulta essere incompatibile, e i piani sono paralleli e distinti (Parallelismo Proprio).

Si può inoltre calcolare l'angolo diedro fra due piani: basta calcolare l'angolo fra i due vettori normali (perpendicolari) ai due piani considerati utilizzando le formule del → prodotto scalare.

Distanza di un punto da un piano

È possibile calcolare la distanza di un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano π utilizzando la seguente formula: $d(\pi, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ Ovviamente, se $d(\pi, P) = 0$, allora il punto P appartiene al piano π .

Voci correlate

- Problemi di misura (→ geometria descrittiva)
- Superficie
- → Spazio affine
- Fascio di piani
- → Piano proiettivo

ckb:□پوو□□ (ه□دن□س□)

Distanza (matematica)

L'accezione → matematica del termine **distanza** ha un significato analogo a quello dell'uso comune (vedi distanza), cioè quello della misura della "lontananza" tra due punti di un insieme al quale si possa attribuire qualche carattere spaziale (vedi spazio). In matematica però questa nozione assume dei caratteri astratti e si basa solo su proprietà formali che ne fanno perdere l'univocità: esistono esempi di insiemi anche comuni come $\mathbb{R}^3$in cui possono essere date infinite definizioni di distanza, tutte soddisfacenti le proprietà generali. Si può dire che in matematica il termine distanza caratterizza strumenti computazionali con alcune caratteristiche comuni, ma utilizzabili per scopi diversificati.

Il concetto di distanza e quello collegato di lunghezza vengono generalizzati mediante la definizione della geodetica come il più breve percorso tra due punti di uno "spazio curvo".

Definizione di distanza

Una **distanza** (o **metrica**) su un insieme X è una qualsiasi funzione

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti proprietà per ogni scelta di x, y, z in X :

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare)

La coppia (X, d) è chiamata spazio metrico.

Distanza indotta da una norma

Data una norma $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ è possibile definire una distanza $d: X \times X \to R$ definendo

$$d(x,y) = ||x-y||\,.$$

Si verifica che la funzione così definita è una distanza, infatti:

- $d(x,y) = ||x-y|| \geq 0$
- $d(x,y) = ||x-y|| = 0 \iff ||x-y|| = ||0|| \iff x = y$
- $d(x,y) = ||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = |-1|||y-x|| = ||y-x|| = d(y,x)$
- $d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y)$

Si osserva che ogni distanza indotta da una norma è invariante per traslazioni (ovvero, per ogni tripletta di vettori $d(x+z, y+z) = d(x,y)$).

Distanze su spazi euclidei

La distanza normalmente considerata in $\mathbb{R}^2$è quella euclidea, pari alla radice quadrata del quadrato della differenza orizzontale (tra i due punti) più il quadrato della differenza verticale:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Se si elimina la seconda dimensione questa funzione si riduce al modulo della differenza tra i due numeri: $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

Più in generale nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ si può definire la distanza tra due punti $(x_1, x_2, ..., x_n)$e $(y_1, y_2, ..., y_n)$ nei seguenti modi:

$$\text{1-distanza} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\text{2-distanza} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \text{(distanza euclidea)}$$

$$p\text{-distanza} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}\text{, per ogni } p \text{ reale maggiore o uguale ad 1}$$

$$\infty\text{-distanza} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p} = \max_{i=1,\cdots,n} \{|x_i - y_i|\}$$

La *2-distanza* in uno spazio a *n* dimensioni corrisponde al → teorema di Pitagora applicato *n-1* volte: è la distanza di uno spazio euclideo, normalmente usata nel piano o nello spazio e viene detta anche **distanza pitagorica**. La *1-distanza*, detta anche *distanza L1* o **distanza Manhattan**, genera invece una geometria diversa, detta geometria del taxi.

Dischi associati a una distanza

Data una distanza su un insieme si può definire come palla, o bolla, o disco, centrata in un punto c di un certo raggio r positivo l'insieme dei punti dell'insieme che distano da c meno di r :

$$B(c,r) = \{x \in X : d(x,c) < r\}$$

Solitamente la definizione si intende con il <; se però c'è bisogno di specificare, si dirà "disco aperto" l'insieme definito dalla relazione " < " e "disco chiuso" l'insieme definito dalla relazione " ≤ ".

Si definisce anche "bordo" del disco l'insieme

$$\partial B = \{x \in X : d(x,c) = r\}\,.$$

L'insieme dei dischi aperti centrati nei vari punti dello spazio soddisfa la definizione topologica di base: la topologia sull'insieme X determinata da questa base si dice *topologia generata* (o *indotta*) dalla distanza d .

È importante notare come il disco chiuso non coincida sempre con la chiusura del disco aperto, ma in generale ne sia solo un soprainsieme; in particolare nello spazio euclideo comunque le due nozioni coincidono.

Distanze equivalenti

Due distanze d e d' si dicono **equivalenti** se l'applicazione identità

$$id : (X, d) \to (X, d')$$

è un omeomorfismo.

Equivalentemente, esse si possono dire equivalenti se ogni disco della prima metrica contiene un qualche disco della seconda metrica e viceversa. Ad esempio una distanza *d* è equivalente a quella data dalla funzione $\min\{d, 1\}$ ed a quella data dalla funzione $\frac{d}{d+1}$.

Due distanze equivalenti generano la stessa topologia.

Altre distanze

- Su un qualsiasi insieme è possibile definire una distanza come $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$. Questa distanza è detta "*distanza discreta*" e fornisce all'insieme la topologia discreta. Questa distanza non è ricca di applicazioni, ma serve per completezza dell'esposizione formale.
- Sull'insieme delle funzioni continue definite in un opportuno insieme *A* si può definire la distanza, detta "*distanza del sup*" o "*dell'estremo superiore*", $d(f, g) = \sup_{x \in A} \|f(x) - g(x)\|$. Essa è la distanza indotta dalla cosiddetta norma uniforme. Questa distanza costituisce l'analoga continua della ∞-distanza definita su spazi finitodimensionali.
- Nello spazio L^p, con *p* reale maggiore o uguale a 1, la distanza tra due funzioni è definita come $d(f, g) = \left(\int |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$.
- L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali costituisce uno spazio metrico rispetto alla distanza data da $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Questa distanza, diversa da quella pitagorica, non può essere indotta da una norma, in quanto non è invariante per traslazioni (ovvero $d(x + z, y + z)$ è in generale diversa da $d(x, y)$).
- Nell'insieme $\mathbf{F}^n$ di stringhe di lunghezza n costruite sopra l'alfabeto $\mathbf{F}$ si può definire la "*distanza di Hamming*" come $d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$ (dove con $|A|$ si indica la cardinalità di A). Si noti che la distanza di Hamming si può considerare che riguardi due vettori (assimilabili a stringhe) sul campo finito $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Generalizzazioni

Se si indeboliscono le richieste su d si ottengono spazi con proprietà più deboli e più poveri come possibilità algoritmiche:

- Perdendo una delle due implicazioni della proprietà 2 ma richiedendo solamente che $d(x, x) = 0$ (cioè ammettendo che punti distinti possano avere distanza nulla) si ottiene una **pseudometrica**. La sua importanza è grande nel campo di teoria della relatività e analisi funzionale, dove questi spazi si incontrano spesso. È il tipo di distanza indotto da una seminorma.
- Perdendo la proprietà 3 si ottiene una **quasimetrica**.

- Perdendo la proprietà 4 si ottiene una **semimetrica**.
- Perdendo parzialmente la proprietà 2 nel senso sopra e la proprietà 3 si ottiene una **emimetrica**.
- Perdendo parzialmente la proprietà 2 e le proprietà 3 e 4 si ottiene una **prametrica**. Da notare che, nonostante questo sia chiaramente lo spazio più povero di tutti, è ancora possibile definire una topologia a partire da uno spazio prametrico, nello stesso esatto modo descritto sopra.

Al contrario, rinforzando la disuguaglianza triangolare e imponendo che

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

si ottiene una cosiddetta **ultrametrica**.

Voci correlate

- Spazio metrico
- Geometria del taxi
- Distanza minima (→ geometria descrittiva)
- Distanza di un punto da un insieme

Prodotto scalare

In → matematica, il **prodotto scalare** (o prodotto interno) è una particolare operazione binaria che prende due vettori e restituisce un numero (che in generale è detto appunto *scalare*). Questa nozione nel piano cartesiano mette in relazione due vettori e le loro lunghezze con l'angolo fra questi. Più in generale, è usata per definire e trattare le nozioni geometriche di lunghezza, angolo e perpendicolarità in → spazi vettoriali di dimensione arbitraria.

Il prodotto scalare è uno strumento fondamentale in tutti i contesti in cui vi siano dei vettori: in fisica è ad esempio usato per modellizzare il lavoro di una forza. Esteso in dimensione finita arbitraria, il prodotto scalare ha applicazioni in vari settori della matematica: nella classificazione delle → coniche, nello studio di una funzione differenziabile intorno ad un punto stazionario, delle trasformazioni del piano o nella risoluzione di alcune equazioni differenziali. Spesso in questi contesti viene fatto uso del teorema spettrale, un importante risultato connesso al prodotto scalare.

Esteso in dimensione infinita, il prodotto scalare è usato per definire concetti quali lo spazio di Hilbert e di Banach: per questi spazi la teoria si arricchisce di strumenti più sofisticati, basilari nella modellizzazione della meccanica quantistica e in molti campi dell'analisi funzionale.

Definizione e prime proprietà

Definizione

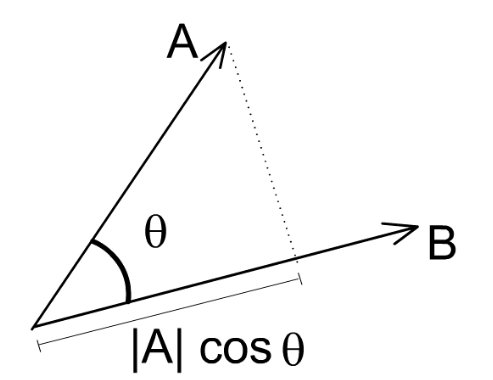
Il **prodotto scalare** di due vettori **a** e **b** del → piano, applicati sullo stesso punto, è definito come

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

dove |**a**| e |**b**| sono le lunghezze di **a** e **b**, e θ è l'angolo tra i due vettori. Il prodotto scalare si indica come **a**·**b**.

Interpretazione geometrica

Poiché |**a**|·cos(θ) è la lunghezza della proiezione ortogonale di **a** su **b**, si può interpretare geometricamente il prodotto scalare come il prodotto delle lunghezze di questa proiezione e di **b**. Si possono inoltre scambiare i ruoli di **a** e **b**, interpretare |**b**|·cos(θ) come la lunghezza della proiezione di **b** su **a** ed il prodotto scalare come il prodotto delle lunghezze di questa proiezione e di **a**.



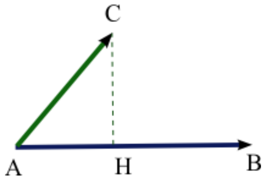
Interpretazione geometrica del prodotto scalare (quando B ha lunghezza unitaria)

Prodotto scalare positivo, nullo e negativo

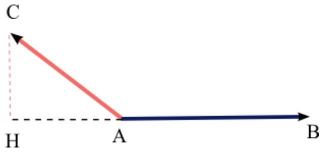
Il coseno di un angolo θ è positivo se θ è un angolo acuto (cioè -90° <θ < 90°), nullo se θ è un angolo retto e negativo se è un angolo ottuso. Ne segue che il prodotto scalare **a**·**b** è:

- positivo se |**a**| > 0, |**b**| >0 e l'angolo θ è acuto;
- nullo se |**a**|=0, |**b**|=0 oppure θ è retto;
- negativo se |**a**|>0, |**b**|>0 e l'angolo θ è ottuso.

I casi in cui θ è acuto ed ottuso sono mostrati in figura. In entrambi i casi il prodotto scalare è calcolato usando l'interpretazione geometrica, ma il segno è differente.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AB| \times |AH| > 0$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|AB| \times |AH| < 0$$

In particolare, valgono inoltre le proprietà seguenti:

- se θ = 0 i vettori sono paralleli ed **a**·**b** = |**a**|·|**b**|;
- se θ = 90° i vettori sono ortogonali ed **a**·**b** = 0;
- se θ = 180° i vettori sono paralleli ma orientati in senso opposto, ed **a**·**b** = - |**a**|·|**b**|.

Se **a** e **b** sono versori, cioè vettori di lunghezza 1, il loro prodotto scalare è semplicemente il coseno dell'angolo compreso.

Il prodotto scalare di un vettore **a** con se stesso **a**·**a** = |**a**|^2 è il quadrato della lunghezza |**a**| del vettore.

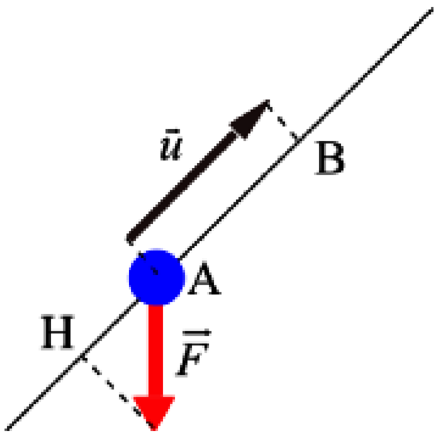
Applicazioni

In fisica

Nella fisica classica, il prodotto scalare è usato nei contesti in cui si debba calcolare la proiezione di un vettore lungo una determinata componente. Ad esempio, il lavoro L prodotto da una forza F su un corpo che si sposta in direzione u è il prodotto scalare

$$L = F \cdot u$$

dei due vettori.



Il lavoro è il prodotto scalare fra i vettori F e u .

In geometria

Il teorema del coseno può essere formulato agevolmente usando il prodotto scalare. Dati tre punti A, B, C qualsiasi del piano, vale la relazione seguente:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2\right)$$

Espressione analitica

Il prodotto scalare è definito in → geometria analitica in modo differente: si tratta della funzione che, in un qualsiasi spazio euclideo associa a due vettori **a** = [a_1, a_2, ... , a_n] e **b** = [b_1, b_2, ... , b_n] il numero

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

dove Σ denota una sommatoria.

Ad esempio, il prodotto scalare di due vettori tridimensionali [1, 3, −2] e [4, −2, −1] è [1, 3, −2]·[4, −2, −1] = 1×4 + 3×(−2) + (−2)×(−1) = 0.

In questo modo è possibile *definire* l'angolo θ compreso fra due vettori in un qualsiasi spazio euclideo, invertendo la formula data sopra, facendo cioè dipendere l'angolo dal prodotto scalare e non viceversa:

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Notazioni

Spesso il prodotto scalare fra **a** e **b** si indica anche come $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ o come $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Utilizzando il prodotto tra matrici e considerando i vettori come matrici $n \times 1$, il prodotto scalare canonico si scrive anche come

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{a}^T$ è la trasposta di **a**. L'esempio visto sopra si scrive quindi in notazione matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Equivalenza fra le due definizioni

L'equivalenza fra le due definizioni può essere verificata facendo uso del teorema del coseno. Nella forma descritta sopra, il teorema asserisce che il prodotto scalare di due vettori **a** e **b** nel piano, definito in modo geometrico, è pari a

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\big(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\big).$$

Ponendo **a** = $[a_1, a_2]$ e **b** = $[b_1, b_2]$ ed usando il → teorema di Pitagora si ottiene

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-\big((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\big)\right) = \frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2) = a_1b_1+a_2b_2.$$

L'equivalenza in uno spazio euclideo di dimensione arbitraria può essere verificata in modo analogo.

Proprietà algebriche

Il prodotto scalare fra vettori dello spazio euclideo soddisfa un certo numero di proprietà algebriche.

Simmetria e bilinearità

Il prodotto scalare è una funzione di due variabili simmetrica; vale cioè l'uguaglianza

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

per ogni coppia di vettori **a** e **b**.

Il prodotto scalare è anche bilineare, valgono cioè le relazioni:

- $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},$
- $\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$
- $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$

per ogni tripletta di vettori **a**, **b**, **c** e per ogni numero reale λ . Le prime due relazioni esprimono la "linearità a destra" e le altre due "a sinistra".

Tutte queste proprietà sono espresse sinteticamente affermando che il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica.

Definito positivo

Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è sempre maggiore o uguale a zero:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geqslant 0.$$

Inoltre, questo è zero se e solo se il vettore è zero:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0.$$

Questa proprietà può essere espressa affermando che il prodotto scalare è **definito positivo**.

Generalizzazioni

La nozione di prodotto scalare è generalizzata in → algebra lineare dallo spazio euclideo ad uno → spazio vettoriale qualsiasi: tale spazio può avere dimensione infinita ed essere definito su un campo arbitrario **K**. Questa generalizzazione è di fondamentale importanza ad esempio in → geometria differenziale e in meccanica razionale. Dotata di ulteriore struttura, porta inoltre ai concetti di spazio di Hilbert e spazio di Banach, usati in vari rami della matematica e della fisica, quali ad esempio la meccanica quantistica e l'analisi funzionale.

Il prodotto scalare in questo contesto è una funzione che associa ad una coppia di vettori un numero (uno *scalare*), con determinate proprietà.

Prodotto scalare su spazio vettoriale qualsiasi

In matematica, e soprattutto in → algebra lineare, il prodotto scalare è un operatore binario su uno → spazio vettoriale *V* con campo **K** che si comporta in modo simile al prodotto scalare canonico nello spazio euclideo.

Più precisamente, un prodotto scalare su *V* è una forma bilineare simmetrica, che associa a due vettori *v* e *w* di *V* uno scalare in **K**, generalmente indicato con $\langle v, w\rangle$. Spesso alcuni autori richiedono anche che il campo **K** sia quello dei numeri reali e che la forma sia *definita positiva*, cioè che

$$\langle v, v\rangle > 0$$

per ogni *v* diverso da zero. Per rimanere nella più ampia generalità, scegliamo di non assumere questa ipotesi nella definizione di prodotto scalare.

Riassumendo, un prodotto scalare è un operatore binario che verifica le seguenti condizioni per *v*, *w*, *u* vettori arbitrari e *k* elemento del campo **K** arbitrario:

1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
2. $\langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$
3. $\langle kv, w\rangle = k\langle v, w\rangle$

Le precedenti richieste implicano anche le seguenti proprietà:

- $\langle v, w + u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$
- $\langle v, kw\rangle = k\langle v, w\rangle$
- $\langle 0, 0\rangle = 0$

Definiti positivi e negativi

Nel caso in cui **K** = **R** è il campo dei numeri reali, un prodotto scalare su uno spazio vettoriale *V* è:

- **definito positivo** se $\langle v, v\rangle > 0 \qquad \forall v \neq 0;$
- **definito negativo** se $\langle v, v\rangle < 0 \qquad \forall v \neq 0;$
- **semi-definito positivo** se $\langle v, v\rangle \geq 0 \qquad \forall v;$
- **semi-definito negativo** se $\langle v, v\rangle \leq 0 \qquad \forall v.$

Queste definizioni non hanno senso se **K** è un campo non ordinato, ad esempio se **K** = **C**. Per questo motivo, per **K** = **C** si preferisce solitamente usare una variante del prodotto scalare, definita in modo che $\langle v, v\rangle$ sia sempre un numero reale: la forma hermitiana. Tale forma, molto usata in fisica, conserva molte analogie con il prodotto scalare, e per questo è alcune volte chiamata impropriamente anch'essa *prodotto scalare*.
Il prodotto scalare definito positivo introdotto nelle sezioni precedenti è chiamato anche **prodotto scalare euclideo**: un esempio basilare è proprio lo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$.

Un prodotto scalare semi-definito positivo è (raramente) chiamato anche *prodotto pseudoscalare*.

Norma di un vettore

Se **K**=**R** ed il prodotto scalare è definito positivo, è possibile dotare lo spazio vettoriale di una norma; più precisamente, la funzione

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

soddisfa per ogni vettori *x*, *y* e per ogni scalare λ le proprietà

- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

e dunque rende lo spazio vettoriale uno spazio normato.

Matrice associata

In modo analogo alla matrice associata ad una applicazione lineare, fissata una base $v_1, \ldots, v_n$, un prodotto scalare φ è identificato dalla matrice simmetrica associata *M*, definita nel modo seguente:

$$M_{i,j} = \phi(v_i, v_j).$$

D'altro canto, ogni matrice simmetrica dà luogo ad un prodotto scalare. Vediamo più sotto che molte proprietà del prodotto scalare e della base possono essere lette sulla matrice associata.

Radicale

Il **radicale** di un prodotto scalare è l'insieme dei vettori *v* in *V* per cui

$$\langle v, w \rangle = 0$$

per ogni *w* in *V*. Il radicale è un sottospazio vettoriale di *V*. Il prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale ha dimensione maggiore di zero.

Se *V* ha dimensione finita e *M* è la matrice associata a φ rispetto ad una qualsiasi base, applicando il teorema della dimensione si trova facilmente che:

$$\mathrm{rk}(M) + \dim \mathrm{rad}(V) = \dim V.$$

dove rk(*M*) è il rango di *M* e rad(*V*) è il radicale. Quindi un prodotto scalare è non degenere se e solo se la matrice associata è invertibile. Definiamo quindi il **rango** del prodotto scalare come rk(*M*).

Un prodotto scalare definito positivo o negativo è necessariamente non degenere. Non è vero il contrario: infatti il prodotto scalare sul piano associato (rispetto alla base canonica) alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

non è degenere, ma non è né definito positivo né definito negativo.

Vettori isotropi

Un vettore *v* è **isotropo** se $\langle v, v \rangle$ = 0. Tutti i vettori del radicale sono isotropi, ma possono esistere vettori isotropi che non appartengono al radicale. Ad esempio, per il prodotto scalare associato alla matrice *A* descritta sopra il vettore $[1, 1]$ è isotropo ma non è contenuto nel radicale, che ha dimensione zero.

Ortogonalità

Due vettori *v* e *w* si dicono **ortogonali** se $\langle v, w \rangle = 0$. Il sottospazio ortogonale ad un sottospazio *W* di *V* è definito come

$$W^\perp = \{ w \in V \mid \langle w, w' \rangle = 0 \ \forall w' \in W \}$$

Il sottospazio ortogonale è appunto un sottospazio vettoriale di *V*. Contrariamente a quanto accade con il prodotto canonico nello spazio euclideo, un sottospazio ed il suo ortogonale non si intersecano in un punto solo: possono addirittura coincidere! Per quanto riguarda le loro dimensioni, vale la seguente disuguaglianza:

$$\dim W + \dim W^\perp \geq \dim V$$

Se il prodotto scalare è non degenere, vale l'uguaglianza

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

Infine, se il prodotto scalare è definito positivo o negativo, effettivamente uno spazio ed il suo ortogonale si intersecano solo nell'origine e sono in somma diretta: otteniamo cioè

$$W \oplus W^\perp = V.$$

Una base ortogonale di vettori di V è una base di vettori a due a due ortogonali. Una base è ortogonale se e solo se la matrice associata al prodotto scalare rispetto a questa base è diagonale.

Trasformazione ortogonale

Una **trasformazione ortogonale** è una applicazione lineare invertibile $T:V \to V$ in sé che preserva il prodotto scalare, cioè tale che

$$\langle v, w \rangle = \langle T(v), T(w) \rangle$$

Teorema di Sylvester

Se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ è il campo dei numeri reali e V ha dimensione n, il teorema di Sylvester reale dice che per ogni prodotto scalare esiste una base ortogonale $v_1, ..., v_n$ tale che per ogni i il numero $\langle v_i, v_i \rangle$ è uguale a 0, 1 oppure -1.

Quindi la matrice associata è una matrice diagonale avente sulla diagonale solo i numeri 0, 1, e -1, in ordine sparso. Siano i_0, i_+ e i_- rispettivamente il numero di volte che compaiono i numeri 0, 1 e -1 sulla diagonale: la terna (i_0, i_+ e i_-) è la segnatura del prodotto scalare.

La segnatura è un invariante completo per l'isometria: due spazi vettoriali con prodotto scalare sono isometrici se e solo se hanno la stessa segnatura.

Il Teorema di Sylvester complesso dice invece che esiste sempre una base ortogonale $v_1, ..., v_n$ tale che per ogni i il numero $\langle v_i, v_i \rangle$ è uguale a 0 oppure 1. In questo caso, il rango è un invariante completo per l'isometria: due spazi vettoriali complessi con prodotto scalare sono isometrici se e solo se hanno lo stesso rango.

Endomorfismo simmetrico

Un endomorfismo $T:V \to V$ è simmetrico (o *autoaggiunto*) rispetto al prodotto scalare se

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$$

per ogni coppia di vettori v e w in V. Un endomorfismo è simmetrico se e solo se la matrice associata rispetto ad una qualsiasi base ortonormale è simmetrica.

Esempi

- Il prodotto scalare canonico fra vettori del → piano o dello spazio euclideo è un prodotto scalare definito positivo.
- Sia $C([0, 1])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue sull'intervallo [0,1], a valori reali. Definiamo un prodotto scalare su $C[0, 1]$ ponendo: :

  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x).$$

  Questo prodotto scalare è definito positivo, perché l'integrale di f^2 è strettamente positivo se f non è costantemente nulla.
- Definiamo sullo spazio vettoriale $M([0, 1])$ delle funzioni misurabili a valori reali lo stesso prodotto scalare del punto precedente. Qui il prodotto scalare è solo semidefinito positivo: infatti se f è la funzione che vale 1 su 1/2 e 0 su tutto il resto, l'integrale di f^2 è zero (f è isotropa).

Bibliografia

- Serge Lang, *Linear Algebra*, 3rd edition, New York, Springer, 1987. ISBN 0-387-96412-6

Voci correlate

- Prodotto vettoriale
- Spazio euclideo
- Spazio di Hilbert
- Teorema di Sylvester
- Teorema spettrale
- Identità di polarizzazione

Altri progetti

- **Wikibooks** contiene testi o manuali su **Prodotto scalare**

Intersezione

Nella teoria degli insiemi, l'**intersezione** di due insiemi *A* e *B* è data dall'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia all'insieme *A* che all'insieme *B* contemporaneamente.

L'intersezione è una operazione binaria. Nell'Algebra Booleana corrisponde all'operatore AND e, in logica, alla congiunzione.

l' insiemi "intersezioni" fra gli insiemi è possibili eseguire della "operazioni". esaminando l' operazione "INTERSAZIONE". dati due insiemi A=$12;14;16;18;20$ e B =$10;16;18;20;22;24$

Proprietà

Dalla definizione segue immediatamente che l'intersezione è un'operazione commutativa, in simboli:

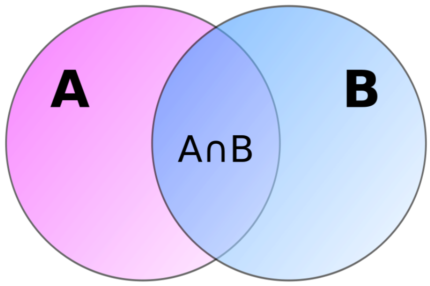
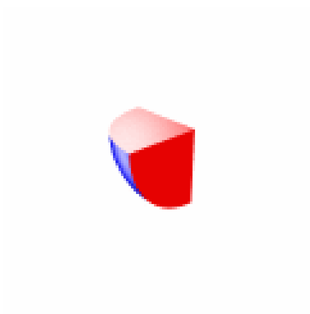


Diagramma di Eulero-Venn per l'intersezione.



Intersezione di una sfera e un cubo parzialmente sovrapposti

$$A \cap B = B \cap A$$

L'intersezione è inoltre un'operazione associativa:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Per questo si può rinunciare alle parentesi quando si considera l'intersezione di più di due insiemi, scrivendo semplicemente $A \cap B \cap C$.

Esempi

Come esempio elementare si possono considerare due insiemi finiti (cioè con un numero finito di elementi) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. In questo caso si può verificare direttamente per ogni elemento di A se è anche elemento di B (o viceversa), ottenendo

$$A \cap B = \{2, 3\} \, .$$

Un esempio un po' più astratto è dato da due insiemi definiti tramite determinate proprietà dei loro elementi: Siano A l'insieme dei numeri interi divisibili per 4 e B l'insieme dei numeri interi divisibili per 6. In questo caso, $A \cap B$ è l'insieme dei numeri interi divisibili sia per 4 che per 6, ovvero tutti i numeri interi divisibili per 12.

Gli insiemi dei numeri pari e dei numeri dispari sono disgiunti; infatti un numero non può essere contemporaneamente pari e dispari. L'intersezione di questi due insiemi è quindi l'insieme vuoto.

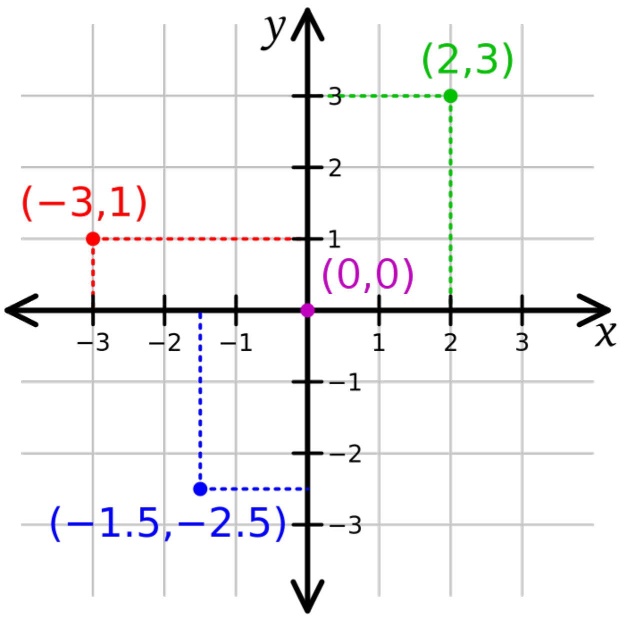
Voci correlate

- Unione
- Differenza
- Teoria degli insiemi
- Intersezione in geometria descrittiva - incidenza (geometria descrittiva)

Bibliografia

- Thomas Cormen; Charles E. Leiserson, Ronald Rivest, *Sets,Etc.* in *Introduction to Algorithms* , 20ª ed. Cambridge, Massachussetts, The MIT Press, 1998 .

Sistema di riferimento cartesiano



Rappresentazione di alcuni punti nel piano cartesiano

In → matematica un **sistema di riferimento cartesiano** è un sistema di riferimento formato, in un numero *n* di dimensioni, da *n* rette ortogonali[1] , intersecantesi tutte in un punto chiamato *origine*, su ciascuna delle quali si fissa un orientamento (*rette orientate*) e per le quali si fissa anche una unità di misura che consente di identificare qualsiasi punto del piano mediante numeri reali. Particolarmente importanti sono il caso in 2 dimensioni, nel qual caso il sistema di riferimento viene chiamato **piano cartesiano**, e quello in 3, usato per identificare la posizione di punti nello spazio.

Usando un sistema di riferimento cartesiano, è possibile descrivere tramite equazioni algebriche forme geometriche come curve o superfici: i punti dell'oggetto geometrico sono quelli che soddisfano l'equazione associata. Per esempio è possibile descrivere una circonferenza nel piano cartesiano, oppure una quadrica nello spazio tridimensionale.

Storia

L'aggettivo *cartesiano* è riferito al matematico e filosofo francese *Renè Descartes* (italianizzato in *Renato Cartesio*, latinizzato in *Renatus Cartesius*) il quale, tra le altre cose, lavorò sulla fusione dell'→ algebra con la → geometria euclidea. Questi studi furono influenti nello sviluppo della → geometria analitica, del calcolo infinitesimale e della cartografia.

L'idea di questo sistema di riferimento fu sviluppato nel 1637 in due scritti da Cartesio e, indipendentemente, da Pierre de Fermat, anche se Fermat non pubblicò la sua scoperta[2] . Nella seconda parte del suo Discorso sul metodo, Cartesio introduce la nuova idea di specificare la posizione di un punto o di un oggetto su una superficie usando due rette che si intersecano in un punto come strumenti di misura, idea ripresa ne la Geometria [3] .

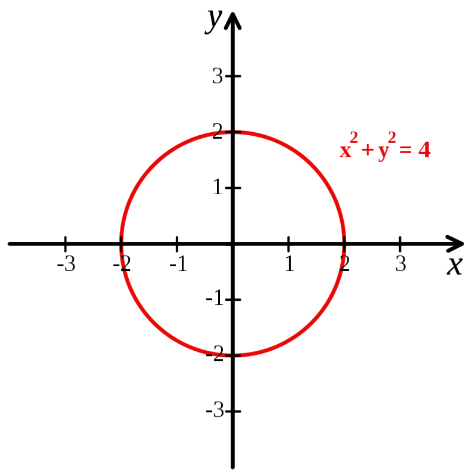
Piano cartesiano

Un sistema di coordinate cartesiano ortogonale in due dimensioni è semplicemente chiamato **piano cartesiano**, ed è costituito da:

- l'**asse delle ascisse** costituisce la retta orizzontale (solitamente caratterizzata dalla lettera *x*);
- l'**asse delle ordinate** costituisce la retta verticale (solitamente caratterizzata dalla lettera*y*);
- l'**origine**, cioè il punto nel quale le due rette si incontrano.

Il piano cartesiano, che viene spesso chiamato *xy* da nome degli assi, può essere immaginato, pensando che il piano sia immerso orizzontalmente nello spazio fisico (pavimento), e mettendosi in piedi in un punto: il punto sul quale si sta rappresenta l'origine, davanti a sé si estende l'asse della ascisse e alla propria sinistra quello delle ordinate.

Il sistema costituito dalla coppia dei due assi (e implicitamente dall'origine) consente di individuare ogni punto del piano con una coppia di numeri reali chiamati rispettivamente *ascissa* e *ordinata* del punto; le coordinate di un punto generico del piano o di un punto che si pensa variabile spesso si denotano con x e y. Talora il sistema dei due assi si denota con Oxy.



L'equazione $x^2+y^2=4$ rappresentata nel piano *xy* rappresenta una circonferenza di raggio 2 e centrata nell'origine.

Un generico punto si può quindi esprimere scrivendo $(x;y)$ oppure $\langle x;y\rangle$. Ad esempio, i punti $(2,3)$ e $(2,5)$ hanno la stessa ascissa, mentre i punto $(2,3)$ e $(-1,3)$ hanno la stessa ordinata.
Il piano cartesiano viene suddiviso in quattro regioni denominate quadranti, indicate mediante numeri romani progressivi in senso antiorario:

- I quadrante: comprende i punti aventi ascissa ed ordinata positive;
- II quadrante: comprende i punti aventi ascissa negativa ed ordinata positiva;
- III quadrante: simmetrico al primo rispetto all'origine;
- IV quadrante: simmetrico al secondo rispetto all'origine.

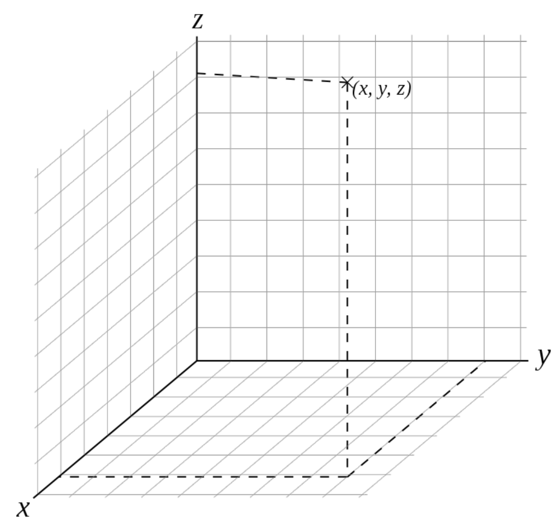
Il piano cartesiano permette di visualizzare funzioni di una variabile del tipo $y=f(x)$ oppure equazioni di due variabili più complicate, come ad esempio le coniche. Ciò permette di visualizzare la "forma" di equazioni oppure risolvere graficamente sistemi di più equazioni come intersezioni tra le curve corrispondenti.

Il piano cartesiano come spazio vettoriale

Per definizione, esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano cartesiano e le coppie ordinate di numeri reali. L'insieme di tutte le coppie di numeri reali, $\mathbb{R}^2$è un $\mathbb{R}$ -→ spazio vettoriale. La base canonica di $\mathbb{R}^2$è $E=(E_1,E_2)$ove $E_1=(1,0)$ed $E_2=(0,1)$. Gli elementi di E hanno un importante significato geometrico: sono i versori fondamentali del piano, rispettivamente $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Ciò vuol dire, per la definizione stessa di base di uno spazio vettoriale, che il piano cartesiano è generato dai versori fondamentali e che ogni punto del piano è esprimibile, *in modo unico*, come combinazione lineare dei versori fondamentali (ciò giustifica l'espressione dei punti del piano cartesiano). Si noti inoltre che gli assi cartesiani sono sottospazi vettoriali del piano cartesiano.

Generalizzazione a tre dimensioni

Aggiungendo una terza dimensione al piano otteniamo lo spazio euclideo tridimensionale, che è la modellizzazione a noi più familiare dello spazio fisico, e quella usata in meccanica classica: un sistema di assi cartesiani può quindi essere usato come sistema di riferimento per localizzare degli oggetti nello spazio, attribuendogli delle coordinate.



Il primo ottante di un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, con l'asse *x* che punta verso l'osservatore ("esce" dallo schermo). Sono evidenziate le proiezioni del punto sull'asse *z*, sul piano *xy* e le successive proiezioni sui due assi *x* e *y*.

Essendo una diretta generalizzazione del piano cartesiano, un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale è formato da tre rette orientate perpendicolari tra loro e incidenti in un punto, denominato origine degli assi. I tre assi (chiamati solitamente *x*, *y* e *z*) identificano tre piani nello spazio (*xy*, *xz* e *yz*), che dividono lo spazio in otto *ottanti*, simili ai quattro quadranti formati dagli assi cartesiani in due dimensioni. Ogni punto è identificato da 3 coordinate, che rappresentano ognuna la distanza del punto al piano formato dagli altri due.

Come nel caso del piano, ogni punto dello spazio tridimensionale può essere individuato da un vettore nello spazio tridimensionale (indicato come $\mathbb{R}^3$e viene espresso come combinazione lineare dei tre versori di base, indicati convenzionalmente con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$:

$$\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

dove *x*, *y* e *z* rappresentano proprio le coordinate nel punto nel sistema di riferimento formato dalla base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

Voci correlate

- Sistema di riferimento
- Piano complesso

Collegamenti esterni

- (**EN**) Costruire oggetti di geometria analitica [11]

Riferimenti

[1] In generale non è necessario che le rette siano ortogonali tra loro, ma i sistemi ortogonali sono in generale molto più semplici da usare.
[2] "analytic geometry". *Encyclopædia Britannica* (Encyclopædia Britannica Online), 2008. Consultato il 02-08-2008.
[3] (**FR**) Descartes, Renè, *La Géométrie* (http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29040s.image.f1.langEN) ,

Geometria affine

In → matematica, la **geometria affine** è la geometria che studia gli → spazi affini. Tratta essenzialmente quegli argomenti della → geometria euclidea che possono essere sviluppati senza l'uso dei concetti di angolo e distanza. Occupa un posto intermedio fra la geometria euclidea e la → geometria proiettiva; in quest'ultimo caso anche la nozione di parallelismo perde di significato. Il suo studio fa largo uso dell'→ algebra lineare.

Spazi affini

Intuitivamente, uno spazio affine è un oggetto simile ad uno → spazio vettoriale che non abbia nessun "punto privilegiato" (l'origine).

Uno → spazio affine è un insieme E, tale che ad ogni coppia di punti p e q sia associato un vettore $\varphi(p,q)$ di un determinato → spazio vettoriale V. Nella definizione non ci sono restrizioni sul campo associato allo spazio V, che può essere ad esempio quello dei numeri reali, o complessi.

La funzione che associa a due punti un vettore deve soddisfare un paio di assiomi, che garantiscono che, fissato un punto qualsiasi p come origine dello spazio, i vettori $\varphi(p,q)$ al variare di q formino uno spazio vettoriale isomorfo a V.

Trasformazioni affini

Una → trasformazione affine fra due spazi affini è la composizione di una traslazione e una trasformazione lineare: quest'ultima ha senso dopo aver fissato un punto p come origine. L'immagine di un → sottospazio affine tramite questa trasformazione è sempre un sottospazio affine. Nel caso in cui la trasformazione sia un isomorfismo, la dimensione del sottospazio è preservata.

Proprietà

In uno spazio affine, due sottospazi possono non intersecarsi. Ad esempio, nello spazio affine tridimensionale ci sono rette e piani paralleli. Per questo motivo non vale la formula di Grassmann.

La geometria affine è intermedia fra la geometria degli spazi vettoriali e quella → proiettiva: in uno spazio vettoriale i sottospazi sono costretti a passare per l'origine. Lo spazio affine viene quindi costruito per ovviare a questa mancanza innaturale, ma in questo modo viene persa la formula di Grassmann, e in molti problemi si allunga la lista dei casi da considerare: due rette possono essere incidenti, complanari, sghembe... Lo spazio proiettivo elimina nuovamente fenomeni di parallelismo aggiungendo dei "nuovi punti all'infinito", senza ripristinare un "punto privilegiato".

Applicazioni

Lo spazio affine è usato nella fisica classica come modello dello spazio tridimensionale in cui viviamo. Questo modello non è però soddisfacente per modellizzare lo spazio per spiegare alcuni fenomeni che si sviluppano su grandi scale, fenomeni che si studiano nella fisica relativistica.

Voci correlate

- → Spazio affine
- → Trasformazione affine
- → Geometria proiettiva

Spazio affine

Lo **spazio affine** è una struttura → matematica strettamente collegata a quella di → spazio vettoriale. Intuitivamente, uno spazio affine si ottiene da uno spazio vettoriale facendo in modo che tra i suoi punti non ve ne sia uno, l'origine, "centrale" e "privilegiato" rispetto agli altri.

Lo spazio affine tridimensionale è lo strumento naturale per modellizzare lo spazio della fisica classica, le cui leggi sono infatti indipendenti dalla scelta di un sistema di riferimento. Come gli spazi vettoriali, gli spazi affini vengono studiati con gli strumenti dell'→ algebra lineare.

Definizione

La nozione di spazio affine può essere definita in molti modi equivalenti. Una possibile definizione è la seguente. Uno spazio affine A è un insieme di elementi chiamati **punti affini** (o semplicemente *punti*), dotato di una funzione

$$\phi : A \times A \to V$$

a valori in uno → spazio vettoriale V su un campo K che soddisfi i requisiti seguenti:

1. per ogni punto P fissato, la mappa che associa a Q il vettore $\phi(P, Q)$ è una biiezione da A in V;
2. per ogni terna di punti P, Q , R vale la relazione

$$\phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R).$$

L'immagine $\phi(P, Q)$ è chiamata *vettore applicato* da P in Q ed è indicata generalmente con il simbolo seguente

$$\overrightarrow{PQ}$$

o, più brevemente, con $Q - P$.

Definizione alternativa

La definizione seguente è equivalente alla precedente. Uno spazio affine A è un insieme dotato di una funzione

$$f : A \times V \to A$$

dove V è uno spazio vettoriale su un campo K , generalmente indicata con il segno + nel modo seguente

$$f(P, v) = P + v$$

tale che

1. per ogni punto P fissato, la mappa che associa al vettore v il punto $P + v$ è una biiezione da V in A ;
2. per ogni punto P in A e ogni coppia di vettori v, w in V vale la relazione

$$(P + v) + w = P + (v + w).$$

Le due definizoni sono collegate dalla relazione

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Due elementi di questa relazione determinano il terzo. Ad esempio, Q è il punto raggiunto applicando il vettore $\overrightarrow{PQ}$ a P, mentre $\overrightarrow{PQ}$ è l'unico vettore che "collega" i due punti P e Q .

Esempi

Spazio vettoriale

Ogni spazio vettoriale V è uno spazio affine, avente come spazio vettoriale associato V stesso. La mappa ϕ è definita come

$$\phi(v, w) = w - v$$

mentre la funzione f è la semplice somma fra vettori in V.

Sottospazi affini

Definizione

Un **sottospazio affine** S di A è un sottoinsieme del tipo

$$S = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

dove P è un punto fissato, che risulta appartenere al sottospazio.

Giacitura

Lo stesso sottospazio può essere definito in varie forme diverse come $S = P + W$. In tutte queste rappresentazioni, P può variare (può essere un punto qualsiasi di S, a conferma che in geometria affine non ci sono "punti privilegiati"), ma W risulta essere sempre lo stesso: questo sottospazio di V è chiamato **giacitura** di S. La giacitura è definita intrinsecamente come

$$W = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in S\}.$$

La *dimensione* di S è definita come la dimensione di W.

Sottospazio generato

Il sottospazio affine **generato** da alcuni punti $x_1, \ldots, x_k$ in A è il più piccolo sottospazio che li contiene.

Sottospazi affini in spazi vettoriali

Per quanto detto sopra, uno spazio vettoriale V è anche affine, e quindi abbiamo definito anche la nozione di sottospazio affine di V: in questo caso, un sottospazio affine è il risultato di una traslazione di un sottospazio vettoriale W lungo il vettore P.

Relazioni

Due sottospazi affini sono detti:

- **incidenti** quando hanno intersezione non vuota,
- **paralleli** quando una delle due giaciture è contenuta nell'altra,
- **sghembi** quando l'intersezione è vuota e le due giaciture si intersecano solo nell'origine,
- esiste un altro caso che si presenta solo in spazi affini di dimensione 4 o superiore, ovvero quando i due sottospazi hanno intersezione vuota, nessuna delle due giaciture è contenuta nell'altra ma queste si intersecano in un sottospazio più grande dell'origine.

Per i sottospazi affini non vale la formula di Grassmann: questo è il prezzo da pagare per aver liberato i sottospazi dalla costrizione di passare per un punto privilegiato. La → geometria proiettiva risolve questo problema (cioè recupera la formula di Grasmann) aggiungendo allo spazio dei "punti all'infinito".

Voci correlate

- → Geometria affine
- Sottospazi affini
- → Trasformazione affine

Sottospazio affine

In → matematica, un **sottospazio affine** è un sottoinsieme di uno → spazio affine avente proprietà tali da farne a sua volta un altro spazio affine. Esempi di sottospazi affini sono i punti, le rette e i piani nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale.

I sottospazi affini si distinguono dai sottospazi vettoriali per il fatto che non sono forzati a passare per un punto fissato (l'*origine* dello spazio vettoriale). A differenza dei sottospazi vettoriali, i sottospazi affini possono quindi non intersecarsi ed essere ad esempio paralleli. Questa maggiore libertà ha però una controparte: per i sottospazi affini non vale la formula di Grassmann.

I sottospazi affini sono strettamente correlati ai sistemi lineari: l'insieme delle soluzione di un sistema lineare è in effetti uno spazio affine.

Definizione

In uno spazio vettoriale

Un **sottospazio affine** di uno → spazio vettoriale V è un sottoinsieme S del tipo

$$S = p + W = \{p + w \mid w \in W\}$$

dove p è un punto fissato di V e W è un sottospazio vettoriale fissato di V. Si tratta in altre parole del sottospazio W traslato del vettore p.

In uno spazio affine

La definizione all'interno di uno spazio affine è analoga. Sia A uno → spazio affine. Più precisamente, A è dotato di uno spazio vettoriale V e di una funzione

$$f : A \times V \to A$$

che viene solitamente indicata con il simbolo "+", quindi $f(p, v) = p + v$. Un **sottospazio affine** di A è un sottoinsieme S del tipo

$$S = p + W = \{p + w \mid w \in W\}.$$

La definizione appena data è più generale della precedente, perché ogni spazio vettoriale può essere considerato come spazio affine con $A = V$, in cui la funzione f è l'usuale somma fra vettori.

Proprietà

In uno → spazio affine A, dati due punti P, Q di A si indica con

$$\overrightarrow{PQ}$$

l'unico vettore in V tale che

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Giacitura

Lo stesso sottospazio può essere definito in varie forme diverse come $S = p + W$. In tutte queste rappresentazioni, il punto p può variare (può essere un punto qualsiasi di S, a conferma che in geometria affine non ci sono "punti privilegiati"), ma W risulta essere sempre lo stesso: questo sottospazio di V è chiamato **giacitura** di S. La giacitura è infatti definita intrinsecamente come

$$W = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in S\}.$$

La *dimensione* di S è definita come la dimensione di W. Quando la dimensione è 1 o 2 si parla di *retta affine* o *piano affine*. Quando la dimensione è pari alla dimensione di A meno uno, si parla di *iperpiano affine*.

Sottospazio generato

Il sottospazio affine *generato* da un sottoinsieme S del piano affine A è il più piccolo sottospazio che contiene S (equivalentemente, è l'intersezione di tutti i sottospazi affini che contengono S). Viene indicato con $L(S)$.

Ad esempio, k punti $x_1, \ldots, x_k$ in A generano un sottospazio $L(x_1, \ldots, x_k)$. In questo caso la dimensione del sottospazio è minore o uguale di $k-1$: quando è precisamente $k-1$ i punti sono detti affinemente indipendenti.

Esempi

Nello spazio euclideo tridimensionale

Retta affine

Sia

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

lo spazio euclideo tridimensionale. Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, una retta affine passante per P_0 è l'insieme dei punti:

$$r = \{P_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

dove $v = (v_x, v_y, v_z)$ è un vettore fissato, detto *vettore direzione* della retta. La giacitura è qui la retta

$$W = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(v)$$

generata da v. La stessa retta affine r può essere rappresentata sostituendo il vettore direzione v con un qualsiasi suo multiplo kv avente $k \neq 0$.

Piano affine

Analogamente, un *piano affine* passante per P_0 è del tipo:

$$\pi = \{P_0 + tv_1 + sv_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

dove v_1 e v_2 sono due vettori linearmente indipendenti.

Soluzioni di sistemi lineari

Negli esempi precedenti, i sottospazi sono definiti tramite l'ausilio di *parametri* t e u: le equazioni che li descrivono sono per questo dette *parametriche*. Un sottospazio affine in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ (o in un più generale spazio vettoriale K^n) è anche descrivibile in forma più implicita, come spazio di soluzioni di un sistema lineare. Vale cioè il fatto seguente:

Lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare con n incognite a coefficienti in K è un sottospazio affine di K^n. D'altro canto, ogni sottospazio affine in K^n è lo spazio di soluzioni di un sistema lineare.

Un sottospazio affine determinato come spazio di soluzioni di un sistema lineare è descritto in forma *cartesiana*. I coefficienti del sistema lineare formano una matrice, e la dimensione del sottospazio è collegata al rango di questa tramite il teorema di Rouché-Capelli.

Ad esempio, una singola equazione

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c$$

descrive un *iperpiano* in K^n. In particolare, questo è una retta nel piano se $n = 2$ ed un piano nello spazio se $n = 3$. Una retta nello spazio K^3 può essere descritta da due equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Equazioni parametriche e cartesiane

Come mostrato negli esempi precedenti, i sottospazi di uno spazio affine K^n possono essere descritti in forma parametrica o cartesiana. Il passaggio da una rappresentazione all'altra può essere svolto nel modo seguente.

Da cartesiana a parametrica

Il passaggio da cartesiana a parametrica consiste nella risoluzione del sistema lineare. Questa può essere fatta tramite l'algoritmo di Gauss.

Da parametrica a cartesiana

Il passaggio da parametrica a cartesiana consiste nel determinare equazioni che descrivono il sottospazio. Questo può essere fatto scrivendo delle condizioni che un punto deve soddisfare per appartenere al sottospazio. Ad esempio, se S è descritto come

$$S = \{p + t_1w_1 + \ldots t_kw_k \mid t_1, \ldots, t_k \in K\}$$

dove i vettori $w_1, \ldots, w_k$ formano una base della giacitura W, un punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ appartiene a S se e solo se il vettore

$$\overrightarrow{px} = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$$

appartiene alla giacitura. Questo accade precisamente quando la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_k^1 & x_1 - p_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_1^n & \ldots & w_k^n & x_n - p_n \end{pmatrix}$$

avente come primi vettori colonna la base di W ha rango pari a k. Quest'ultima condizione può essere espressa come l'annullamento dei determinanti di tutti i minori di ordine $k+1$. Ciascuno di questi determinanti fornisce una equazione lineare nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$; queste equazioni lineari insieme formano un sistema lineare che descrive il sottospazio in forma parametrica.

Relazioni fra sottospazi

Due sottospazi affini sono detti:

- **incidenti** quando hanno intersezione non vuota,
- **paralleli** quando una delle due giaciture è contenuta nell'altra,
- **sghembi** quando l'intersezione è vuota e le due giaciture si intersecano solo nell'origine,
- esiste un altro caso che si presenta solo in spazi affini di dimensione 4 o superiore, ovvero quando i due sottospazi hanno intersezione vuota, nessuna delle due giaciture è contenuta nell'altra ma queste si intersecano in un sottospazio più grande dell'origine.

Per i sottospazi affini non vale la formula di Grassmann: questo è il prezzo da pagare per aver liberato i sottospazi dalla costrizione di passare per un punto privilegiato. La → geometria proiettiva risolve questo problema (cioè recupera la formula di Grasmann) aggiungendo allo spazio affine dei "punti all'infinito".

Esempi

Le relazioni di incidenza e parallelismo possono essere determinate con l'ausilio dell'→ algebra lineare. Ad esempio, due piani in $\mathbb{R}^3$ descritti in forma cartesiana

$$\pi : ax + by + cz + d = 0,$$
$$\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

sono paralleli precisamente quando la matrice dei coefficienti ha rango 1:

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 1.$$

Altrimenti per il teorema di Rouché-Capelli i due piani si intersecano in una retta. Due piani nello spazio non possono quindi essere sghembi.

Discorso analogo è valido per due iperpiani in K^n (ad esempio, due rette nel piano K^2). Due rette nello spazio K^3 possono però essere sghembe.

Formula di Grassmann

La formula di Grassmann è valida in geometria affine soltanto se gli spazi affini si intersecano. Quindi se due spazi affini S e S' hanno intersezione non vuota vale la formula

$$\dim(L(S,S')) = \dim S + \dim S' - \dim S \cap S'$$

dove $L(S,S')$ è il sottospazio affine generato da S e S'.

Voci correlate

- → Geometria affine
- → Spazio affine
- Fascio di piani
- Fascio di rette

Trasformazione affine

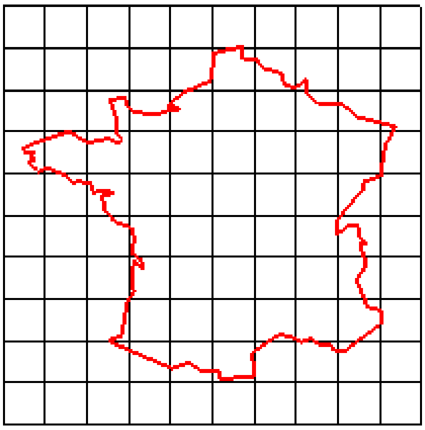
In → geometria, una **trasformazione affine** dello spazio euclideo è una trasformazione del tipo

$$x \mapsto Ax + b$$

ovvero la composizione di una trasformazione lineare determinata da una matrice A e di una traslazione determinata da un vettore b .

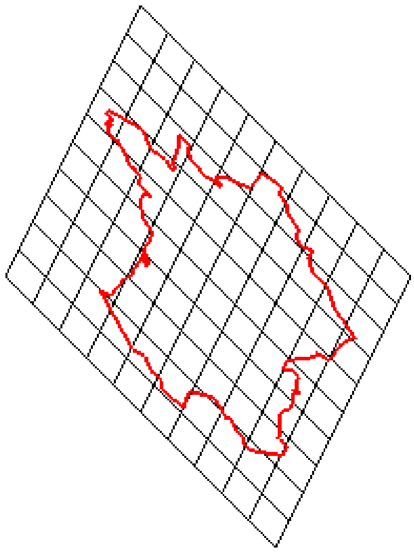
Le trasformazioni affini sono le trasformazioni più generali che preservano i → sottospazi affini. Tra queste, giocano un ruolo importante le **affinità**: queste sono le trasformazioni affini di uno spazio in se stesso, che sono anche una corrispondenza biunivoca.

Esempi di affinità sono rotazioni, omotetie, traslazioni, rototraslazioni, riflessioni. Le affinità non sono necessariamente isometrie, non preservano cioè angoli e distanze.



La Francia...

Definizione



...e la sua immagine dopo una trasformazione affine. Le rette della griglia rimangono dritte, ma cambiano gli angoli e le lunghezze.

Nello spazio euclideo

Una *trasformazione affine*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

fra due spazi euclidei è una trasformazione del tipo

$$x \mapsto Ax + b$$

dove A è una matrice $m \times n$, b è un vettore di $\mathbb{R}^m$ fissato e si fa uso del prodotto fra una matrice ed un vettore.

In uno spazio vettoriale

Una *trasformazione affine* fra due → spazi vettoriali V e W più generali è la composizione di una trasformazione lineare

$$f : V \to W$$

con una traslazione

$$t : w \mapsto w + b$$

determinata da un vettore fissato b di W .

In uno spazio affine

Una *trasformazione affine* fra due → spazi affini A e A' è una funzione

$$f : A \to A'$$

per cui esiste una funzione lineare

$$\phi : V \to V'$$

fra i due spazi vettoriali associati a A ed A' tale che

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}).$$

Legami fra le definizioni

Ciascuna definizione generalizza la precedente: l'ultima definizione è quindi la più generale e non dipende da un fissato riferimento affine. D'altra parte, fissati due riferimenti per gli spazi affini A e A', una trasformazione affine è comunque esprimibile come

$$x \mapsto Ax + b$$

come nella prima definizione.

Affinità

Una **affinità** è una trasformazione affine biiettiva in cui dominio e codominio coincidono.

Alcuni autori, nella definizione di trasformazione affine, richiedono che questa sia iniettiva.

Esempi

Trasformazioni lineari

Nella notazione

$$x \mapsto Ax + b$$

Il vettore b corrisponde all'immagine dell'origine

$$0 \mapsto A0 + b = b.$$

Una trasformazione lineare è una trasformazione affine che non sposta l'origine: in altre parole, una trasformazione con $b = 0$.

Tra le trasformazioni lineari vi sono molte affinità, quali le rotazioni intorno all'origine e le riflessioni rispetto a sottospazi che passano per l'origine. Ad esempio, la rotazione di angolo θ nel piano cartesiano è del tipo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Traslazioni

D'altro canto, una affinità dove $A = I$ è la matrice identità è una traslazione

$$x \mapsto I \cdot x + b = x + b.$$

Una traslazione, a differenza di una trasformazione lineare, non ha mai un punto fisso.

Composizioni

Ogni affinità è composizione di una trasformazione lineare e di una traslazione. Un esempio di tale trasformazione è la rototraslazione nello spazio tridimensionale, ottenuta componendo una rotazione di angolo θ lungo un asse con una traslazione di passo t lungo questo. Ad esempio, se l'asse è l'asse delle z questa ha la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Rappresentazione matriciale

Una affinità

$$x \mapsto Ax + b$$

è determinata da una matrice quadrata A e da un vettore b . Per utilizzare gli strumenti dell'→ algebra lineare è però utile rappresentare una affinità con una matrice sola: per fare questo si aggiunge un valore fittizio "1" in fondo al vettore x e si rappresenta la trasformazione nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A & b \\ 0, \ldots, 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + b \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice associata all'affinità con queste notazioni è quindi

$$\begin{bmatrix} A & b \\ 0, \ldots, 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con questa notazione, la composizione di due trasformazioni affini è rappresentata dal prodotto delle due matrici corrispondenti. La trasformazione identità è rappresentata dalla matrice identità.

Per essere invertibile, il determinante $\det A$ deve essere diverso da zero. La matrice inversa, che rappresenta la trasformazione inversa, è la seguente

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0, \ldots, 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con questa notazione, le trasformazioni affini di K^n risultano essere un sottogruppo del gruppo generale lineare

$$\mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

delle matrici invertibili $(n+1) \times (n+1)$ a coefficienti nel campo K .

Proprietà

Punti fissi

Una affinità è rappresentata da una matrice quadrata A . Se A non ha 1 fra i suoi autovalori, l'affinità ha sempre un punto fisso. Infatti l'equazione $Ax + b = x$ può essere riscritta come

$$(A - I)x = b.$$

Poiché 1 non è autovalore di A , il nucleo di $(A - I)$ha dimensione zero, il che implica che $(A - I)$è suriettiva ed esiste quindi un x che soddisfa l'equazione.
Le traslazioni non hanno punti fissi: infatti per queste $A = I$ ha l'autovalore 1.

Indipendenza affine

Una affinità di uno spazio affine A manda punti affinemente indipendenti in punti affinemente indipendenti.

Se lo spazio affine ha dimensione n e

$$\{P_0, \ldots, P_n\}, \quad \{Q_0, \ldots, Q_n\}$$

sono due insiemi di punti affinemente indipendenti, esiste un'unica affinità f di A che manda i primi nei secondi, cioè tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni i .

Voci correlate

- → Geometria affine
- Trasformazione lineare
- Trasformazione proiettiva
- Affinità (geometria descrittiva)

Geometria algebrica

La **geometria algebrica** è un campo della → matematica, che, come il nome stesso suggerisce, unisce l'→ algebra astratta (soprattutto l'→ algebra commutativa) alla → geometria. Oggetto principale di studio della geometria algebrica sono le → varietà algebriche, oggetti geometrici definiti come soluzioni di equazioni algebriche.

Zeri simultanei di polinomi

In geometria algebrica gli oggetti geometrici studiati sono definiti come zeri di un certo numero di polinomi: si tratta dell'insieme degli zeri in comune o equivalentemente delle soluzioni di una o più equazioni polinomiali. Per esempio, la sfera di dimensione due nello spazio euclideo di dimensione 3 $\mathbf{R}^3$ è definita come l'insieme di punti *(x, y, z)* che verificano:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Un cerchio "storto" in $\mathbf{R}^3$ è definito come l'insieme di punti *(x, y, z)* che verificano entrambe le equazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$x + y + z = 0$$

Varietà affini

Per definire una varietà affine, si comincia considerando un campo k. Nella geometria algebrica classica, il campo considerato era sempre quello complesso **C**, ma molti risultati sono ugualmente veri se assumiamo soltanto che k sia algebricamente chiuso. Definiamo lo **spazio affine di dimensione n su k** come $\mathbf{A}^n(k)=k^n$ (o più semplicemente $\mathbf{A}^n$, quando k risulta chiaro dal contesto). Il proposito di questa apparentemente superflua notazione è di enfatizzare che ci si "dimentica" la struttura di spazio vettoriale che porta con sé k^n. Parlando in modo astratto, $\mathbf{A}^n$ è, per il momento, un semplice insieme di punti.

Una funzione $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$ viene detta **regolare** se può essere scritta come un polinomio, ovvero, se c'è un polinomio p in $k[x_1,...,x_n]$ tale che $f(t_1,...,t_n) = p(t_1,...,t_n)$ per ogni punto $(t_1,...,t_n)$ di $\mathbf{A}^n$.

Le funzioni regolari sullo spazio affine n-dimensionale sono quindi esattamente la stessa cosa dei polinomi su k in n variabili. Scriveremo le funzioni regolare su $\mathbf{A}^n$ come $k[\mathbf{A}^n]$.

Diciamo che un polinomio *si annulla* in un punto se valutato in quel punto restituisce zero. Sia S un insieme di polinomi in $k[\mathbf{A}^n]$. Il *luogo degli zeri di S* è l'insieme $V(S)$ di tutti i punti in $\mathbf{A}^n$ sui quali tutti i polinomi di S si annullano. In altre parole,

$$V(S) = \{(t_1, \ldots, t_n) | \forall p \in S, p(t_1, \ldots, t_n) = 0\}.$$

Un sottoinsieme di $\mathbf{A}^n$ che si può scrivere come $V(S)$ per qualche S viene chiamato **insieme algebrico**. La V sta per *varietà algebrica* (un tipo specifico di insieme algebrico che definiremo tra poco).

Dato un sottoinsieme U di $\mathbf{A}^n$, è possibile recuperare l'insieme dei polinomi che lo generano? Se U è un *qualunque* sottoinsieme di $\mathbf{A}^n$, definiamo $I(U)$ come l'insieme di tutti i polinomi il cui luogo degli zeri contiene U. La I sta per ideale: se due polinomi f e g si annullano entrambi su U, allora $f+g$ si annulla su U, e se h è un qualunque polinomio, allora hf si annulla su U, quindi $I(U)$ è sempre un ideale di $k[\mathbf{A}^n]$.

Due domande naturali da porsi sono:

- Dato un sottoinsieme U di $\mathbf{A}^n$, quando vale $U = V(I(U))$?
- Dato un insieme S di polinomi, quando vale $S = I(V(S))$?

La risposta alla prima domanda è immediata dopo aver introdotto la topologia di Zariski, una topologia su $\mathbf{A}^n$ che riflette direttamente la struttura algebrica di $k[\mathbf{A}^n]$. Allora $U = V(I(U))$ se e solo se U è un insieme Zariski-chiuso (più precisamente, si ha che $V(I(U))$ è proprio la chiusura di U secondo la topologia di Zariski). La risposta alla seconda domanda viene data dal teorema degli zeri di Hilbert. In una delle sue forme equivalenti, questo teorema afferma che $I(V(S))$ è il radicale dell'ideale generato da S.

Per varie ragioni potremmo non volere sempre lavorare con l'intero ideale che corrisponde a un insieme algebrico U. Grazie al teorema della base di Hilbert sappiamo che gli ideali in $k[\mathbf{A}^n]$ sono sempre finitamente generati, quindi possiamo considerare un insieme finito di polinomi che genera $I(U)$. In particolare U è l'intersezione di un numero finito di insiemi algebrici del tipo $V(f)$, con f polinomio.

Un insieme algebrico viene detto **irriducibile** se non può essere scritto come unione di due insiemi algebrici più piccoli. Un insieme algebrico irriducibile viene anche detto → **varietà algebrica**. Si può dimostrare che un insieme algebrico è una varietà algebrica se e solo se i polinomi che lo definiscono generano un ideale primo dell'anello dei polinomi.

Anello delle coordinate di una varietà

Proprio come le funzioni continue sono le applicazioni naturali su uno spazio topologico e le funzioni lisce sono le applicazioni naturali su una → varietà differenziabile, c'è una classe naturale di applicazioni su un insieme algebrico, chiamate funzioni regolari. Una **funzione regolare** su un insieme algebrico V contenuto in $\mathbf{A}^n$ è definito come la restrizione di una funzione regolare su $\mathbf{A}^n$, nel senso che abbiamo definito sopra.

Può sembrare eccessivamente restrittivo richiedere che una funzione regolare si possa sempre estendere allo spazio ambiente, ma la situazione è molto simile a quella di uno spazio topologico normale, dove il teorema di estensione di Tietze garantische che una funzione continua su un insieme chiuso si può sempre estendere allo spazio topologico ambiente.

Proprio come le funzioni regolari sugli spazi affini, le funzioni regolari su V formano un anello, che denotiamo con $k[V]$. Questo anello è chiamato **anello delle coordinate di V**.

Poiché le funzioni regolari su V derivano da funzioni regolari su $\mathbf{A}^n$, dovrebbe esserci una relazione tra i loro anelli delle coordinate. Specificatamente, per ottenere una funzione in $k[V]$ abbiamo preso una funzione in $k[\mathbf{A}^n]$, e abbiamo detto che non la distinguiamo da un'altra funzione in $k[\mathbf{A}^n]$ se esse restituiscono gli stessi valori su V. Questo equivale a dire che la loro differenza è zero su V. Da ciò possiamo vedere che $k[V]$ è il quoziente $k[\mathbf{A}^n]/\mathrm{I}(V)$.

Teoria proiettiva

Invece di lavorare nello spazio affine $\mathbf{A}^n(k)$, si lavora più spesso nello → spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(k)$. Il vantaggio di questo approccio è che il numero di intersezioni può essere facilmente calcolato con il Teorema di Bézout.

Punto di vista attuale sulla teoria

Nella visione moderna il rapporto tra varietà ed anello delle coordinate è invertito: si parte con un anello commutativo e si definisce la varietà corrispondente usando gli ideali primi. Gli ideali primi ottengono una struttura di spazio topologico, lo spettro dell'anello. Nella formulazione generale questo porta agli schemi di Alexander Grothendieck.

Un'importante classe di varietà sono le varietà abeliane, varietà i cui punti formano un gruppo abeliano. Un esempio di queste sono le curve ellittiche che sono servite per la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat e per la crittografia alle curve ellittiche.

Mentre parte della geometria algebrica è interessata agli enunciati generali e astratti sulle varietà, sono stati sviluppati dei metodi per i calcoli su un insieme preciso di polinomi. Il più importante è la tecnica delle basi di Gröbner che sono alla base di tutta l'algebra computazionale.

La geometria algebrica è stata sviluppata largamente dai geometri italiani nella prima parte del XX secolo. Il loro lavoro sulla geometria birazionale era profondo, ma non si poggiava su una base abbastanza rigorosa. L'algebra commutativa fu sviluppata, anch'essa all'inizio del XX secolo da David Hilbert, Emmy Noether e altri avendo in mente delle applicazioni geometriche.

Negli anni 1930 e anni 1940 Oskar Zariski, André Weil e altri capirono la necessità di una geometria algebrica assiomatica su basi rigorose. Per un certo tempo furono usate diverse teorie.

Negli anni 1950 e anni 1960 Jean-Pierre Serre e Alexander Grothendieck rigettarono le fondamenta usando la teoria dei fasci. Dopo all'incirca il 1960 l'idea degli schemi fu raffinata, insieme ad un complesso apparato di tecniche omologiche. Dopo un decennio di rapidi sviluppi il campo si stabilizzò negli anni 1970 e vennero create delle applicazioni, sia alla → teoria dei numeri sia a questioni più geometriche come varietà algebriche, singolarità e moduli.

Bibliografia

- Alexander Grothendieck (1971): *Éléments de géométrie algébrique*, vol. 1, 2nd ed., Springer, ISBN 3-540-05113-9
- Joe Harris (1995): *Algebraic geometry: a first course*, Springer, ISBN 0-387-97716-3
- David Eisenbud (1995): *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer, ISBN 0-387-94269-6
- Igor Rostislavovič Šafarevič (1995): *Basic Algebraic Geometry II: Schemes and Complex Manifolds*, 2nd ed., Springer, ISBN 0-387-54812-2
- David Cox, John Little, Donald O'Shea (1997): *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2nd ed., Springer, ISBN 0-387-94680-2
- David Cox, John Little, Donald O'Shea (1997): *Using Algebraic Geometry*
- Robin Hartshorne (1977): *Algebraic geometry*, Springer, ISBN 0-387-90244-9
- David Eisenbud, Joe Harris (1998): *The Geometry of Schemes*, Springer, ISBN 0-387-98637-5
- David Mumford (1999): *Red book of varieties and schemes*, 2nd ed., Springer, ISBN 3-540-63293-X

Voci correlate

- → Varietà affine
- 14-XX sigla della sezione della MSC dedicata alla geometria algebrica

Varietà algebrica

Una **varietà algebrica** è l'insieme degli zeri di una famiglia di polinomi, e costituisce l'oggetto principale di studio della → geometria algebrica. Tramite il concetto di varietà algebrica è possibile costituire un legame tra l'→ algebra e la → geometria, che permette di riformulare problemi geometrici in termini algebrici, e viceversa. Tale legame è basato principalmente sul fatto che un polinomio complesso in una variabile è completamente determinato dai suoi zeri: il teorema degli zeri di Hilbert permette infatti di stabilire una corrispondenza tra varietà algebriche e ideali di anelli di polinomi.

Definizione

Sia K un campo algebricamente chiuso, $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi su K in n variabili, e $\{f_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ una famiglia di polinomi dell'anello. Il sottoinsieme di K^n formato dai punti che annullano tutti i polinomi di $\{f_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ è una varietà algebrica:

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\} \subseteq K^n .$$

Varietà affini

Dato il campo algebricamente chiuso K e uno → spazio affine $\mathbb{A}^n$ di dimensione n su K , i polinomi dell'anello $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ sono funzioni a valori in K definite su $\mathbb{A}^n$.

Presa una famiglia di polinomi $S \subseteq K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, l'insieme dei punti di $\mathbb{A}^n$ per cui le funzioni di S sono tutte nulle

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \, \forall f \in S\}$$

è detto *insieme algebrico affine*. Se $Z(S)$ non può essere scritto come unione propria di due insiemi algebrici affini, è detto *varietà affine*.

Proprietà

- Sulle varietà affini è possibile definire una topologia naturale definendo come insiemi chiusi tutti gli insiemi algebrici (topologia di Zariski).
- Dato $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $I(V)$ è l'ideale formato da tutte le funzioni che si annullano su V:

  $$I(V) = \{f \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid f(x) = 0 \, \forall x \in V\} .$$

  Si definisce *anello delle coordinate* $K[V]$ di V l'anello quoziente $\frac{K[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{I(V)}$. Il grado di trascendenza del campo delle frazioni di $K[V]$ su K è detto *dimensione* di V.
- Un insieme algebrico affine V è una varietà se e solo se $I(V)$ è un ideale primo, ovvero se e solo se l'anello delle coordinate di V è un dominio di integrità.
- Ogni insieme algebrico affine può essere scritto in maniera unica come unione di varietà algebriche.

Varietà proiettive

È possibile modificare leggermente la definizione di varietà affine per estenderla al caso di uno → spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ sul campo K: in questo caso si considera un insieme $S \subseteq K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, formato da polinomi *omogenei* (ovvero i cui monomi hanno tutti lo stesso grado). Con le medesime notazioni si ottengono allora le definizioni di insieme algebrico proiettivo, varietà proiettiva, topologia di Zariski e anello delle coordinate di una varietà.

Isomorfismi di varietà algebriche

Un isomorfimo tra due varietà algebriche V_1e V_2è un morfismo di varietà algebriche che è anche biiettivo:

$$\phi: V_1 \to V_2.$$

V_1e V_2sono dette *isomorfe* e si scrive $V_1 \cong V_2$.

L'isomorfismo tra varietà algebriche è una relazione di equivalenza: tutte le varietà algebriche isomorfe tra di loro si possono considerare come sostanzialmente equivalenti e vengono raggruppate in un'unica classe di equivalenza detta *varietà algebrica astratta*.

Varietà algebriche differenziabili

Se K è il campo dei numeri complessi, una varietà algebrica localmente isomorfa a K^m è dotata anche di una struttura di → varietà differenziabile m-dimensionale; la varietà in questo caso è priva di punti singolari. Si dimostra anche che una varietà algebrica differenziabile è equivalente all'insieme degli zeri di una famiglia di funzioni algebriche analitiche.

Generalizzazioni

La geometria algebrica moderna ha rivisto integralmente la definizione di varietà algebrica, rendendola considerevolmente più astratta, con l'obiettivo di estenderne l'uso oltre le limitazioni della teoria classica, ad esempio per poter definire varietà algebrica su campi non algebricamente chiusi.

Una varietà viene definita come uno schema, ovvero uno spazio topologico dotato di un fascio di anelli locali, che hanno inoltre la proprietà di essere K-algebre finitamente generate. In tal modo ogni punto della varietà possiede un intorno dotato di una struttura di anello locale e isomorfo allo spettro di un anello; viene solitamente imposta la condizione che sia possibile ricoprire l'intera varietà con un numero finito di intorni.

Ulteriori estensioni si possono ottenere utilizzando fasci di anelli che non sono domini di integrità, oppure possiedono elementi nilpotenti.

Bibliografia

- (**EN**) Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1997. ISBN 0387902449
- (**EN**) David Cox, John Little, Don O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag, 1997. ISBN 0387946802

Voci correlate

- → Varietà affine
- Congettura di Hodge
- Schema
- Teoria delle categorie
- Teoria di Galois

Collegamenti esterni

- (EN) Rowland, Todd and Weisstein, Eric W. "Algebraic Variety." Da MathWorld--A Wolfram Web Resource [1]
- (EN) Introduzione alle varietà algebriche [2]

Riferimenti

[1] http://mathworld.wolfram.com/AlgebraicVariety.html
[2] http://www.mathreference.com/ag-var,intro.html

Varietà affine

In → geometria algebrica, una **varietà affine** è il sottoinsieme di uno → spazio affine n -dimensionale su un campo algebricamente chiuso k caratterizzato dall'annullarsi simultaneo di tutti i polinomi di un sottoinsieme di $k[x_1, \ldots, x_n]$. Un aperto (secondo la topologia di Zariski) di una varietà affine è detto *varietà quasi affine*.

Morfismi tra varietà affini

Una *funzione regolare* per una varietà affine X è una funzione $f \colon X \longrightarrow k$ tale che per ogni punto $P \in X$ esiste un intorno del punto in cui $f(x) = g(x)/h(x)$, dove $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$. L'insieme di tutte le funzioni regolari su X è l'anello $\mathcal{O}(X)$.
Un *morfismo* tra due varietà è una funzione $\phi \colon X \to Y$ che induce un morfismo di anelli $\phi^\star \colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X) \colon f \mapsto f \circ \phi$.

Algebra affine

Dato un insieme qualsiasi di polinomi, la varietà affine che definiscono è la stessa definita dall'ideale $I(X)$ generato da questi polinomi. Si può quindi definire l'*algebra affine* di una varietà affine X come la k -algebra finitamente generata $A(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$.
Si dimostra che due varietà affini sono isomorfe se e solo se le loro algebre affini sono isomorfe. Inoltre se si associa ad ogni varietà affine la propria algebra e ad ogni morfismo ϕ il morfismo $\phi^\star$, si ottiene un funtore contravariante tra la categoria delle varietà affini e quella delle k -algebre finitamente generate.

Esempi

- Per la noetherianità dell'anello dei polinomi, ci si può ridurre a considerare un numero finito di polinomi.
- Per definizione, una varietà affine è chiusa secondo la topologia di Zariski, ma in quanto intersezione finita di luoghi di zeri, è chiusa anche per la topologia standard se $k = \mathbb{C}$ o $k = \mathbb{R}$.
- Le varietà affini formano una categoria sia con i morfismi di varietà, sia con le mappe razionali.

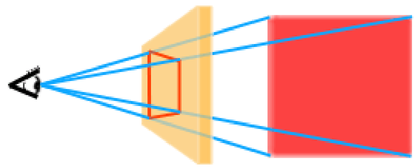
Voci correlate

- Varietà proiettiva

Geometria proiettiva

La **geometria proiettiva** è la parte della → geometria che modellizza i concetti intuitivi di *prospettiva* e *orizzonte*. Definisce e studia gli enti geometrici usuali (punti, rette, ...) senza utilizzare misure o confronto di lunghezze.

La geometria proiettiva può essere pensata informalmente come la geometria che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l'"occhio" appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l'orizzonte è considerato parte integrante dello spazio. Come conseguenza, nella geometria piana proiettiva due rette si intersecano sempre (non sono mai parallele).



Lo geometria proiettiva è la geometria "vista da un occhio".

Storia

L'origine della geometria proiettiva è legata agli sforzi di un artista e matematico francese molto dotato, Girard Desargues (1591-1666), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l'uso dei punti di fuga ed includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli inquadrò quindi la → geometria euclidea all'interno di un sistema geometrico più generale.

Girard Desargues

La geometria proiettiva si sviluppò quindi più ampiamente nella prima metà del diciannovesimo secolo. Storicamente, questo sviluppo può essere letto come un passaggio intermedio tra la → geometria analitica (introdotta da Cartesio nel XVII secolo) e la → geometria algebrica (che occupa un ruolo cruciale nel XX secolo).

Il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane (ad esempio del piano cartesiano) con delle nuove coordinate, dette → coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni "punti all'infinito", che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti "finiti" (da cui il carattere *omogeneo* del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto "omogeneo" molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti: questo grazie alla scomparsa di molti "casi eccezionali", generati da configurazioni particolari (quali ad esempio quella di due rette parallele nel piano), proprie della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. In particolare lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: tramite l'utilizzo dell'→ algebra lineare vennero classificate le coniche, e matematici come Julius Plücker iniziarono a rappresentare le curve come punti di altri spazi proiettivi, generalmente più grandi.

Verso la fine del secolo la scuola italiana (composta tra gli altri da Castelnuovo, Enriques e Severi) uscì dal solco della tradizione finendo per trovarsi ad affrontare nuovi problemi che richiedevano tecniche algebriche sempre più potenti. Nacque quindi la → geometria algebrica.

I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la → geometria analitica. Le tecniche di dimostrazione erano inizialmente sintetiche (cioè simili a quelle di Euclide, senza l'ausilio dell'→ algebra), e lo spazio proiettivo era introdotto su base assiomatica (con assiomi simili a quelli di Euclide). Per questo motivo una riformulazione rigorosa dei lavori di questi matematici in chiave odierna è spesso difficile: anche nel caso più semplice del piano proiettivo, il loro approccio assiomatico comprende anche modelli diversi da quello definito oggi (e non studiabili tramite l'→ algebra lineare).

Proprietà

La "retta all'infinito"

Qualunque fosse la discussione sui suoi fondamenti nel XIX secolo, la geometria proiettiva includeva come una sua proprietà basilare quella dell'incidenza tra due rette qualunque nel piano: due rette distinte L e M nel piano proiettivo si intersecano *sempre* in esattamente un punto P. Contrariamente alla → geometria euclidea o → analitica, in quella proiettiva non esistono rette parallele. Il caso "eccezionale" delle rette *parallele* viene eliminato aggiungendo al piano i "punti all'infinito". Questi nuovi punti formano anch'essi una retta, detta "retta all'infinito" o "impropria", o anche "orizzonte". La teoria considera quindi la "retta all'infinito" come una retta qualsiasi, indistinta dalle altre.

Lo stesso accade in dimensione più alta: lo spazio proiettivo tridimensionale è ottenuto aggiungendo il "piano all'infinito", in modo che due piani nello spazio non siano mai paralleli, ma si intersechino sempre in una retta.

Semplificazione dei teoremi classici

Grazie all'aggiunta dei punti all'infinito, e all'eliminazione dei fenomeni di parallelismo, molti teoremi classici assumono nella geometria proiettiva una forma più semplice, più essenziale.

Ad esempio, la geometria proiettiva fornisce una descrizione breve ed elegante delle → sezioni coniche: iperbole, parabola e ellisse altro non sono che la "stessa conica" nel piano proiettivo, e le differenze fra questi tre enti dipendono soltanto da come questo oggetto interseca la retta all'infinito: l'iperbole la interseca in due punti, la parabola in uno solo, l'ellisse in nessuno.

Il → teorema di Pappo ed il → teorema di Desargues sono due risultati riguardanti alcune configurazioni di rette nel piano. Ciascun teorema ha una versione proiettiva ed una euclidea. La versione proiettiva è espressa sinteticamente con un unico enunciato, mentre la euclidea necessita una trattazione differenziata per alcuni casi, a seconda della configurazione delle rette: ad esempio se una di queste è "all'infinito" si ottiene un risultato, se due sono parallele se ne ottiene un altro, etc.

Applicazioni

Scienze naturali

Tra i non matematici che hanno studiato e usato la geometria proiettiva per modellizzare fenomeni del mondo vivente, è da menzionare il filosofo Rudolf Steiner (il quale non va confuso con il matematico svizzero Jakob Steiner, in precedenza menzionato). Tra gli studiosi che contribuirono a questo filone, ci sono Louis Locher-Ernst, Hermann von Baravalle (che studiò il potenziale pedagogico della geometria proiettiva nella scuola superiore e nei corsi per futuri docenti) e Lawrence Edwards.

Voci correlate

- → Spazio proiettivo
- → Piano proiettivo
- → Trasformazione di Möbius
- Trasformazione proiettiva
- → Coordinate omogenee
- → Teorema di Desargues
- → Teorema dell'esagono di Pappo
- Teorema di Pascal
- → Geometria descrittiva

Bibliografia

- (**FR**) Cremona, L. *Éléments de géométrie projective* [1] (Parigi: Gauthier-Villars, 1875)
- Enriques, F. *Lezioni di geometria proiettiva* [2] (Bologna : N. Zanichelli, 1898)
- Castelnuovo, G. *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* [6] (Roma: Albrighi, Segati e c., 1904-1905)
- (**EN**) Coxeter, H. S. M., *The Real Projective Plane*, 3rd ed, Springer Verlag, New York, 1995
- (**EN**) Coxeter, H. S. M., *Projective Geometry*, 2nd ed., Springer Verlag, New York, 2003
- (**EN**) Veblen, O. and Young, J. W., *Projective Geometry*, 2 vols., Blaisdell Pub. Co., New York, 1938-46

Collegamenti esterni

- (**EN**) note ispirate a *The Real Projective Plane* di Coxeter. [3]
- Geometria descrittiva plus http://www.descrittiva.blogspot.com/] (con premesse sulla geometria proiettiva, le trasformazioni piane e la loro genesi spaziale).

Riferimenti

[1] http://www.archive.org/details/eledegeoprojectiv00cremrich
[2] http://www.archive.org/details/lezdigeopro00enririch
[3] http://xahlee.org/projective_geometry/projective_geometry.html

Spazio proiettivo

In → geometria, lo **spazio proiettivo** è lo spazio ottenuto da uno spazio euclideo (ad esempio, la retta o il piano) aggiungendo i "punti all'infinito". A seconda della dimensione, si parla quindi di → retta proiettiva, → piano proiettivo, ecc.

Lo spazio proiettivo è stato introdotto nel XVI secolo per modellizzare lo spazio visto dall'occhio umano, negli studi sulla prospettiva. Dal punto di vista geometrico, è uno spazio che presenta numerosi vantaggi rispetto a quello euclideo o → affine: nello spazio proiettivo ci sono meno "casi particolari" da considerare (ad esempio, nel piano due rette si intersecano sempre), e molti concetti profondi vengono espressi in modo più sintetico ed elegante.

Definizioni

Punti all'infinito

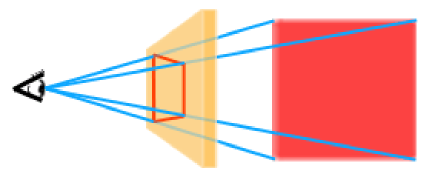
Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo n-dimensionale. Ad esempio, per $n=2$ questo è semplicemente il piano cartesiano. Un "punto all'infinito" è la direzione indicata da una retta nello spazio, e da tutte le rette parallele ad essa. Quindi due rette definiscono lo stesso punto all'infinito se e solo se sono parallele.

Lo **spazio proiettivo** n-dimensionale è l'unione di $\mathbb{R}^n$ e di tutti i suoi "punti all'infinito".

A questo punto si possono estendere allo spazio proiettivo molti concetti geometrici usuali. Ne risulterà, ad esempio, che due rette di uno stesso piano si intersecano sempre: se hanno la stessa direzione (cioè erano parallele prima dell'ampliamento), il loro punto di intersezione è quello all'infinito.

Rette passanti per l'origine

Una definizione come quella appena data ha però il difetto di trattare i punti all'infinito come "punti speciali", mentre la filosofia della → geometria proiettiva è quella di non distinguere questi punti dagli altri in nessun modo. In effetti si può parlare sia di ampliamento proiettivo di uno spazio affine (si ottiene lo spazio proiettivo aggiungendo i punti all'infinito), oppure più facilmente si usa la seguente definizione.



Lo spazio proiettivo è lo spazio visto da un occhio.

Lo **spazio proiettivo** n-dimensionale è definito come l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per l'origine.

Intuitivamente, è lo spazio che vede un occhio posizionato nell'origine. Questa definizione descrive chiaramente le relazioni con la prospettiva.

Campo arbitrario

Le definizioni appena date possono essere estese al caso in cui lo spazio di partenza sia uno → spazio vettoriale su un campo K arbitrario, come ad esempio quello dei numeri reali o complessi. Questa estensione è utile, perché molti teoremi di → geometria proiettiva sono più potenti ed eleganti se il campo base è algebricamente chiuso come i complessi.

Lo **spazio proiettivo** n-dimensionale su K è definito come l'insieme delle rette passanti per l'origine in K^{n+1}. Cioè,

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$$

dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza che identifica due punti se e solo se stanno sulla stessa retta passante per l'origine, cioè se e solo se sono multipli:

$$v \sim w \iff v = kw \text{ per qualche } k \in K.$$

Ad esempio, $(1, 2, -3)$ e $(-2, -4, 6)$ sono multipli e danno quindi luogo allo stesso punto.

Nel resto di questa voce supporremo lo spazio proiettivo definito in questo modo, dipendente da un campo K.

Sottospazi

Definizione

Poiché uno spazio proiettivo è l'immagine di uno → spazio vettoriale tramite la proiezione

$$p : K^{n+1} \to \mathbb{P}^n(K)$$

indotta dalla relazione di equivalenza, molte nozioni degli spazi vettoriali si trasferiscono senza problemi sullo spazio proiettivo.

Un **sottospazio proiettivo** di $\mathbb{P}^n(K)$ è definito come l'immagine $p(W)$ di un sottospazio vettoriale W di K^{n+1} tramite p.

La **dimensione** del sottospazio proiettivo $p(W)$ è definita come

$$\dim p(W) = \dim W - 1.$$

In geometria, la **codimensione** di un sottospazio è generalmente definita come la dimensione dello spazio che lo contiene meno quella del sottospazio: ne segue che W e $p(W)$ hanno la stessa codimensione

$$\operatorname{codim} W = n + 1 - \dim W = n - \dim p(W) = \operatorname{codim} p(W).$$

Un **iperpiano proiettivo** è un sottospazio di codimensione uno.

Dati due sottospazi S e T, è possibile definire i sottospazi **intersezione** e **somma** in modo analogo, come immagini tramite p dei sottospazi intersezione e somma in K^{n+1}.

Formula di Grassmann

Una delle proprietà basilari valide in uno spazio proiettivo, ereditata dagli → spazi vettoriali, ma che non è valida in uno → spazio affine, è la formula di Grassmann per i sottospazi. Dati due sottospazi S e T, vale cioè l'uguaglianza

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

dove si intende che il punto ha dimensione 0 (come sempre) e l'insieme vuoto ha dimensione -1.

Rette parallele

Come conseguenza della formula di Grassmann, due rette nel piano si intersecano sempre. Infatti

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T) = 1 + 1 - \dim(S + T) \geq 0$$

poiché $S + T$ ha dimensione al più 2 (ogni sottospazio del piano ha dimensione al massimo 2, e 2 solo se è tutto il piano).

Coordinate omogenee e carte affini

Coordinate omogenee

Ogni punto dello spazio proiettivo è una classe di equivalenza di punti in K^{n+1}. Come è usuale in matematica, una classe di equivalenza viene descritta tra parentesi quadre: in questo modo,

$$[(x_0, \ldots, x_n)]$$

definisce la classe a cui appartiene il vettore $(x_0, \ldots, x_n)$. Per brevità, tale classe si indica con

$$[x_0, \ldots, x_n].$$

Questa espressione fra parentesi quadre definisce le *coordinate omogenee* del punto. Due vettori di coordinate determinano la stessa classe (cioè lo stesso punto)

$$[x_0, \ldots, x_n] = [y_0, \ldots, y_n]$$

se e solo se sono uno multipli dell'altro, cioè se esiste un k in K tale che $y_i = kx_i$ per ogni i .

Punti impropri

Con le coordinate omogenee è possibile recuperare la definizione originaria di spazio proiettivo come spazio affine a cui si aggiungono dei punti. Basta definire E come il sottoinsieme formato dai punti $[x_0, \ldots, x_n]$ tali che $x_0 \neq 0$. Ogni punto in E si scrive come

$$[1, x_1, \ldots, x_n]$$

in modo univoco, e quindi tramite la funzione

$$[1, x_1, \ldots, x_n] \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

definiamo una corrispondenza biunivoca tra E e lo spazio affine K^n . I punti dello spazio proiettivo che non sono in E hanno in questo contesto il ruolo dei "punti all'infinito". Ciascuno di questi punti è del tipo

$$[0, x_1, \ldots, x_n]$$

e la funzione

$$[0, x_1, \ldots, x_n] \mapsto [x_1, \ldots, x_n]$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti all'infinito e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ di dimensione più piccola di uno. Quindi i "punti all'infinito" ad esempio del → piano proiettivo formano una retta proiettiva, detta **retta all'infinito** o **retta impropria**. In dimensione arbitraria, si parla di **iperpiano improprio**.

Carte e atlante

La stessa descrizione è fattibile per ogni $i = 0, \ldots, n$ definendo E_i come l'insieme dei punti la cui i -esima coordinata è non nulla. Per ogni i si ottiene quindi un differente iperpiano improprio, e una differente **carta affine** E_i .

Il nome "carta" deriva dalla proprietà seguente: l'unione degli E_i è tutto lo spazio, quindi le carte "ricoprono" tutto lo spazio proiettivo, mentre ciascuna di esse ne descrive solo una parte, proprio come le carte geografiche. L'insieme

$$\{E_0, \ldots, E_n\}$$

è detto **atlante affine**.

Definizione più astratta

Lo spazio proiettivo può essere definito in modo analogo a partire da un qualsiasi spazio vettoriale V su un campo K:

Lo **spazio proiettivo** associato a V è definito come l'insieme delle rette passanti per l'origine in V. Cioè,

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/_\sim$$

dove

$$v \sim w \iff v = kw \text{ per qualche } k \in K.$$

In questo contesto, la definizione data precedentemente corrisponde al caso in cui $V = K^n$. In generale, lo spazio V può avere anche dimensione infinita.

Esiste uno strumento simile alle basi che permette di assegnare ad ogni punto di $\mathbb{P}(V)$ delle *coordinate omogenee*, nel caso in cui V abbia dimensione finita n. Come per gli spazi vettoriali, non esiste un modo univoco di assegnare tali coordinate: queste dipendono dalla scelta di un riferimento proiettivo, l'analogo proiettivo delle basi.

Voci correlate

- → Geometria proiettiva
- → Coordinate omogenee
- → Retta proiettiva
- → Piano proiettivo
- Prospettiva
- Sfera di Riemann

Piano proiettivo

In → matematica il **piano proiettivo** è un'estensione del piano euclideo a cui viene aggiunta una "retta impropria" posizionata idealmente all'infinito e in modo da circoscriverlo. Esteso in questo modo il piano diventa uno spazio compatto in cui anche le rette parallele si incontrano in un unico punto e tale punto di intersezione è idealmente collocato sulla "retta impropria". La retta impropria può essere visualizzata come la retta che si vede all'orizzonte quando un piano (euclideo) viene rappresentato in prospettiva oppure può essere pensata come una circonferenza infinitamente lontana che circonda tutto il piano euclideo e i cui punti antipodali sono identificati in maniera tale che le rette parallele ad una stessa direzione abbiano tutte un *unico* punto di intersezione su di essa.

Il piano proiettivo reale è lo spazio di linee in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine. È una → varietà differenziabile non orientabile 2-dimensionale, vale a dire una superficie che non può essere immersa senza auto-intersecarsi. Essa ha caratteristica di Eulero pari a 1 e quindi genere unitario.

In matematica il *piano proiettivo* si indica con $\mathbf{P}^2$.

Modelli matematici

Un modello di *piano proiettivo* può essere definito matematicamente in vari modi che forniscono strutture isomorfe.

Sfera quozientata

Un modello di piano proiettivo si ha considerando la sfera S^2 immersa nello spazio euclideo tridimensionale in cui

- definiamo *punti proiettivi* del piano proiettivo le coppie di punti antipodali sulla sfera.
- definiamo *rette proiettive* del piano proiettivo tutti i cerchi massimi che giacciono sulla sfera (la definizione è consistente con la precedente poiché un cerchio massimo contiene l'antipodale di ogni suo punto).

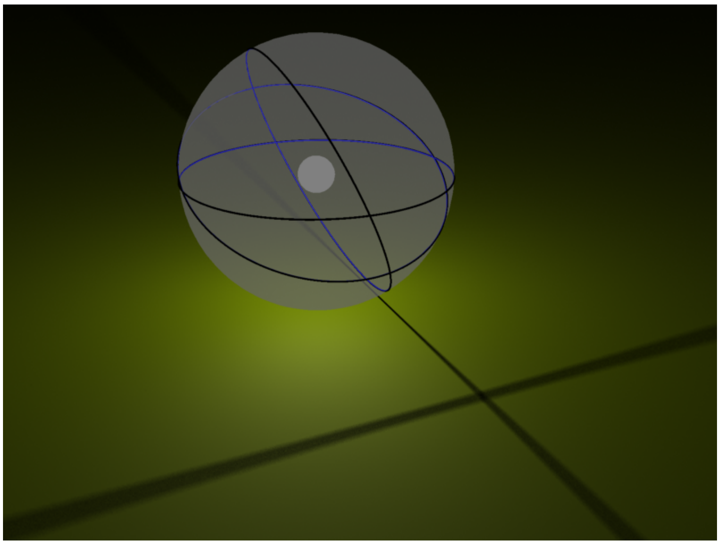
Questo equivale a considerare sulla sfera la relazione di equivalenza ~ che identifica i punti antipodali:

$$x \sim y :\leftrightarrow x = y \text{ oppure } x = -y$$

e definire il piano proiettivo come lo spazio topologico quoziente

$$\mathbb{P}^2 := S^2 / \sim$$

È possibile definire una applicazione che manda il piano proiettivo $\mathbf{P}^2$privato di una retta nel piano euclideo in modo tale da mandare rette proiettive in rette euclidee. A tale scopo consideriamo nello spazio tridimensionale il piano *p* tangente alla sfera S^2 nel "polo sud". Possiamo associare alle coppie di punti antipodali sulla sfera (che sono punti del piano proiettivo) un punto del piano *p* individuato dall'intersezione del piano con la retta congiungente i due punti antipodali. Intuitivamente è come se stessimo guardando l'ombra prodotta sul piano da questa coppia di punti quando una sorgente di luce disposta nel centro della sfera. I cerchi massimi sulla sfera (corrispondenti a *rette proiettive*) vengono mandate tutte in rette sul piano *p*.



La sorgente di luce disposta al centro della sfera proietta il piano proiettivo su un piano mandando rette proiettive generiche in rette e mandando all'infinito la retta proiettiva parallela al piano.

Questa applicazione manda tutti i punti del piano proiettivo sul piano *p* fatta eccezione per i punti appartenenti al cerchio massimo parallelo al piano (che in qualche senso vengono mandati all'infinito). Se omettiamo tale cerchio dal dominio l'applicazione così definita è una corrispondenza biunivoca che fa corrispondere rette del piano a *rette proiettive* sul piano proiettivo. Questa costruzione spiega in che modo il piano proiettivo possa essere visto come un'estensione del piano euclideo.

Coordinate omogenee

Una coppia di punti antipodali sulla sfera S^2 individua univocamente una retta nello spazio tridimensionale passante per l'origine. Tale retta può essere individuata da equazioni parametriche della forma:

$x{=}at$

$y{=}bt$

$z{=}ct,\ t \in \mathbf{R}$

(dove i coefficienti a, b e c non sono tutti nulli) e dalla famiglia di infinite equazioni che si ottengono moltiplicando tutti i coefficienti per uno stesso fattore non nullo.

Questo significa che il piano proiettivo può essere rappresentato da terne di coefficienti (a,b,c) non nulle identificando tra loro le terne che differiscono per una costante di proporzionalità. Questo equivale a considerare l'insieme quoziente di $\mathbf{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(a,b,c) \sim (a',b',c') \leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

L'insieme quoziente $\mathbf{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}/\sim$ individua un sistema di coordinate per il piano proiettivo che vengono chiamate **coordinate omogenee**.

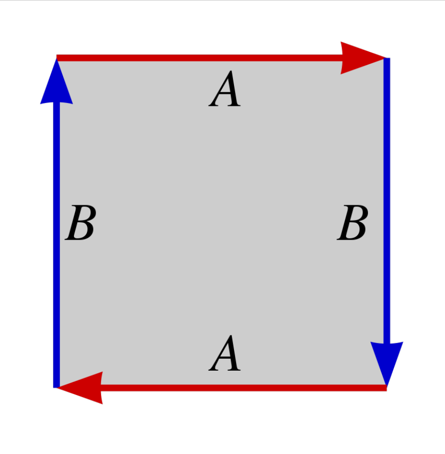
La classe di equivalenza della terna (x,y,z) viene indicata con la scrittura

[x,y,z] oppure [x : y : z].

Proprietà topologiche

La topologia naturale per il piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ definito come una sfera quozientata si ha considerando la topologia quoziente della sfera rispetto alla relazione di equivalenza in essa definita.

Lo stesso spazio topologico (a meno di omeomorfismi) può essere ottenuto considerando un quadrato ed incollando i lati opposti nei versi indicati in figura (ovvero identificando tra loro punti antipodali rispetto al centro del quadrato).



Il piano proiettivo ha le seguenti proprietà topologiche:

- è uno spazio compatto e connesso;
- è dotato della struttura di superficie topologica, cioè localmente omeomorfo al piano euclideo $\mathbf{R}^2$;
- come superficie il piano proiettivo non è orientabile, per dimostrarlo è sufficiente osservare che al suo interno è possibile individuare un nastro di Moebius;
- poiché è *compatto* e *non orientabile* il piano proiettivo (come la bottiglia di Klein) non può essere ottenuto come superficie immersa nello spazio euclideo tridimensionale senza autointersezioni;
- il rivestimento universale del piano proiettivo è la mappa $S^2 \to \mathbf{P}^2$ indotta dalla relazione d'equivalenza antipodale;
- il gruppo fondamentale del *piano proiettivo* è dato dal gruppo di due elementi $\mathbf{Z}_2$: questo può essere dimostrato con il Teorema di Van Kampen, oppure segue dall'esistenza di un rivestimento universale di grado 2;
- la sua caratteristica di Eulero è 1;
- il suo genere è 1.

Voci correlate

- → Geometria proiettiva
- → Spazio proiettivo

Retta proiettiva

In → matematica, e più precisamente in → geometria proiettiva, la **retta proiettiva** è un'estensione della retta, ottenuta aggiungendo il "punto all'infinito".

Nel caso della retta reale, si distingue dalla retta estesa, che è ottenuta aggiungendo *due* punti all'infinito, uno per ogni direzione: $+\infty$ e $-\infty$.

A differenza della retta estesa, che è definita soltanto per i numeri reali, il concetto di retta proiettiva si applica poi su qualsiasi campo (ad esempio, il campo dei complessi), ed è la versione 1-dimensionale del concetto più generale di → spazio proiettivo.

Definizione

Una definizione informale di retta proiettiva, dipendente da un campo K, potrebbe essere data aggiungendo semplicemente un punto a K, chiamato "infinito" o ∞. Una definizione di questo tipo non mostra però come questo nuovo punto debba essere considerato nella nuova struttura: si sceglie quindi (come in tutti gli → spazi proiettivi) una definizione più formale ed omogenea, apparentemente molto diversa, che considera subito tutti i punti allo stesso livello. Le due descrizioni arrivano quindi a coincidere al momento in cui si deciderà che un dato punto è "quello all'infinito".

Quoziente

Sia K un campo. La **retta proiettiva** su K è definita a partire dal piano

$$K^2 = \{(x, y) \mid x, y \in K\}$$

rimuovendo l'origine $(0, 0)$ e quozientando per la relazione d'equivalenza

$$(x_1, y_1) \sim (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

che identifica due punti ottenuti l'uno dall'altro tramite riscalamento per un fattore λ. In altre parole, identifica tutti i punti presenti su ogni singola retta passante per l'origine. Formalmente:

$$\mathbb{P}^1(K) = \left(K^2 \setminus \{(0, 0)\}\right)_{/\sim}.$$

Coordinate omogenee

Come in ogni spazio proiettivo, ogni punto della retta proiettiva è quindi identificato da una coppia di → coordinate omogenee

$$P = [x_0, x_1]$$

dove si intende che moltiplicando entrambi i valori x_0 e x_1 per un numero $\lambda \neq 0$ si ottiene lo stesso punto P:

$$P = [x_0, x_1] = [\lambda x_0, \lambda x_1].$$

Punto all'infinito

Usando queste coordinate, è possibile ricavare la descrizione più familiare di retta proiettiva come unione di una retta normale K e di un "punto all'infinito". Infatti

$$\mathbb{P}^1(K) = \{[0,1]\} \cup \{[1,x] \mid x \in K\}$$

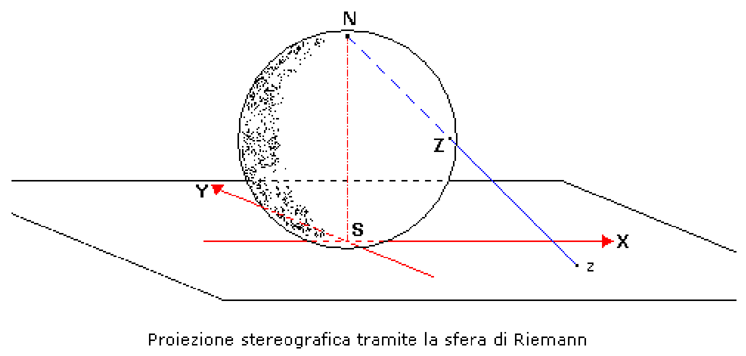
poiché a meno di riscalamento ogni coppia $[x_0, x_1]$ può essere espressa unicamente in uno dei modi descritti. In questa descrizione, il "punto all'infinito" è $[0,1]$. Ogni punto della retta proiettiva può però essere identificato come "punto all'infinito" in una opportuna descrizione.

Esempi

Caso reale

Se $K = \mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, la retta proiettiva è ottenuta aggiungendo un punto all'infinito alla retta reale. Dal punto di vista topologico, lo spazio che si ottiene è una circonferenza.

Caso complesso



La retta proiettiva complessa è la sfera di Riemann, ottenuta aggiungendo il punto all'infinito al piano complesso.

Il caso complesso risulta essere di notevole interesse in matematica e in geometria. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è ottenuta aggiungendo un punto al piano complesso. Topologicamente, come si evince dalla proiezione stereografica, è una sfera, detta sfera di Riemann. La sfera di Riemann è un oggetto importante, che ha molti collegamenti con vari ambiti della geometria: è centrale infatti sia nella → geometria proiettiva che nella → differenziale.

Campi finiti

La definizione è ovviamente valida anche nel caso in cui il campo K sia un campo finito, con n elementi. In questo caso, la retta proiettiva consta di $n+1$ elementi.

Voci correlate

- → Spazio proiettivo
- → Piano proiettivo
- → Trasformazione di Möbius

Coordinate omogenee

In → matematica, le **coordinate omogenee**, introdotte da August Ferdinand Möbius intorno al 1837, sono uno strumento usato per descrivere i punti nella → geometria proiettiva. Sono cioè l'analogo delle coordinate cartesiane nella → geometria analitica.

Le coordinate omogenee sono ampiamente usate nell'arte digitale per la rappresentazione di oggetti nello spazio e dei loro movimenti.

Definizione

Introduzione informale

Un insieme di oggetti è rappresentato tramite delle **coordinate omogenee**, se ciascuna sequenza di numeri

$$[x_0, \ldots, x_n]$$

diversa da $[0, 0, \ldots, 0]$ identifica un oggetto, e due sequenze determinano lo stesso oggetto se e solo se sono *una multipla dell'altra*, cioè se esiste un numero λ tale che due sequenze sono del tipo

$[x_0, \ldots, x_n]$ e $[\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n]$.

Ad esempio, $[1, 2]$ e $[-2, -4]$ identificano lo stesso oggetto.

La relazione di proporzionalità qui definita è una relazione di equivalenza: ciò vuol dire che un oggetto determina univocamente una classe di equivalenza di sequenze.

Spazi proiettivi

Uno → spazio proiettivo associato ad uno → spazio vettoriale V è definito come l'insieme delle rette (cioè dei sottospazi vettoriali di dimensione uno) di V. Viene indicato con $\mathbb{P}(V)$.

Se lo spazio vettoriale V è munito di una base finita, ogni vettore di V è descrivibile tramite le sue coordinate

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

Ogni retta di V è descrivibile come lo span lineare di un vettore non nullo v. Le **coordinate omogenee** di questa retta, rispetto alla base scelta, sono la n-upla di punti

$$[x_1, \ldots, x_n]$$

data dalle coordinate di v, definita a meno di *moltiplicazione per scalare*. Si intende cioè che

$$[x_1, \ldots, x_n] = [\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n]$$

per ogni λ diverso da zero. Le coordinate della retta sono quindi ben definite: infatti v e v' sono due vettori che generano la stessa retta se e solo se le loro coordinate differiscono per un multiplo scalare.

Come le coordinate di un vettore in uno spazio vettoriale, le coordinate omogenee dipendono fortemente dalla scelta di una base. Nel caso in cui lo spazio V sia K^n, è naturale prendere la base canonica: si indica quindi una retta di $P(K^n)$ come $[x_1, \ldots, x_n]$, dove $(x_1, \ldots, x_n)$ è un qualsiasi vettore non nullo che la genera.

Esempi

Dimensione 1

Ogni punto della → retta proiettiva $P(K^2)$ è scrivibile come coppia

$$[x_0, x_1]$$

diversa da $[0,0]$. Se x_1 è diverso da zero, è possibile esprimere lo stesso punto come

$$\left[\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_1}{x_1}\right] = \left[\frac{x_0}{x_1}, 1\right].$$

D'altra parte, se $x_1 = 0$ l'altro valore x_0 non può essere nullo, ed è possibile esprimere lo stesso punto come

$$\left[\frac{x_0}{x_0}, \frac{0}{x_0}\right] = [1,0].$$

Ne segue che i punti di $P(K^2)$ sono esattamente

$$\{[a,1] \mid a \in K\} \cup \{[1,0]\}.$$

Con questa descrizione, la retta proiettiva è l'unione di due pezzi: tutti i punti del tipo $[a, 1]$ al variare di a in K, che sono in corrispondenza biunivoca con K, ed il *punto all'infinito* $[1, 0]$.

Dimensione 2

Ogni punto del → piano proiettivo $P(K^3)$ è descrivibile come tripletta

$$[x_0, x_1, x_2].$$

non nulla. Analogamente a quanto visto sopra, i punti di $P(K^3)$ sono

$$\{[x,y,1] \mid (x,y) \in K^2\} \cup \{[x,y,0] \mid [x,y] \in P(K^2)\}.$$

Con questa descrizione, lo spazio proiettivo è unione di due pezzi: il primo è una copia del piano vettoriale K^2, l'altro è una copia della retta proiettiva $P(K^2)$; quest'ultima è chiamata *retta all'infinito*.

Carte affini e punti all'infinito

Come evidenziato dagli esempi, la scelta di coordinate proiettive per uno spazio proiettivo permette una descrizione di questo come unione di due spazi, il primo dei *punti al finito*, il secondo dei *punti all'infinito* (o *impropri*), nel modo seguente:

$$P(K^n) = \{[x_0, \ldots, x_{n-1}, 1]\} \cup \{[x_0, \ldots, x_{n-1}, 0]\}.$$

I punti al finito sono determinati dal vettore $(x_0, \ldots, x_{n-1})$, che è quindi un elemento dello spazio K^n. Quelli all'infinito sono invece determinati dal vettore $[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, solo a meno di moltiplicazione per scalare: sono quindi elementi dello spazio proiettivo di dimensione più piccola $P(K^{n-1})$.
La stessa descrizione è fattibile per ogni $i = 0, \ldots, n$ fissato, definendo E_i come l'insieme dei punti la cui i-esima coordinata è non nulla, e P_i il suo complementare. Per ogni i si ottiene quindi

$$P(K^n) = E_i \cup P_i$$

dove P_i è l'iperpiano proiettivo definito dall'equazione $x_i = 0$, ed E_i è in naturale corrispondenza biunivoca con K^{n-1}. Ogni E_i è detto *carta affine*.

Sottospazi proiettivi

Il sottospazio proiettivo generato da alcuni punti $P_1, \ldots, P_k$ è il più piccolo sottospazio che li contiene, ed è descrivibile in coordinate proiettive come:

$$L(P_1, \ldots, P_k) = \{[a_1 x_{1,0} + \ldots + a_k x_{k,0}, \ldots, a_1 x_{1,n} + \ldots + a_k x_{k,n}] \mid a_1, \ldots, a_k \in K\}.$$

Questa definizione traduce l'usuale normale definizione di span lineare per i sottospazi vettoriali.

Utilizzo in computer grafica

Le coordinate omogenee sono utilizzate frequentemente in computer grafica in quanto permettono di rappresentare tutte le → trasformazioni affini tramite operazioni matriciali. Una traslazione in $\mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ può essere scritta in questo modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove i vettori colonna sono costituiti dalle coordinate omogenee del punto di partenza e del punto di arrivo, rispettivamente. Anche tutte le trasformazioni lineari come la rotazione e la riflessione possono essere rappresentate, mediante matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nelle quali le sottomatrici delle prime due righe e delle prime due colonne esprimono riflessioni, rotazioni o trasformazioni lineari. Inoltre anche le trasformazioni proiettive possono essere rappresentate mediante matrici.

La possibilità di realizzare tutte le trasformazioni mediante la moltiplicazione per matrici, cioè mediante un unico genere di meccanismo facilmente implementabile, semplifica notevolmente le attività computazionali e di ingegnerizzazione del software per la computer grafica. In effetti le coordinate omogenee sono ampiamente utilizzate nelle rappresentazioni delle scene 3D e le notazioni matriciali sono impiegate nella maggior parte delle librerie di programmi grafici 3D come OpenGL e Direct3D.

Voci correlate

- Coordinate baricentriche

Trasformazione di Möbius

In → geometria, una **trasformazione di Möbius** è una funzione

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

dove z, a, b, c e d sono numeri complessi con $ad - bc \neq 0.$

La funzione è definita sulla sfera di Riemann, ed è un ingrediente fondamentale della → geometria proiettiva e dell'analisi complessa. Si usano anche i termini **trasformazione omografica** e **trasformazione lineare fratta**. Il nome è legato al matematico August Ferdinand Möbius.

Definizione

Una **trasformazione di Möbius** è una funzione

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

definita sulla sfera di Riemann

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

della forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con determinante diverso da zero

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Automorfismi della sfera di Riemann

Esempi

La condizione sul determinante è necessaria affinché la funzione sia effettivamente definita su tutta la sfera di Riemann. Valgono in particolare le relazioni

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{ad-bc}{0} = +\infty,$$
$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{0}{-cb+ad} = 0,$$
$$f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Rappresentazione tramite matrici

La trasformazione f è determinata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Poiché ha determinante non nullo, la matrice è invertibile. Quindi è un elemento del gruppo generale lineare $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ composto da tutte le matrici complesse invertibili 2×2.

La rappresentazione tramite matrici è molto comoda, in virtù del fatto seguente: la composizione di due trasformazioni di Möbius, descritte dalle matrici A e B, è anch'essa una trasformazione di Möbius, descritta dalla matrice BA.

Automorfismo

La descrizione tramite matrici mostra che ogni trasformazione di Möbius è una funzione biettiva dalla sfera di Riemann in sé. Infatti, una trasformazione associata alla matrice A ha una inversa, associata alla matrice inversa A^{-1}.

Per questo motivo una trasformazione di Möbius è chiamata automorfismo. Le trasformazioni di Möbius formano un gruppo, indicato con

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}).$$

Struttura di gruppo

La rappresentazione matriciale fornisce un omomorfismo di gruppi

$$h : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{\mathbb{C}}.$$

L'omomorfismo è suriettivo ma non iniettivo: il nucleo consiste infatti di tutte le matrici della forma λI, dove I è la matrice identità e $\lambda \neq 0$è un numero complesso. Il primo teorema d'isomorfismo fornisce quindi un isomorfismo di gruppi

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/_\sim \cong \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$$

dove $A \sim B$ se e solo se $A = \lambda B$ per qualche λ. Il quoziente è indicato con una "P" davanti, perché questa costruzione è identica a quella dello → spazio proiettivo di uno → spazio vettoriale.

Proprietà basilari

Trasformazioni elementari

Ogni automorfismo di Möbius è ottenuto componendo alcune trasformazioni elementari di questo tipo:

1. $f(z) = z + b$ (traslazione)
2. $f(z) = 1/z$ (inversione)
3. $f(z) = az$ (omotetia e rotazione)

La traslazione tiene fisso il punto all'infinito e trasla tutti i punti del piano complesso. L'inversione scambia i punti 0 e ∞. A proposito della terza trasformazione, scrivendo a in coordinate polari

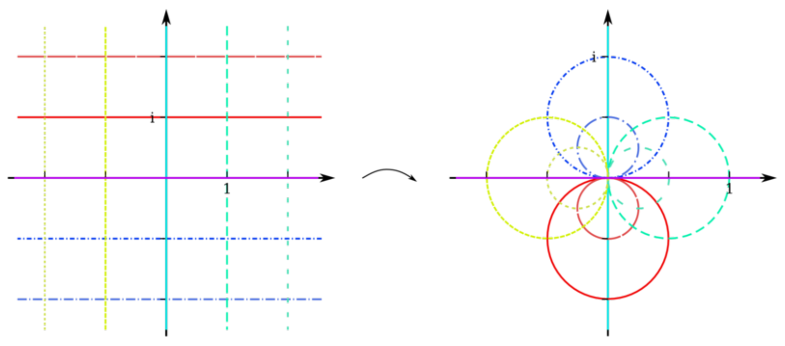
$$a = re^{i\theta}$$

si verifica che è una rotazione di angolo θ, composta con una omotetia di fattore r.

Mappe conformi

Un automorfismo di Möbius è una mappa conforme, una mappa cioè che preserva gli angoli. Infatti, ciascuna delle trasformazioni elementari descritte preserva gli angoli. Un automorfismo però non preserva lunghezze o aree.

Rette e circonferenze



L'inversione $f(z) = 1/z$ manda l'infinito in zero, e quindi le rette (che sono circonferenze passanti per l'infinito) in circonferenze e rette passanti per l'origine.

Una circonferenza nella sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ è una circonferenza di $\mathbb{C}$, oppure una retta di $\mathbb{C}$ completata con il punto all'infinito.
L'immagine $f(C)$ di una circonferenza C tramite una funzione di Möbius f è un'altra circonferenza. Le trasformazioni di Möbius mandano quindi circonferenze in circonferenze.
Questa proprietà è verificata dalle trasformazioni elementari (traslazioni, inversioni, rotazioni, omotetie), e per questo motivo è verificata da qualsiasi trasformazione.

Birapporto

Una trasformazione di Möbius f preserva il birapporto $\mathrm{brp}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ di quattro punti della sfera di Riemann. Vale cioè la relazione

$$\mathrm{brp}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{brp}(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

Funzione meromorfa

Con il linguaggio dell'analisi complessa, un automorfismo di Möbius è una particolare funzione meromorfa, avente un polo in $z = -d/c$ di ordine 1.

Trasformazione proiettiva

Con il linguaggio della → geometria proiettiva, la sfera di Riemann è identificata con la → retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$ tramite la mappa

$$\phi : \mathbb{CP}^1 \to \widehat{\mathbb{C}},$$
$$\phi : [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}.$$

Con questa identificazione, le trasformazioni di Möbius sono esattamente gli isomorfismi proiettivi della retta proiettiva complessa.

Voci correlate

- Sfera di Riemann
- → Retta proiettiva
- Funzione meromorfa

Collegamenti esterni

- (EN) Video dimostrativo su YouTube [1]

Riferimenti

[1] http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY

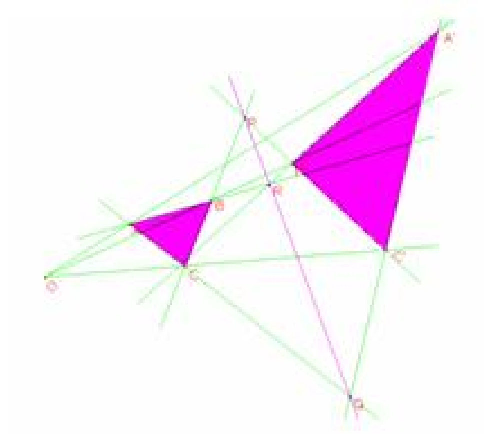
Teorema di Desargues

Il **teorema di Desargues**, o **dei triangoli omologici**, è un teorema di → geometria proiettiva che prende il nome dal matematico francese Girard Desargues.

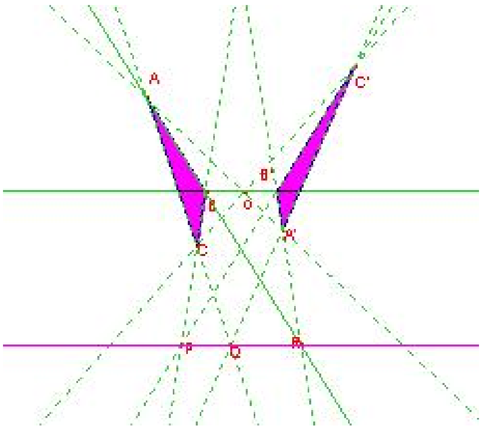
Afferma che se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, allora sono in prospettiva anche rispetto ad una retta.

Equivalentemente, se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, e se le parti dei lati corrispondenti si intersecano, allora i tre punti di intersezione sono allineati.

Anche il reciproco del teorema di Desargues è vero: se due triangoli stanno in prospettiva rispetto ad una retta e se ciascuna coppia di vertici corrispondenti sono uniti per rette che si intersecano allora i triangoli sono in prospettiva rispetto al punto di intersezione delle tre rette.



Esposizione grafica: due triangoli che soddisfano il Teorema di Desargues



Esposizione grafica

Ricordiamo che due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto se le rette che uniscono i punti sono concorrenti. Si dice anche che due triangoli sono in prospettiva rispetto ad una retta se le coppie formate per rette corrispondenti si tagliano in punti allineati.

Il teorema di Desargues viene ripreso in considerazione da Hilbert alla fine del 1800 nel libro *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti della Geometria*), dove il matematico tedesco formula alcune considerazioni derivate da tale teorema. Egli infatti propone un diverso sistema di assiomi, che generano un tipo di geometria in cui non vale il teorema di Desargues.

Nel 1902, Moulton riprende l'argomento trattato da Hilbert, proponendo un esempio di geometria non desarguesiana alquanto più semplice, che verrà infatti riportato nelle edizioni successive del testo *Grundlagen der Geometrie*. Moulton pubblicò a tale scopo, nel 1902, un articolo sulla rivista *Transactions of the America Mathematical society*.

Infine, una diversa interpretazione del problema rappresentato dal teorema di Desargues può essere introdotta presentando l'impostazione data da Emil Artin nel suo libro *Geometric Algebra*.

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Teorema di Desargues**

Teorema dell'esagono di Pappo

Il **teorema dell'esagono di Pappo** è un teorema di → geometria proiettiva del → piano che asserisce che dato un esagono qualsiasi ABCDEF, in cui i vertici A, C, E giacciono su una retta ed i vertici B, D, F giacciono su un'altra retta, se si considerano i punti:

$$P = r_{AB} \cap r_{DE}$$

$$Q = r_{BC} \cap r_{EF}$$

$$R = r_{CD} \cap r_{FA}$$

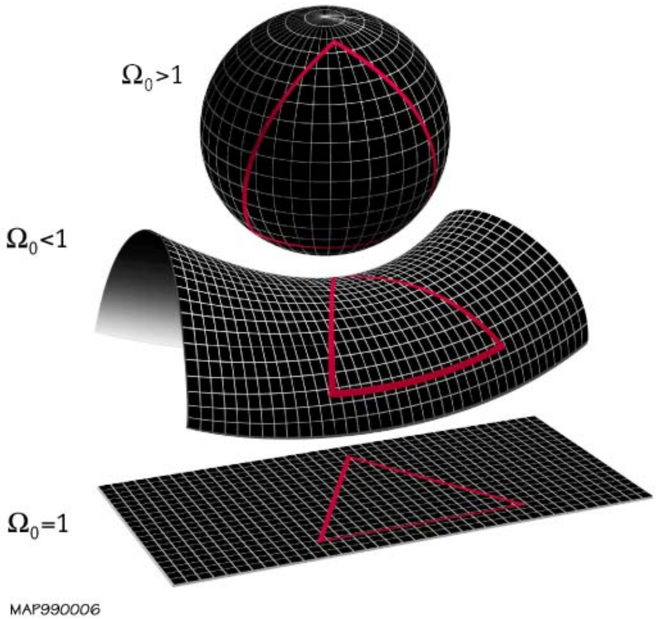
dove r_{XY} è la retta che contiene i vertici X ed Y (e quindi anche il lato XY dell'esagono), allora tali punti P, Q, R sono allineati.

Geometria differenziale

In → matematica, la **geometria differenziale** è lo studio di oggetti geometrici come curve, superfici e più in generale → varietà differenziabili, tramite l'→ analisi matematica.

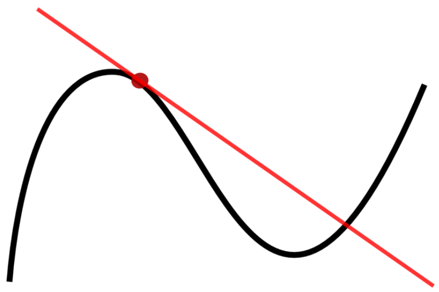
Tramite il calcolo infinitesimale e la nozione di derivata, è quindi possibile introdurre e studiare nozioni di fondamentale importanza, quali quelle di campo vettoriale, forma differenziale, geodetica, curvatura.

L'applicazione più spettacolare della geometria differenziale è la formulazione della relatività generale, a cui fornisce gli strumenti per modellizzare lo spaziotempo.



La geometria differenziale definisce e studia la nozione di "spazio curvo". Qui sono mostrati i tre tipi di curvature più importanti: ellittica, iperbolica, piatta.

Le varietà differenziabili



Una curva nel piano. Con il calcolo infinitesimale si definisce la sua tangente in un punto.

Sottoinsieme dello spazio euclideo

Alla base della geometria differenziale sta la nozione di → varietà differenziabile. Questa nozione generalizza quella di curva e superficie, modellizzando uno "spazio curvo" di dimensione qualsiasi. Curve e superfici sono quindi varietà di dimensione 1 e 2.

Fino alla metà del XIX secolo, una varietà differenziabile era definita come un oggetto contenuto nello spazio euclideo, che avesse localmente l'aspetto di un "sottospazio incurvato" di una certa dimensione. Si parlava quindi ad esempio di curve nel piano o nello spazio, e di superfici nello spazio. Questi oggetti sono generalmente definiti (almeno localmente) come luogo di zeri o immagine di una funzione differenziabile.

Oggetto intrinseco

I lavori di Bernhard Riemann hanno introdotto una definizione più *intrinseca* di varietà. Una varietà può essere definita oggi come oggetto intrinseco, non necessariamente contenuto in uno spazio euclideo: questo risultato è il frutto di un percorso di astrazione che ha coinvolto molti enti geometrici nel XX secolo, come le → varietà algebriche e gli spazi topologici.

La rappresentazione "intrinseca" descrive le proprietà geometriche della varietà "dall'interno": non c'è bisogno di "uscire" dalla varietà per parlare di geodetiche, → distanza, curvatura. Questa astrazione è molto utile ad esempio in relatività generale, perché permette di descrivere l'universo dall'interno, senza la creazione artificiale di un "contenitore più grande".

La rappresentazione intrinseca descrive le proprietà della varietà che non dipendono dall'ambiente in cui questa è raffigurata. Si definiscono varietà più complesse come la bottiglia di Klein (una superficie, cioè una varietà di dimensione 2) senza l'ausilio di uno spazio che le contenga.

Curve e superfici nello spazio

Lo studio delle curve e superfici nello spazio tridimensionale ha avuto una posizione predominante nella geometria differenziale fino a tutto il XIX secolo. Il comportamento di una curva nello spazio (e più generalmente in uno spazio euclideo con un qualsiasi numero di dimensioni) è descritto dal sistema di Frenet: un sistema di riferimento che si muove lungo la traiettoria. Le quantità che caratterizzano il modo in cui la curva cambia traiettoria sono le *curvature*: in 3 dimensioni le curvature sono due, chiamate semplicemente *curvatura* e *torsione*.

Tensori e curvatura

La curvatura di una varietà differenziale è codificata tramite un oggetto matematico molto complesso, il tensore. Un tensore è un oggetto che generalizza la matrice da 2 a più dimensioni, molto utile per definire una struttura su una varietà. Il tensore che definisce la curvatura della varietà è il tensore di Riemann. Una versione semplificata di questo è il tensore di curvatura di Ricci. Il calcolo tensoriale fornisce numerosi strumenti per manipolare i tensori.

Bibliografia

- (**EN**) George Salmon *A treatise on the analytic geometry of three dimensions* [1] (Dublin : Hodges-Smith, 1862)
- (**FR**) Gaston Darboux *Cours de Géometrie* [2] (Parigi : Gauthier-Villars, 1894-1917)
- (**FR**) Gaston Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal (4 vols.)* [3] (Paris : Gauthier-Villars, 1887-1896)
- (**EN**) Luther Pfahler Eisenhart *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces* [4] (Boston: Ginn & co., 1909)
- Luigi Bianchi *Lezioni di geometria differenziale (3 vol.)* [5] (Pisa : E. Spoerri, 1922)
- (**EN**) Barrett O'Neill (1997): *Elementary differential Geometry*, 2nd edition, Academic Press, ISBN 0-12-526745-2
- (**EN**) Peter Petersen (1997): *Riemannian Geometry*, Springer, ISBN 0387982124
- (**EN**) Richard W. Sharpe (1997): *Differential geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer, ISBN 0-387-94732-9
- (**EN**) Jürgen Jost (1998): *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, 2nd edition, Springer, ISBN 3540636544

Voci correlate

- topologia differenziale
- → geometria algebrica
- Luigi Bianchi
- Tullio Levi-Civita

Riferimenti

[1] http://gallica.bnf.fr/document?O=N099673
[2] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF35580680
[3] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF30300019
[4] http://www.archive.org/details/treatonthediffer00eiserich
[5] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF37265259

Varietà differenziabile

La nozione di **varietà differenziabile** è una generalizzazione del concetto di curva e di superficie differenziabile in dimensioni arbitrarie. Si tratta di una realizzazione del concetto di varietà che fa uso degli strumenti del calcolo infinitesimale.

Introduzione

Così come una curva differenziabile è un oggetto che localmente assomiglia ad una retta, o una superficie che localmente assomiglia ad un → piano, una varietà n-dimensionale somiglierà localmente ad uno spazio euclideo n-dimensionale. L'aggettivo "differenziabile" indica il fatto che questa "somiglianza" locale è definita mediante parametrizzazioni dotate di una struttura differenziabile che verrà descritta in seguito e che garantisce la possibilità di associare univocamente in ogni punto uno "spazio tangente" della stessa dimensione della varietà (come ad esempio una retta tangente a una curva o un piano tangente a una superficie).

Le **varietà differenziabili** (in inglese *differentiable manifold*, mentre il termine *variety* è riservato alle → varietà algebriche) sono gli elementi di base della → geometria differenziale, punto d'incontro di analisi e topologia. Essenzialmente la teoria delle varietà differenziabili serve a trasferire su oggetti tipicamente descritti come spazi topologici i concetti e gli strumenti del calcolo differenziale, definito generalmente sugli spazi euclidei. Lo studio delle varietà differenziabili è fondamentale in fisica, in quanto permette di definire campi vettoriali e flussi di fase su spazi non necessariamente piatti, ma trova innumerevoli applicazioni anche nella → matematica pura, grazie alle interconnessioni con altre branche quali la topologia e la → teoria dei numeri.

Definizione

Una varietà differenziabile X è una varietà topologica, tale che gli "incollamenti" fra gli aperti euclidei sono funzioni differenziabili. In altre parole, è una varietà topologica munita di un atlante massimale le cui funzioni di transizione sono differenziabili.

Proprietà

La "differenziabilità" viene trasportata sulla varietà interamente dallo spazio euclideo $\mathbb{R}^d$; in modo analogo tutte le proprietà e definizioni in geometria differenziale che riguardano la differenziabilità si effettuano trasferendo le analoghe proprietà dallo spazio euclideo alla varietà tramite le carte. Essendo ogni insieme W_j isomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^d$, tutti i teoremi **locali** del calcolo differenziale ordinario si possono estendere direttamente alle varietà.

Sottovarietà

Una **sottovarietà** differenziabile N in una varietà differenziabile M è un sottoinsieme che può essere descritto localmente come zero di una funzione differenziabile

$$f : U \to \mathbb{R}^k$$

dove U è un aperto di M e il cui differenziale (letto su qualsiasi carta) è ovunque suriettivo. Si tratta effettivamente anch'essa di una varietà differenziabile, avente codimensione k in M (cioè, se $\dim M = n$ allora $\dim N = n - k$). L'ipotesi di un differenziale surgettivo è necessaria per ottenere effettivamente una varietà differenziabile.

Nel caso $k = 1$, la varietà è anche detta **ipersuperficie**, e la condizione sul differenziale è equivalente alla richiesta che il gradiente di f sia (su ogni carta) ovunque diverso da zero.

Intorno tubolare

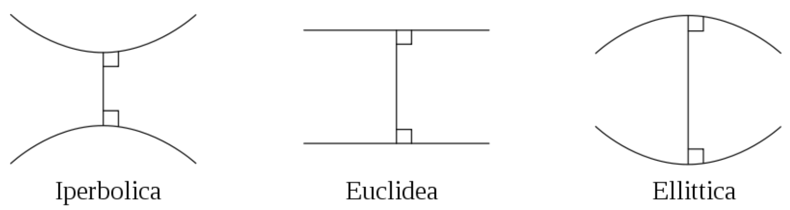
Un importante risultato riguardante le sottovarietà è il teorema dell'intorno tubolare. Il teorema asserisce che ogni sottovarietà differenziabile N ha un intorno fatto come un tubo, cioè diffeomorfo ad un fibrato di dischi k -dimensionali su N .

Voci correlate

- Spazio euclideo
- Spazio tangente
- Varietà
- → Varietà algebrica

Geometria non euclidea

Una **geometria non euclidea** è una → geometria costruita negando o non accettando alcuni postulati euclidei.



Due rette aventi una perpendicolare in comune nelle tre geometrie. Nella geometria iperbolica le rette divergono, ed è quindi possibile trovare molte rette parallele (cioè che non si intersecano). Nella geometria ellittica le rette convergono e quindi non esistono rette parallele.

Il *V postulato di Euclide*, detto postulato delle parallele è il postulato che nel corso dei secoli ha suscitato il maggior interesse. La caratteristica che contraddistingue i postulati e gli assiomi della geometria di Euclide, secondo le idee del tempo, è l'essere asserzioni la cui verità è garantita dall'evidenza (l'opera di Euclide è stata riorganizzata in senso moderno da Hilbert, che l'ha spogliata, ad esempio, del carattere osservativo da cui partiva la giustificazione nell'uso dei postulati e degli assiomi euclidei). Secondo Euclide, l'evidenza è una caratteristica dei primi quattro postulati degli Elementi: basta infatti usare riga e compasso; inoltre essi restano validi se ci si limita ad una porzione finita di piano.

Sempre nell'ottica euclidea, il Postulato delle parallele non è ‘evidentemente vero', infatti non rimanda ad alcuna costruzione geometrica che possa limitarsi sempre ad una porzione finita di piano. Pare che lo stesso Euclide non fosse convinto dell'evidenza [1] del postulato e questo è dimostrato dall'uso limitato che ne ha fatto nelle dimostrazioni dei teoremi della → sua geometria. Negli oltre duemila anni successivi alla diffusione degli Elementi di Euclide, molti sono stati i tentativi di dimostrare il V postulato o di riformularlo o, addirittura, di sostituirlo con altri equivalenti. Tuttavia tali tentativi sono falliti in quanto i ragionamenti riconducevano sempre all'uso del V postulato.

Nei primi decenni del XIX secolo, il fallimento di tutti i tentativi effettuati aveva convinto i matematici dell'impossibilità di dimostrare il V postulato. È da questo momento che inizia a farsi strada l'idea di costruire altre geometrie che facciano a meno del V postulato. Nascono così le prime geometrie non euclidee (ad esempio la → geometria ellittica o la → geometria iperbolica) e i loro modelli, inizialmente al fine di dimostrarne l'inconsistenza e quindi, per assurdo, il V postulato. [2] .

Aristotele (384-322 a.C.), già prima di Euclide (365-300 a.C.), aveva abbozzato l'esistenza di geometrie diverse da quelle che nel XIX secolo verranno chiamate "non euclidee", riprendendo e sviluppando considerazioni di geometri contemporanei. Partendo dall'ipotesi che la somma degli angoli interni di un triangolo potesse essere diversa da due angoli retti concluse che in tal caso sarebbe dovuta cambiare anche la somma degli angoli interni di un quadrato, che nel caso euclideo è di quattro angoli retti. Tali osservazioni sono contenute nelle opere di etica e riguardano la coerenza dello sviluppo di un sistema logico riferito all'ipotesi di base (vedi Imre Toth (matematico) che ne scoprì l'esistenza a partire dal 1967 in diversi passi del "Corpus Aristotelicum")[3] .

Storia delle geometrie non euclidee

I postulati di Euclide

Guardando i postulati che Euclide utilizzò nei suoi Elementi, si può facilmente intuire come mai il quinto postulato è stato fonte di dibattiti per duemila anni. I postulati sono infatti:


Euclide

1. Tra due segni (punti) qualsiasi è possibile tirare una sola retta
2. Si può prolungare una retta oltre i due segni indefinitamente
3. Dato un segno e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
4. Tutti gli angoli retti sono uguali
5. Se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Si nota subito una differenza tra i primi quattro, che sembrano immediatamente evidenti, e il quinto, che non solo non sembra immediatamente vero, ma ha anche una formulazione molto più complicata degli altri. Lo stesso Euclide sembra essere a disagio, tanto che dimostra le prime 28 proposizioni del I libro degli Elementi senza farne uso.

Tuttavia, più familiare è senz'altro la forma moderna del postulato:

Per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data

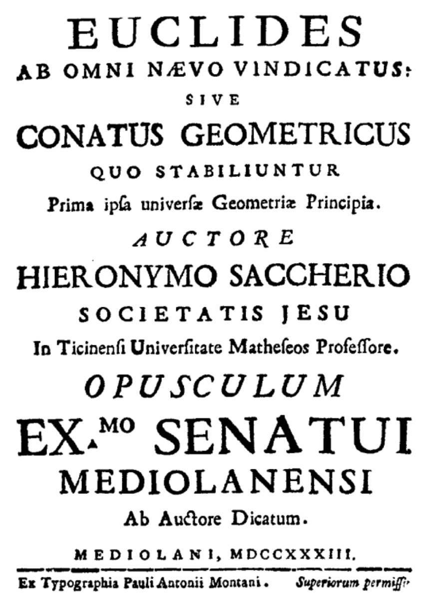
Mentre l'esistenza della parallela è assicurata dagli altri quattro postulati, l'unicità viene assunta assiomaticamente nella geometria euclidea.

Tentativi di dimostrazione del quinto postulato


Omar Khayyam

Nei secoli, i tentativi di dimostrare il postulato sono numerosi: Proclo nel suo *Commento al Primo Libro degli Elementi di Euclide* ci riferisce delle "dimostrazioni" di Posidonio e Tolomeo, proponendone poi una sua. Altri tentativi furono compiuti dai matematici arabi, tra cui Nasir ad-Din at-Tusi che mette in relazione il quinto postulato con la somma degli angoli interni di un triangolo e Omar Khayyam che nei suoi *Commenti sui difficili postulati del libro di Euclide* dimostrò accidentalmente alcune proprietà delle figure nelle geometrie non euclidee[4] In ognuno di questi tentativi di dimostrazione, e nei successivi, viene implicitamente dato per vero un assioma equivalente a quello delle parallele, rendendo vana la dimostrazione. Anche modificando la definizione di rette parallele non si approda a nulla: Euclide le definisce "due rette che non s'incontrano mai", per Posidonio, secondo Proclo, esse sono "due rette equidistanti, ossia in cui i punti della seconda siano tutti alla stessa distanza dai corrispettivi della prima". Quest'ultima affermazione non dimostra nulla: non è detto che il luogo dei punti equidistanti da una retta sia una retta. Accettarlo in via di principio equivale ad assumere come valido il quinto postulato, e ci si ritrova da capo.

Dimostrazione per assurdo


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Copertina di *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Giovanni Gerolamo Saccheri 1733

Frustrati dagli insuccessi ottenuti cercando una dimostrazione diretta del postulato, gli studiosi provano ad assumere per validi i primi quattro postulati e creare delle geometrie alternative, sperando di arrivare ad una contraddizione. Questo avrebbe dimostrato che il quinto postulato deve necessariamente essere vero. Uno dei maggiori esponenti di questa scuola fu Giovanni Gerolamo Saccheri, che nel 1733 credendo di esservi riuscito, pubblica *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Anche se difettosa, e passata sotto silenzio, la dimostrazione per assurdo di Saccheri indicò la strada per la creazione di geometrie non-euclidee, nella speranza di portarle ad una contraddizione. Opera questa in cui si impegnarono molti uomini di scienza tra il XVIII e il XIX secolo. Pochi però erano matematici di rilievo: Gauss, che non pubblicò mai nulla sull'argomento per timore delle *strida dei beoti*, Lagrange e Legendre costituiscono delle fulgide eccezioni. In effetti, Roberto Bonola, nel suo volume *La geometria non euclidea*, pubblicato da Zanichelli nel 1906, si trovò a dover inserire nei capitoli storici molti "dilettanti" tra i fondatori della geometria non euclidea: János Bolyai era un militare, Ferdinando Schweikart era un avvocato, e via di questo passo. Bolyai, inoltre, era figlio di un amico di Gauss, Farkas: dopo aver ricevuto l'opera di Janos nel gennaio 1832, Gauss scrisse a Farkas dicendo:

« Se inizio dicendo che non posso lodare quest'opera, tu resterai meravigliato per un istante. Ma non posso fare altrimenti, lodarlo sarebbe infatti lodare me stesso; tutto il contenuto dell'opera spianata da tuo figlio coincide quasi interamente con quanto occupa le mie meditazioni da trentacinque anni a questa parte [...] È dunque con gradevole sorpresa che mi viene risparmiata questa fatica [di pubblicare], e sono contento che il figlio di un vecchio amico mi abbia preceduto in modo così notevole. »

È di rilievo notare che i risultati della geometria "astrale", come Gauss chiamava la geometria iperbolica, erano in stridente contrasto con la filosofia kantiana, in quanto questa assumeva come giudizio sintetico *a priori* la geometria euclidea.

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann

Anche se aveva tenuto per sé i risultati più "rivoluzionari", il saggio *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato da Gauss nel 1828 segnò una svolta nell'indagine delle geometrie alternative. L'attenzione viene rivolta alle proprietà intrinseche delle superfici, a prescindere dallo spazio in cui sono immerse: questo metodo d'indagine viene esteso da Bernhard Riemann nel suo scritto *Sulle ipotesi che sono di fondamento della Geometria* del 1854 che venne pubblicato postumo nel 1867. Riemann getta le basi di una geometria totalmente nuova, detta → geometria riemanniana, in cui il problema delle parallele non si pone nemmeno, sostituendo il concetto di retta con quello metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza tra due punti. Si possono così costruire geometrie a curvatura costante, oppure che varia in ogni punto, in qualunque numero di dimensioni, ognuna corrispondente ad una superficie, detta varietà riemanniana n-dimensionale. In quest'ottica, la geometria euclidea è la geometria naturale del piano.

Riemann contribuì allo studio della geometria, oltre che generalizzando il concetto di metrica euclidea, anche sviluppando un nuovo tipo di geometria partendo dalla negazione del V postulato di Euclide, sostituendolo con quello che oggi viene indicato come *assioma di Riemann*:

Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

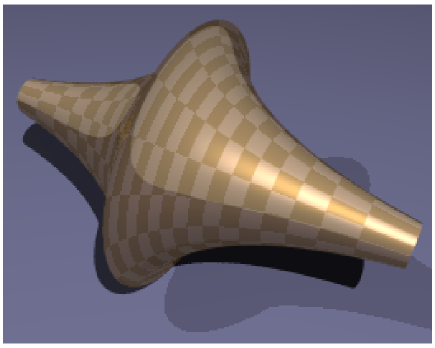
Da questo assioma segue subito che non esistono rette parallele e che cadono tutti i teoremi dimostrati facendo uso del V postulato di Euclide. Tuttavia, in geometria piana, si dimostra, senza fare uso dell'assioma delle parallele, che *per un punto passa almeno una parallela ad una retta data* (Proposizione 31 degli elementi di Euclide). Invece dall'assioma di Riemann segue che non esistono rette parallele. Questo dimostra che se si nega il V postulato di Euclide, allora, potrebbe essere necessario modificare anche altri assiomi del corpo teorico per rendere la teoria coerente.

La proposizione 31, nell'opera di Euclide è dimostrata facendo uso delle proposizioni 23[5] e 27[6] e quest'ultima dimostrata tramite la proposizione 16[7] . Quindi affinché l'assioma di Riemann produca una teoria assiomatica coerente, è necessario assicurarsi che non possa essere dimostrata più la proposizione 31. Per quanto detto occorre modificare i postulati di Euclide, o equivalentemente gli assiomi di Hilbert, al fine di rendere indimostrabile la proposizione 16. Ciò conduce ad una modifica del'assioma di incidenza e/o dell'assioma di ordinamento, generando due diverse geometrie localmente equivalenti: la → geometria sferica e la → geometria ellittica. Tale nomenclatura è attribuita a Klein.

Eugenio Beltrami

Eugenio Beltrami

A partire dai risultati di Riemann, Eugenio Beltrami dimostra la consistenza della nuova geometria e costruisce un modello in carta di una superficie a curvatura costante negativa, la pseudosfera iperbolica. Per comprendere la marginalità dell'argomento all'epoca, basti ricordare che un giornale dell'epoca definì il modello in carta *la Cuffia della Nonna*, nome che tutt'ora ritorna nella descrizione del modello all'Università di Pavia, dove è conservato, ossia *Cuffia di Beltrami*. A questo riguardo Beltrami scrisse a Houel il 19 dicembre 1869:



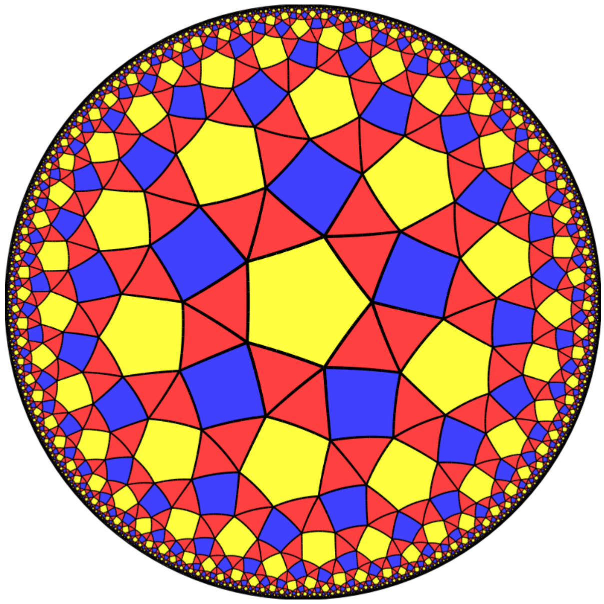
La pseudosfera

« Mi sembra che questa dottrina non abbia trovato in linea generale la sua completa "comprensione" a tal punto che nessuno ha ancora osservato questo fatto di importanza capitale, e cioè ch'essa è completamente indipendente dal postulato di Euclide. »

Nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* del 1867 Beltrami costruì il primo modello di → geometria iperbolica. Particolare di rilievo è che Beltrami scrisse il saggio senza essere a conoscenza dei risultati di Riemann, fatto che lo indusse a lasciarlo da parte per leggere l'*Habilitationsvortrag* di Riemann di cui sopra, prima di darlo alle stampe.

Henri Poincaré

Il modello di Beltrami aveva il difetto di essere valido solo localmente, come dimostrò David Hilbert nel 1901, e quindi dopo la morte di Beltrami. Un modello valido globalmente di → geometria iperbolica fu introdotto da Henri Poincaré. Lo spazio è un disco, le cui rette sono archi di circonferenza o segmenti di retta perpendicolari al bordo del disco: il modello prende il nome di disco di Poincaré. Gli angoli formati fra due rette sono quelli usuali, ma la distanza fra due punti è definita in modo completamente differente da quella euclidea: questa tende a infinito quando uno dei due punti viene spostato verso il bordo del disco. I punti nel bordo sono quindi "punti all'infinito".



Una tassellazione del disco di Poincaré tramite poligoni iperbolici. Questi appaiono sempre più piccoli all'avvicinarsi al bordo, benché risultino (nella geometria iperbolica) sempre della stessa grandezza.

Nel disco di Poincaré, un oggetto diventa sempre più piccolo se spostato verso il bordo del disco. Tale modello ha ispirato vari artisti, fra i quali Maurits Cornelis Escher.

Bibliografia

- *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria* di E. Agazzi, D. Palladino – Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- Imre Toth. Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. [8]. Edizioni Vita e Pensiero, 1998 Introduzione di Giovanni Reale (Google Libri). URL consultato il 31.03.2009.
- R. Bonola. La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. [9]. N. Zanichelli, 1906. URL consultato il 03.04.2008.
  - (**EN**) R. Bonola (tradotto da H. Carslaw). Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development [10]. Open Court Publishing Company, 1912. URL consultato il 03.04.2008.
- (**EN**) F. Enriques. Conferenze sulla geometria non-euclidea [11]. N. Zanichelli, 1918. URL consultato il 03.04.2008.
- (**FR**) P. Barbarin. La géométrie non euclidienne [12]. Gauthier-Villars, 1928. URL consultato il 03.04.2008.

Voci correlate

- Benno Erdmann
- Geometria del taxi
- → Geometria ellittica
- → Geometria iperbolica
- → Geometria sferica
- Topologia

Altri progetti

- **Wikibooks** contiene testi o manuali sulle **geometrie non euclidee**

Collegamenti esterni

- Le geometrie non euclidee [13]
- Geometrie non euclidee [14]
- Geometrie non euclidee e modelli cosmologici di Friedmann [15]

Riferimenti

[1] Sembra, infatti, che Euclide abbia sempre cercato di poter dimostrare il V postulato come derivato dagli altri. La sua stessa formulazione somiglia molto a quella tipica di un teorema: se.... allora..., si veda: V postulato di Euclide.

[2] C'è differenza tra il corpo teorico di una geometria, basato su una serie di assiomi dai quali si dimostrano varie proposizioni e teoremi, ed il suo modello. Ad esempio, possono esistere più modelli per una stessa geometria, ma non il contrario. Si veda, ad esempio, il caso della geometria iperbolica.

[3] Giovanni Reale, *Storia della filosofia greca e romana*, Vol. IV, *Aristotele e il primo peripato*, pagg.151-157, Edizioni Bompiani 2004. Vedi anche: Imre Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Edizioni Vita e Pensiero 1998.

[4] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. Omar Khayyam (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Printonly/Khayyam.html). MacTutor History of Mathematics, luglio 1999. URL consultato il 4.4.2008.

[5] Proposizione 23 - Costruire un angolo uguale ad un angolo dato.

[6] Proposizione 27 - Se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano con quest'ultima angoli alterni interni uguali, le due rette sono parallele.

[7] Proposizione 16 - In ogni triangolo, un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso.

[8] http://books.google.it/books?id=UxC8YYSN84AC&dq=Corpus+Aristotelicum&printsec=frontcover&source=bl&ots=-crZHfzV5X&sig=ut7JdNZXicBTq9lWVXTQTr-VbNk&hl=it&ei=6RnSSfzzMcSKsAbLoPiXBA&sa=X&oi=book_result&resnum=2&ct=result#PPP1,M2

[9] http://resolver.library.cornell.edu/math/1971483

[10] http://www.archive.org/details/noneuclideangeom00bonorich

[11] http://name.umdl.umich.edu/ABK7963.0001.001

[12] http://gallica.bnf.fr/notice?N=FRBNF35067284

[13] http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/index.htm

[14] http://ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2006/Ubib061229s002/at_download/file/Ubib061229s002.pdf

[15] http://www.codas.it/home2/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=60&Itemid=67

Geometria ellittica

La **geometria ellittica** o **riemanniana** è una → geometria non euclidea ideata dal matematico Bernhard Riemann. Nasce dalla negazione del V postulato di Euclide, o equivalentemente dal IV.1 assioma di Hilbert. Tuttavia, affinché sia una teoria assiomatica coerente, è necessario modificare anche l'assioma di ordinamento[1] . Tale geometria è localmente equivalente alla → geometria sferica.

Corpo assiomatico

Con riferimento alla classificazione assiomatica proposta da Hilbert per la geometria euclidea, riportiamo di seguito quella relativa alla geometria ellittica.

I - Assiomi di appartenenza

1. Per ogni coppia di punti distinti passa sempre almeno una retta.
2. Per ogni coppia di punti distinti passa una retta sola.
3. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.
4. Tre punti non allineati sono contenuti in almeno un piano
5. Tre punti non allineati sono contenuti in un piano solo
6. Se due punti contenuti in una retta *r* stanno in un piano *p*, allora *p* contiene ogni punto di *r*.
7. Se due piani contengono lo stesso punto, allora esiste almeno un altro punto contenuto in entrambi.
8. Ogni retta contiene almeno due punti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati, ed esistono almeno quattro punti non complanari.

II - Assiomi di ordinamento

1. Se S (AB | CD), allora A, B, C, D sono quattro punti distinti appartenenti alla stesa retta.
2. Se S (AB | CD), allora: S (BA | CD); S (AB | DC); S (BA | DC); S (CD | AB); S (CD | BA); S (DC | AB); S (DC | BA).
3. Se A, B, C sono tre punti di una retta, allora esiste almeno un punto D tale che S (AB | CD).
4. Se A, B, C, D sono quattro punti distinti appartenenti alla stessa retta, allora esiste una coppia di punti che separa la coppia costituita dagli altri due; vale cioè almeno una delle seguenti relazioni: S (AB | CD), S (AC | BD), S (AD | BC).
5. Se S (AB | CD) e S (AC | BE), allora S (AB | DE).
6. Una retta che, passante per un vertice, entra in un triangolo, incontra il lato opposto.

III - Assiomi di congruenza

1. Se A, B sono due punti di una retta ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta ovvero su un'altra a', si può sempre trovare un punto B', da una data parte della retta a' rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente, ovvero uguale, al segmento A'B' ; in simboli: AB ≡ A'B' .
2. Se un segmento A'B' ed un segmento A"B" sono congruenti ad uno stesso segmento AB, A'B' ≡ AB e A"B" ≡ AB , allora anche il segmento A'B' è congruente al segmento A"B".
3. Siano AB e BC due segmenti senza punti in comune (questo vuol dire che i punti A e C sono opposti rispetto a B) su una retta a ed A'B' e B'C' due segmenti sulla stessa retta o su un'altra a', sempre senza punti in comune. Allora se è AB ≡ A'B' e BC ≡ B'C' , è pure AC ≡ A'C'.
4. Siano dati un angolo ∢(h,k) in un piano α ed una retta a' in un piano α', come pure un determinato lato di a' in α'. Si indichi con h' una semiretta della retta a' che abbia origine in O'. C'è allora nel piano una ed una sola semiretta k' tale che l'angolo ∢(h,k) è congruente, ovvero uguale, all'angolo ∢(h',k') ed allo stesso tempo tutti i punti interni

all’angolo ∠(h’,k’) che stanno dalla parte di a’.
5. Se per due triangoli ABC ed A’B’C’ valgono le congruenze AB ≡ A’B’, AC ≡ A’C’, ∠ABC ≡ ∠A’B’C’, Allora è sempre valida la congruenza: ∠ABC ≡ ∠A’B’C’.

IV - Assioma di Riemann

1. Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

V - Assioma di continuità (o di Dedekind)

1. Se i punti di un segmento AB sono divisi in due classi non vuote in modo che:
   a) tutti i punti di AB siano in una o nell’altra classe (e in una sola);
   b) i punti A e B appartengono a classi diverse (che chiameremo rispettivamente I e II classe);
   c) tutti i punti della I classe precedono quelli della II;
   allora esiste nel segmento AB un punto C (che può appartenere sia alla I che alla II classe) tale che tutti i punti del segmento AB che precedono C appartengono alla I classe, e tutti quelli che seguono C appartengono alla II classe. C si dice punto di separazione tra le due classi.

Modelli di geometria ellittica

I modelli della geometria ellittica (come quella sferica) sono modelli sintattici della → geometria euclidea, che hanno come conseguenza la non contraddittorietà della geometria ellittica piana, supposta la non contraddittorietà della geometria euclidea piana.

Dato un punto O dello spazio euclideo, chiamiamo stella di centro O l'insieme di tutte le rette e di tutti i piani passanti per O. Definiamo tale interpretazione come segue:

piano	insieme delle rette della stella di centro O
punto	retta della stella di centro O
retta	piano della stella di centro O
segmento	angolo euclideo tra le rette che sono i punti esterni del segmento
angolo tra due rette	angolo diedro formato dai piani che rappresentano le due rette.
appartenenza di un punto ad una retta	usuale appartenenza tra rette e piani euclidei
congruenza tra segmenti e tra angoli	come in geometria euclidea tra angoli diedri
separazione tra quattro punti allineati	separazione euclidea tra rette complanari appartenenti allo stesso fascio di centro O

In base a tali definizioni gli assiomi della geometria ellittica diventano proposizioni dimostrabili della geometria euclidea della stelle di rette e piani.

A questo modello si può apportare una prima modifica in modo da renderlo più intellegibile. Possiamo considerare l'intersezione di una stella di centro O con una sfera di centro O. Così facendo gli enti geometrici della stella possono essere reinterpretati come le intersezioni di tali elementi con la superficie della stella.

Una ulteriore modifica consente una semplificazione ulteriore del modello che lo rende molto simili al modello della geometria sferica sua una sfera. Tale modifica consiste nel prendere in esame l'intersezione della stella di centro O con una semisfera di centro O.

Il modello di stella di centro O può essere visto come la proiezione stereografica di una semisfera di centro O prodotta dall'intersezione di un piano passante per O, da cui si può meglio intuire l'equivalenza locale tra la → geometria sferica e la geometria ellittica.

Teoremi della geometria ellittica piana

- **La circonferenza**
  La circonferenza è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto dato detto centro. Si dimostra che una circonferenza può anche essere definita come il *luogo dei punti equidistanti da una retta data*.
- **Area di un Triangolo**
  Dato un triangolo sferico costruito su una sfera di raggio *R* di angoli α, β, γ , l'area *A* del triangolo è:
  $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$[2].
- **Somma degli angoli interni di un triangolo**
  Dalla relazione precedente subito discende che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di π :
  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$.
- **Criteri di congruenza tra triangoli**
  Sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali:

1. due lati e l'angolo compreso;
2. due angoli e il lato comune
3. i tre lati;
4. i tre angoli.

- **Teorema di Pitagora**
  Se ABC è un triangolo sferico retto in A e con ipotenusa a, e con b e c le lunghezze dei suoi lati, allora il coseno dell’ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti: $\cos(a/k) = \cos(b/k)\cos(c/k)$[3] Facendo lo sviluppo in serie al secondo ordine delle funzioni trigonometriche, si ottiene l'espressione universalmente nota del → Teorema di Pitagora in geometria euclidea: $a^2 = b^2 + c^2$
- **Area di un poligono sferico**
  L'area di un poligono sferico di *n* lati è:
  $A = R^2(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n - (n-2)\pi)$.
  La sua dimostrazione si basa sulla possibilità di scomporre un poligono sferico in triangoli.
- Tutte le perpendicolari ad una retta concorrono in un punto.
- In un triangolo rettangolo l'angolo opposto ad uno dei due lati dell'angolo retto è acuto, ottuso o retto a seconda che tale lato è minore, maggiore o congruente all'altro lato dell'angolo retto.

Teoremi della geometria ellittica nello spazio

- Una retta ed un piano hanno sempre un punto in comune
- Due piani hanno sempre una retta in comune
- Tutte le rette perpendicolari ad un piano si incontrano in un punto posto a distanza *d* da esso.
- Il luogo dei punti a distanza *d* da un punto P è un piano che è perpendicolare a tutte le rette passanti per P. Tale piano è detto piano polare di P e P è detto polo.
- Se il punto P sta sul piano *a*, il polo di *a* sta sul piano polare di P.

La trigonometria sferica nello spazio ellittico, se si adottano opportune convenzioni sulla misura dei lati e degli angoli dei triangoli sferici, coincide con la trigonometria sferica euclidea ed iperbolica. Cioè la trigonometria sferica appartiene al corpo della geometria assoluta.

Bibliografia

- *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria* di E. Agazzi, D. Palladino – Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori.

Voci correlate

- → Geometria euclidea
- → Geometria non euclidea
- V postulato di Euclide
- Assiomi di Hilbert
- → Geometria sferica
- → Geometria iperbolica
- → Geometria proiettiva

Collegamenti esterni

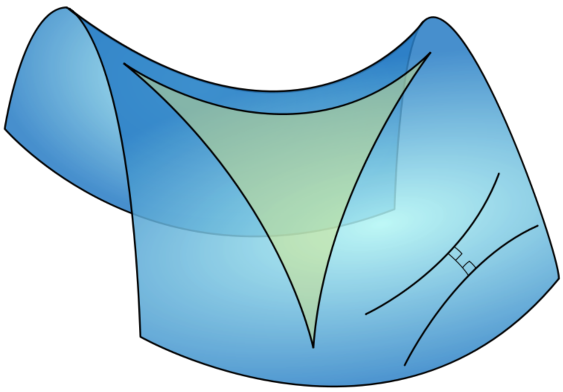
- Geometrie non euclidee [13]

Riferimenti

[1] Per saperne di più sulla genesi della geometria ellittica si veda qui
[2] (\alpha+ \beta+ \gamma-\pi) è detto eccesso angolare.
[3] k è un parametro dimensionale che dipende dalle unità di misura scelto per indicare le misure dei lati del triangolo.

Geometria iperbolica

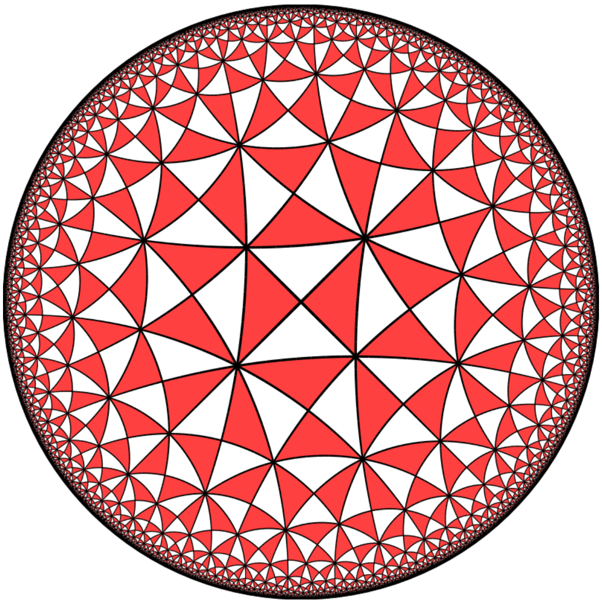
La **geometria iperbolica**, anche chiamata **geometria della sella** o **geometria di Lobachevsky**, è una → geometria non euclidea ottenuta rimpiazzando il postulato delle parallele con il cosiddetto *postulato iperbolico*.



Nella geometria iperbolica, le rette parallele generalmente "divergono" e gli angoli interni di un triangolo sono più piccoli che nella geometria euclidea. Questo è quanto accade ad esempio per le geodetiche su una superficie a forma di sella come questa.

La geometria iperbolica è stata inizialmente studiata da Saccheri nel secolo XVIII, che tuttavia ha creduto essere inconsistente, e più tardi da Bolyai, Gauss e Lobachevsky, con il nome di *geometria astrale*.

A 150 anni dalla sua nascita, la geometria iperbolica è ancora un argomento centrale della matematica, ravvivato alla fine degli anni 70 dalle scoperte di William Thurston.



Il disco di Poincaré è un modello di geometria iperbolica. Nella figura è descritta una tassellazione del disco tramite triangoli iperbolici: nonostante appaiano diversi, nella geometria iperbolica questi triangoli sono in realtà tutti congruenti, cioè di eguale grandezza. A partire di tassellazioni di questo tipo Escher ha costruito alcune delle sue famose litografie.

Cenni storici

Nikolay Ivanovich Lobachevsky ha contribuito alla nascita e allo sviluppo della geometria iperbolica.

La geometria iperbolica nasce nel XIX secolo come strumento *ad hoc* per risolvere un problema aperto da secoli e noto già allo stesso Euclide: il V postulato di Euclide è effettivamente indipendente dai precedenti, o può essere dimostrato a partire da questi? La geometria iperbolica, che soddisfa i primi 4 postulati ma non il quinto, ne mostra l'effettiva indipendenza.

La geometria iperbolica però non viene accettata subito come vera e propria geometria, con dignità pari a quella euclidea. Le scoperte di Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobačevskij, Bolyai furono giudicate all'inizio sorprendenti e paradossali e solo nel tempo hanno poi trovato una naturale collocazione ed una rigorosa e logica giustificazione. Lentamente si è scoperto che la geometria iperbolica non è soltanto frutto della negazione del V postulato, ma è una geometria vera e propria con sue proprietà e definizioni, che può essere considerata nuova rispetto a quella euclidea.

La scoperta e lo sviluppo della geometria iperbolica sono quindi un esempio fondamentale di un processo della ricerca matematica che è divenuto usuale negli ultimi due secoli: in matematica può accadere che, modificando un solo assioma, si possa costruire una nuova teoria completa, dove decadono alcune proprietà che sembrano fondamentali, ma si possono scoprire nuovi enti geometrici (come le iperparallele, gli orocicli e le orosfere, etc.) aventi proprietà comunque interessanti.

Definizione

Due rette nel piano che non si intersecano in nessun punto sono dette parallele. Il V postulato di Euclide (o *delle parallele*) asserisce che, data una retta r ed un punto P, esiste un'unica retta parallela a r passante per P.

La **geometria iperbolica** è la geometria ottenuta modificando questo postulato, nel modo seguente:

Data una retta r e un punto P disgiunto da r, esistono almeno due rette distinte passanti per P e parallele a r.

La → geometria ellittica è una geometria ottenuta modificando il V postulato in direzione opposta. Uno spazio su cui è costruita una geometria iperbolica è detto spazio iperbolico. I primi 4 assiomi di Euclide, validi in tutte le geometrie, sono i seguenti.

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente.
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali.

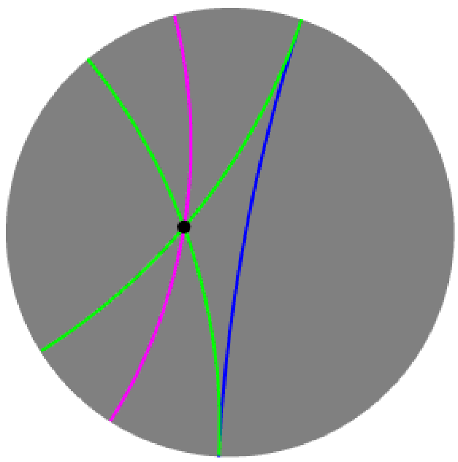
Modelli

L'effettiva esistenza di geometrie iperboliche è garantita dalla costruzione di alcuni modelli. In realtà, questi modelli risultano essere tutti equivalenti fra loro: per questo motivo la geometria iperbolica è sostanzialmente unica, come lo sono la → geometria euclidea e la → geometria ellittica[1] .

Un modello è uno spazio, comprendente le nozioni di punto, retta e angolo, su cui valgono i 5 assiomi della geometria iperbolica. Vi sono quattro modelli comunemente usati per la geometria iperbolica. In ciascuno di questi modelli, la geometria iperbolica può essere introdotta a vari livelli. Nel senso più classico, può essere introdotta definendo punti, linee rette, angoli, e eventualmente distanze.

Modello del disco

Nel modello del disco di Poincaré, lo spazio iperbolico è formato dai punti interni ad un cerchio C. Le rette sono archi di circonferenza che intersecano il bordo del cerchio perpendicolarmente. Gli angoli che formano due di queste "rette" quando si intersecano in un punto sono quelli formati dalle rette tangenti nel punto. La distanza fra due punti è definita in modo tale da crescere esponenzialmente quando uno dei due punti è spostato verso il bordo del cerchio.



Data una retta (qui in blu scuro) ed un punto disgiunti, esistono almeno due rette passanti per il punto che non incrociano la retta. In verità ce ne sono infinite: qui ne sono disegnate tre.

I 5 assiomi della geometria iperbolica sono soddisfatti da questo modello. Infatti:

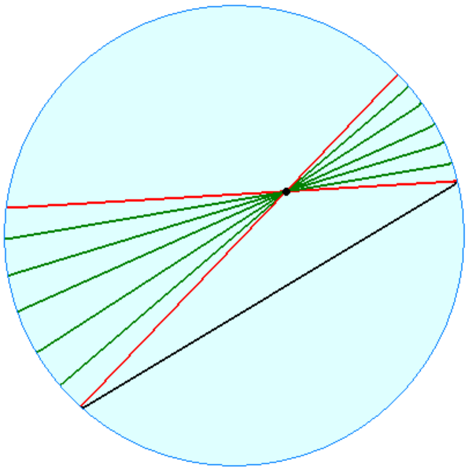
1. Dati due punti interni a C, esiste effettivamente un'unica circonferenza parallela al bordo del cerchio passante per i due punti.
2. Un arco di circonferenza può essere prolungato indefinitamente: il fatto che la distanza tenda a infinito all'avvicinarsi del bordo di C implica che tale bordo non è raggiunto mai, e quindi il prolungamento non si interrompe.
3. È possibile disegnare un cerchio con centro e raggio fissato.
4. Gli angoli retti sono uguali.
5. Dato un punto P ed una retta r che non lo contiene, esistono almeno due rette passanti per P disgiunte da r.

Modello dell'iperpiano

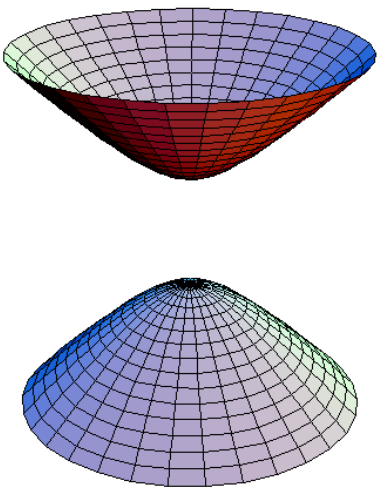
Il modello del semipiano è simile al modello del disco. Lo spazio iperbolico è il semipiano del piano cartesiano formato dal I e dal II quadrante: l'asse delle ascisse non è inclusa. Le "rette" sono archi di circonferenza ortogonali all'asse delle ascisse. Gli angoli sono quelli formati dalle rette tangenti.

Modello di Klein

Nel *modello di Klein* lo spazio iperbolico è (come nel modello del disco) l'insieme dei punti interni ad un cerchio C . Le rette sono però segmenti veri e propri: la maggiore semplicità nel descrivere le rette viene però pagata nella descrizione degli angoli, che sono distorti rispetto agli angoli euclidei: l'angolo formato da due rette non è quello euclideo, ma dipende da questo tramite una formula opportuna.



Il V postulato della geometria iperbolica nel modello di Klein.



Lo spazio iperbolico può essere rappresentato come una delle due "falde" di un iperboloide, ad esempio quella superiore. Le rette sono le intersezioni con i piani passanti per il centro dell'iperboloide.

Modello dell'iperboloide

Nel *modello dell'iperboloide* lo spazio iperbolico è descritto con l'ausilio dell'→ algebra lineare. Lo spazio iperbolico è un iperboloide contenuto nello spazio tridimensionale, e le rette sono le intersezioni dell'iperboloide con un piano passante per il centro dell'iperboloide. La descrizione matematica di questo modello ha forti analogie con lo spaziotempo di Minkowski: la distanza fra due punti è la stessa usata nella relatività speciale.

Questo modello è agevole per effettuare alcuni conti, perché si poggia sugli strumenti dell'algebra lineare. Risulta però meno intuitivo e più difficile da visualizzare, perché contenuto nello spazio tridimensionale anziché nel piano.

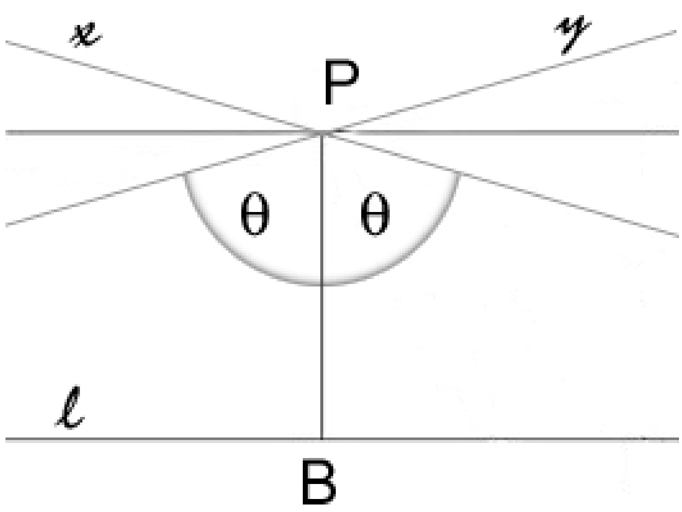
Proprietà

Parallelismo

La nozione di parallelismo in geometria iperbolica differisce molto da quella presente nella geometria euclidea.

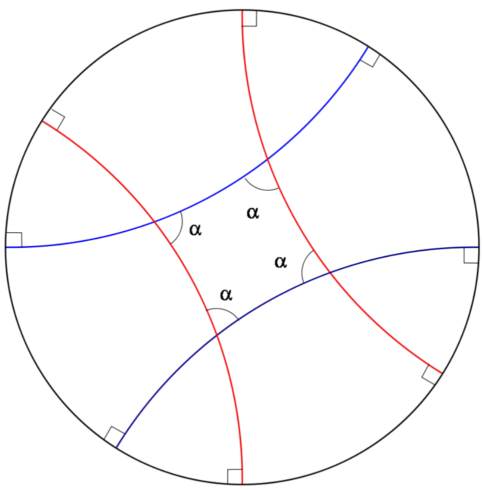
Il quinto postulato iperbolico asserisce che, data una retta l ed un punto P disgiunto da r, esistono almeno due rette parallele a r passanti per P. Dal postulato risulta però che tali rette sono infinite: questo segue dai fatti seguenti.

1. Sia B il punto di l più vicino a P. Il segmento PB è perpendicolare a l (si veda la figura). Ogni retta s passante per P è adesso identificata dall'angolo θ che forma con il segmento PB. L'angolo è detto angolo di parallelismo di l e s.
2. Se due rette s_1 e s_2 sono parallele a l, queste formano angoli diversi θ_1 e θ_2: ogni altra retta con un angolo compreso fra θ_1 e θ_2 risulta essere parallela a l.



Le rette parallele a una data l passanti per P formano un angolo θ, detto angolo di parallelismo.

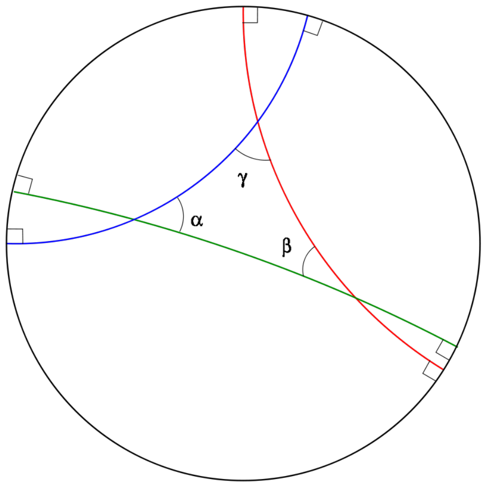
Le rette parallele a l passanti per P sono tutte e sole le rette con angolo di parallelismo appartenente ad un intervallo chiuso $[\theta, \pi - \theta]$. Le rette con angolo di parallelismo θ e $\pi - \theta$ sono dette *asintoticamente equivalenti* a l, perché in una direzione queste si avvicinano sempre più a r, senza mai intersecarla. Due rette parallele che non sono asintoticamente equivalenti sono *iperparallele*: queste si distanziano in entrambe le direzioni in modo esponenziale.
In geometria iperbolica la nozione di parallelismo è quindi più complessa che nella geometria euclidea: ad esempio, la nozione non è una relazione di equivalenza, perché non vale la proprietà transitiva.



Un quadrato è un poligono con 4 lati di eguale lunghezza e 4 angoli uguali α. Nella geometria euclidea α deve essere un angolo retto. In quella iperbolica, può essere un qualsiasi angolo acuto.

Poligoni

Come nella geometria euclidea, un segmento è una porzione di retta delimitata da due punti (i suoi estremi), ed un → poligono è una figura delimitata da una successione di segmenti, tale che due segmenti successivi si intersecano agli estremi.



In geometria iperbolica, la somma $\alpha+\beta+\gamma$ degli angoli interni di un triangolo è minore di π (o 180°).

Le relazioni fra lunghezze dei lati e angoli interni in geometria iperbolica sono però ben diverse da quelle presenti nella geometria euclidea. Ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico è strettamente minore di π: questa può assumere qualsiasi valore nell'intervallo aperto $(0,\pi)$. Gli angoli interni nella geometria iperbolica sono più piccoli.

Questo fatto si estende a tutti i poligoni: la somma degli angoli interni di un poligono iperbolico con n lati è un numero variabile nell'intervallo $(0,(n-2)\pi)$. Ad esempio:

- Esistono quadrati aventi angoli interni α per ogni α tale che $0<\alpha<\pi/2$: un esempio è mostrato in figura.
- Per ogni $n>4$esiste un poligono di n lati della stessa lunghezza con angoli tutti retti.

Costruzioni con riga e compasso

Nella geometria iperbolica è possibile costruire con riga e compasso il segmento avente come angolo di parallelismo un angolo dato.

In alcuni casi è possibile la quadratura del cerchio, contrariamente a quanto accade nella → geometria euclidea, dove non è mai possibile determinare con riga e compasso il lato di un quadrato avente la medesima area di un cerchio dato.

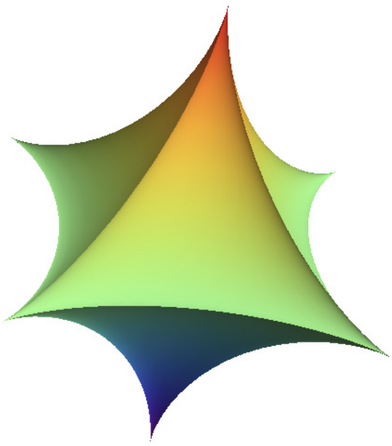
Trigonometria

Un altro risultato interessante è dato dalle formule della trigonometria della sfera che sono le stesse sia nello spazio iperbolico sia in quello euclideo poiché le proprietà della geometria della sfera derivano dalle proprietà degli angoloidi e dei triedri, le quali sono proprietà di geometria assoluta.

Il discorso vale anche nel piano, dove la trigonometria iperbolica piana non è altro che la trigonometria applicata su una sfera con raggio immaginario.

Geometria iperbolica dello spazio

La geometria iperbolica si estende dal piano allo spazio, e anche in dimensioni arbitraria. Ciascuno dei modelli di spazio iperbolico ha infatti una naturale generalizzazione in dimensione n qualsiasi. Esiste quindi una → geometria solida dello spazio iperbolico tridimensionale $n = 3$, che è oggetto di studio della matematica contemporanea. Di particolare interesse sono i poliedri iperbolici, come l'ottaedro mostrato in figura.



Un ottaedro iperbolico.

Bibliografia

- Coxeter, H. S. M. (1942) *Non-Euclidean geometry*, University of Toronto Press, Toronto
- Milnor, John W. (1982) *Hyperbolic geometry: The first 150 years* [2], Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 6, Number 1, pp. 9-24.
- Reynolds, William F. (1993) *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*, American Mathematical Monthly 100:442-455.
- Stillwell, John. (1996) *Sources in Hyperbolic Geometry*, volume 10 in AMS/LMS series *History of Mathematics*.
- Samuels, David. (March 2006) *Knit Theory* Discover Magazine, volume 27, Number 3.
- James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer 2005, ISBN 1-85233-934-9

Voci correlate

- Spazio iperbolico
- Geometrie non euclidee
- → Geometria ellittica
- → Geometria euclidea

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Geometria iperbolica**

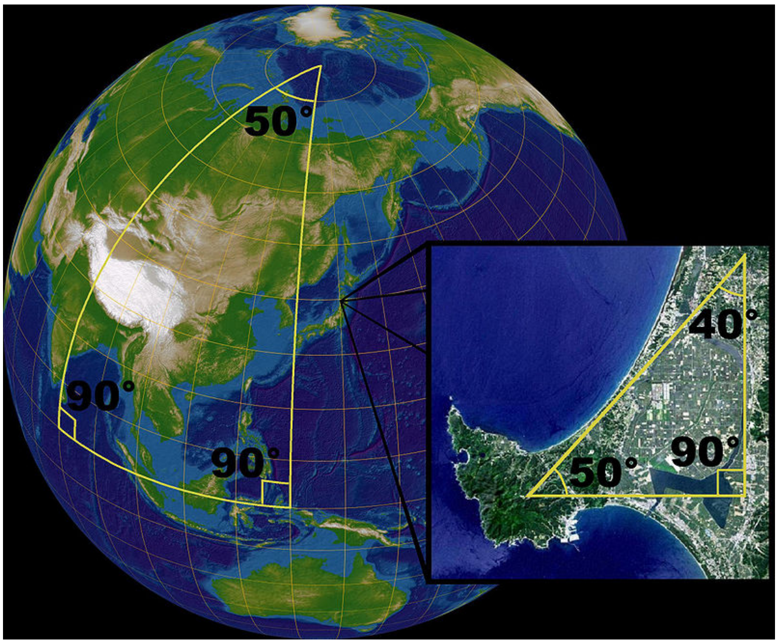
Riferimenti

[1] Una formulazione più rigorosa di queste geometrie può essere inquadrata all'interno degli assiomi di Hilbert, che completano quelli di Euclide.

[2] http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183548588

Geometria sferica

La **geometria sferica** è una → geometria non euclidea ideata dal matematico Bernhard Riemann. La geometria sferica possiede una immediata interpretazione nella geometria euclidea. Infatti il suo modello si presenta come "descritto" dalla → geometria della superficie di una sfera. Ha applicazioni pratiche nella navigazione e nell'astronomia.



Su una sfera, la somma degli angoli di un triangolo non è uguale a 180°. La sfera non è uno spazio euclideo, ma localmente le leggi della geometria euclidea forniscono buone approssimazioni.

La geometria sferica nasce dalla negazione del V postulato di Euclide, o equivalentemente dal IV.1 postulato di Hilbert. Tuttavia, affinché sia una teoria assiomatica coerente, è necessario modificare anche gli assiomi di incidenza e di ordinamento della geometria euclidea (nel caso della → geometria ellittica solo quello di ordinamento)[1] . Essa è caratterizzata dall'assenza di rette parallele.

Di seguito presentiamo prima il corpo assiomatico della geometria sferica piana e successivamente ne analizzeremo un suo modello. Per una comprensione più intuitiva si può, volendo, leggere prima della trattazione assiomatica il seguente paragrafo: Modello di geometria sferica

Corpo assiomatico

Con riferimento alla classificazione assiomatica proposta da Hilbet per la geometria euclidea, riportiamo di seguito quella relativa alla geometria sferica piana.

I concetti primitivi sono il punto, i le coppie di punti detti punti antipodali, la retta, e il → piano. Ci sono anche due relazioni binarie ed una relazione quaternaria primitive:

- *Contiene*: un punto può essere contenuto in una retta o in un piano, ed una retta può essere contenuta in un piano;
- *Separa*: la coppia di punti AB separa la coppia di punti CD, in simboli: S(AB|CD) (relazione quaternaria);
- *Congruenza*, indicata con il simbolo "≡": angoli e segmenti possono essere congruenti.

Il *segmento* fra due punti *A* e *B* è definito come la porzione di retta compresa tra i punti *A* e *B* (inclusi *A* e *B*).

I - Assiomi di appartenenza

1. L’insieme dei punti del piano è suddiviso in coppie di punti, tali che ogni punto del piano appartiene ad una e una sola coppia e i punti di ciascuna coppia sono distinti. Per due punti che appartengono a coppie distinte, passa una ed una sola retta mentre per i due punti di una stessa coppia passano più rette.
2. Su ogni retta vi sono almeno tre punti.
3. Non tutti i punti appartengono alla stessa retta.

II - Assiomi di ordinamento

1. Se S (AB | CD), allora A, B, C, D sono quattro punti distinti appartenenti alla stesa retta.
2. Se S (AB | CD), allora: S (BA | CD); S (AB | DC); S (BA | DC); S (CD | AB); S (CD | BA); S (DC | AB); S (DC | BA).
3. Se A, B, C sono tre punti di una retta, allora esiste almeno un punto D tale che S (AB | CD).
4. Se A, B, C, D sono quattro punti distinti appartenenti alla stessa retta, allora esiste una coppia di punti che separa la coppia costituita dagli altri due; vale cioè almeno una delle seguenti relazioni: S (AB | CD), S (AC | BD), S (AD | BC).
5. Se S (AB | CD) e S (AC | BE), allora S (AB | DE).
6. Una retta che, passante per un vertice, entra in un triangolo, incontra il lato opposto.

III - Assiomi di congruenza

1. Se A, B sono due punti di una retta ed inoltre A’ è un punto sulla stessa retta ovvero su un’altra a’, si può sempre trovare un punto B’, da una data parte della retta a’ rispetto ad A’, tale che il segmento AB sia congruente, ovvero uguale, al segmento A’B’ ; in simboli: AB ≡ A’B’ .
2. Se un segmento A’B’ ed un segmento A”B” sono congruenti ad uno stesso segmento AB, A’B’ ≡ AB e A”B” ≡ AB , allora anche il segmento A’B’ è congruente al segmento A”B”.
3. Siano AB e BC due segmenti senza punti in comune (questo vuol dire che i punti A e C sono opposti rispetto a B) su una retta a ed A’B’ e B’C’ due segmenti sulla stessa retta o su un’altra a’, sempre senza punti in comune. Allora se è AB ≡ A’B’ e BC ≡ B’C’ , è pure AC ≡ A’C’.
4. Siano dati un angolo $\sphericalangle$(h,k) in un piano α ed una retta a’ in un piano α', come pure un determinato lato di a’ in α'. Si indichi con h’ una semiretta della retta a’ che abbia origine in O’. C’è allora nel piano una ed una sola semiretta k’ tale che l’angolo $\sphericalangle$(h,k) è congruente, ovvero uguale, all’angolo $\sphericalangle$(h’,k’) ed allo stesso tempo tutti i punti interni all’angolo $\sphericalangle$(h’,k’) che stanno dalla parte di a’.
5. Se per due triangoli ABC ed A’B’C’ valgono le congruenze AB ≡ A’B’, AC ≡ A’C’, $\sphericalangle$ABC ≡ $\sphericalangle$A’B’C’, Allora è sempre valida la congruenza: $\sphericalangle$ABC ≡ $\sphericalangle$A’B’C’.

IV - Assioma di Riemann

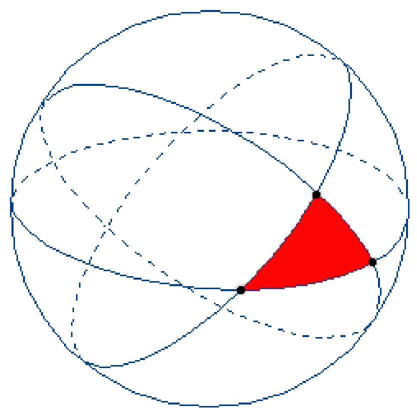
1. Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

V - Assioma di continuità (o di Dedekind)

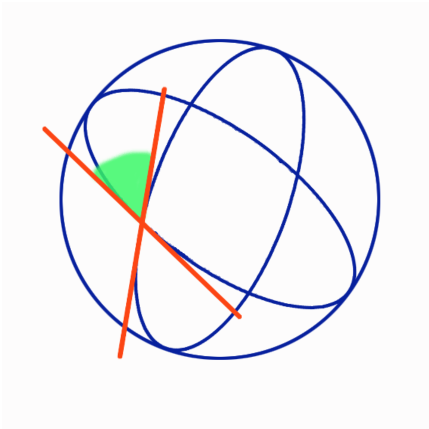
1. Se i punti di un segmento AB sono divisi in due classi non vuote in modo che:
   a) tutti i punti di AB siano in una o nell’altra classe (e in una sola);
   b) i punti A e B appartengono a classi diverse (che chiameremo rispettivamente I e II classe);
   c) tutti i punti della I classe precedono quelli della II;
   allora esiste nel segmento AB un punto C (che può appartenere sia alla I che alla II classe) tale che tutti i punti del segmento AB che precedono C appartengono alla I classe, e tutti quelli che seguono C appartengono alla II classe. C si dice punto di separazione tra le due classi.

Modello di geometria sferica

Come già accennato precedentemente un modello di geometria sferica è quello costruito su una sfera come preciseremo di seguito. Nella → geometria piana i concetti base sono il punto e la retta. Su una sfera, i punti sono definiti nel senso usuale. Le rette sono definite come cerchi massimi. Pertanto, nella geometria sferica gli angoli sono definiti tra cerchi massimi, e ne deriva una trigonometria nel piano sferico che differisce dalla trigonometria euclidea nel piano (ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto). Invece la trigonometria sferica nello spazio sferico (ma anche in quello ellittico), se si adottano opportune convenzioni sulla misura dei lati e degli angoli dei triangoli sferici, coincide con la trigonometria sferica euclidea ed iperbolica. Cioè la trigonometria sferica appartiene al corpo della geometria assoluta.
La distanza tra due punti della sfera è il segmento minimo che li unisce, geodetica.



Numero di triangoli che si formano dall'intersezione di tre rette.



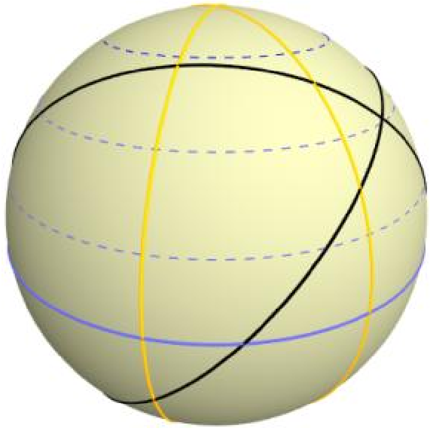
Uno degli angoli individuato da due rette incidenti.

piano	insieme dei punti di una superficie sferica dello spazio euclideo
punto	punto della superficie della sfera
retta	cerchio massimo della superficie sferica (cerchio di intersezione della superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera)
segmento	parte di una retta delimitato da due punti della retta stessa
appartenenza	usuale appartenenza in senso euclideo
punti antipodali	punti diametralmente opposti della superficie sferica
congruenza tra segmenti	congruenza tra archi di cerchio massimo in geometria euclidea (definita medianta la congruenza delle corde o mediante i movimenti della sfera)
angolo tra due rette	angolo diedro tra i due piani che tagliano la sfera secondo le due rette, oppure angolo che coincide con l'angolo delle due rette euclidee tangenti alla sfera nel punto di intersezione delle due rette sferiche e giacenti nei piani da esse individuati
congruenza tra angoli	congruenza tra angoli in senso euclideo

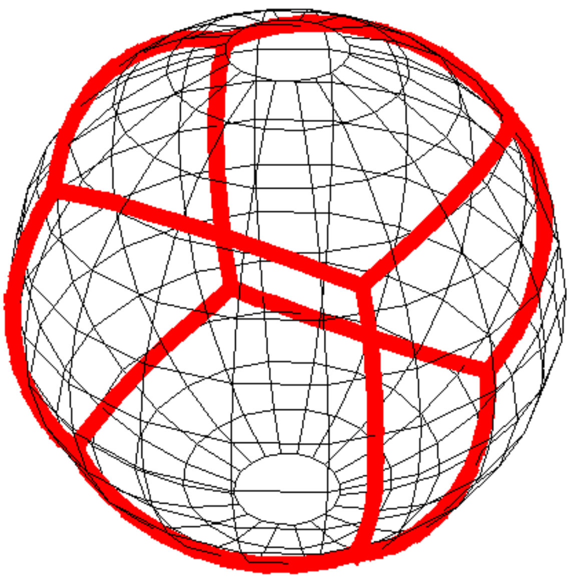
In base a tale interpretazione (modello) tutti gli assiomi e le proprietà della geometria sferica risultano essere proposizioni in geometria euclidea. infatti, ad esempio, per due punti antipodali passano infinite rette.

Teoremi

- **La circonferenza**
  La circonferenza è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto dato detto centro. Si dimostra che una circonferenza può anche essere definita come il *luogo dei punti equidistanti da una retta data*.



Le rette sono i cerchi massimi (linee continue viola, nere, gialle). In figura le circonferenze tratteggiate in grigio non sono né rette né segmenti, ma curve.



Cubo sferico.

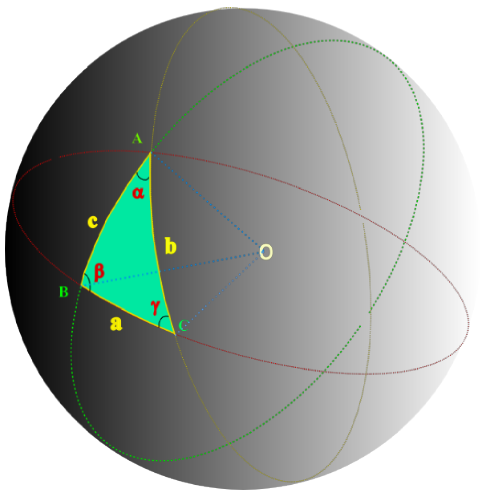
- **Area di un Triangolo**
  Dato un triangolo sferico costruito su una sfera di raggio *R* di angoli α, β, γ, l'area *A* del triangolo è:
  $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ [2].
- **Somma degli angoli interni di un triangolo**
  Dalla relazione precedente subito discende che la somma degli angoli interni di un trinagolo è sempre maggiore di π:
  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$.
- **Criteri di congruenza tra triangoli**
  Sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali:

1. due lati e l'angolo compreso;
2. due angoli e il lato comune

3. i tre lati;
4. i tre angoli.

- **Teorema di Pitagora**
  Se ABC è un triangolo sferico retto in A e con ipotenusa a, e con b e c le lunghezze dei suoi lati, allora il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti: $\cos(a/k) = \cos(b/k)\cos(c/k)$ [3] Facendo lo sviluppo in serie al secondo ordine delle funzioni trigonometriche, si ottiene l'espressione universalmente nota del → Teorema di Pitagora in geometria euclidea: $a^2 = b^2 + c^2$
- **Area di un poligono sferico**
  L'area di un poligono sferico di *n* lati è:
  $A = R^2(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n - (n-2)\pi)$.
  La sua dimostrazione si basa sulla possibilità di scomporre un poligono sferico in triangoli.
- **Formula di eulero**
  Dato un poliedro sferico convesso con V vertici, E spigoli ed F facce, vale:
  V-E+F=2.
- Tutte le perpendicolari ad una retta concorrono in due punti, punti antipodali.
- Due punti antipodali dividono la retta in due parti congruenti.
- Due punti antipodali dividono in due parti congruenti tutte le rette che passano per essi.
- Tutte le rette sono congruenti.
- Dati quattro punti distinti A, B, C, D di una stessa retta, vale al più una delle seguenti relazioni: S(AB|CD), S(AC|BD), S(AD|BC).
- In un triangolo rettangolo l'angolo opposto ad uno dei due lati dell'angolo retto è acuto, ottuso o retto a seconda che tale lato è minore, maggiore o congruente all'altro lato dell'angolo retto.

Varietà sferiche



Triangolo sferico

Oltre alla sfera bidimensionale, altri spazi hanno una geometria sferica: questi spazi vengono denominati varietà sferiche. La geometria sferica è data formalmente da una struttura di varietà riemanniana con curvatura sezionale ovunque pari a 1.

I modelli base di varietà sferiche sono le sfere S^n di dimensione arbitraria (ad esempio la sfera tridimensionale S^3). Tutte le altre varietà sferiche hanno la struttura locale di una sfera, ma possono avere una diversa topologia globale: tra questi ci sono gli → spazi proiettivi, ottenuti identificando i punti antipodali di una sfera, che non sono orientabili in dimensione n pari. In dimensione $n = 3$ ci sono anche gli spazi lenticolari.

Bibliografia

- *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria* di E. Agazzi, D. Palladino – Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori.

Voci correlate

- → Geometria euclidea
- → Geometria non euclidea
- V postulato di Euclide
- Assiomi di Hilbert
- → Geometria ellittica
- → Geometria iperbolica
- → Geometria proiettiva

Collegamenti esterni

- (en) La geometria sulla sfera [4]
- La geometria sulla sfera [5]
- Geometrie non euclidee [13]

Riferimenti

[1] Per saperne di più sulla genesi della geometria sferica si veda qui

[2] $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ è detto eccesso angolare.

[3] k è un parametro dimensionale che dipende dalle unità di misura scelto per indicare le misure dei lati del triangolo.

[4] http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/

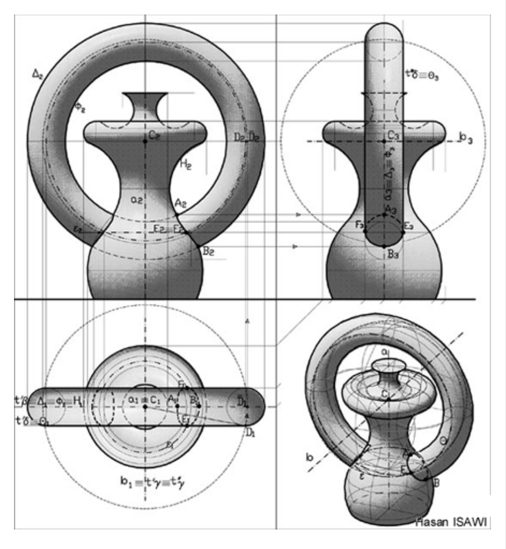
[5] http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm

Geometria descrittiva

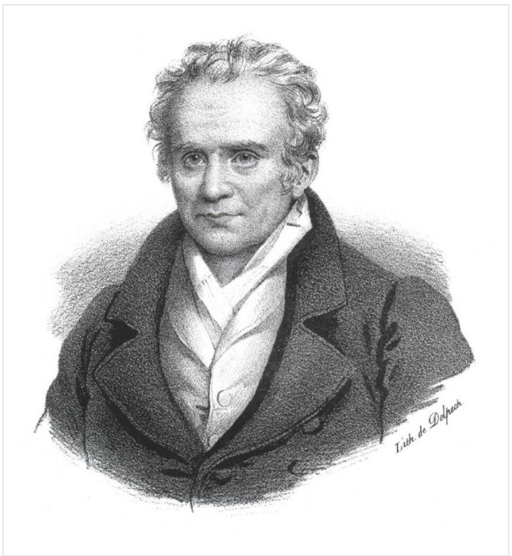
La **geometria descrittiva** è la scienza che permette, attraverso determinate costruzioni geometriche, di rappresentare in modo inequivocabile su uno o più piani, oggetti bidimensionali e tridimensionali. La rappresentazione può essere finalizzata a visualizzare oggetti già esistenti, come nel rilievo (per lo più architettonico), e/o di oggetti mentalmente concepiti, come nella progettazione di manufatti tridimensionali.

I metodi di rappresentazione (di prospettiva, di assonometria e di Monge) della geometria descrittiva si basano principalmente su due operazioni fondamentali, dette *operazioni di proiezione e sezione*.

Gli assiomi della geometria descrittiva elementare sono sostanzialmente i postulati di Euclide, ma *modificati* dall'aggiunta della nozione di ente improprio (direzione, giacitura), secondo una costruzione analoga a quella della → geometria proiettiva (si veda anche la voce V postulato di Euclide).

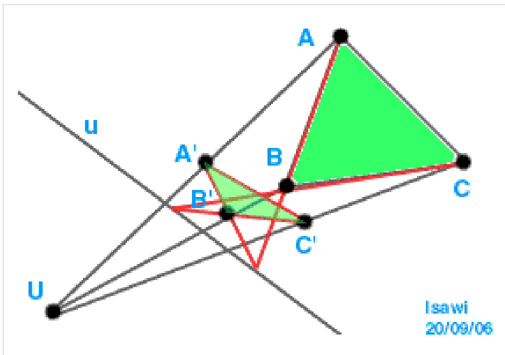


Storia



Fin dall'antica civiltà egiziana, è stato dimostrato, attraverso il ritrovamento di disegni che illustravano copertura ellittica di tombe, un corretto utilizzo delle doppie proiezioni ortogonali. Tra il I secolo a.c. e il I secolo d.p. Vitruvio, nei suoi tratti intitolati "De architectura" usava come elementi di rappresentazione di edifici le piante ed i prospetti da lui denominati iconografie e ortografie. In epoca successiva, l'opera di Jacopo Barozzi da Vignola "i cinque ordini di architettura" in cui viene adoperato il metodo di Monge. Nello stesso periodo, Alberto Dürer (1471-1528) definì alcuni procedimenti grafici riguardanti le coniche, come sezioni piane di un cono quadrico e, anche, lo studio della prospettiva. Nel 1600 gli studiosi Girard Desargues e Guarino Guarini hanno posto i fondamenti per la nascita della disciplina "geometria descrittiva", con questo nome è stata battezzata dallo scienziato francese Gaspard Monge (1746-1818). Nel 1700 fu pubblicato il libro "Geometrie descriptive" in cui vengono poste le regole fondamentali della geometria descrittiva. Regole che sono finalizzate, soprattutto, a rappresentare, su uno stesso piano (detto piano di proiezione), gli oggetti in 3D. Attualmente la geometria descrittiva comprende come parte integrante la → geometria proiettiva in cui studi più significativi e conclusivi si devono a Jean Victor Poncelet (1788-1867) discepolo di Monge. Con la geometria proiettiva viene introdotto il concetto di **Ente geometrico improprio** (punto, retta e → piano), che determina una sostanziale differenza con la → geometria euclidea, pur considerando validi i rimanenti postulati di Euclide. Nel 1995 è stata codificata la Prospettiva Parallela dalla Prof.ssa Architetto Barbara Aterini, insegnante di Geometria Descrittiva alla Facoltà di Architettura dell'Università degli Studi di Firenze.

Concetti

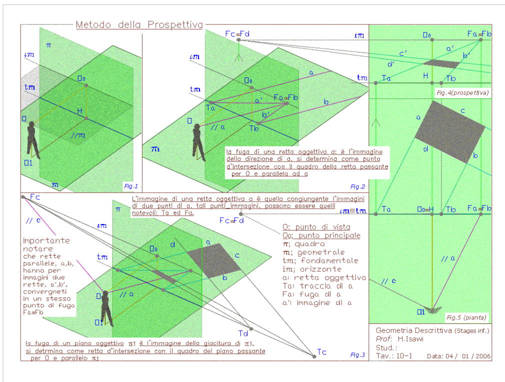


Alcuni concetti fondamentali della geometria descrittiva sono:

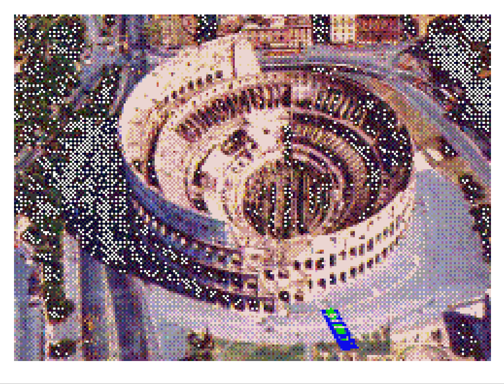
- definizione degli enti geometrici fondamentali (punto, retta, piano, direzione e giacitura).
- postulati d'appartenenza: di un punto ad una linea; di una linea ad una superficie; di un punto ad una superficie.
- L'incidenza: tra due rette, tra una retta ed un → piano, e tra due piani; o più in generale tra linea e superfici.
  - Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità come casi limiti di Incidenza
- Le condizioni di tangenza (in particolare la tangenza tra coniche e la tangenza tra quadriche).
- la Corrispondenza biunivoca, quali prospettività, omologia, omologia inversa, Affinità prospettiva, affinità, omotetia, Omotetia inversa ed Involuzione.

I Metodi di rappresentazione

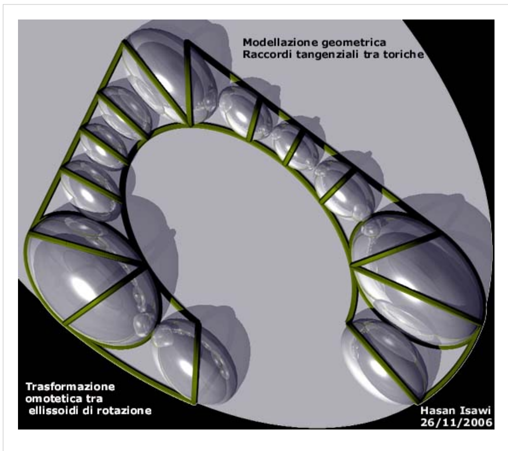
Essi si classificano, in generale, secondo l'entità dello stabilito centro di proiezione. Quando esso è un punto proprio si parla di **proiezioni centrali**, altrimenti di **proiezioni parallele**, cioè quando tale centro di proiezione è punto improprio.



- **proiezioni centrali**
  - il metodo della prospettiva.
    - La restituzione prospettica (o fotorestituzione).
  - teoria delle ombre con sorgente propria (da molti non viene considerata una "teoria" in quanto si tratta sempre di una proiezione).
- **proiezioni parallele**.
  - proiezioni ortogonali
    - il metodo dell'assonometria
    - il Metodo di Monge
    - il metodo delle proiezioni quotate.
  - proiezioni oblique
    - il metodo dell'assonometria
  - teoria delle ombre con sorgente impropria



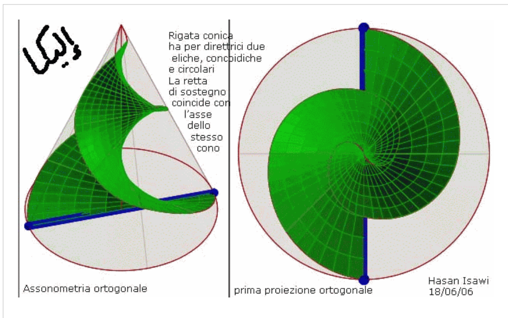
Problemi e costruzioni



Alcuni problemi di cui si occupa la geometria descrittiva sono:

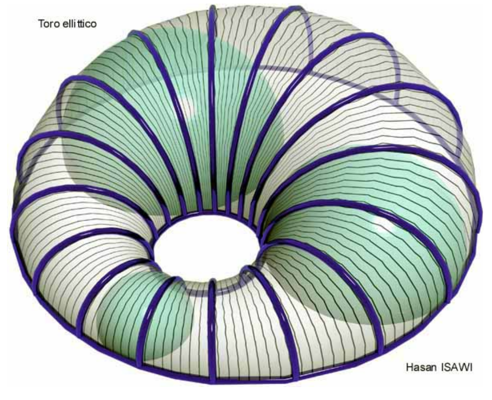
- I problemi d'incidenza, come tra linee e superfici e come tra superfici.
- I problemi di misura delle → distanze lineari (come ad esempio la costruzione geometrica che permette di determinare la distanza minima di un punto da un piano eventualmente degenere) e di quelli angolari (come ad esempio l'angolo tra retta e piano).
- costruzioni geometriche e modellazione 3D
  - delle volte
  - delle elicoidi
  - delle superfici rigate
  - delle superfici toriche
  - elicoidi
  - conoide
  - Raccordo tangenziale tra coniche, tra quadriche e tra toriche (vedi figura a lato)
  - Sviluppo di solidi
  - Approssimazione poliedrica di una superficie curva

Curve geometriche



- Le → coniche: ottenute come sezioni piane di un cono quadrico (punto, retta, ellisse, parabola ed iperbole)
- Le quartiche: ottenute, in generale, come in intersezione di due superficie quadriche che non hanno nessuna sezione piana in comune.
- Le curve cicloidiche: curve ottenute come conseguenza del movimento planare e rigido di una conica rispetto ad un'altra conica ad essa complanare.
- Le eliche: ottenute dal movimento trasrotazionale, tridimensionale e rigido di una conica rispetto ad una altra conica ad essa complanare.

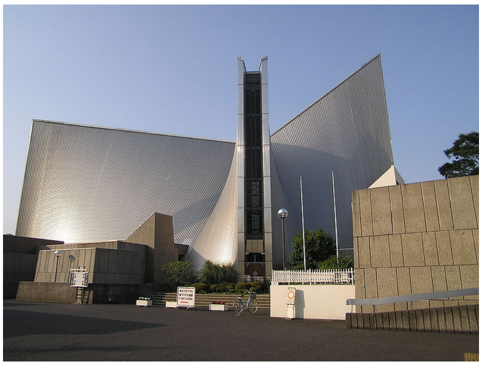
Superfici geometriche



Le principali categorie di superfici trattate dalla geometria descrittiva sono così classificate:

- Le superfici rigate: in questa categoria vengono trattate le superfici generate dal movimento rigido di una retta lungo una o più direttrici, come gli elicoidi rigati, i conoidi rigati e le superfici coniche ed i → piani (come casi particolari di rigate).
- Le superfici toriche: questa categoria include tutti i tipi di tori che sono generatI dal movimento rotatorio affine o omotetico di una conica non degenere lungo una direttrice conica, anch'essa non degenere. La condizione è che tali coniche, direttrice e generatrice, siano ortogonali tra loro.
- I paraboloidi.

Applicazioni

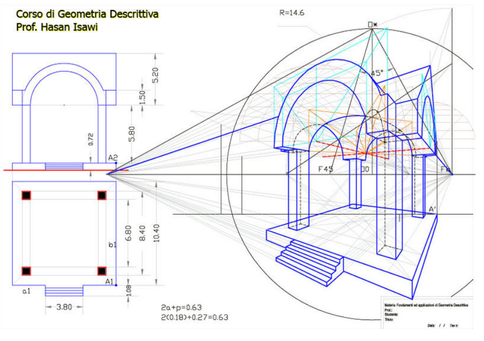


la geometria descrittiva viene applicata principalmente nei campi che riguardano la costruzione di manufatti architettonici. In particolare viene usata per avere proporzioni dimensionali e percettive di una data e possibile idea progettuale. L'applicazione informatica dei concetti della geometria descrittiva, permettono oggi giorno, oltre che quello, di poter creare una architettura ad alta complessità tridimensionale, ma soprattutto quello, di poter controllare e in modo inequivocabile ogni sua forma e dimensione.

Campi d'applicazione

- Progettazione architettonica
  - Modellazione geometrica
  - Disegno tecnico
- Rilievo dell'architettura
  - Fotorestituzione 3D

Bibliografia



- Antonella Gesuele, Alessandra Pagliano, Valentina Verza. *La geometria animata. Lezioni multimediali di Geometria Descrittiva*. Venezia, Editrice Cafoscarina, 2007. ISBN 9788875431709
- Lamberto Nasini. *Lezioni ed esercizi di fondamenti e applicazioni di geometria descrittiva*. Roma, Editrice Kappa, 1996.
- Hasan Isawi e Lamberto Nasini. *Vedere con la mente. Una geometria per comprendere lo spazio senza percepirlo visivamente*. Editrice Officina, 2006.
- Barbara Aterini. *Introduzione ai metodi di rappresentazione della geometria descrittiva*. Firenze, Alinea, 1997.

Glossario

In questa sottocategoria, della geometria descrittiva, vi sono termini e simbologie, utili a chi lavora nei vari campi di grafica, sia per facilitare il compito di individuare degli elementi notevoli di un dato oggetto geometrico, sia per acquisire un linguaggio tecnico in grado di facilitare il compito di descrivere, in modo chiaro, le situazione spaziali di tali elementi.

Voci correlate

- → Geometria proiettiva
- Elementi architettonici

Collegamenti esterni

- **Trazoide.** Disegno tecnico (in spagnolo) con esercizi e teoria pratica per Antonio Castilla. [1] Dibujo técnico con ejercicios y teoría practica
- Applicazioni informatizzate della Geometria descrittiva [2]
- La geometria descrittiva, la trigonometria sferica, solidi geometrici e cristallografia. [3]

Altri progetti

- **Wikimedia Commons** contiene file multimediali su **Geometria descrittiva**

Fotografia

Storia | Pellicola fotografica | Esposizione | Composizione | Sviluppo | Tecniche | Temi fotografici | Obiettivo fotografico | Fotocamera
Apparecchiature | Fotografia digitale | Fotografi | Fotografia su Wikimedia Commons | Categoria di riferimento |
Portale Fotografia

Riferimenti

[1] http://trazoide.com
[2] http://assex.altervista.org/geomtr-1.htm
[3] http://spazioinwind.libero.it/corradobrogi/IV-indice.htm

Analisi

Analisi matematica

« L'analisi matematica è una sinfonia coerente dell'universo »
(David Hilbert)

L'**analisi matematica** è un ramo della → matematica sviluppato sulla base dei concetti del calcolo infinitesimale. In passato l'*analisi matematica* si occupava del complesso dei simboli e delle regole operative su tali simboli per lo studio delle proprietà di un oggetto → matematico effettuando una sua scomposizione in parti fino a giungere alle parti infinitesime che lo compongono. L'*analisi matematica* introduce i concetti di infinito e di limite, ed è proprio lo studio di queste problematiche che ha portato l'*analisi matematica* da calcolo di elemento ad indagine presente in molti ambiti scientifici.

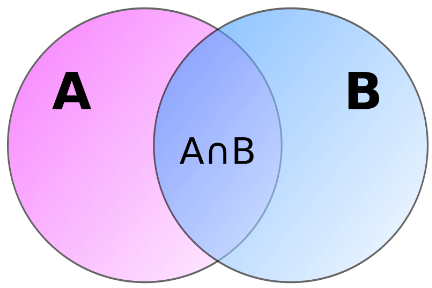
Cenni storici


Gottfried Wilhelm von Leibniz

L'analisi matematica nasce durante la seconda metà del XVII secolo, grazie a Newton e Leibniz che indipendentemente introdussero i concetti fondamentali del calcolo infinitesimale. Inizialmente l'analisi matematica puntava alla rappresentazione → geometrica nel piano cartesiano delle funzioni, nel tentativo di rispondere a quesiti su calcolo di aree e caratteristiche geometriche di una curva. Lo sviluppo dell'analisi nel XVIII secolo fu anche fortemente motivato dalla fisica, e portò allo sviluppo e l'elaborazione della meccanica razionale.

Dalla fine del XVIII secolo si introdusse il concetto di limite, passando da un'interpretazione intuitiva basata su suddivisioni successive, come già il greco Zenone nel V secolo AC aveva capito (Paradossi di Zenone), fino ad arrivare all'analisi matematica dei giorni nostri, che introdusse metodologie per il calcolo di un valore del limite. Questo portò ad una rivoluzione completa della materia che rianalizzò nozioni e teoremi senza avvalersi di giustificazioni → geometriche ma basandosi su concetti di numero ed insieme. Questo permise l'analisi più approfondita di → geometrie non euclidee e di spazi a dimensione maggiore di tre.

Teoria degli insiemi



Insiemi A, B e loro intersezione

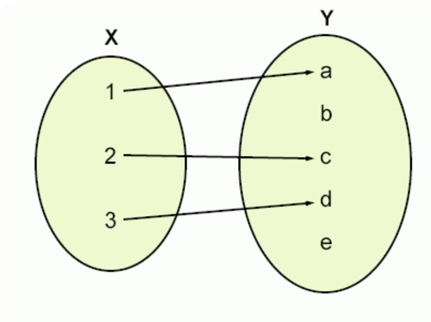
Il concetto di **insieme** costituisce l'elemento fondante di quella parte della → matematica che è la teoria degli insiemi. Con questo termine indichiamo ogni raggruppamento, collezione, aggregato di elementi indipendentemente dalla loro natura.

Di fondamentale importanza per l'approccio alla materia sono la conoscenza di un minimo della teoria degli insiemi, in particolare le operazioni possibili tra di essi, e la nozione di funzione. Poi per rendere un po' più concreto l'approccio con la materia si introducono gli insiemi numerici:

- $\mathbb{N}$ numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ numeri interi
- $\mathbb{Q}$ numeri razionali
- $\mathbb{R}$ numeri reali
- $\mathbb{C}$ numeri complessi

Ed infine i concetti di base di topologia, in particolare quelli di → distanza e di intorno.

Le funzioni



Una funziona associa elementi di un insieme X a elementi di un insieme Y

Il concetto di funzione è fondamentale per lo studio dell'**analisi matematica**, senza di esso è impossibile proseguire nello studio della materia, infatti la sua proprietà fondamentale, cioè quella di essere una relazione binaria univoca tra due insiemi, permette lo sviluppo di tutta la materia.

Poi su di essa, attraverso operazioni più avanzate (come quella di limite) vengono definite una serie di proprietà fondamentali per le applicazioni pratiche. Tra di esse possiamo elencare:

- continuità
- differenziabilità
- derivabilità

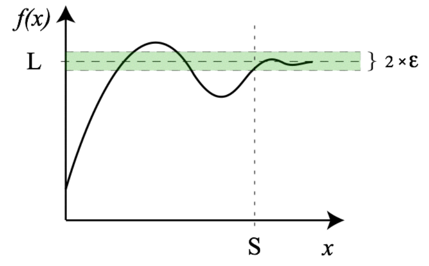
Da non tralasciare sono le funzioni elementari, quali:

- funzioni polinomiali
- funzioni trigonometriche
- funzioni esponenziali
- funzioni iperboliche

Particolarmente importanti nel XX secolo sono stati gli avanzamenti nello studio degli spazi di funzioni, visti come particolari → spazi vettoriali infinito dimensionali, nell'ambito dell'Analisi funzionale

L'operazione di limite

Il concetto di **limite** fondamentale in analisi, è stato definito coerentemente solo nel '800 ma esso era stato compreso intuitivamente da matematici del calibro di Wallis, Eulero, Bernoulli, Newton, Leibniz e addirittura sembra che già Archimede l'avesse compreso intuitivamente. Il limite è, in parole povere, un valore a cui il valore di una funzione si avvicina sempre di più (senza necessariamente raggiungerlo) man mano che l'argomento si avvicina a zero o a infinito o a qualsiasi altro numero. Per esempio il limite di 1/*n* per *n* che tende a infinito è zero. Infatti se facciamo aumentare sempre di più *n*, 1/*n* sarà sempre più vicino a zero.



Limite di una funzione, dopo un valore **S** la funzione rimane confinata in un intervallo di 2 ε e all'infinito tende a **L**.

Il limite di una funzione o successione può:

- essere un numero finito (per esempio il suddetto limite di *1/n* per n tendente a infinito è uguale a 0)
- essere infinito (per esempio è chiaro che il limite di n^2per n che tende a infinito è infinito)
- non esistere (per esempio le funzione $(-1)^n$ è sempre alternativamente -1, +1, -1, +1...)

Serie

Attraverso il concetto di limite di una successione, è possibile definire la somma di un numero infinito di elementi. Ad esempio, è possibile dare un senso all'espressione

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

che è uno dei tanti modi per descrivere il numero di Nepero e. Una somma infinita di elementi è detta serie, e viene generalmente indicata con

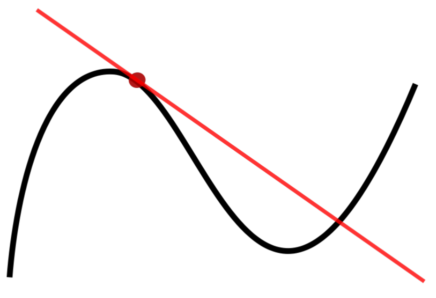
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Nell'esempio sopra, $a_k = \dfrac{1}{k!}$.

Analogamente a quanto accade per i limiti, la somma di infiniti elementi può essere finita, infinita, o non essere definita: questo accade ad esempio alla serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$, detta serie di Grandi.

Il concetto di derivata

Il concetto di derivata occupa un ruolo fondamentale nel calcolo infinitesimale e in tutta l'analisi matematica. Definita come limite del rapporto incrementale, la derivata quantifica il tipo di crescita di una funzione, ed ha applicazione in tutte le scienze.



Derivata in un punto (in rosso) di una funzione

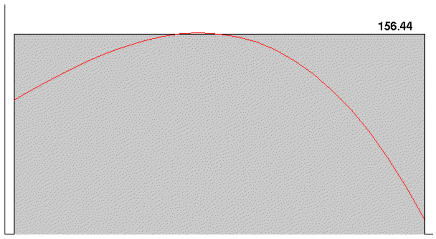
Tramite la nozione di derivata si definiscono e studiano i concetti di massimo e minimo di una funzione, di concavità e convessità: la derivata è quindi uno strumento fondamentale per lo studio di una funzione.

Tramite una lista di regole di derivazione, è possibile calcolare la derivata di qualsiasi funzione definita combinando funzioni elementari.

Il concetto di derivata si estende anche a funzioni a più variabili, tramite la nozione di derivata parziale.

Integrale

L'integrale è un altro strumento fondamentale del calcolo infinitesimale. Viene utilizzato soprattutto per calcolare aree e volumi di figure curve, quali ad esempio l'ellisse o la parte del piano cartesiano delimitata da una funzione.



Rappresentazione grafica dell'integrale di Riemann

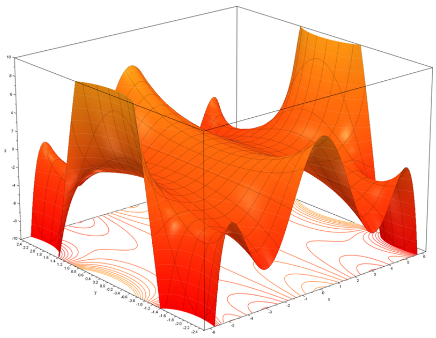
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, l'integrale risulta essenzialmente essere una operazione inversa a quella della derivata. Si differenzia da questa però per questo motivo fondamentale: contrariamente a quanto accade per la derivata, non ci sono degli algoritmi che permettano di calcolare l'integrale di qualsiasi funzione definita a partire da funzioni elementari. Vi sono comunque numerosi metodi di integrazione, con cui risolvere buona parte degli integrali più semplici, spesso riassunti in opportune tavole.

A partire dal XIX secolo, il concetto di integrale si è legato sempre di più al concetto di misura. La definizione stessa di integrale è legata ad un problema fondamentale: come "misurare" lunghezze, aree e volumi di sottoinsiemi della retta, del piano, dello spazio? Ciascuna possibile risposta a questa domanda fornisce una definizione di integrale: le definizioni più utilizzate sono l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue.

Serie di Taylor

La **Serie di Taylor** di una funzione analitica scrive la funzione in termini di serie. Una funzione analitica f(x) è uguale a:

polinomio di Taylor


Serie di Taylor che approssima la funzione coseno nel piano complesso

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dove $n!$ è il fattoriale di n ed $f^{(n)}(a)$ è la derivata n-esima della f nel punto a. Se a = 0, la serie viene chiamata **serie di Maclaurin** è ed è

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

La serie di Taylor è molto importante in analisi poiché rende molto più facili integrazioni e derivazioni in quanto esse possono essere effettuate termine a termine. Se poi si sceglie di troncare la serie si otterrà un polinomio che approssima la funzione. Questo polinomio è detto **polinomio di Taylor**. Un altro uso importantissimo della serie sta nel poter estendere una qualsiasi funzione analitica univocamente a una funzione olomorfa definita nel piano complesso e questa possibilità rende disponibile l'intero meccanismo dell'analisi complessa. Esistono anche altri sviluppi in serie, come quello di Lauren.

Bibliografia

Storia

- Enrico Rufini *Il "Metodo" di Archimede e le origini dell' analisi infinitesimale nell' antichità.* [1] *(Roma: Casa editrice Alberto Stock, 1926)*

Testi

- Guido Fubini *Lezioni di analisi matematica* [2] (Torino : Società tipografico-editrice nazionale, 1920)
- Ulisse Dini *Lezioni di analisi infinitesimale.* (Pisa: Nistri ,1907-15) t.1 [3] t. 2, prima parte [4] t. 2 seconda parte [5]
- Errett Bishop, Douglas Bridges (1985): *Constructive analysis*, Springer, ISBN 0-387-15066-8
- (EN) Serge Lang (1987): *Calculus of several Variables*, 3rd ed., Springer, ISBN 0-387-96405-3
- (EN) Serge Lang (1993): *Real and Functional Analysis*, 3rd ed., Springer, ISBN 0-387-94001-4
- (EN) G. V. Milovanović (1998): *Recent Progress in Inequalities*, Kluwer, ISBN 0-7923-4845-1
- (EN) Nicolas Bourbaki (2004): *Elements of Mathematics. Functions of a real variable -- Ch.I Derivatives. Ch.II Primitives and integrals. Ch.III Elementary functions. Ch.IV Differential equations. Ch.V Local study of functions. Ch.VI Generalized Taylor expansion, EulerMacLaurin sum formula. Ch.VII Gamma function.*, Springer, ISBN 3-540-65340-6

Voci correlate

- Limite
- Serie
- Derivata
- Integrale
- Serie di Taylor

Altri progetti

- **Wikibooks** contiene testi o manuali sulla **analisi matematica**
- **Wikiversità** contiene informazioni sulla **analisi matematica**

Collegamenti esterni

- Sito divulgativo [6]

mwl:Análeze Matemática

Riferimenti

[1] http://name.umdl.umich.edu/ACG9050.0004.001
[2] http://www.archive.org/details/lezionidianalisi00fubirich
[3] http://resolver.library.cornell.edu/math/2029919
[4] http://resolver.library.cornell.edu/math/2029919a
[5] http://resolver.library.cornell.edu/math/2029919b
[6] http://www.ripmat.it/mate/c.html

Fonti e autori del articolo

Matematica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27372068 *Contributors*: .anaconda, .jhc., .mau., 213.21.174.xxx, ALE!, Achillu, Alberto da Calvairate, Alec, Aphaia, Archenzo, Arnhem03, Ary29, Aushulz, BMF81, Banus, Barbaking, Bizio, Blakwolf, Bramfab, Brownout, Capannelle, Cesalpino, ChemicalBit, Colsonia, CristianCantoro, DarkAp, Demart81, Diuturno, Djdomix, Dr Zimbu, Dread83, Dzag, Elcairo, Elwood, Fabio, Filippof, Formica rufa, Fotogian, Francisco83pv, Frieda, Gian-, Giulia tonelli, Guidomac, Harlock81, Hasanisawi, Hashar, Hellis, Hill, Idolo 95, IlPisano, Incola, Iorso, Kibira, Klaudio, L736E, Lak3d, Laurentius, Lenious, Lorenzop, Lornova, Lumage, Lusum, M.Salva, M7, Malcom1976, Marco Tullio Cicerone, Massimiliano Lincetto, Matjack, Mauriziogio, Melmood, MikyT, Minelita, Mix, Nemo bis, Nick, Numbo3, OrbiliusMagister, Panairjdde, Penaz, PersOnLine, Piddu, Pinosauro, Pipep, Pokipsy76, Ramac, Remulazz, Renato Caniatti, Riccioli72, Ripepette, Rollopack, Salvatore Ingala, Sandrobt, Shaka, Silas Flannery, Simone, Skills, Snowdog, Spirit, Suisui, Superfranz83, Svante, Tarf, Template namespace initialisation script, Thewikifox, Thorin III, Tia solzago, TierrayLibertad, Torredibabele, Torsolo, Triquetra, Twice25, Ulisse0, Vmoscarda, Wanblee, Wolf-80, Ylebru, Yuma, Zirius, 161 anonymous edits

Storia della matematica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27471821 *Contributors*: .mau., A7N8X, Actarux, Alberto da Calvairate, AltraStoria, Ancelli, Ary29, AttoRenato, BRussell, Bramfab, Cadria, CavalloRazzo, Cesalpino, Cloj, Eflags, Fioravante Patrone, Franz Liszt, Frassionsistematiche, Guido Magnano, Hasanisawi, Hellis, Ing.dox, Ita-por, Jalo, Kaeso, Kuviz, Laurentius, Luca Antonelli, MapiVanPelt, Maquesta, Marko86, Mgiach, Mr buick, Mtt, Nahime, Nick, Nxb, Orso della campagna, PersOnLine, Piddu, Salvatore Ingala, Soprano71, Squattaturi, Starmaker, Titian1962, Toobaz, Torredibabele, Viscontino, Vmoscarda, Ylebru, Yuma, 72 anonymous edits

Aritmetica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27207589 *Contributors*: %Pier%, .mau., 4nT0, Archenzo, Ariel, Carlo.Ierna, Davide, Demart81, Foflynn, Formica rufa, Giacomo Ritucci, Hashar, Hellis, Hill, Nihil, Piddu, Pokipsy76, Qualc1, Ripepette, Salvatore Ingala, Senpai, Suisui, SyMoSk8, Toobaz, Torno castanowiki, Ubaldopernigo, Ylebru, 13 anonymous edits

Teoria dei numeri *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27437535 *Contributors*: .mau., Alberto da Calvairate, Avemundi, Blakwolf, Dr Zimbu, Gian-, Gianluigi, Helios, Hellis, LapoLuchini, Paulatz, Romanm, Salvatore Ingala, Snowdog, Spino, Suisui, Template namespace initialisation script, Ylebru, 5 anonymous edits

Algebra *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27024023 *Contributors*: 213.21.174.xxx, 4nT0, Achillu, Alberto da Calvairate, Amarvudol, Andreas Carter, Carlo.Ierna, Cesco77, Cloj, Cotton, DarkAp, Davide, Dedee, Demimarc2, Felisopus, Fireblade, Formica rufa, Frieda, Gala.martin, Glguida, Hasanisawi, Hashar, Hellis, Il fan di Bin Laden, Incola, Je4e, Loroli, Nafutesfera, Nevermindfc, Nihil, P tasso, Paopis, Passolunghi, Pequod76, Phantomas, Piddu, Piotr Karwasz, Quaro75, Red devil 666, Renato Caniatti, Ripepette, Sandrobt, Shony, Snowdog, Suisui, Trekkieboy, Twice25, Ylak, Ylebru, 64 anonymous edits

Algebra elementare *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27448935 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Ary29, Blakwolf, Ciano, Davide, Foflynn, GermanX, Laurentius, Nihil, Piddu, Rossa1, Salvatore Ingala, Trekkieboy, Ylebru, 8 anonymous edits

Algebra astratta *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25978897 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Davide, Hashar, Laurentius, Matx2, PersOnLine, Piotr Karwasz, Salvatore Ingala, Sandrobt, Trekkieboy, Ylak, 4 anonymous edits

Algebra lineare *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27224152 *Contributors*: Aepasto, Amarvudol, Ary29, Banus, Hellis, Jollyroger, Laurentius, Neta, Piddu, Sandrobt, Ylebru, 19 anonymous edits

Algebra commutativa *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25978793 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Davide, Frieda, Hashar, Ikki-Eulero, Piddu, Piotr Karwasz, Rago, Salvatore Ingala, Sandrobt, Sbisolo, Ylebru, 2 anonymous edits

Algebra universale *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25979093 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Banus, Laurusnobilis, Luisa, Piddu, Popop, Sandrobt, Vituzzu, Ylebru, 4 anonymous edits

Sistema di algebra computazionale *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=22751111 *Contributors*: Aepasto, Alberto da Calvairate, AndyMag, Avesan, Gvf, JackB09, Lp, Smart, Stefano Nesti, UP, 11 anonymous edits

Geometria *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27004059 *Contributors*: 213.21.175.xxx, Alberto da Calvairate, AnyFile, Biopresto, Blakwolf, Brownout, CLAUDIOPIERINI, Capannelle, Cesalpino, Danilo, Fabio, FollowTheMedia, FrAnCiS, Gacio, Gepgenius, Gian-, Hasanisawi, Hashar, Hellis, Knacker, Luca Antonelli, Luciodem, M7, Marcol-it, Minelita, Nemo bis, Nihil, Oop, PaneBiancoLiscio, PersOnLine, Pokipsy76, Roberto.zanasi, Sannita, Senpai, Snowdog, Spock, Suisui, Superfranz83, Template namespace initialisation script, Twice25, Viscontino, Vmoscarda, Wolf-80, Ylak, Ylebru, 48 anonymous edits

Geometria euclidea *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27143821 *Contributors*: 213.21.175.xxx, Alberto da Calvairate, Austroungarika, Blakwolf, Brownout, Brunobertotto, Buggia, Cairomax, Cesalpino, Contezero, Danilo1956, Elwood, Frieda, Gionnico, Guaka, Gusme, Hasanisawi, Hashar, Kibira, Lo zuva, Luisa, Marco 27, Nihil, PersOnLine, Phantomas, Pokipsy76, Rael, Red devil 666, Retaggio, Roberto.zanasi, Sbazzone, Suisui, Tef, Template namespace initialisation script, To011, Twice25, Vipera, Win, Ylebru, ppp-81-87.26-151.libero.it, 40 anonymous edits

Teorema della bisettrice *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=14569929 *Contributors*: Alec, Moloch981, Phantomas, Salvatore Ingala, Snowdog, Valerio.scorsipa, 2 anonymous edits

Criteri di congruenza dei triangoli *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25574550 *Contributors*: .mau., AnjaManix, Cinerino, Cotton, Demart81, EH101, Frieda, Giaccone Paolo, Giovannigobbin, Goliardico, Helios, IlCapo, IlPisano, Jak3x, Kibira, Laurentius, Lorelorelore, MapiVanPelt, Melkor II, Ogrizzo, Osk, PersOnLine, Phantomas, Rescadanciua, Restu20, Ripepette, Roberto.zanasi, Roby69m, Sbazzone, Senza nome.txt, Ylebru, 81 anonymous edits

Teorema della mediana *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=18811378 *Contributors*: Caulfield, Luca Antonelli, Massimiliano Lincetto, Rojelio, Salvatore Ingala, Snowdog, Valerio.scorsipa, Vituzzu, 4 anonymous edits

Teorema di Pappo *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=22085787 *Contributors*: ACiD.HouSe, Ayanami Rei, Blakwolf, Frieda, Leonard Vertighel, Lukius, Michele Bergadano, Nicolaesse, Rossa1, Ylebru, 2 anonymous edits

Teorema di Pasch *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25929298 *Contributors*: Filos96, Gliu, 1 anonymous edits

Teorema di Pitagora *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27216601 *Contributors*: .mau., 213.21.175.xxx, Aanto, Al Pereira, Alberto da Calvairate, Alec, Alfio, Austroungarika, Ayanami Rei, Beechs, Blakwolf, Cassioli, Cesalpino, Cotton, CristianCantoro, DaVid83, DanGarb, Dr Zimbu, Elwood, Engineer123, Filos96, Frack, G.Defrancesco, G.defrancesco, Gauss, Gggg81, Guidomac, Hellis, Iron Bishop, Kibira, Laurentius, Luisa, Lupo rosso, Maquesta, Marco Bernardini, Marcok, Mess, Michele Altamore, Newton16, Nihil, Numbo3, Osk, Phantomas, Piddu, Pitagora, Pokipsy76, Puxanto, Retaggio, Rojelio, Salvatore Ingala, Sannita, Sbisolo, Sky, Snowdog, Suisui, Template namespace initialisation script, TierrayLibertad, Usweb, Ylebru, Zetti ~, 128 anonymous edits

Primo teorema di Euclide *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24146022 *Contributors*: 1000voi, BRussell, Casmiki, Eminem, F l a n k e r, F. Cosoleto, Giovannigobbin, Ignlig, Laurentius, MapiVanPelt, PersOnLine, Phantomas, Ripepette, Roberto.zanasi, Sbazzone, Vajotwo, Vito Coppa, Ylebru, 36 anonymous edits

Secondo teorema di Euclide *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26608875 *Contributors*: .mau., 1000voi, Alby1987, Ares, BRussell, DanGarb, Eminem, Fabrymondo, Guidomac, Luisa, Madaki, MapiVanPelt, PersOnLine, Phantomas, Roberto.zanasi, Salvatore Ingala, Senpai, Starwars, Svante, Vajotwo, Vito Coppa, Ylebru, 28 anonymous edits

Similitudine (geometria) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25723057 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Aushulz, BlackMew9z, Dr Zimbu, Lucas, PersOnLine, Piddu, Rick9212, Sailko, Scitale, Summertime Ts, Wiso, Ylebru, 8 anonymous edits

Teorema di Talete *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27228814 *Contributors*: Amaunet, Bramfab, Cesalpino, Filos96, Giancarlodessi, Giuseppeturrisi, Hasanisawi, Hellis, Ogrizzo, PersOnLine, Phantomas, Retaggio, Rob-ot, Rojelio, Rossa1, Sandr0, Snowdog, Valerio.scorsipa, Ylebru, 20 anonymous edits

Geometria piana *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26355516 *Contributors*: AaMm, Afiocca, Baruneju, Buggia, DanGarb, Elianto84, Ermy2, Gac, Joana, Mitchan, Ninja, Retaggio, Riccardocc2, Rojelio, Smèagol, Tridim, Vmoscarda, Ylebru, Zorro, 14 anonymous edits

Poligono *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27412452 *Contributors*: .mau., 4nT0, Actam, Al Pereira, Alfio, Amarvudol, Aushulz, Barone Birra, Blakwolf, Domenico De Felice, Edriv, Francesco Ori, Hellis, Juliowolfgang, KS, Laurentius, Laurusnobilis, Marcus89, Paganinisilvia, PersOnLine, Phantomas, Pietrodn, Punisher87, Ramac, Rick9212, Rossa1, Salsero68, Sbazzone, Scardovi, Senpai, The man of ice, Toobaz, UgoEmme, Valepert, Ylebru, Zetti ~, 59 anonymous edits

Poligono regolare *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27391871 *Contributors*: Dariuz borghigiano, F l a n k e r, Hasanisawi, Hellis, Klaudio, Laurentius, Lepaca, M7, Red Power, Sky without clouds, The man of ice, UgoEmme, Ylebru, 15 anonymous edits

Poligono stellato *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24100181 *Contributors*: Ylebru

Sezione conica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24551043 *Contributors*: Acia, Alberto da Calvairate, Berto, Beta16, Cesalpino, Engineer123, Gionnico, Hans Urian, Hasanisawi, Hellis, Jacopo, Jean85, Jotar, Marcozampini, Pequod76, PersOnLine, Pokipsy76, Sandr0, Sophia91, VincenzoDiMassa, 29 anonymous edits

Rappresentazione matriciale delle coniche *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26625096 *Contributors*: Lulo, Nico86roma, Retaggio, Simogasp, Ylebru, 53 anonymous edits

Geometria solida *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26999282 *Contributors*: .mau., AttoRenato, Buggia, Ego, Frieda, Guidomac, Lucas, Nihil, Olando, Phantomas, Piddu, Pokipsy76, Rossa1, Ylebru, 10 anonymous edits

Volume *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27234061 *Contributors*: .mau., .snoopy., Alberto da Calvairate, Ary29, Aushulz, Avesan, Blakwolf, Cruccone, DanGarb, Dariuz borghigiano, Davide21, F l a n k e r, F. Cosoleto, Frieda, Gac, Govoch, Hellis, Hill, Jaqen, L736E, Laurentius, Luisa, M7, Madaki, Maxint, Nihil, O--o, Paginazero, PersOnLine, Salvatore Ingala, Snowdog, Svante, Template namespace initialisation script, Tener, Valepert, Ylebru, 33 anonymous edits

Faccia (geometria) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26190784 *Contributors*: Ylebru

Spigolo *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24246161 *Contributors*: Al Pereira, Ft1, Luciodem, Sandr0, Ylebru, 2 anonymous edits

Vertice (geometria) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24810752 *Contributors*: Luciodem, PersOnLine, Rossa1, Ylebru

Geometria analitica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24965833 *Contributors*: Albysanta, Alfio, Caulfield, Claro, Dr Zimbu, Fredericks, Guidomac, Luciodem, Massimiliano Lincetto, Pracchia-78, Rossa1, Shaka, Torno castanowiki, Ylebru, 23 anonymous edits

Spazio vettoriale *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27147311 *Contributors*: Achillu, Alberto da Calvairate, AnyFile, Aushulz, Damnit, Dr Zimbu, Dzag, Gac, Gianluigi, Giulianap, Hashar, Marcuscalabresus, Maupag, Ndakota73, Nihil, Palica, Piddu, Romanm, Salvatore Ingala, Skyhc, Suisui, Wiso, Ylebru, 43 anonymous edits

Piano (geometria) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26624144 *Contributors*: Albysanta, Archenzo, Blakwolf, C.piovesan, Claude, Engineer123, Hasanisawi, Inskatolata, KoenB, Mark91, Melos, Muntano, Piddu, Pokipsy76, Salvatore Ingala, Simone, Snowdog, Twice25, Win, Ylebru, 21 anonymous edits

Distanza (matematica) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27206125 *Contributors*: .anaconda, Alberto da Calvairate, Amanconi, Ary29, Blakwolf, ChemicalBit, Deca, Djdomix, Frankthequeen, Hasanisawi, Hellis, Ikki-Eulero, MapiVanPelt, Numbo3, PersOnLine, Piddu, Pokipsy76, Roberto.zanasi, Salvatore Ingala, Snowdog, Treperdue, Wiso, Ylebru, 14 anonymous edits

Prodotto scalare *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27215301 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Ceskino, F l a n k e r, Gala.martin, Gatto Bianco 1, Giacomo.lucchese, Nihil, No2, Piddu, Pietrodn, Sbazzone, Sir marek, SkZ, Superedit, Triph, Ulisse0, Unriccio, Valerio.scorsipa, Voldemort87, Wiso, Ylebru, 37 anonymous edits

Intersezione *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27232309 *Contributors*: 213.21.174.xxx, Alec, Ayanami Rei, Baruneju, Broglie, Carlo.milanesi, Ciro07, ColdShine, DanGarb, Ego, Frieda, Hasanisawi, Hashar, Hellis, IlCapo, Salvatore Ingala, Simone, Suisui, Tomi, Uela, 10 anonymous edits

Sistema di riferimento cartesiano *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27183461 *Contributors*: A7N8X, Alberto da Calvairate, Buzz lightyear, Cerrigno, Demart81, Domenico De Felice, GzOnE, Helios, Lulo, M&M987, Piddu, Riccardocc2, Ripepette, Sbazzone, Vale maio, Ylebru, 36 anonymous edits

Geometria affine *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=17959014 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Popop, Tridim, Ylebru, 2 anonymous edits

Spazio affine *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26003206 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Domenico De Felice, Piddu, Popop, Quatar, Tridim, Ylebru, Zio Illy, 6 anonymous edits

Sottospazio affine *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=22983030 *Contributors*: Piddu, Tridim, Ylebru, 7 anonymous edits

Trasformazione affine *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26091299 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Ary29, Blakwolf, Ceskino, Contezero, Gvnn, Hasanisawi, Inskatolata, Pokipsy76, The Doc, Ylebru, 7 anonymous edits

Geometria algebrica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=26984482 *Contributors*: Alfio, Blakwolf, Gac, Keaton8, Leonardis, Marco Rosellini, PersOnLine, Piddu, Piotr Karwasz, Riccioli72, Rossa1, Salvatore Ingala, Simone, Suisui, Template namespace initialisation script, Toobaz, Wiso, Ylebru, 7 anonymous edits

Varietà algebrica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27244677 *Contributors*: Artisto, Luca Antonelli, Piddu, Sandr0, Ylebru, 1 anonymous edits

Varietà affine *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=12614968 *Contributors*: Achillu, Piddu, Zviad

Geometria proiettiva *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=21967792 *Contributors*: .mau., Fausto Baiocco, Fredericks, Hasanisawi, Leonardis, Progettualita, Roberto.zanasi, Spock, Ylebru, 3 anonymous edits

Spazio proiettivo *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27392441 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Frieda, GIM, Gac, Giacomo.lucchese, Giulio84, Nuandawm, Pokipsy76, Riccioli72, Simone, Ylebru, 4 anonymous edits

Piano proiettivo *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=21364988 *Contributors*: Luca Antonelli, Piddu, Pokipsy76, Ppalli, Ylebru, 5 anonymous edits

Retta proiettiva *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27418821 *Contributors*: Pracchia-78, Ylebru, 2 anonymous edits

Coordinate omogenee *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27394803 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Berto, Isamicaela, Piddu, Ylebru, 3 anonymous edits

Trasformazione di Möbius *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=18873304 *Contributors*: Tridim, Ylebru, 3 anonymous edits

Teorema di Desargues *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25291906 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Ayanami Rei, Desargues, Dr Zimbu, Frieda, Giacomo.lucchese, Hasanisawi, Hellis, Pokipsy76, Snowdog, Ylebru, 6 anonymous edits

Teorema dell'esagono di Pappo *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=23121500 *Contributors*: A.san, Hill, Panairjdde, Salvatore Ingala, Ylebru, Ysogo, 2 anonymous edits

Geometria differenziale *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27211313 *Contributors*: Basilero, Demart81, IlMonopattinoDiGiacomo, Sir marek, Ylebru, 3 anonymous edits

Varietà differenziabile *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24683818 *Contributors*: Alfio, Ermopan, Giaccone Paolo, Maurooo, Megalexandros, Melmood, Penaz, Pokipsy76, Riccioli72, Uela, Ylebru, 11 anonymous edits

Geometria non euclidea *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25999218 *Contributors*: .mau., Alec, Ary29, Blakwolf, Codas, DanGarb, Davide, Dr Zimbu, Fausto Baiocco, Fredericks, Grigio60, Guidomac, Hashar, Helios, Hellis, IlCapo, Maquesta, Nihil, Olando, Paginazero, Phantomas, Piddu, Ramac, Ripepette, Sbisolo, Senpai, Snowdog, Suisui, Superfranz83, Template namespace initialisation script, The Rain Keeper, Tia solzago, Tronaka, Win, Xno, Ylebru, 44 anonymous edits

Geometria ellittica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24791622 *Contributors*: .mau., AD10492, Black mamba, Bramfab, Hasanisawi, Hellis, Ilafra, Ilfuria.awt, Jotar, Lenore, MaEr, Marcok, Melos, No2, Senza nome.txt, Starmaker, Tomfox, Win, Ylebru, 22 anonymous edits

Geometria iperbolica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25458284 *Contributors*: Alberto da Calvairate, Ary29, Blakwolf, Buggia, FrAnCiS, Fredericks, Ft1, Jalo, Leonardis, Lukius, PersOnLine, Piddu, Pokipsy76, Snowdog, Vituzzu, Win, Ylebru, 9 anonymous edits

Geometria sferica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=24501101 *Contributors*: Actam, MaEr, Nase, No2, PersOnLine, Piddu, Sandrobt, Win, Ylebru, 2 anonymous edits

Geometria descrittiva *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27156069 *Contributors*: .mau., Abyssadventurer, Archenzo, Berto, CaDo, Exephyo, Fredericks, Gac, Gala.martin, Giovannigobbin, Hasanisawi, Hellis, Homologia, Lucas, MM, Matgio, Megalexandros, Piddu, Pokipsy76, Quatar, Roberto.zanasi, Salvatore Ingala, Twice25, Ylebru, Zio Illy, 27 anonymous edits

Analisi matematica *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=27460529 *Contributors*: Andrea.Chelattini, Arpesenti86, BRussell, Blakwolf, Brownout, Claude, Danielg, Dedee, Diablo, Djdomix, Domenico De Felice, Eginardo, FrAnCiS, Fredericks, Gala.martin, Giuseppe ME, Grifone87, Hellis, Ik1tzo, Leonard Vertighel, Marcol-it, Penaz, Piddu, Pipep, Pokipsy76, Qualc1, Red devil 666, Retaggio, Roberto.catini, Rojelio, Rossa1, Ruthven, Ska`, Skyhc, Stiffmaister, TheDRaKKaR, Tridim, Ylak, Ylebru, 43 anonymous edits

Fonti, licenze e autori delle immagini

File:Arithmetica filippo calandri.02.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Arithmetica_filippo_calandri.02.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Felistoria, Mdd

File:Egyptian A'h-mosè or Rhind Papyrus (1065x1330).png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Egyptian_A'h-mosè_or_Rhind_Papyrus_(1065x1330).png *License*: unknown *Contributors*: Anarkman, G.dallorto, JMCC1, Luestling, Mdd, Otso Huuska, 1 anonymous edits

File:Chinese pythagoras.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Chinese_pythagoras.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Avsa, Christopher.Madsen, Pixeltoo, 5 anonymous edits

File:Abacus 6.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Abacus_6.png *License*: unknown *Contributors*: Flominator, German, Grön, Luestling, RHorning

File:Vector field.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Vector_field.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Fibonacci

File:Block diagram.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Block_diagram.png *License*: Public Domain *Contributors*: Hellisp, Ma-Lik, Mdd, Toobaz

File:LorenzAttractor.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:LorenzAttractor.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: CiaPan, Darapti, It Is Me Here, Knutux, Oleg Alexandrov

File:Daubechies20LowPassHighPass2DFilter.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Daubechies20LowPassHighPass2DFilter.png *License*: Public Domain *Contributors*: Alejo2083, LutzL, Seabhcan

File:Maximalogo.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Maximalogo.png *License*: GNU General Public License *Contributors*: Den fjättrade ankan, Frakturfreund

File:Scilab logo.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Scilab_logo.jpg *License*: unknown *Contributors*: Utente:Hellisp

File:Rlogo.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Rlogo.jpg *License*: GNU General Public License *Contributors*: (C) R Foundation

File:Knot 8sb19.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Knot_8sb19.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Kilom691, Marnanel

File:Elliptic curve simple.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Elliptic_curve_simple.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Created by Sean κ. + 23:33, 27 May 2005 (UTC)

File:Group diagram d6.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Group_diagram_d6.svg *License*: unknown *Contributors*: w:User:MithrandirMage

File:Torus.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Torus.png *License*: Public Domain *Contributors*: Kieff, Rimshot

File:InitialTopology-01.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:InitialTopology-01.png *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, EugeneZelenko, Fropuff, Jodo

File:Lattice of the divisibility of 60.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Lattice_of_the_divisibility_of_60.svg *License*: unknown *Contributors*: User:Ed g2s

File:Illustration to Euclid's proof of the Pythagorean theorem.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Illustration_to_Euclid's_proof_of_the_Pythagorean_theorem.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Gerbrant

File:Taylorsine.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Taylorsine.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Geek3, Hellisp, Riojajar

File:OsculatingCircle.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:OsculatingCircle.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Cepheus, Darapti, Rainer Bielefeld, Rovnet, Werckmeister

File:Koch curve.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Koch_curve.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Fibonacci, User:Solkoll

File:Venn_A_intersect_B.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Venn_A_intersect_B.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Cepheus

File:DFAexample.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:DFAexample.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Cepheus

File:Caesar3.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Caesar3.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Cepheus

File:6n-graf.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:6n-graf.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:AzaToth

File:Gravitation space source.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Gravitation_space_source.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Duesentrieb, Schekinov Alexey Victorovich, Superborsuk, WikipediaMaster

File:BernoullisLawDerivationDiagram.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:BernoullisLawDerivationDiagram.png *License*: unknown *Contributors*: Abdullah Köroğlu, Christophe.Finot, Dbenbenn, EugeneZelenko, MannyMax, Pbroks13

File:Maximum boxed.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Maximum_boxed.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Freiddy

File:Two red dice 01.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Two_red_dice_01.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Stephen Silver

File:Oldfaithful3.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Oldfaithful3.png *License*: Public Domain *Contributors*: Anynobody, Maksim, Mdd, Oleg Alexandrov, WikipediaMaster, 6 anonymous edits

File:Market Data Index NYA on 20050726 202628 UTC.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Market_Data_Index_NYA_on_20050726_202628_UTC.png *License*: Public Domain *Contributors*: Denniss, Jodo

File:Arbitrary-gametree-solved.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Arbitrary-gametree-solved.png *License*: Public Domain *Contributors*: Original uploader was Fieari at en.wikipedia

Immagine:Wikisource-logo.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Wikisource-logo.svg *License*: logo *Contributors*: Nicholas Moreau

Immagine:Wikibooks-logo.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Wikibooks-logo.svg *License*: logo *Contributors*: User:Bastique, User:Ramac

Immagine:Wiktionary-ico-de.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Wiktionary-ico-de.png *License*: logo *Contributors*: Bobit, F l a n k e r, Melancholie, Mxn, Rocket000

Immagine:Wikiquote-logo.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Wikiquote-logo.svg *License*: logo *Contributors*: -xfi-, Dbc334, Doodledoo, Elian, Guillom, Jeffq, Maderibeyza, Majorly, Nishkid64, RedCoat, Rei-artur, Rocket000, 11 anonymous edits

Immagine:Woman teaching geometry.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Woman_teaching_geometry.jpg *License*: unknown *Contributors*: unknown

Immagine:Ishango bone.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Ishango_bone.jpg *License*: Creative Commons Attribution 2.5 *Contributors*: Albert1ls, BL2593, Ben2, JoJan

Immagine:Egyptian A'h-mosè or Rhind Papyrus (1065x1330).png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Egyptian_A'h-mosè_or_Rhind_Papyrus_(1065x1330).png *License*: unknown *Contributors*: Anarkman, G.dallorto, JMCC1, Luestling, Mdd, Otso Huuska, 1 anonymous edits

Immagine:Plimpton 322.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Plimpton_322.jpg *License*: unknown *Contributors*: photo author unknown

Immagine:Oudjat.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Oudjat.svg *License*: unknown *Contributors*: User:BenduKiwi

Immagine:Euklid-von-Alexandria 1.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg *License*: unknown *Contributors*: Anarkman, Bibi Saint-Pol, Luestling, Misibacsi, Umherirrender

Immagine:Archimedes (Idealportrait).jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Archimedes_(Idealportrait).jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Christophe.Finot, Ixitixel

Immagine:Yanghui triangle.PNG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Yanghui_triangle.PNG *License*: unknown *Contributors*: David Shay, Mdd

Immagine:2064_aryabhata-crp.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:2064_aryabhata-crp.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Mukerjee, Oxam Hartog, Sankalpdravid, Serged, Winterkind, 1 anonymous edits

Immagine:Image-Al-Kitāb_al-muḫtaṣar_fī_ḥisāb_al-ğabr_wa-l-muqābala.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Image-Al-Kitāb_al-muḫtaṣar_fī_ḥisāb_al-ğabr_wa-l-muqābala.jpg *License*: unknown *Contributors*: al-Khwarizmi

Immagine:Pacioli.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pacioli.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Badseed, Damouns, G.dallorto, Gveret Tered, Kilom691, Knutux, Meno25, Petropoxy (Lithoderm Proxy), Tad, Tetraktys, 1 anonymous edits

Immagine:Niccolò_Tartaglia.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Niccolò_Tartaglia.jpg *License*: unknown *Contributors*: Original uploader was Magnus Manske at en.wikipedia

Immagine:Pierre de Fermat.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pierre_de_Fermat.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: -

Immagine:Arcsin(x).png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Arcsin(x).png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Original uploader was MADe at nl.wikipedia

Immagine:Leonhard Euler.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Leonhard_Euler.jpg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: User:Wars

Immagine:Konigsberg bridges.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Konigsberg_bridges.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Bogdan Giuşcă

Immagine:Carl Friedrich Gauss.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg *License*: unknown *Contributors*: Bcrowell, Conscious, Gabor, Joanjoc, Kaganer, Luestling, Mattes, Rovnet, Schaengel89, Ufudu, 3 anonymous edits

Immagine:End of universe.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:End_of_universe.jpg *License*: unknown *Contributors*: Dgies, Maksim, Olaf Davis, Shyam, 3 anonymous edits

Immagine:Hilbert.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hilbert.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: DaTroll, Darapti, Der Eberswalder, Gene.arboit, Harp, Mschlindwein, Yann, Zwikki, 2 anonymous edits

Immagine:Mandel zoom 00 mandelbrot set.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Wolfgangbeyer

Immagine:JohnvonNeumann-LosAlamos.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:JohnvonNeumann-LosAlamos.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Fastfission, Harp, Kilom691, Mdd, Polarlys, Shizhao

Immagine:Cronologia matematica.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cronologia_matematica.png *License*: unknown *Contributors*: Utente:Blakwolf

Immagine:Oxyrhynchus papyrus with Euclid's Elements.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Oxyrhynchus_papyrus_with_Euclid's_Elements.jpg *License*: unknown *Contributors*: unknown

File:Tables generales aritmetique MG 2108.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Tables_generales_aritmetique_MG_2108.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Rama

Immagine:Commons-logo.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Commons-logo.svg *License*: logo *Contributors*: User:3247, User:Grunt

File:Image-Al-Kitāb_al-muḫtaṣar_fī_ḥisāb_al-ğabr_wa-l-muqābala.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Image-Al-Kitāb_al-muḫtaṣar_fī_ḥisāb_al-ğabr_wa-l-muqābala.jpg *License*: unknown *Contributors*: al-Khwarizmi

File:Vector space illust.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Vector_space_illust.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Oleg Alexandrov

File:Woman teaching geometry.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Woman_teaching_geometry.jpg *License*: unknown *Contributors*: unknown

File:Euklid2.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Euklid2.jpg *License*: unknown *Contributors*: 5ko, Anarkman, Arcfrkcommons, Badseed, Bibi Saint-Pol, Copydays, Diomede, HB, Luestling, Plindenbaum, Sailko, 2 anonymous edits

File:Simple polygon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Simple_polygon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Oleg Alexandrov

File:120px-Dodecahedron-slowturn.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:120px-Dodecahedron-slowturn.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: User:Peter Steinberg

File:Conic sections.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Conic_sections.png *License*: Public Domain *Contributors*: Katpatuka, Kilom691

File:Ellipsoide.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Ellipsoide.png *License*: Public Domain *Contributors*: Anarkman, Darapti, Denniss, EugeneZelenko

File:PlaneIntersection.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:PlaneIntersection.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: User:Jackohare

File:Drawing Square in Perspective 2.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Drawing_Square_in_Perspective_2.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Ylebru

File:Conics and cubic.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Conics_and_cubic.png *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contributors*: Anarkman, Darklama, EugeneZelenko, KSmrq, W!B:, 1 anonymous edits

File:Saddle pt.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Saddle_pt.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: User:StuRat

File:Uniform tiling 54-snub.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Uniform_tiling_54-snub.png *License*: unknown *Contributors*: Claudio Rocchini

File:Möbius strip.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Möbius_strip.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Dbenbenn

File:Felix Klein.jpeg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Felix_Klein.jpeg *License*: Public Domain *Contributors*: Akela3, Darapti, Joolz, OldCrow, 1 anonymous edits

File:Coni-complanari.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Coni-complanari.gif *License*: unknown *Contributors*: Utente:Hasanisawi

Immagine:Euklid2.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Euklid2.jpg *License*: unknown *Contributors*: 5ko, Anarkman, Arcfrkcommons, Badseed, Bibi Saint-Pol, Copydays, Diomede, HB, Luestling, Plindenbaum, Sailko, 2 anonymous edits

Immagine:TeoBise.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TeoBise.png *License*: unknown *Contributors*: Valerio.scorsipa

Immagine:LAL.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:LAL.jpg *License*: unknown *Contributors*: Jak3x

Immagine:TeoMed.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TeoMed.png *License*: unknown *Contributors*: Valerio.scorsipa

Immagine:Pappo-pascal.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pappo-pascal.png *License*: unknown *Contributors*: ACiD.HouSe, Jalo

File:Pythagorean.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pythagorean.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: DieBuche, Emijrp, Helix84, Kdkeller, Rohieb, Steff, 1 anonymous edits

File:Rtriangle.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Rtriangle.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Gustavb, HB, HiTe, Juiced lemon

File:Pythagoras-2a.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pythagoras-2a.gif *License*: unknown *Contributors*: User:Alvesgaspar

File:Perigal_TdP.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Perigal_TdP.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Original uploader was Blakwolf at it.wikipedia

File:Airy_tdp.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Airy_tdp.gif *License*: unknown *Contributors*: Utente:Blakwolf

File:Pita_Pomi.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pita_Pomi.gif *License*: unknown *Contributors*: User:Usweb

File:TeoremaPitagoraAlt.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TeoremaPitagoraAlt.gif *License*: unknown *Contributors*: Blakwolf, Lp

File:Pythagoras6.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pythagoras6.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: EugeneZelenko, Factumquintus, HB

File:Triangolo con vertici, altezza e un angolo.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangolo_con_vertici,_altezza_e_un_angolo.png *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Ft1, 1 anonymous edits

File:Triangle and circumcircle with notations.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangle_and_circumcircle_with_notations.png *License*: Public Domain *Contributors*: AnyFile, Darapti, EugeneZelenko, Régis Lachaume

File:TRIANGOLO2.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TRIANGOLO2.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Michele Altamore

Immagine:Primo teorema di Euclide.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Primo_teorema_di_Euclide.svg *License*: unknown *Contributors*: utente:PersOnLine

Immagine:Euclide1.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Euclide1.png *License*: Public Domain *Contributors*: Bibi Saint-Pol, Darapti, Roberto.zanasi

Immagine:secondo teorema di Euclide.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Secondo_teorema_di_Euclide.svg *License*: unknown *Contributors*: utente:PersOnLine

Immagine:Euclide2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Euclide2.png *License*: Public Domain *Contributors*: Bibi Saint-Pol, Darapti, Roberto.zanasi

Immagine:Similar-geometric-shapes.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Similar-geometric-shapes.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Amada44

File:Fotothek df tg 0000029 Geometrie ^ Vermessung ^ Gelände ^ Quadrant.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Fotothek_df_tg_0000029_Geometrie_^_Vermessung_^_Gelände_^_Quadrant.jpg *License*: unknown *Contributors*: Sailko, Umnik

Immagine:Sierpinski triangle (blue).jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Sierpinski_triangle_(blue).jpg *License*: unknown *Contributors*: D-Kuru, It Is Me Here, Sega sai, Solkoll

Immagine:Teorema di Talete.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Teorema_di_Talete.png *License*: unknown *Contributors*: PersOnLine

Immagine:Dimostrazione teorema di Talete.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Dimostrazione_teorema_di_Talete.png *License*: unknown *Contributors*: PersOnLine, Valepert

Immagine:Triangoli simili.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangoli_simili.png *License*: unknown *Contributors*: PersOnLine

Immagine: Triangoli omotetici.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangoli_omotetici.png *License*: unknown *Contributors*: PersOnLine

Immagine:Piramidi e Talete.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Piramidi_e_Talete.jpg *License*: unknown *Contributors*: PersOnLine

Immagine:Assorted polygons.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Assorted_polygons.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:CountingPine

Immagine:Esempio rasterizzazione poligono flood fill 2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Esempio_rasterizzazione_poligono_flood_fill_2.png *License*: unknown *Contributors*: Utente:Fedy2

Immagine:irregular polygon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Irregular_polygon.svg *License*: unknown *Contributors*: User:Actam

Immagine:poligono_regolare.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Poligono_regolare.gif *License*: unknown *Contributors*: Lepaca

Immagine:Cyclopropane-skeletal.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cyclopropane-skeletal.png *License*: Public Domain *Contributors*: Amada44, Ayacop, Benjah-bmm27, Rocket000, Vchorozopoulos, 1 anonymous edits

Immagine:Square - black simple.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Square_-_black_simple.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Darkdadaah

Immagine:Pentagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pentagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: AnonMoos, Fibonacci, Herr Kriss, MarianSigler, Rocket000, Tietew, WonRyong, Wst, 4 anonymous edits

Immagine:Hexagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hexagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, Patrick, Rocket000, Tietew, Tomia, Wst, 6 anonymous edits

Immagine:Heptagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Heptagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, HB, Lokal Profil, Victormoz, Wknight94, 1 anonymous edits

Immagine:Octagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Octagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, Rocket000, Wst

Immagine:Nonagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Nonagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, Rocket000, Str4nd, Wst, 1 anonymous edits

Immagine:Decagon.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Decagon.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Badseed, Fibonacci, Maksim, Rocket000, Wst, Wutsje, 3 anonymous edits

Immagine:Pentagram green.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pentagram_green.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Fuzzypeg

Immagine:Regular_Star_Polygons.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Regular_Star_Polygons.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: ("I made this using Microsoft PowerPoint")

Immagine:Obtuse heptagram.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Obtuse_heptagram.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, HB, Rocket000

Immagine:Acute heptagram.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Acute_heptagram.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, HB, Rocket000, Wst

Immagine:Octagram.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Octagram.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Fibonacci, Rocket000, Wst

Immagine:Star polygon 9 2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Star_polygon_9_2.png *License*: Public Domain *Contributors*: Tomruen

Immagine:Star polygon 9 4.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Star_polygon_9_4.png *License*: Public Domain *Contributors*: Tomruen

Immagine:Pentagram interpretations.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pentagram_interpretations.svg *License*: unknown *Contributors*: User:Tintazul

Immagine:Septagram prism-2-7.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Septagram_prism-2-7.png *License*: Public Domain *Contributors*: Tomruen

Immagine:Heptagrammic prism 7-2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Heptagrammic_prism_7-2.png *License*: unknown *Contributors*: Tomruen

Immagine:Conic sections.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Conic_sections.png *License*: Public Domain *Contributors*: Katpatuka, Kilom691

Immagine:Conic sections 2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Conic_sections_2.png *License*: unknown *Contributors*: Original uploader was Duk at en.wikipedia

Immagine:Eccentricity.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Eccentricity.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Tosha

Immagine:Elps-slr.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Elps-slr.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darsie, EugeneZelenko, Haui, W!B:

Immagine:GeometriaSolida.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:GeometriaSolida.gif *License*: unknown *Contributors*: Ego

Immagine:Cube.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cube.svg *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contributors*: user:Marcelo Reis

Immagine:Parallelepipede.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Parallelepipede.png *License*: unknown *Contributors*: Kilom691, Pieter Kuiper, Witoki, 4 anonymous edits

Immagine:Cylinder.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cylinder.svg *License*: unknown *Contributors*: A. Özgür Erdemli

Immagine:Racquetball ball.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Racquetball_ball.svg *License*: unknown *Contributors*: Cburnett, Rocket000

Immagine:Ellipsoide.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Ellipsoide.png *License*: Public Domain *Contributors*: Anarkman, Darapti, Denniss, EugeneZelenko

Immagine:Pyramid (geometry).png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pyramid_(geometry).png *License*: Public Domain *Contributors*: User Sebbe.wigmo on sv.wikipedia

Immagine:Cone (geometry).svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cone_(geometry).svg *License*: unknown *Contributors*: User:Louperivois

Immagine:hexahedron.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hexahedron.png *License*: unknown *Contributors*: Tomruen

Immagine:Vértiz.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Vértiz.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Astur1

Immagine:Vértices del icositetraedro pentagonal.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Vértices_del_icositetraedro_pentagonal.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Kuartas

Immagine:Punktkoordinaten.PNG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Punktkoordinaten.PNG *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darapti, Wewe, 1 anonymous edits

Immagine:Vector space illust.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Vector_space_illust.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Oleg Alexandrov

File:Linear_subspaces_with_shading.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Linear_subspaces_with_shading.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Original uploader was Alksentrs at en.wikipedia

Immagine:Scalarproduct.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Scalarproduct.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darapti, Rocha, Werckmeister, Ysangkok

Immagine:ProdScal1.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:ProdScal1.png *License*: unknown *Contributors*: Darapti, HB

Immagine:ProdScal2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:ProdScal2.png *License*: unknown *Contributors*: Darapti, HB

Immagine:TravailForce2.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TravailForce2.png *License*: unknown *Contributors*: HB

Immagine:Venn_A_intersect_B.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Venn_A_intersect_B.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Cepheus

Immagine:Csg intersection.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Csg_intersection.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: TommyBee, Zottie, 1 anonymous edits

Immagine:Cartesian-coordinate-system.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cartesian-coordinate-system.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: K. Bolino

Immagine:Cartesian-coordinate-system-with-circle.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cartesian-coordinate-system-with-circle.svg *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: User 345Kai on en.wikipedia

Immagine:Cartesian with grid.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cartesian_with_grid.svg *License*: unknown *Contributors*: User:Andeggs

Immagine:France1.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:France1.gif *License*: unknown *Contributors*: Robert FERREOL

Immagine:France affine.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:France_affine.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Cayambe, Ylebru, 1 anonymous edits

Immagine:Drawing_Square_in_Perspective_2.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Drawing_Square_in_Perspective_2.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Ylebru

Immagine:Gérard Desargues.jpeg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Gérard_Desargues.jpeg *License*: unknown *Contributors*: Kilom691, Rbraunwa

File:Drawing_Square_in_Perspective_2.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Drawing_Square_in_Perspective_2.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Ylebru

Immagine:projectiveplane3d.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Projectiveplane3d.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darapti, Origamiemensch, Pokipsy76

Immagine:ProjectivePlaneAsSquare.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:ProjectivePlaneAsSquare.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Ilmari Karonen, 1 anonymous edits

Immagine:Proiezione stereografica.PNG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Proiezione_stereografica.PNG *License*: unknown *Contributors*: Tridim

Immagine:MoebiusInversion.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:MoebiusInversion.png *License*: unknown *Contributors*: User:Chrislb

Immagine:DesarguesCabri1.JPG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:DesarguesCabri1.JPG *License*: unknown *Contributors*: Archeologo, Desargues

Immagine:DesarguesCabri2.JPG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:DesarguesCabri2.JPG *License*: unknown *Contributors*: Archeologo, Desargues

Immagine:Tangent.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Tangent.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darapti, Kilom691, Maksim

Immagine:Noneuclidee.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Noneuclidee.svg *License*: unknown *Contributors*: User:Pbroks13, User:Ylebru

Immagine:Omar Chayyam.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Omar_Chayyam.jpg *License*: unknown *Contributors*: Chico, InfantGorilla

Immagine:Saccheri 1733 - Euclide Ab Omni Naevo Vindicatus.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Saccheri_1733_-_Euclide_Ab_Omni_Naevo_Vindicatus.gif *License*: Public Domain *Contributors*: Bkmd, Diligent, Mdd, Samuele

Immagine:Georg Friedrich Bernhard Riemann.jpeg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg *License*: Public Domain *Contributors*: Bdk, Red Rooster, Ævar Arnfjörð Bjarmason, 2 anonymous edits

Immagine:Beltrami.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Beltrami.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Albedo-ukr, Kilom691, Mu

Immagine:Pseudosphere.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Pseudosphere.png *License*: unknown *Contributors*: Claudio Rocchini

Immagine:Uniform tiling 54-snub.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Uniform_tiling_54-snub.png *License*: unknown *Contributors*: Claudio Rocchini

File:Hyperbolic triangle.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hyperbolic_triangle.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Kieff

File:Order-4 bisected pentagonal tiling.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Order-4_bisected_pentagonal_tiling.png *License*: unknown *Contributors*: Claudio Rocchini

File:Nikolay Ivanovich Lobachevsky.jpeg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Nikolay_Ivanovich_Lobachevsky.jpeg *License*: unknown *Contributors*: Ragib

File:Ultraparallel.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Ultraparallel.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Tosha

File:HyperbolicParallels.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:HyperbolicParallels.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Marino-sl

File:HyperboloidOfTwoSheets.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:HyperboloidOfTwoSheets.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Arssenev, Darapti, Oxam Hartog, Svdmolen, 1 anonymous edits

File:Figure1.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Figure1.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Maksim

File:Quadrato iperbolico.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Quadrato_iperbolico.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Ylebru

File:Triangolo iperbolico.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangolo_iperbolico.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Ylebru

File:Hyperbolic Octahedron.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hyperbolic_Octahedron.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Win

Immagine:Triangles (spherical geometry).jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Triangles_(spherical_geometry).jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Sarregouset

Immagine:Modello_sfera_numero_di_triangoli.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Modello_sfera_numero_di_triangoli.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Win

Immagine:Angolo modello geometria sf.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Angolo_modello_geometria_sf.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Win

Immagine:Grosskreis.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Grosskreis.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Angrense, Dbenzhuser, EugeneZelenko, HB, McSush

Immagine:Cubo_sferico.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Cubo_sferico.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Win

Immagine:Sftriangle.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Sftriangle.png *License*: Public Domain *Contributors*: Livinus

Immagine:DALLA.GIF *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:DALLA.GIF *License*: unknown *Contributors*: User:Hasanisawi

Immagine:Gaspard monge litho delpech.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Gaspard_monge_litho_delpech.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: Kelson, Kilom691, Mu, Romary, Ylebru

Immagine:Corrispondenza-biunivoca.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Corrispondenza-biunivoca.gif *License*: unknown *Contributors*: Utente:Hasanisawi

Immagine:10-1.GIF *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:10-1.GIF *License*: unknown *Contributors*: Hasanisawi, Jacopo, Laurentius

Immagine:Lab-anm01-1.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Lab-anm01-1.gif *License*: unknown *Contributors*: utente:Hasanisawi

Immagine:Trionfo03.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Trionfo03.jpg *License*: unknown *Contributors*: Utente:Hasanisawi

Immagine:Concoidica.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Concoidica.gif *License*: unknown *Contributors*: utente:Hasanisawi

Immagine:Tang-dirett.JPG *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Tang-dirett.JPG *License*: unknown *Contributors*: utente:Hasanisawi

Immagine:20030702 2 July 2003 Tokyo Cathedorale 2 Tange Kenzou Sekiguchi Tokyo Japan.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:20030702_2_July_2003_Tokyo_Cathedorale_2_Tange_Kenzou_Sekiguchi_Tokyo_Japan.jpg *License*: unknown *Contributors*: user:Morio

File:Volta-crociera.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Volta-crociera.jpg *License*: unknown *Contributors*: User:Hasanisawi

Immagine:Large format camera lens.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Large_format_camera_lens.jpg *License*: Public Domain *Contributors*: 32bitmaschine, Hydrargyrum, Joanjoc, Juiced lemon, Mattes

File:Gottfried Wilhelm von Leibniz.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg *License*: unknown *Contributors*: Davidlud, Eusebius, Factumquintus, Gabor, Luestling, Mattes, Schaengel89, Svencb, Tomisti, 4 anonymous edits

File:Venn A intersect B.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Venn_A_intersect_B.svg *License*: Public Domain *Contributors*: User:Cepheus

File:Funcao venn.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Funcao_venn.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Darapti, Dcoetzee, EugeneZelenko, HiTe, Ilmari Karonen, Marcelo Reis

File:Limit-at-infinity-graph.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Limit-at-infinity-graph.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: User:Sverdrup

File:Tangent to a curve.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Tangent_to_a_curve.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Original uploader was Jacj at en.wikipedia Later versions were uploaded by Oleg Alexandrov at en.wikipedia.

File:Riemann.gif *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Riemann.gif *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Bdamokos, Juiced lemon, Maksim, Nandhp, 1 anonymous edits

File:TaylorCosPol.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:TaylorCosPol.png *License*: GNU Free Documentation License *Contributors*: Original uploader was Sam Derbyshire at en.wikipedia

Immagine:Wikiversity-logo-It.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Wikiversity-logo-It.svg *License*: logo *Contributors*: Skyluke

Licenza