Varietà (geometria)

In geometria, una **varietà** è un concetto abbastanza generale definito con lo scopo di modellare "spazi a più dimensioni", eventualmente curvi, che "visti con una lente di ingrandimento" sembrano piatti e simili allo spazio euclideo, ma che visti globalmente possono assumere le forme più svariate.

Esempi di varietà sono le curve e le superfici. L'universo è intuitivamente un esempio di varietà tridimensionale. La relatività generale descrive lo spaziotempo come una varietà con 4 dimensioni.

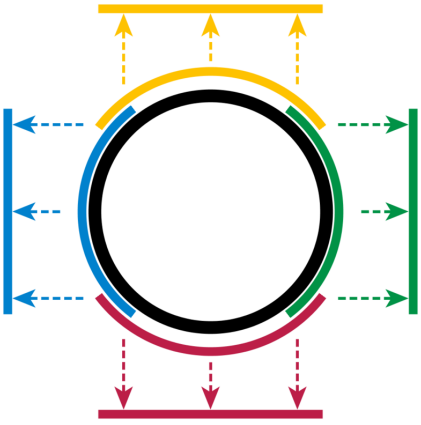
Quale nozione di varietà

L'idea di "spazio a più dimensioni" è descritta e studiata in vari modi differenti, fra loro correlati. Usando gli strumenti della topologia, del calcolo infinitesimale, dell'analisi complessa e dell'algebra si arriva rispettivamente ai concetti di **varietà topologica**, **varietà differenziabile**, **varietà complessa** e **varietà algebrica**.

Concetti più raffinati come quello di curvatura vengono definiti nell'ambito della geometria differenziale, e portano ad esempio alla nozione di **varietà riemanniana**.

Varietà topologica

Una **varietà topologica** modella uno spazio n-dimensionale dal punto di vista topologico: si definiscono quindi solo le proprietà di base dello spazio, che ne caratterizzano esclusivamente la forma.



la circonferenza è una varietà topologica di dimensione 1. Qui è descritto un atlante con quattro carte: ciascuna è un omeomorfismo fra un aperto ed un intervallo aperto di $\mathbb{R}$

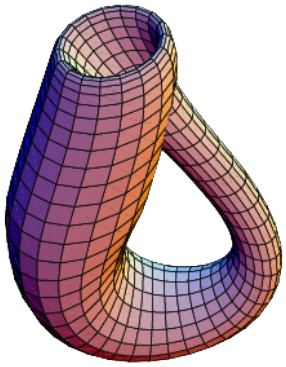
Definizione formale

Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$. Il numero n è la **dimensione** della varietà.

Un omeomorfismo fra un aperto di X e un aperto di $\mathbb{R}^n$ è detto una **carta**. Quindi X è una varietà topologica se esiste un insieme di carte che ricoprono tutto X. Un insieme di carte di questo tipo è un atlante. I nomi "carta" e "atlante" sono scelti in analogia con gli atlanti planetari: infatti la superficie della Terra non è descrivibile interamente su un foglio (cioè, non è omeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^2$) però è possibile descriverla "a pezzi", tramite un certo numero di carte geografiche, ciascuna delle quali descrive solo una zona della superficie: ad esempio, con due carte che descrivono gli emisferi Nord e Sud.

Una varietà di dimensione n è spesso chiamata brevemente **n-varietà**.

Esempi



La bottiglia di Klein: ogni "quadratino" è contenuto in una carta bidimensionale.

Dimensioni basse

La topologia della dimensione bassa è la branca della topologia che studia le varietà di dimensione fino a 4.

Esistono praticamente solo due varietà topologiche di dimensione 1, la circonferenza e la retta: ogni altra varietà di dimensione 1 è infatti omeomorfa a una di queste due. Le varietà di dimensione 2, chiamate superfici, sono invece infinite e più variegate. Tra queste troviamo ad esempio già molti esempi notevoli dal punto di vista topologico: la sfera, il toro, il nastro di Möbius, la bottiglia di Klein.

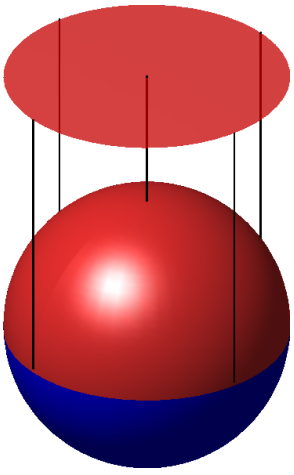
La bottiglia di Klein è un esempio importante: benché sia "localmente" un oggetto bidimensionale, non è realizzabile "globalmente" come sottoinsieme né del piano né dello spazio (ma è realizzabile dentro lo spazio $\mathbb{R}^4$quadri-dimensionale!).

Una varietà di dimensione 3 intuitivamente è un oggetto che "potrebbe essere" l'universo in cui viviamo. Le 3-varietà non sono facilmente visualizzabili, ed il loro studio è una branca importante della topologia. La congettura di Poincaré, dimostrata nel 2003 da Grigori Perelman, è stato un importante problema irrisolto per più di un secolo, riguardante proprio questo ambito.

Una varietà di dimensione 4 è un oggetto ancora più difficile da visualizzare. Lo studio delle varietà con quattro dimensioni è un punto centrale della matematica moderna, con numerosi collegamenti alla fisica teorica: la relatività generale descrive infatti lo spaziotempo come una 4-varietà.

Superfici sferiche

Una superficie sferica di dimensione n arbitraria è sempre una varietà n -dimensionale. Essa è definita come il luogo degli punti in $\mathbb{R}^{n+1}$che soddisfano l'equazione



Ogni emisfero di una superficie sferica è contenuto in una carta.

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1,$$

e gli *emisferi nord e sud* sono i sottoinsiemi in cui rispettivamente $x_0 \geq 0$e $x_0 \leq 0$. La proiezione stereografica descrive due carte, ciascuna contenente uno dei due emisferi.

Varietà differenziabile

Una **varietà differenziabile** è una varietà topologica su cui è possibile usare gli strumenti del calcolo infinitesimale. Grazie a questi strumenti è possibile parlare di spazio tangente, campo vettoriale, funzione differenziabile, di forma differenziale, ecc.

Una varietà differenziabile è definita come una varietà topologica, le cui funzioni di transizione sono però differenziabili (e non solamente continue come nel caso topologico).

Se le funzioni di transizione sono in più analitiche, la struttura risultante si chiama una **varietà analitica**.

Varietà complessa

Una **varietà complessa** è una varietà topologica su cui è possibile usare gli strumenti dell'analisi complessa: la varietà complessa è cioè l'analogo complesso della varietà differenziabile.

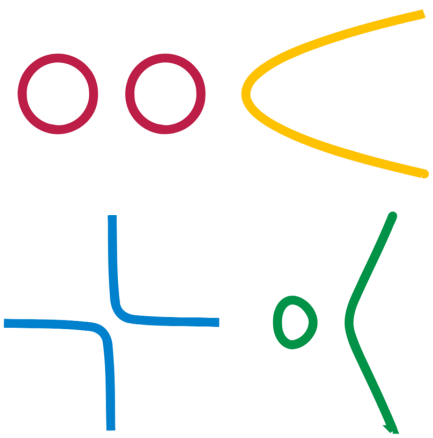
Una varietà complessa è definita come una varietà topologica di dimensione $2n$, le cui funzioni di transizione, viste come mappe fra aperti di $\mathbb{C}^n$ tramite l'identificazione naturale di $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$, sono però olomorfe.

Poiché le funzioni analitiche sono differenziabili, una varietà complessa ha anche una struttura di varietà differenziabile.

Varietà algebrica

Una **varietà algebrica** è definita con tecniche diverse da quelle usate per le varietà topologica, differenziale o complessa.[1]

Una varietà algebrica è un oggetto che è localmente definito come l'insieme degli zeri di uno o più polinomi con n variabili in K^n, dove K è un campo fissato, come ad esempio il campo dei numeri reali o complessi. Gli esempi più semplici di varietà algebriche sono le **varietà affini** e le **varietà proiettive**.



Varietà affini in $\mathbb{R}^2$ definite da alcuni semplici polinomi in due variabili: due circonferenze, una parabola, una iperbole, una *cubica* (definita da un'equazione di terzo grado).

Varietà affine

Una **varietà affine** è un sottoinsieme V di K^n che è il luogo di zeri di un insieme S di polinomi in n variabili. In altre parole, V è l'insieme dei punti su cui si annullano contemporaneamente tutti i polinomi in S, cioè S è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali. Generalmente si indica $V = V(S)$ per rimarcare la dipendenza di V dall'insieme S.

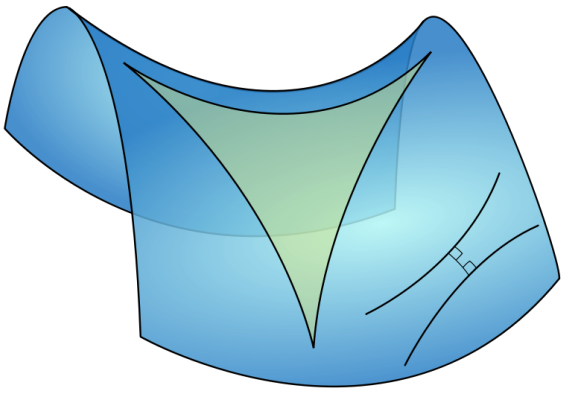
I polinomi in S non devono necessariamente essere in numero finito. Se $I(S)$ è l'ideale generato da S, risulta che $V(S) = V(I(S))$: quindi ogni varietà è in verità il luogo di zeri di un ideale di polinomi. L'importanza degli ideali nella teoria degli anelli discende proprio da questo fatto.

Varietà proiettiva

Una **varietà proiettiva** è un sottoinsieme V dello spazio proiettivo $P^n(K)$, definito analogamente alla varietà affine come luogo di zeri di un insieme S di polinomi. L'unica differenza con il caso affine sta nel fatto che tali polinomi hanno $n+1$ variabili, e poiché le coordinate omogenee di un punto nello spazio proiettivo sono definite a meno di una costante moltiplicativa, questi devono essere omogenei affinché le equazioni abbiano senso.

Varietà riemanniana

Una **varietà riemanniana** è una varietà differenziabile in cui lo spazio tangente in ogni punto è dotato di un prodotto scalare che varia in modo continuo al variare del punto (più precisamente, varia in modo liscio). Analogamente a quanto accade per gli spazi euclidei, la presenza di questo prodotto scalare permette di parlare di distanza fra punti, lunghezze di curve, angoli, aree e volumi.



Un triangolo in una varietà con curvatura negativa: la somma degli angoli interni è inferiore a 180°

In particolare una varietà riemanniana è uno spazio metrico, su cui è definito il concetto di geodetica come curva che realizza localmente la distanza fra due punti. Su una varietà riemanniana sono quindi presenti tutti gli enti geometrici classici della geometria euclidea, benché il loro comportamento possa differenziarsi enormemente dal comportamento degli usuali enti nel piano: ad esempio può non valere il V postulato di Euclide, né altri assiomi di Hilbert. Localmente, questa differenza di comportamento è misurata dalla curvatura della varietà riemanniana. Globalmente, è dovuta alla topologia della varietà.

Esempi di varietà riemanniane sono le sottovarietà dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. La sfera n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$ è un esempio fondamentale di varietà riemanniana con curvatura positiva. Lo spazio euclideo ha invece curvatura nulla. Uno spazio importante con curvatura negativa è il disco di Poincaré: si tratta dell'usuale palla in $\mathbb{R}^n$, su cui è però definita una metrica diversa da quella euclidea.

Origine del termine

In italiano si traduce con *varietà* il termine tedesco *Mannigfaltigkeit*, che compare per la prima volta nella tesi di dottorato del 1851 di Bernhard Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Riemann si pone il problema di introdurre delle "grandezze molteplicemente estese", aventi cioè "più dimensioni", e le definisce usando quel termine.

Analizzando il termine come parola composta, *Mannig-faltig-keit*, si riconosce in essa un parallelo con il termine latino *multi-plic-itas*, sicché lo si potrebbe tradurre letteralmente come 'molteplicità'.

Voci correlate

- Topologia differenziale
- Topologia della dimensione bassa
- Superficie (matematica)
- 3-varietà
- Varietà con bordo

Riferimenti

[1] In inglese i nomi *variety* e *manifold* sono usati rispettivamente per le varietà algebriche e quelle topologiche, differenziali o complesse.

Fonti e autori del articolo

Varietà (geometria) *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=22360878 *Contributors*: Davide Pioggia, Luca Antonelli, Maurice Carbonaro, Megalexandros, Moloch981, Piddu, Pokipsy76, Ylebru, 5 anonymous edits

Fonti, licenze e autori delle immagini

Immagine:Circle with overlapping manifold charts.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Circle_with_overlapping_manifold_charts.png *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contributors*: Anarkman, Darapti, KSmrq, Pbroks13, Roomba, Wst

Immagine:KleinBottle-01.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:KleinBottle-01.png *License*: Public Domain *Contributors*: Darapti, Dbenbenn, Fropuff, Tttrung, Wikiborg, たね

Immagine:Sphere_with_chart.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Sphere_with_chart.png *License*: Public Domain *Contributors*: User:Jitse Niesen

Immagine:Conics and cubic.png *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Conics_and_cubic.png *License*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contributors*: Anarkman, Darklama, EugeneZelenko, KSmrq, W!B:, 1 anonymous edits

Immagine:Hyperbolic triangle.svg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Hyperbolic_triangle.svg *License*: Public Domain *Contributors*: Kieff, 1 anonymous edits

Licenza

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/