I TERRIBILI TENSORI

GIUSEPPE GIUDICE

Sommario. Una introduzione didattica ai tensori e al loro uso: con la speranza che nessuno più li consideri 'terribili'.

1. Vettori

Partiamo dall'idea intuitiva di vettore: una freccia che parte da un punto; subito si arriva all'idea di campo vettoriale, ossia un vettore associato ad ogni punto dello spazio. Nel caso particolare in cui ad ogni punto dello spazio sia associato lo stesso segmento orientato, il campo vettoriale prende di nuovo il nome di vettore, onde l'altra definizione di vettore come classe di segmenti equipollenti.

Posta nello spazio una terna di vettori base (eviterei di parlare di versori, parola alla quale è connesso il concetto di modulo unitario: i vettori base non hanno necessariamente modulo unitario) si può ottenere il vettore come combinazione lineare dei tre vettori base, dandosene quindi le tre componenti. In generale quindi un vettore può anche essere visto come una n-pla di numeri, e un campo vettoriale come una n-pla di numeri associata ad ogni punto dello spazio, e quindi un'applicazione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Negli esempi successivi, per chiarezza, porremo quasi sempre $n = 2$ o $n = 3$.

Diamo anche delle coordinate, in questo modo: consideriamo delle funzioni x^1, $x^2, \ldots, x^n$ (tante quante sono le dimensioni dello spazio), individuate dal loro valore punto per punto (ad ogni punto dello spazio attacchiamo il valore della funzione: metodo del piano quotato) o dalle loro curve di livello.

Definiamo asse x^i l'intersezione delle (iper-)superficie $x_j = 0$ (con $j \neq i$).

In corrispondenza delle coordinate scegliamo i vettori base: consideriamo come primo vettore base e_1 quello tangente all'asse x^1 e che abbia lunghezza tale che dalla cocca alla punta ci sia un incremento unitario di x_1. naturalmente, siccome l'asse è curvo occorre procedere con un passaggio al limite: si parte dal vettore che congiunge i punti $x^1 = 0$ e $x^1 = 1$, poi si considera il vettore che va da $x^1 = 0$ a $x^1 : 1/2$, raddoppiandone il modulo, poi il vettore che va da $x^1 = 0$ a $x^1 = 1/4$, quadruplicandone la lunghezza, eccetera; il limite di questi vettori costituisce il vettore base, che si può indicare con $\partial P/\partial x^1$. Per esempio, in coordinate polari uno dei vettori base è unitario e diretto sulla retta (analoga del piano in 2D) $\theta = cost$ e quindi localmente come r, cioè verso l'esterno; l'altro vettore base è diretto lungo le curve (cerchi) $r = cost$ e di lunghezza tale da assicurare un incremento costante ed unitario di θ, cioè di un radiante: sarà quindi di lunghezza uguale ad r. Come si vede, questi vettori non sono di lunghezza unitaria e in generale neppure perpendicolari tra loro. Questa base si chiama base coordinata (coordinate basis), ma altre scelte sono possibili.

Date: 15 dicembre 2003.

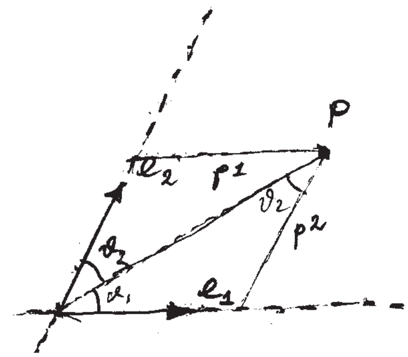
I vettori base saranno indicati con e_1, e_2, eccetera; se essi non variano da punto a punto dello spazio (il che. in caso di base coordinata, si ottiene solo se le coordinate x^i sono lineari):

$$\mathsf{A} = a^1\mathsf{e}_1 + a^2\mathsf{e}_2 + \cdots + a^n\mathsf{e}_n$$

ovvero, con notazione più sintetica (convenzione di Einstein)

$$\mathsf{A} = a^i\mathsf{e}_i$$

Si veda ad esempio la figura 1.



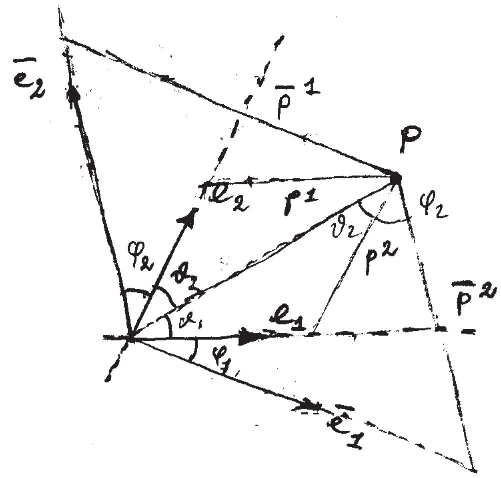
Quando però i vettori base variano da punto a punto (basti pensare al caso delle coordinate polari) si possono trovare le componenti solo di vettori pensati come localizzati in un punto; per esempio, se si tratta di trovare le componenti di un vettore spostamento, bisogna imporre che tale spostamento sia infinitesimo, in modo che nell'ambito del vettore non varino di troppo la spaziatura e l'orientazione della griglia di coordinate. In quest'ambito piccolissimo i vettori base non variano. Ci avviciniamo in questo modo al concetto di vettore tangente, che in realtà è solo un vettore localizzato. Quando un ingegnere parla di vettore infinitesimo, si riferisce in modo matematicamente non formalizzato ad un vettore localizzato o tangente.

2. Cambiamento di riferimento

Un'operazione che faremo spesso è il cambiamento di riferimento. Passeremo per esempio da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche o sferiche, o anche a cartesiane oblique. Siccome i vettori si intendono localizzati, e quindi la rete di coordinate sufficientemente ingrandita da apparire a maglie rettilinee ed equidistanti (ma non necessariamente perpendicolari, né a distanze uguali per le due famiglie), ci basta indagare quello che succede per coordinate cartesiane oblique. L'effetto del cambiamento di coordinate sarà una variazione dei vettori base, che cambieranno di direzione o di lunghezza o di entrambe; contemporaneamente variano le componenti del vettore, in modo che il vettore stesso, inteso come ente geometrico, rimanga invariato:

$$\mathsf{A} = a^k\mathsf{e}_k = a^{\hat{k}}\mathsf{e}_{\hat{k}} \tag{1}$$

Si veda la fig. 2, in cui lo stesso vettore OP viene scritto in due diversi sistemi di coordinate cartesiane oblique.



Siccome siamo in coordinate cartesiane (ancorché oblique), tra le vecchie e le nuove componenti intercorre una relazione lineare, che possiamo scrivere

$$a^{\hat{k}} = C_l^{\hat{k}} a^l. \tag{2}$$

La $C_l^{\hat{k}}$ è un insieme di coefficienti, che possono benissimo essere scritti sotto forma di matrice, con $\hat{k}$ come indice di riga e l come indice di colonna, se si interpretano $a^{\hat{k}}$ e a^l come componenti di vettori colonna.

Sostituiamo la (2) nella (1)

$$C_l^{\hat{k}} a^l \mathsf{e}_{\hat{k}} = a^k \mathsf{e}_k$$

ovvero, cambiando leggermente l'ordine,

$$a^l C_l^{\hat{k}} \mathsf{e}_{\hat{k}} = a^k \mathsf{e}_k.$$

Ora sfruttiamo il fatto che $\hat{k}$ e l sono indici muti (o saturati); possiamo usare al loro posto delle lettere qualsiasi (ma *non* possiamo sostituire ad un indice soprasegnato uno non soprasegnato o viceversa). Scriviamo allora

$$a^k C_k^{\hat{l}} \mathsf{e}_{\hat{l}} = a^k \mathsf{e}_k$$

e poiché quest'espressione deve valere per ogni a^k

$$C_k^{\hat{l}} \mathsf{e}_{\hat{l}} = \mathsf{e}_k. \tag{3}$$

Abbiamo così ottenuto la trasformazione tra i vettori base. La (3) s'interpreta come il prodotto tra il vettore riga $\mathsf{e}_{\hat{l}}$ e la matrice $C_k^{\hat{l}}$ per ottenere l'altro vettore riga e_k.

Si può però desiderare ottenere una relazione che restituisca i nuovi vettori base in funzione dei vecchi (invece che i vecchi in funzione dei nuovi). Per ottenerla, moltiplichiamo i due membri della (3) per la quantità $T_{\hat{n}}^k$, che è un insieme di coefficienti da determinarsi:

$$T_{\hat{n}}^k C_k^{\hat{l}} \mathsf{e}_{\hat{l}} = T_{\hat{n}}^k \mathsf{e}_k;$$

questa relazione diventa quella desiderata

$$\mathsf{e}_{\hat{l}} = T_{\hat{n}}^k \mathsf{e}_k, \tag{4}$$

solo se

$$T^k_{\hat{n}} C^{\hat{l}}_k = \delta^{\hat{l}}_{\hat{n}}$$

(in cui compare la delta di Kronecker). Ciò significa che la matrice $T^k_{\hat{n}}$ è l'inversa della matrice $C^{\hat{l}}_k$.

Rimangono naturalmente da determinare i coefficienti delle due matrici. Per far ciò consideriamo le componenti di un vettore tangente ad una curva, per poterci servire delle notazioni dell'analisi. Sia $P = P(t)$ l'equazione parametrica della curva, scritta anche, in funzione delle componenti, $x^i = x^i(t)$ nelle vecchie coordinate e $x^{\hat{k}} = x^{\hat{k}}(t)$ nelle nuove; il vettore tangente è $a^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ nelle vecchie coordinate e $a^{\hat{k}} = \mathrm{d}x^{\hat{k}}/\mathrm{d}t$ nelle nuove. Applicando la regola della derivazione delle funzioni composte si ottiene facilmente:

$$\frac{\mathrm{d}x^{\hat{k}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^{\hat{k}}}{\partial x^i}$$

e, ritornando alle notazioni della (2),

$$C^{\hat{k}}_i = \frac{\partial x^{\hat{k}}}{\partial x^i}. \tag{5}$$

Questa formula s'interpreta in questo modo: il coefficiente $C^{\hat{k}}_i$ è la variazione della (nuova) coordinata $x^{\hat{k}}$ per una variazione unitaria della (vecchia) coordinata x^i, ovvero, pittoricamente, il valore della nuova coordinata $x^{\hat{k}}$ alla punta del (vecchio) vettore base e_i.

Il tensore $C^{\hat{k}}_i$ si scrive sotto forma di matrice così :

$$C^{\hat{k}}_i = \begin{pmatrix} C^{\hat{1}}_1 & C^{\hat{1}}_2 \\ C^{\hat{2}}_1 & C^{\hat{2}}_2 \end{pmatrix}$$

e quindi rappresenta proprio la matrice jacobiana della trasformazione dalle vecchie alle nuove coordinate.

I valori dei coefficienti $C^{\hat{k}}_i$ possono essere ottenuti anche per via puramente geometrica, come vedremo; ma il vantaggio della (5) è innegabile, in quanto permette di scrivere la matrice in funzione del punto per tutto il piano (o lo spazio); consideriamo per esempio il passaggio da cartesiane ortogonali a polari:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

e allora

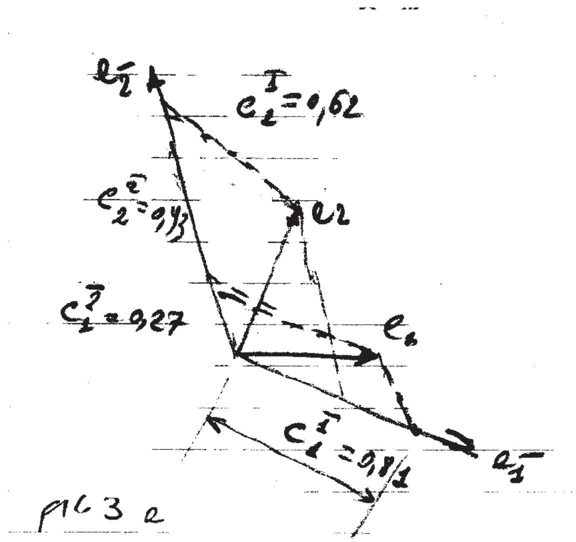
$$C^{\hat{k}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

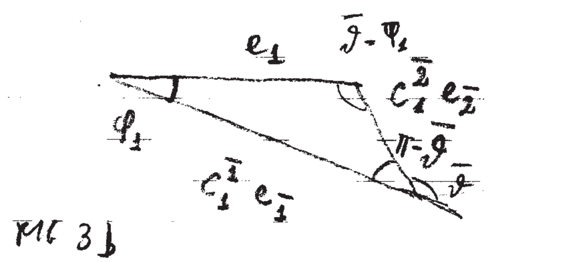
Come esempio di determinazione puramente geometrica dei coefficienti di trasformazione si veda la figura 3.

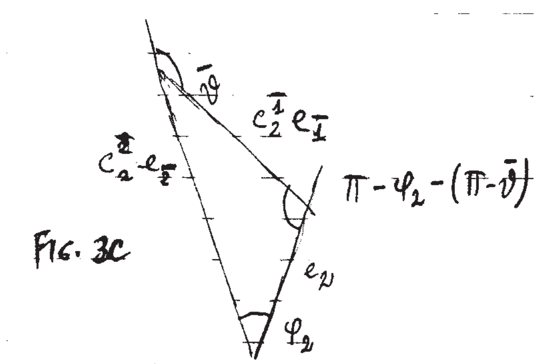
Dal triangolo di fig. 3b, applicando il teorema dei seni, si ricava

$$C^{\hat{2}}_1 = \frac{e_1}{e_{\hat{2}}}\frac{\sin\phi_1}{\sin(\pi - \hat{\theta})}$$

$$C^{\hat{1}}_1 = \frac{e_1}{e_{\hat{1}}}\frac{\sin(\hat{\theta} - \phi_1)}{\sin(\pi - \hat{\theta})}$$





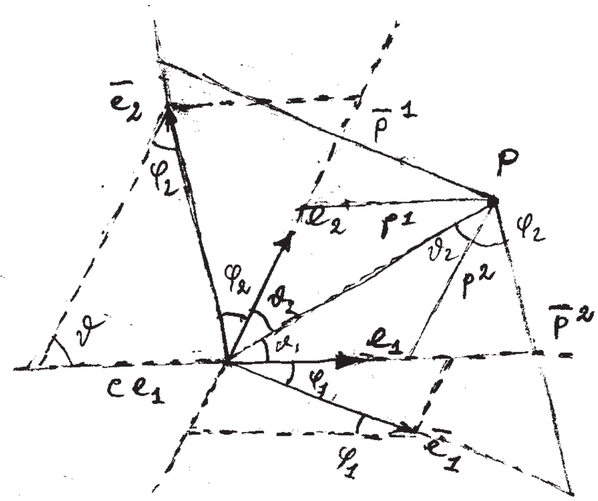


Similmente (applicando il teorema dei seni al triangolo di fig. 3c) si ricavano le altre due componenti,

$$C_2^{\hat{1}} = \frac{e_2}{e_{\hat{1}}} \frac{\sin \phi_2}{\sin(\pi - \hat{\theta})}$$

$$C_2^{\hat{2}} = \frac{e_2}{e_{\hat{2}}} \frac{\sin(\hat{\theta} - \phi_2)}{\sin(\pi - \hat{\theta})}$$

e (fig. 4) quelle della matrice T.



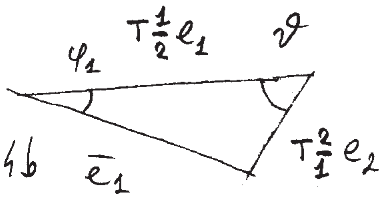


fig 4b

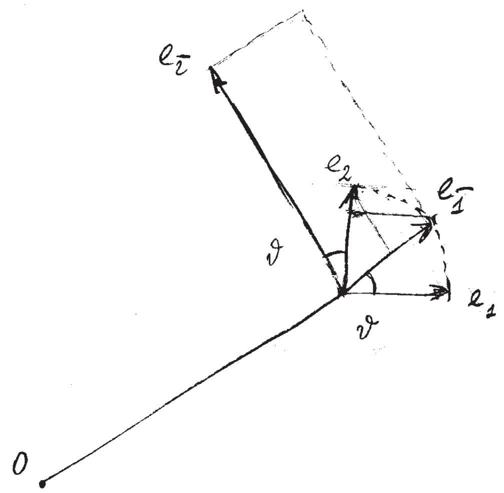
$$T^1_{\hat{1}} = \frac{e_{\hat{1}} \sin(\pi - \phi_1 - \theta)}{e_1 \sin\theta}$$
$$T^2_{\hat{1}} = -\frac{e_{\hat{1}} \sin\phi_1}{e_2 \sin\theta}$$
$$T^1_{\hat{2}} = -\frac{e_{\hat{2}} \sin\phi_2}{e_1 \sin\theta}$$
$$T^2_{\hat{2}} = \frac{e_{\hat{2}} \sin(\pi - \phi_2 - \theta)}{e_2 \sin\theta}$$

I segni meno dipendono dalla scelta del verso positivo degli angoli ϕ_i fatto nelle figure.

Il prodotto $C^{\hat{k}}_i T^i_{\hat{l}}$ restituisce, come doveva, $\delta^{\hat{k}}_{\hat{l}}$; ma i calcoli sono un po' lunghi e noiosi; io li ho eseguiti con Mathematica.

Come applicazione e controllo delle ultime formule, facciamone l'applicazione al passaggio da coordinate cartesiane a polari. Qui si presenta un piccolo problema di notazione, dovuto al diverso significato che assume la lettera θ; comunque, come si vede in figura, gli angoli tra coordinate, prima indicati con θ e $\hat{\theta}$ diventano $\pi/2$, mentre, dando a θ l'ordinario significato di seconda coordinata polare si ha:

$$\phi_1 \mapsto -\theta$$
$$\phi_2 \mapsto \theta.$$



Si ottiene così:

$$\begin{pmatrix} T^1_{\hat{1}} & T^1_{\hat{2}} \\ T^2_{\hat{1}} & T^2_{\hat{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} C^{\hat{1}}_1 & C^{\hat{1}}_2 \\ C^{\hat{2}}_1 & C^{\hat{2}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix};$$

Si verifica immediatamente che prodotto delle due matrici restituisce la matrice unità.

Nel caso di semplice rotazione di assi cartesiani ortogonali, ponendo nelle formule precedenti $r = 1$ si ha:

$$\begin{pmatrix} C^{\hat{1}}_1 & C^{\hat{1}}_2 \\ C^{\hat{2}}_1 & C^{\hat{2}}_2 \end{pmatrix} = \mathsf{T}^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

nelle quali θ s'intende positiva se i nuovi assi sono ruotati rispetto ai vecchi in senso antiorario, e la trasformazione vale sempre ovviamente

$$x^{\hat{m}} = C^{\hat{m}}_k x_k.$$

3. Tensore metrico (o fondamentale)

Un altro personaggio da presentare è il tensore metrico; per il momento sarà considerato solo come un insieme di nove coefficienti associati ad altrettante coppie di indici; il coefficiente g_{ij} è dato dal prodotto scalare dei due vettori base e_i ed e_j. Volendo si può scrivere questo tensore sotto forma di matrice, e questa sarà simmetrica. Gli usi del tensore fondamentale sono molteplici; per il momento può essere usato per fare il prodotto scalare di due vettori. Inoltre ce ne serviremo per passare da un vettore al suo covettore duale, come vedremo fra un po'; si dice in questo caso che passiamo da componenti contravarianti a componenti covarianti.

4. Covettori

Un covettore è anch'esso una terna di numeri, ma deve essere visualizzato in maniera diversa da un vettore. Esso infatti è un *operatore* che applicato ad un vettore fornisce un numero reale.

Visualmente un covettore viene rappresentato da una famiglia di superficie orientate, i cui numeri direttori (ossia quelli della normale orientata) sono appunto la terna che lo definisce. La distanza tra due superficie della famiglia è inversamente proporzionale al modulo del covettore. Le superficie non vanno interpretate come superficie di livello di una funzione; quello che conta è la loro spaziatura e orientazione.

I covettori possono essere sommati e moltiplicati per scalari; le regole che seguono fanno sì che essi siano 'vettori' (nel senso di punti di uno spazio vettoriale).

Esiste una dualità tra vettori e covettori. Dato un covettore $\tilde{\mathsf{p}}$ e un vettore qualsiasi v, il vettore p duale del covettore è quello per cui

$$\mathsf{p} \cdot \mathsf{v} = \tilde{\mathsf{p}}(\mathsf{v})$$

ossia quello che moltiplicato scalarmente per il vettore v restituisce il numero reale ottenuto applicando il covettore $\tilde{\mathsf{p}}$ al vettore v. Come corollario, si ha che le superficie del covettore duale di un vettore giacciono perpendicolarmente al vettore stesso e sono distanziate di una quantità inversamente proporzionale al modulo del vettore stesso.

Conviene definire una base di covettori, e rappresentare tutti gli altri come combinazioni lineari dei covettori base. C'è naturalmente ampia libertà nella scelta della base, ma conviene scegliere la base duale di quella scelta per i vettori, ossia, detti $\boldsymbol{\omega}^i$ i covettori base, quella che

$$\boldsymbol{\omega}^i \mathsf{e}_j = \delta^i_j. \tag{6}$$

Le superficie di $\boldsymbol{\omega}^i$ giacciono parallelamente agli assi x_j con $j \neq i$ e quindi sono attraversate solo dall'asse x^i; in generale non sono però perpendicolari a x^i. (Per meglio visualizzare la cosa, pensiamo a coordinate cartesiane oblique e non isometriche). esse coincidono con le superficie di livello della funzione x_i.

Il covettore base viene indicato con ω^i, ovvero con $\mathrm{d}x^i$. Quindi un covettore sarà indicato per esempio con $\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$, ovvero in generale con $a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$, essendo a, b, c tre numeri reali.

Se le due basi scelte per i vettori e per i covettori sono duali, un vettore e il suo duale avranno le stesse componenti.

Applicare un covettore ad un vettore significa contare quante superficie il vettore (segmento orientato) percia; in particolare saranno zero se vettore e covettore sono perpendicolari (ossia il vettore è parallelo alle superficie orientate). È ovvio che il valore risulta proporzionale ai due moduli e al coseno dell'angolo, ossia al prodotto scalare tra il vettore e il duale del covettore (che è a sua volta un vettore). In particolare il vettore duale di un covettore percerà tante superficie quanto è il quadrato del suo modulo.

La dualità tra vettori e covettori e l'applicazione di un covettore ad un vettore appaiono molto chiaramente se si adotta la notazione di Dirac: i vettori saranno indicati con $|a\rangle$ (e chiamati ket); i covettori con $\langle b|$ (e chiamati bra); un vettore e un covettore duali sono indicati con la stessa lettera; un covettore applicato ad un vettore viene indicato $\langle b|a\rangle$ (bra(c)ket). Incidentalmente, le parentesi angolate vengono spesso usate per il prodotto scalare (o prodotto interno).

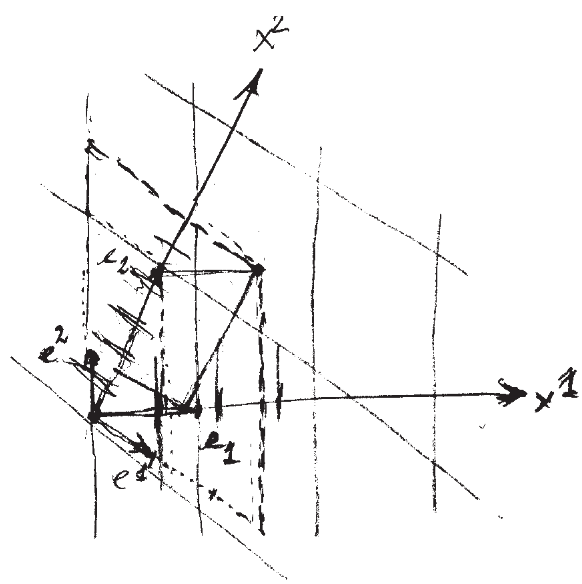
Qualche autore indica il covettore duale del vettore v col simbolo $\mathsf{v}\cdot$, per sottolineare il suo uso nel prodotto scalare.

5. Coordinate duali

Alcuni autori rappresentano i covettori in forma di "frecce" indicandone le basi con e^i, e scrivono quindi la (6)

$$\mathsf{e}^i \mathsf{e}_j = \delta^i_j$$

da cui si deduce immediatamente (forse meglio di prima) che la e^i è perpendicolare alle e_j con $i \neq j$. Inoltre $\mathsf{e}^i \mathsf{e}_i = 1$ (qui non opera la convenzione sulla somma degli indici ripetuti), il che significa che la proiezione di e^i sulla direzione di e_i per il modulo di quest'ultima (ossia il loro prodotto scalare) è unitario, ma non significa che i loro moduli siano entrambi unitari; invece se si scrive $\boldsymbol{\omega}^i \mathsf{e}_i = 1$ (neanche qui opera la convenzione di Einstein) ciò significa che il vettore e_i percia una sola superficie di $\boldsymbol{\omega}^i$. Si veda in proposito la fig. 5.

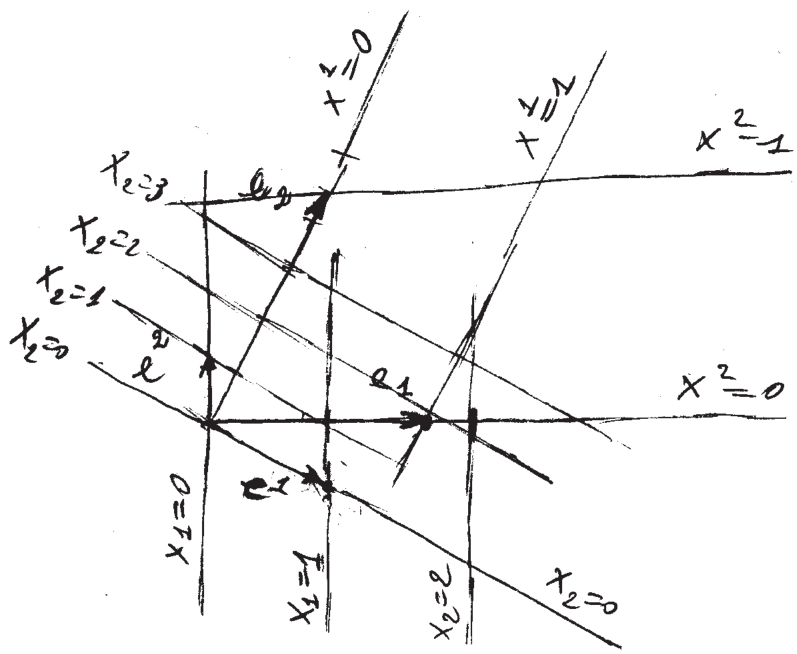


Si possono introdurre, oltre alle x^i, le coordinate duali di queste, indicate con x_i, in questo modo: la x_i non è altro che la funzione il cui gradiente è la e_i. Si ha così una perfetta dualità tra coordinate contravarianti x^i la cui base coordinata sono i vettori e_i e coordinate covarianti x_i la cui base coordinata sono i vettori e^i. Si veda la fig. 6.

Dato un vettore OP, decomponiamolo secondo i due vettori base e_i; la cosa si fa con la solita regola del parallelogrammo. Si ottengono così le componenti contravarianti. Per le componenti covarianti, prendiamo al posto del vettore il suo covettore duale e a scomponiamo poi quest'ultimo nella base dei covettori; ciò funziona solo se le due basi sono duali.

Più comodo è scomporre il vettore secondo i due vettori duali e^1 ed e^2:

$$OP = x_1 \mathsf{e}^1 + x_2 \mathsf{e}^2$$



o ancora, le componenti covarianti si ottengono prendendo il prodotto scalare del vettore per i vettori base:

$$v_i = \mathsf{v} \cdot \mathsf{e}_i = v^j \mathsf{e}_j \cdot \mathsf{e}_i = g_{ij} v^j$$

L'uso principale del tensore metrico diventa a questo punto quello di far passare da coordinate covarianti a contravarianti e viceversa, quindi anche di trasformare i vettori nei loro covettori duali e viceversa.

6. Forme differenziali

Il covettore, come ora definito, ha lo stesso valore (modulo e orientazione) in ogni punto dello spazio. Se gli permettiamo di variare, otteniamo il concetto di forma differenziale. Una forma differenziale è un campo covettoriale, ossia in ogni punto dello spazio è applicato un covettore.

Dal punto di vista visuale, rappresentiamoci una forma differenziale in questo modo: suddividiamo tutto lo spazio in piccole cellette; in ciascuna consideriamo una famiglia di superficie orientate (in modo da dipingere il covettore applicato in quel punto). In alcuni casi particolari le superficie di una celletta si salderanno dolcemente con quelle della celletta adiacente, e così in tutto lo spazio; potremo ricostruire una famiglia di superficie (in generale curve) che riempiono tutto lo spazio. In questi casi la forma differenziale si dirà integrabile.

In altri casi, molto più comuni, le superficie di una celletta non si fonderanno con quelle della celletta adiacente; il caso tipico è che siano parallele ma con spaziatura diversa; ma potrebbero anche essere non parallele. In questo caso la forma sarà non integrabile.

Dal punto di vista matematico le forme differenziali (o 1-forme) sono funzioni di vettori, cioè meccanismi lineari che inghiottono un vettore e restituiscono un numero reale. Le forme di solito si indicano con lettere grassette (come i vettori) sormontate da una tilde (per distinguerli da essi), ma più spesso con lettere greche grassette. L'uscita della macchina corrispondente ad un certo vettore u si chiama il valore di σ su u o la contrazione di σ con u.

Le 1-forme sono lineari nel senso delle formule:

$$\langle \tilde{\mathsf{k}}, a\mathsf{u} + b\mathsf{v} \rangle = a\langle \tilde{\mathsf{k}}, \mathsf{u} \rangle + b\langle \tilde{\mathsf{k}}, \mathsf{v} \rangle$$

$$\langle a\tilde{\mathsf{k}} + b\tilde{\mathsf{m}}, \mathsf{u} \rangle = a\langle \tilde{\mathsf{k}}, \mathsf{u} \rangle + b\langle \tilde{\mathsf{m}}, \mathsf{u} \rangle$$

(2.12a di MTW56 e 2.12b di MTW57). Come ci aspettavamo, rispettano gli assiomi di uno spazio vettoriale.

7. Derivate di una funzione e gradienti

Consideriamo ora una funzione reale (ossia un campo scalare nello spazio) e cerchiamone un'approssimazione lineare nell'intorno di un punto P, ossia il piano tangente alla funzione in quel punto (per visualizzare le cose supponiamo una funzione di due variabili e usiamo la terza dimensione spaziale per rappresentarne il valore).

Il valore approssimato della funzione è dato dal valore nel punto P più un numero reale che deve essere il prodotto di 'qualcosa' per il vettore $Q - P$ che spazza l'intorno di P. Per quanto si è detto, questa quantità dev'essere un covettore, ma se ricordiamo la formula di Taylor in più variabili, esso è anche il gradiente della funzione da approssimare. Siamo quindi condotti a considerare il gradiente come un covettore. Ovviamente ciò non è in contrasto con quanto sapevamo già, in quanto questo covettore non è altro che il duale del 'solito' vettore gradiente. Rimane però il fatto che è più comodo pensare il gradiente come un covettore che come un vettore, e tale è la veste che gli si dà in matematica superiore.

Visualizzare il covettore gradiente è facile: basta prendere le superficie di livello della funzione e considerarle abbastanza da vicino (abbastanza ingrandite) in modo che appaiano piane ed equispaziate. Quindi, in generale un gradiente è una 1-forma; diventa un covettore vero e proprio se la funzione di partenza è lineare.

Il gradiente si indica con $\mathrm{d}f$; talvolta, per sottolinearne il carattere covettoriale con $\tilde{\mathsf{d}}f$.

Consideriamo ora la più semplice delle funzioni lineari: la funzione x^1. Le sue curve di livello (che sono piani equispaziati) ne rappresentano il gradiente, che è un covettore le cui superficie sono normali all'asse x_1 (ovvero al 'vettore gradiente' e^1 e tagliano l'asse x^1 nei punti di ascissa intera. Quindi va identificato con $\boldsymbol{\omega}^1$, quindi si giustifica la scrittura $\boldsymbol{\omega}^1 = \mathrm{d}x^1$.

8. Derivata direzionale

Dato un riferimento, ogni oggetto geometrico (cioè vettori, covettori, punti e quant'altro) ha una sua rappresentazione dipendente dalle coordinate: v è rappresentato dalle sue coordinate v^i: $\boldsymbol{\sigma}$ da σ_i; il punto P dalle sue coordinate contravarianti x^i o dalle sue coordinate covarianti x_j; la relazione $\langle \boldsymbol{\sigma} | \mathsf{v} \rangle$ dalla sommatoria $\sigma_i v^i$ in cui vale la convenzione di Einstein. Particolarmente interessante risulta la rappresentazione della derivata direzionale di una funzione rispetto ad un vettore.

Consideriamo una certa curva, la cui equazione, in funzione di un parametro t, sia $x^i = x^i(t)$, e una certa funzione $f(x^1, \ldots, x^n)$. Consideriamo i valori che la funzione assume sulla curva; essi costituiscono un'altra funzione $\phi(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ che è evidente funzione della sola t, e che è composta della f e dalle x^i. Applicando la regola della derivazione delle funzioni composte (chain rule) si ha:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{7}$$

(in cui vale la regola di Einstein). Il primo membro della (7) viene scritto

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \partial_{\mathsf{v}}\phi$$

e la prima derivata a destra della (7) rappresenta le componenti di un vettore v tangente alla curva (non del versore, perché il suo modulo non è necessariamente unitario). Rinunciando all'indicazione delle funzioni f e ϕ e scrivendo solo in termini di operatori si ha

$$\partial_{\mathsf{v}} = v^i\ \partial/\partial x^i$$

e, in particolare, la derivata parziale lungo i vettori base (versori degli assi) è data da

$$\partial_{\mathsf{e}_i} = \partial/\partial x^i$$

quindi la derivata parziale lungo un vettore è combinazione lineare delle derivate parziali lungo i vettori base, e i coefficienti sono proprio le componenti di quel vettore.

(per tutto ciò vedasi anche MTW61).

9. Tensori

Il tensore viene ora definito in modo ricorsivo: tensore covariante del primo ordine è il covettore; sua caratteristica è che, applicato ad un vettore, restituisce un numero reale, detto in questo caso scalare. Tensore covariante del secondo ordine è quello che applicato ad un vettore restituisce un vettore covariante del primo ordine; e in generale, vettore covariante di ordine N è quello che applicato ad un vettore restituisce un vettore covariante di ordine $N-1$. Un vettore contravariante di ordine N si ottiene da un vettore covariante di ordine N moltiplicandolo N volte per il tensore fondamentale. Come caso particolare, un vettore è un tensore contravariante di ordine 1, e lo scalare è un tensore di ordine zero.

Possiamo anche definire un tensore come un operatore lineare che applicato ad un vettore restituisce uno scalare o un altro vettore o un covettore (o 1-forma differenziale) o ancora un altro tensore (di rango inferiore); vi sono altri tensori che si applicano non ad un solo vettore ma a due, per restituire uno scalare (cioè hanno due ingressi e un'uscita) eccetera.

L'operazione di applicazione di un tensore ad un vettore si chiama saturazione e viene effettuata così: dato il tensore T, di coordinate T_{ij} e il vettore v di coordinate v^k, la saturazione si ottiene uguagliando una coppia di indici (p.e $i = k = n$) e sommando per tutti i valori di n, il che si indica semplicemente $T_{nj}v^n$. Come si vede, si contrae sempre un indice covariante (posto in basso) con uno controvariante (posto in alto). Ma alzare o abbassare un indice non presenta difficoltà, perché si effettua tramite il tensore metrico.

Naturalmente anche il vettore è un tensore e quindi un operatore. Per sapere di quale operatore si tratti rimando il lettore al paragrafo 11.

Ritengo a questo punto giusto chiedersi se la denominazione di covariante e controvariante vada applicata alle sole componenti o ai tensori, e quindi in particolare ai vettori, intesi come enti geometrici. La risposta provvisoria a questo quesito è che il vettore è in sé invariante e solo le sue componenti possono variare al variare delle coordinate. Tuttavia, di alcuni enti geometrici, per esempio gli spostamenti, si ottengono in maniera naturale le componenti controvarianti; di altri, per esempio i gradienti, si ottengono in maniera più naturale le componenti covarianti; quindi diciamo che lo spostamento è un vettore (vettore controvariante) e il gradiente un vettore covariante (covettore) ma nulla vieta, usando il tensore metrico, di ottenere le coordinate duali. Ciò, almeno trattandosi del gradiente, è abbastanza usato.

Campo tensoriale è un tensore le cui componenti variano in funzione delle coordinate; per esempio un campo vettoriale o una 1-forma sono casi particolari di campi vettoriali. Più rigorosamente un campo vettoriale è una funzione da $\mathbb{R}^3$ ad un tensore.

10. Algebra tensoriale

Due tensori dello stesso tipo possono essere sommati; due tensori possono essere moltiplicati (prodotto diretto) in modo da aversi un tensore di tipo diverso:

$$A^i_j B_{kl} = C^i_{jkl}$$

Inoltre su un vettore o su due vettori si può fare la contrazione degli indici.

11. I vettori come derivate direzionali

Voglio mostrare in questo paragrafo che le derivate direzionali hanno tutte le caratteristiche di un vettore, cioè modulo, direzione e verso, e quindi possono benissimo essere considerati vettori.

Anzitutto, una derivata direzionale ha una direzione (nomen omen…), cioè quella della tangente alla curva lungo cui facciamo la derivata.

Il verso è quello lungo cui cresce il parametro t rispetto al quale si deriva.

Per quanto riguarda il modulo o intensità, procediamo per gradi. Consideriamo gli operatori $\partial/\partial(2x)$, $\partial/\partial(3x)$ eccetera; è abbastanza chiaro che

$$\frac{\partial}{\partial(2x)} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}$$

eccetera. Associamo ora l'operatore ∂_x con il vettore base dell'asse x; automaticamente l'operatore ∂_{2x} rimane associato col vettore base dell'asse $2x$, in quanto parallelo allo stesso asse e di lunghezza tale (metà di quello del vettore base di x) da toccare la superficie $2x = 1$. la convenzione adottata risulta perciò perfettamente coerente.

Inoltre, se prendiamo l'operatore derivata direzionale lungo una curva qualsiasi, il cui vettore tangente sia v^i, esso risulta combinazione lineare delle derivate direzionale lungo gli assi e i coefficienti sono proprio le v^i; quindi le derivate direzionali si comportano proprio come i vettori.

Provato che gli operatori derivate differenziali si comportano come vettori, e quindi sono vettori, rimane da chiarire se i vettori possono fungere da operatori, nel senso in cui sono operatori i tensori; questi infatti agiscono su altri tensori (e non su funzioni). In particolare i vettori dovrebbero agire sui covettori per restituire un numero reale.

Premetto che per convenzione i vettori si scrivono a destra dei corrispondenti covettori; poiché di solito scriviamo un operatore a sinistra dell'entità su cui opera, occorre innanzitutto vedere il vettore come un operatore che opera da destra sul relativo covettore (notazione bra-c-ket di Pauli). Ma ciò è solo una questione di notazione.

Consideriamo allora una funzione e prendiamone il corrispondente covettore, ossia il gradiente $\mathrm{d}f$; applichiamo ad esso la derivata direzionale; in notazione di Pauli risulta

$$\langle \mathrm{d}f | \frac{\partial}{\partial x} \rangle$$

e siamo 'costretti' a uguagliare questa quantità a $\partial f/\partial x$. Potremmo addirittura migliorare la notazione omettendo il segno di derivata parziale al numeratore e scrivere

$$\langle \mathrm{d}f | \frac{}{\partial x} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}$$

in cui tra primo e secondo membro c'è il solo cambiamento, diciamo estetico, che il segno di derivata totale diventa di derivata parziale.

12. Derivazione di tensori

Consideriamo un certo campo tensoriale, e cerchiamone le derivate.

Sia dato innanzitutto un campo scalare f (tensore di ordine zero). Esso è invariante rispetto ad un cambiamento di coordinate, ma non lo sono le sue derivate. Esse però costituiscono un sistema semplice covariante, che si indica con $f_{;i}$ e che è dato da

$$f_{;i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

e che si chiama gradiente o derivato di f. Che esso sia covariante si verifica facilmente.

Consideriamo ora un campo vettoriale v e in particolare le sue componenti covarianti

$$v_k = \mathsf{v} \cdot \frac{\partial P}{\partial x^k}.$$

Se tentiamo di derivare semplicemente si ha

$$\frac{\partial v_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathsf{v}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial P}{\partial x^k} + \mathsf{v} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^k}; \tag{8}$$

quest'espressione però dipende dalle coordinate, ossia non è invariante al variare delle coordinate. La vera derivata (derivata tensoriale) deve restituire un ente che non varia al variare delle coordinate (anche se le sue componenti variano), ed è:

$$\frac{\partial \mathsf{v}}{\partial x^i}$$

le cui coordinate covarianti sono

$$v_{k;i} = \frac{\partial \mathsf{v}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial P}{\partial x^k} \tag{9}$$

quindi, confrontando la (8) e la (9),

$$v_{k;i} = \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \mathsf{v} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^k}. \tag{10}$$

Quest'espressione si scrive in funzione dei simboli di connessione, detti anche simboli di Christoffel:

$$v_{k;i} = \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - g^{rl}(ik,r)v_l = \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \begin{bmatrix} l \\ ik \end{bmatrix} v_l. \tag{11}$$

Espressioni analoghe si trovano per la derivata delle componenti contravarianti. Le (10) e (11) tengono conto del fatto che le coordinate di un vettore (e, in generale, di un tensore), possono variare non solo perché varia il vettore stesso, ma anche perché variano i vettori base; naturalmente questa variazione va eliminata (o corretta) per lasciare solo quelle variazioni che hanno significato fisico. Da ciò il termine correttivo contenente il simbolo di connessione.

13. Trasporto parallelo

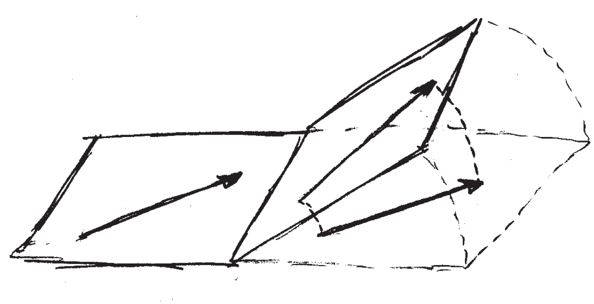
Un caso particolare, assai importante, delle (11) si ha quando si fa la derivata direzionale di un vettore lungo una curva e s'impone che essa sia nulla, ossia

$$\frac{\partial v_k}{\partial u} - g^{rl}(ik,r)\frac{\partial x^i}{\partial u}v_l = \frac{\partial v_k}{\partial u} - \begin{bmatrix} l \\ ik \end{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u} v_l = 0 \qquad (12);$$

significa che il vettore in sé rimane invariato se trasportato lungo la curva (la (12) va intesa come un'equazione differenziale che definisce v in funzione di u); si dice che il vettore v è stato trasportato parallelamente lungo la curva.

Il concetto di trasporto parallelo è importantissimo per definire la curvatura delle superficie, e in generale delle varietà n-dimensionale; conviene perciò vederlo in modo più intuitivo, nel caso di una superficie.

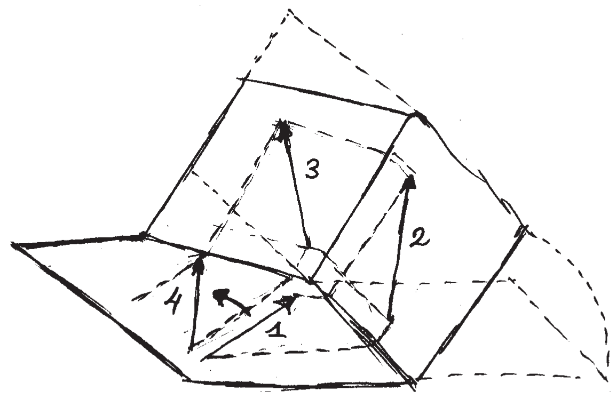
Sia data una superficie curva; approssimiamola mediante faccette piane infinitesime; consideriamo su una di esse un vettore tangente alla superficie; ruotiamo la faccetta fino a renderla complanare con una delle faccette adiacenti; trasportiamo il vettore parallelamente a sé stesso su questo piano; ripetiamo l'operazione per un'altra faccetta adiacente e così via. Si veda la figura, tratta da Finzi.



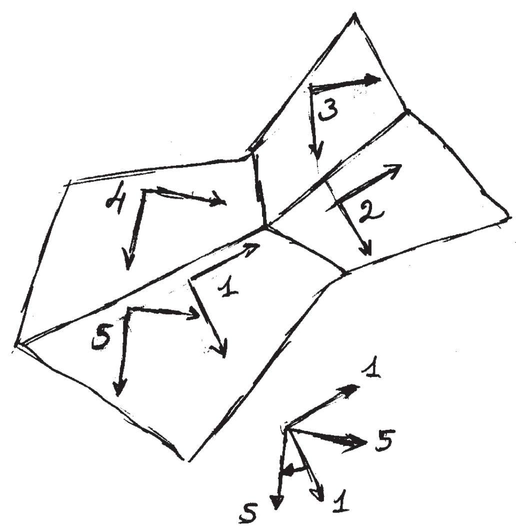
14. Curvatura

Come scoprì Gauss (Disquisitiones circa superficies curvas), la curvatura di una superficie può essere determinata attraverso misure effettuate sulla superficie stessa.

Una delle possibilità è quella di trasportare parallelamente un vettore intorno ad un cammino chiuso che racchiude un'area A. Alla fine del cammino il vettore, tornato al punto di partenza, risulta ruotato rispetto alla sua posizione iniziale. La curvatura media sull'are racchiusa dal cammino è dato dal rapporto tra l'angolo di rotazione del vettore e l'area A. Il segno è positivo o negativo a seconda che la rotazione del vettore sia concorde o discorde con quello del cammino. Nella successiva figura è illustrato il caso di curvatura positiva.



Nella seguente è illustrato invece il caso di una curvatura negativa (superficie a sella)



La curvatura così misurata è quella detta totale o di Gauss.

Dipartimento di Progettazione e Gestione Industriale, sezione di Astronomia, Università Federico II, Napoli
E-mail address: `giudice@unina.it`