
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ
224
Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven,
of Portsmouth, N.H.
(Class of 1842.)
Rec. Dec. 2. 1851.

All' Illustrissimo Geometra
Sig. Prof. C. G. J. Jacobi

In tenue segno della più profonda stima
L'autore.

SAGGIO

DI

GEOMETRIA ANALITICA

SAGGIO

DI

GEOMETRIA ANALITICA

TRATTATA CON NUOVO METODO

OPERA

DI DOMENICO CHELINI

DELLE SCUOLE PIE

PROFESSORE DI FILOSOFIA NEL COLLEGIO NAZZARENO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

1838

AVVERTIMENTO

Questo Saggio si compone degli articoli inseriti dall'autore nel Giornale Arcadico, e fa parte di un suo corso inedito di matematiche.

PROSPETTO DELL' OPERA

Geometria a due coordinate.

Linee di second'ordine.

Geometria a tre coordinate.

Superficie di second'ordine.

pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
11	17	$\frac{a}{x}$	$\frac{x}{a}$
16	10	m ed u	m ed n
ivi	16	$mu=x_1$	$mu=x$
19	17	$\frac{s}{s'}=\frac{t}{t'}\mathrm{R}$	$\frac{s}{s'}=\frac{t'}{t}\mathrm{R}$
45	15	${}^{\mathrm{D}}\mathrm{R}_{\mathrm{X}}$	${}^{\mathrm{D}}\mathrm{R}_{x}$
103	9	$p=\frac{b^2}{a^2}$	$p=\frac{b^2}{a}$
113	ult.	$2\frac{a}{b}$	$2\frac{bx}{a}$

I criterii delle quantità proporzionali (vedi pag. 15. 18, 21) si possono anche enunciare in un modo più sintetico e breve, come segue.

I. *Due quantità sono proporzionali*, *se* (in qualunque stato si contemplino) *l'una cresce e diminuisce* , *e si raddoppia*, *triplica*, *quadruplica* . . . . *insieme con l'altra.*

II. *Una quantità è proporzionale al prodotto di più altre, se varia in proporzione con ciascuna di queste*, *ritenendo costanti le rimanenti.*

III. *Un prodotto di più quantità è proporzionale al prodotto di più altre, se ogni singola quantità del primo sistema varia in proporzione con ogni singola quantità del secondo.*

Osservazioni sull'equazione cubica per la quale si determinano gli assi principali nelle superficie di second'ordine, allorchè queste sono riportate ad assi obbliquangoli

Chelini

L'equazione di secondo grado

$$\begin{matrix}Ax^2\\By^2\\Cz^2\end{matrix}+2\left|\begin{matrix}A'yz\\B'zx\\C'xy\end{matrix}\right|-2\left|\begin{matrix}A''x\\B''y\\C''z\end{matrix}\right|-D=0$$

tra tre coordinate obbliquangole x, y, z, e a coefficienti reali, si può sempre ridurre, com'è noto, alla forma

$$Lx'^2+My'^2+Nz'^2+2L'x+R=0,$$

ove x', y', z' sono coordinate rettangole, ed L, M, N sono le radici dell'equazione cubica (pag. 192)

$$(A)\qquad H^2p^3-\left\{\begin{matrix}A\,\mathrm{sen}^2X\\B\,\mathrm{sen}^2Y\\C\,\mathrm{sen}^2Z\end{matrix}-2\left|\begin{matrix}A'\,\mathrm{sen}Y\,\mathrm{sen}Z\cos x\\B'\,\mathrm{sen}Z\,\mathrm{sen}X\cos y\\C'\,\mathrm{sen}X\,\mathrm{sen}Y\cos z\end{matrix}\right.\right\}p^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}BC-A'^2\\CA-B'^2\\AB-C'^2\end{matrix}-2\left|\begin{matrix}(AA'-B'C')\cos X\\(BB'-C'A')\cos Y\\(CC'-A'B')\cos Z\end{matrix}\right.\right\}p-U=0.$$

Qui le lettere X, Y, Z, designano gli angoli yz, zx, xy degli assi coordinati positivi; le lettere $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ poste sotto i simboli trigonometrici rappresentano, nel triedro determinato dagli assi positivi $\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}$, gli angoli diedri i cui spigoli sono rispettivamente gli assi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$; ed

$$H=\mathrm{sen}Y\,\mathrm{sen}Z\,\mathrm{sen}\,x,\quad U=ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2=0.$$

Ciò posto, l'oggetto di questa mia nota è

1. Provare in un modo diretto la realità delle radici dell'equazione (A), e determinare insieme le condizioni dell'eguaglianza di tali radici.
2. Assegnare le formule più semplici per la determinazione degli assi principali.

Queste cose, benchè spesso trattate ed in più modi nel caso degli assi ortogonali, non pare che si siano ancora considerate sotto il punto di vista più semplice nel caso generale degli assi obbliquangoli.

1.

Il metodo che io seguo nel dimostrare la realità delle radici, è analogo a quello tenuto dal Sig. Cauchy nel caso degli assi ortogonali.

L'equazione (A) si può anche scrivere sotto la forma

$$(A_1) \qquad 0=(p-A)(p-B)(p-C)-\left\{\begin{matrix}(p-A)(p\cos X-A')^2\\(p-B)(p\cos Y-B')^2\\(p-C)(p\cos Z-C')^2\end{matrix}\right.$$
$$+2(p\cos X-A')(p\cos Y-B')(p\cos Z-C').$$

Supposto che le quantità A, B, C, siano disposte in ordine di grandezza crescente, cominciamo dall'osservare che le radici p', p'' dell'equazione quadratica

$$0=(p-B)(p-C)-(p\cos X-A')^2$$
$$=p^2\operatorname{sen}^2X-(B+C-2A'\cos X)p+BC-A'^2,$$

sono sempre reali, e comprese, l'una p' tra $-\infty$ e la minore delle due quantità B e C; e l'altra p'' tra la maggiore di queste e $+\infty$. Infatti, risolvendo cotesta equazione, la quantità sotto il vincolo radicale è

$$(B+C-2A'\cos X)^2-4(BC-A'^2)\operatorname{sen}^2X$$
$$=(B-C)^2\operatorname{sen}^2X+[(B+C)\cos X-2A']^2.$$

Inoltre, se nell'equazione si fa

$$p=B,\ p=C,$$

il risultato sarà $=-(p\cos X-A')^2$, quantità negativa; ma se, divisa per p^2, si fa

$$p=\pm\infty,$$

il risultato sarà $=\operatorname{sen}^2X$, quantità positiva.

Le radici p', p'' siano disuguali tra loro, e diverse dalle radici dell'equazione cubica. In questa ipotesi, se le sostituiamo a p nell'equazione cubica (A_1), ed osserviamo essere

$$\sqrt{(p'-B)(p'-C)}=p'\cos X-A',\ \sqrt{(p''-B)(p''-C)}=p''\cos X-A',$$

otterremo, per la sostituzione di p',

$$\begin{cases}(B-p')(p'\cos Y-B')^2\\(C-p')(p'\cos Z-C')^2\end{cases}+2(p'\cos Y-B')(p'\cos Z-C')\sqrt{(B-p')(C-p')}$$

$$=\left[(p'\cos Y-B')\sqrt{(B-p')}+(p'\cos Z-C')\sqrt{(C-p')}\right]^2,$$

cioè un risultato *positivo*, e per la sostituzione di p'', otterremo

$$-\left\{\begin{matrix}(p''-B)(p''\cos Y-B')^2\\(p''-C)(p''\cos Z-C')\end{matrix}-2(p''\cos Y-B')(p''\cos Z-C')\sqrt{(p''-B)(p''-C)}\right\}$$

$$=-\left[(p''\cos Y-B')\sqrt{(p''-B)}-(p''\cos Z-C')\sqrt{(p''-C)}\right]^2,$$

cioè un risultato *negativo*. D'altronde, secondochè nella (A) divisa per p^3, si fa $p=-\infty$, ovvero $p=\infty$, si ottiene un risultato *negativo* o *positivo*.

Pertanto l'equazione (A), facendo successivamente

$$p=-\infty,\ =p',\ =p'',\ =+\infty;$$

somministra in corrispondenza nella fatta ipotesi

$$-,\ +,\ -\ ;+;$$

e però ha reali le sue tre radici.

Rappresentiamo con p' la più piccola, e con p'' la più grande delle due radici, in ciascuna delle tre equazioni

$$(1)\quad\begin{cases}p^2\operatorname{sen}^2X-(B+C-2A'\cos X)p+BC-A'^2=0,\\p^2\operatorname{sen}^2Y-(C+A-2B'\cos Y)p+CA-B'^2=0,\\p^2\operatorname{sen}^2Z-(A+B-2C'\cos Z)p+AB-C'^2=0.\end{cases}$$

Risulta da ciò che precede, che delle tre radici L, M, N dell'equazione cubica, disposte in ordine di grandezza crescente, la prima è inferiore al più piccolo de' tre valori di p'; la seconda è intermedia tra il maggiore de' valori di p' ed il minore de' tre valori di p''.

Pongasi ora che due delle tre radici L, M, N, diventino eguali. Se sono le due piccole L, M, dovranno esse necessariamente coincidere co' tre valori di p'; e, se sono le due più grandi M, N, co' tre valori di p''. Quindi, allorchè l'equazione cubica ha una radice doppia, questa radice dovrà verificare simultaneamente l'equazione (1), e però l'eguaglianze

$$\begin{aligned}(p-A)(p-B)(p-C) &= (p-A)(p\cos X-A')^2\\ &= (p-B)(p\cos Y-B')^2\\ &= (p-C)(p\cos Z-C')^2\\ &= (p\cos X-A')(p\cos Y-B')(p\cos Z-C'),\end{aligned}$$

ciascuna delle quali è contenuta nelle tre riorianenti.

Se da due delle medesime, soppresso il fattore comune, eliminiamo p^2, ne risulterà un'equazione di primo grado in p, che ci farà subito palese il valore della radice doppia dell'equazione cubica.

Facciamo, per abbreviare,

$$p\cos X-A'=A_1,\quad p\cos Y-B'=B_1,\quad p\cos Z-C'=C_1;$$

l'equazione cubica (A_1) prenderà la forma

$$(A_2)\qquad (p-A)(p-B)(p-C)-\left|\begin{array}{l}(p-A)A_1^2\\(p-B)B_1^2\\(p-C)C_1^2\end{array}\right.+2A_1B_1C_1=0,$$

e l'eguaglianze precedenti daranno

$$p=A+\frac{B_1C_1}{A_1}=B+\frac{C_1A_1}{B_1}=C+\frac{A_1B_1}{C_1}.$$

Supponiamo finalmente che tutte e tre le radici dell'equazione cubica diventino eguali: dovranno esse necessariamente coincidere e co' tre valori di p', e co' tre valori di p'', dati dall'equazioni (1). Quindi ciascuna di queste tre equazioni dovrà aver uguali le sue radici, e perciò darà rispettivamente

$$(B-C)^2 sen^2 X + [(B+C)\cos X - 2A']^2 = 0,$$
$$(C-A)^2 sen^2 Y + [(C+A)\cos Y - 2B']^2 = 0,$$
$$(A-B)^2 sen^2 Z + [(A+B)\cos Z - 2C']^2 = 0;$$

donde

$$A = B = C = \frac{A'}{\cos X} = \frac{B'}{\cos Y} = \frac{C'}{\cos Z}.$$

II.

Cerco adesso di determinare le direzioni abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ degli assi principali della superficie di second'ordine, riportata ad assi obliquangoli.

Quando dirò che una retta ha la direzione lmn, intendasi che è parallela ad un'altra retta $=1$ condotta per l'origine degli assi xyz, e la cui estremità ha per coordinate l, m, n. Si avrà in questa ipotesi

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos X + 2nl\cos Y + 2lm\cos Z = 1.$$

Ciò posto, i valori degli elementi delle tre direzioni principali abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, sono, com'è noto, quelli che nelle tre equazioni (pag. 190)

$$(p-A)l + C_1 m + B_1 n = 0,$$
$$(p-B)m + A_1 n + C_1 l = 0,$$
$$(p-C)n + B_1 l + A_1 m = 0,$$

prendono l, m, n, per ciascuna delle tre radici L, M, N dell'equazione cubica (A). Dalle due ultime di coteste equazioni si ricava

$$\frac{l}{(p-B)(p-C)-A_1^2} = \frac{m}{A_1B_1 - C_1(p-C)} = \frac{n}{C_1A_1 - B_1(p-B)}$$

Proviamo di mettere questa proporzionalità sotto una forma più simmetrica. Chiamato V il primo membro dell'equazione cubica (A_v), si ha l'identità

$$(p-A)V=[(p-C)(p-A)-B_1^2][(p-A)(p-B)-C_1^2]-[B_1C_1-A_1(p-A)]^2.$$

Da qui, a cagione di $V=0$, e dal principio di simmetria si deriva

$$B_1C_1-A_1(p-A)=\sqrt{[(p-C)(p-A)-B_1^2][(p-A)(p-B)-C_1^2]}$$
$$C_1A_1-B_1(p-B)=\sqrt{[(p-A)(p-B)-C_1^2][(p-B)(p-C)-A_1^2]}$$
$$A_1B_1-C_1(p-C)=\sqrt{[(p-B)(p-C)-A_1^2][(p-C)(p-A)-B_1^2]}.$$

Il segno ± 1 di ciascun radicale, sarà dato dal primo membro, dopochè a p avremo surrogato una delle tre radici L, M, N. In virtù di queste relazioni, la proporzionalità precedente assume la forma

$$\frac{l}{\sqrt{[(p-B)(p-C)-A_1^2]}}=\frac{m}{\sqrt{[(p-C)(p-A)-B_1^2]}}=\frac{n}{\sqrt{[(p-A)(p-B)-C_1^2]}}.$$

Ora, eseguiamo tanto sopra i numeratori quanto sopra i denominatori di questi tre rapporti uguali l'operazione che si vede eseguita sopra l, m, n nella formula

$$l^2+m^2+n^2+2mn\cos X+2nl\cos Y+2lm\cos Z=1;$$

il rapporto de' risultati sarà eguale al quadrato di ciascuno de' rapporti precedenti. Il numeratore di tale nuovo rapporto è evidentemente $=1$, e il denominatore si troverà, dopo convenienti riduzioni, essere il seguente

$$3H^2p^2-2\left\{\begin{matrix}A\,\mathrm{sen}^2X\\ +B\,\mathrm{sen}^2Y\\ +C\,\mathrm{sen}^2Z\end{matrix}-2\left[\begin{matrix}A'\,\mathrm{sen}Y\,\mathrm{sen}Z\cos X\\ +B'\,\mathrm{sen}Z\,\mathrm{sen}X\cos Y\\ +C'\,\mathrm{sen}X\,\mathrm{sen}Y\cos Z\end{matrix}\right]\right\}p+\left\{\begin{matrix}BC-A'^2\\ +CA-B'^2\\ +AB-C'^2\end{matrix}-2\left[\begin{matrix}(AA'-B'C')\cos X\\ +(BB'-C'A')\cos Y\\ +(CC'-A'B')\cos Z\end{matrix}\right]\right\},$$

il quale, fatta la sostituzione delle radici L, M, N dell'equazione cubica (A), si trasforma in

$$H^2(3p^2-2(L+M+N)p+MN+NL+LM).$$

Dopo ciò, per determinare le direzioni principali abc, a'b'c', a''b''c'', si avranno le formule semplicissime*

$$\left\{\begin{aligned} a^2 &= \frac{(L-B)(L-C)-(L\cos X - A')^2}{H^2(L-M)(L-N)}, \\ b^2 &= \frac{(L-C)(L-A)-(L\cos Y - B')^2}{H^2(L-M)(L-N)}, \\ c^2 &= \frac{(L-A)(L-B)-(L\cos Z - C')^2}{H^2(L-M)(L-N)}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} a'^2 &= \frac{(M-B)(M-C)-(M\cos X - A')^2}{H^2(M-N)(M-L)}, \\ b'^2 &= \frac{(M-C)(M-A)-(M\cos Y - B')^2}{H^2(M-N)(M-L)}, \\ c'^2 &= \frac{(M-A)(M-B)-(M\cos Z - C')^2}{H^2(M-N)(M-L)}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} a''^2 &= \frac{(N-B)(N-C)-(N\cos X - A')^2}{H^2(N-L)(N-M)}, \\ b''^2 &= \frac{(N-C)(N-A)-(N\cos Y - B')^2}{H^2(N-L)(N-M)}, \\ c''^2 &= \frac{(N-A)(N-B)-(N\cos Z - C')^2}{H^2(N-L)(N-M)} \end{aligned}\right.$$

---

* C. G. J. Jacobi, giornale di Crelle tom. II. pag. 232.

D. Chelini d. S. P.

Nota da sostituirsi a quella della pag. 194.

Supponiamo positive le quantità A, B, C, U: le identità

$$AU = (CA - B'^2)(AB - C'^2) - (AA' - B'C')^2 ,$$
$$BU = (AB - C'^2)(BC - A'^2) - (BB' - C'A')^2 ,$$
$$CU = (BC - A'^2)(CA - B'^2) - (CC' - A'B')^2 ,$$

dimostrano che nella fatta ipotesi i tre binomi

$$(b) \qquad BC - A'^2 ,\ CA - B'^2 ;\ AB - C'^2 ,$$

debbono aver lo stesso segno. Siano positivi. Fatte tali supposizioni

1°. Si vedrà che nell'equazione (p) è positivo il coefficiente di p^2, chiuso tra la parentesi $\{ \}$, a causa della quantità

$$H_g^2 = \begin{array}{l} A \operatorname{sen}^2 X_1 \\ B \operatorname{sen}^2 Y_1 \\ C \operatorname{sen}^2 Z_1 \end{array} - 2 \left| \begin{array}{l} \sqrt{(BC)} \cdot \operatorname{sen} Y_1 \operatorname{sen} Z_1 \cos x \\ \sqrt{(CA)} \cdot \operatorname{sen} Z_1 \operatorname{sen} X_1 \cos y \\ \sqrt{(AB)} \cdot \operatorname{sen} X_1 \operatorname{sen} Y_1 \cos z \end{array} \right.$$

essenzialmente positiva, ove g è la retta che sugli assi xyz ha le projezioni $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C}$ (Vedi pag. 142).

2°. Si vedrà pure che è positivo il coefficiente del terzo termine di (p), a causa della quantità

$$r^2 = \begin{array}{l} BC - A'^2 \\ CA - B'^2 \\ AB - C'^2 \end{array} - 2 \left| \begin{array}{l} \sqrt{(CA - B'^2)(AB - C'^2)} \cdot \cos X_1 \\ \sqrt{(AB - C'^2)(BC - A'^2)} \cdot \cos Y_1 \\ \sqrt{(BC - A'^2)(CA - B'^2)} \cdot \cos Z_1 \end{array} \right.$$

essenzialmente positiva, ove r è la retta che nel senso di tre assi inclinati tra loro cogli angoli $\pi - X_1$, $\pi - Y_1$, $\pi - Z_1$, ha per componenti le radici quadre de' binomi (b).

Pertanto, allorchè non sono < 0 le quantità A, B, C, U, (b), l'equazione (p) non può presentare che alternazioni di segno.

pag. 210. lin. 15. dopo corrispondono si aggiunga: paralleli ai piani Y_1, Z_1.

Teorica delle quantità proporzionali.

L'esperienza dell'insegnamento mi ha condotto a trattare alcuni punti delle matematiche con principii più generali, e con metodi, a mio parere, più semplici e spediti de' già conosciuti. Ne presento un saggio al pubblico, incominciando dalla teorica delle quantità proporzionali, già letta nell' accademia de'Lincei il dì 28 luglio 1834. Questo articolo sarà seguìto da altri relativi alla geometria analitica ed al calcolo infinitesimale. Mi sia lecito intanto di premettere alcune considerazioni generali necessarie al rigore e alla chiarezza dell'argomento.

Delle quantità considerate rispetto alla loro variazione, ragione, misura, dipendenza e limiti.

1. Le quantità che dentro certi limiti *cangiano di stato*, or crescendo, or diminuendo, quale per es. l'altezza barometrica, si dicon *variabili*; e *costanti* quelle che in mezzo alle variazioni delle altre si mantengono invariabili.

Una quantità variabile si dice *continua* tra certi limiti, se dentro i medesimi la differenza fra due de' suoi stati successivi possa rendersi minore di ogni assegnata comunque piccolissima: se avviene altrimenti, la quantità variabile dicesi *discontinua*. Una quantità continua, suscettibile di svanire, chiamasi *evanescibile*.

In una quantità che varia attualmente di grandezza, conviene distinguere i *passi* od i *gradi* del suo crescere da' passi o gradi del suo diminuire. I primi, aggiungendosi successivamente alla quantità, sono affetti naturalmente dal segno +, e si dicono *positivi*: i secondi, sottraendosi successivamente dalla quantità, sono affetti naturalmente dal segno —, e si dicono *negativi*. Si potrà giudicare della maniera di esistere di una quantità variabile, osservando di quale specie di gradi si componga.

Una quantità si dice dupla, tripla, quadrupla, ... multipla di un' altra, se è uguale alla seconda ripetuta due, tre, quattro, ... molte volte: e al contrario la seconda si dice subdupla, subtripla, subquadrupla, ... summultipla o aliquota della prima. Da qui le voci di *duplicare*, *triplicare*, *quadruplicare*, ... *moltiplicare*; *subduplicare*, *subtriplicare*, *subquadruplicare*, ... *summultiplicare*. È manifesto che il minimo multiplo e il massimo summultiplo di una quantità è la quantità medesima.

Due quantità si dicono *commensurabili*, qualora possa esistere un'unità di misura summultipla di ciascheduna di esse: altrimenti si dicono *incommensurabili*.

2. *Dividere* una quantità, per es. una lunghezza, per un'altra quantità omogenea, è trovare quale summultiplo dell' una debbasi prendere e quante volte ripetere per avere un equivalente esatto dell' altra. Il quoto della divisione così definita chiamasi *ragione geometrica*, e l'atto con cui si determina, *rapporto geometrico*. Quando dicesi, in modo assoluto, rapporto e ragione, intendasi rapporto geometrico e ragione geometrica.

Pertanto la ragione geometrica di due quantità *consiste in un segno destinato a indicare quale summultiplo dell'una debbasi prendere, e quante volte ripetere per avere un equivalente esatto dell'altra.* Quest'ultima si dice termine *antecedente* del rapporto; quella termine *conseguente*: donde, per compendio, l'antecedente e il conseguente del rapporto. Segue dalla difinizion precedente, che la ragione di due quantità è sempre un numero o *intero*, o *frazionario*, o *incommensurabile*: se l'antecedente è un multiplo del conseguente, la ragione è un numero intero; se l'antecedente è un aggregato di alcune delle parti uguali in cui si concepisce diviso il conseguente, la ragione è un numero frazionario; se l'antecedente e il conseguente sono incommensurabili, la ragione è un numero incommensurabile: egregiamente Newton: »*Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus.* »

La ragione di due quantità incommensurabili può considerarsi come limite di un numero razionale variabile. Infatti prendiamo per unità di misura un piccolissimo summultiplo del conseguente: il residuo, che lascerà l'antecedente diviso per tale unità, sarà più piccolo di tale unità, e però al pari di tale unità si potrà attenuare al di là di ogni grado assegnato. Così le due quantità cessano di essere incommensurabili, scemandone una di tal parte che si può suppor minore di qualsivoglia comunque piccolissima; e per conseguenza la loro ragione può considerarsi come limite alla ragione di quantità commensurabili, ossia ad un numero razionale.

In ogni caso *la ragion di due grandezze si esprime per la frazion continua, nascente e sviluppantesi nell'atto che cerchiamo il massimo comune summultiplo delle due grandezze.*

Se nel rapporto di due grandezze, tenuta ferma l'una di esse, si faccia variar l'altra per continuità, è palese che varierà pure per continuità il numero che ne rappresenta la ragione geometrica: dunque il *numero*, preso nel senso di Newton, *è una quantità continua.*

3. *Misurare* una quantità, è determinarne la ragione all'unità di misura. Tra le quantità dello stesso genere si suole scegliere per unità di misura, la più semplice, cioè quella che per esser fissata richiede il minimo numero di *dati*. Così eleggesi per unità fra le linee *una retta*, fra le superficie *un quadrato*, e fra i volumi *un cubo*: perchè la retta, il quadrato ed il cubo sono tra le quantità del loro genere le più semplici.

È facile a provarsi che la ragione di due quantità non varia, variando l'unità che ne misura i termini. Quindi nel calcolare le ragioni delle quantità omogenee, il *nome* ed il *simbolo* di una grandezza può sempre riguardarsi come il nome ed il simbolo del numero ottenuto misurandola con la medesima unità, onde si suppongono misurate tutte le altre. Così se $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{M}{B}$ rappresentano ragioni di linee, B si può riguardare come simbolo di uno stesso numero in tutte le ragioni.

Poichè ogni numero può riguardarsi come la ragione fra due quantità omogenee di una specie qualunque, perciò alla ragione fra due grandezze di una specie potrà sempre surrogarsi un' eguale ragione fra due grandezze di un'altra specie. Così alla ragione $\frac{A}{A_1}$ di due forze A, A_1, potrà surrogarsi un'eguale ragione di due linee B, B_1.

Ora tra le quantità l'estensione è metrica eminentemente: è la sola che ammetta divisioni *facili*, *distinte*, *permanenti*. Dunque tornerà di sommo vantaggio il rappresentare tutte le grandezze, e principalmente quelle che sfuggono a' sensi, per mezzo dell'estensione, ed in modo speciale, dell'estension lineare. Ed è ciò che in ultima analisi si fa sempre; e forse per questa cagione si chiama semplicemente *geometra*, chi è versato nelle matematiche in tutta la loro estensione.

Dunque, se convengasi di non comprendere sotto i nomi ed i segni delle diverse quantità che le loro ragioni alla rispettiva unità di misura, si potrà dire senza contradizione che *una linea* è uguale ad *una superficie*, ad *un volume*, ad *una forza*, ad *un tempo*, ad *una velocità*: essendochè ciò si riduce a dire che numeri, distinti con nomi diversi, sono eguali tra loro. Questa convenzione si è fatta in tutte le matematiche, e merita di essere attentamente osservata, e tenacemente ritenuta: per essa *la eterogeneità delle grandezze* sparisce dal calcolo, e ne rimane soltanto l'apparenza ne' vocaboli.

D'ora in poi, avvegnachè è lecito senz'alcun inconveniente, potremo supporre, per fissar le idee, tutte le quantità rappresentate da linee.

4. Una quantità variabile dicesi *funzione di un'altra quantità variabile*, chiamata *indipendente*, se determinata questa, rimane necessariamente determinata la prima. Così in un circolo variabile, fis-

sato il raggio, tutto rimane determinato: dunque sono funzioni del raggio la circonferenza e la superficie, non che la superficie ed il perimetro di qualsivoglia poligono regolare inscritto e circoscritto.

Una quantità variabile dicesi *funzione di un sistema di altre quantità variabili*, chiamate *indipendenti*, se a determinare la prima è necessario e basta che sieno determinate le seconde. Così in un triangolo variabile tutto è determinato, determinati che siano i tre lati: quindi sono funzione de'tre lati ciascun angolo, la superficie, il raggio del circolo inscritto e circoscritto ecc.

Dall'osservare che più variabili sono vincolate tra loro per mezzo di un'equazione, può inferirsi leggittimamente che ciascuna variabile è funzione delle altre: ma dall'osservare che una quantità variabile è funzione di altre, è o no lecito di ammettere la possibilità di un'equazione che insieme le vincoli? Sarà in luogo più opportuno discussa e sciolta una tale quistione.

Una quantità si dice *funzione simmetrica* di altre, se si mantiene sempre la medesima alternando come si vuole il posto di queste. Così per es. in

$$u = \sqrt{(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2)},$$

u è funzione simmetrica delle quantità x, y, z.

Una funzione si dice *simmetrica rispetto a più sistemi di quantità*, se si mantiene invariabile, allorchè si alternano le quantità di un sistema, colle analoghe quantità di uno qualunque de' rimanenti sistemi. Così in

$$D = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(A'yz + B'zx + C'xy) - 2(A''x + B''y + C''z),$$

D è funzione simmetrica rispetto ai tre sistemi di quantità analoghe (x, A, A', A''), (y, B, B', B''), (z, C, C', C'').

Se un sistema variabile può distribuirsi in *gruppi simmetrici di quantità*, cioè in gruppi tali che le quantità di un gruppo si possano alternare colle analoghe quantità di uno qualunque de' gruppi rimanenti, senza che varii perciò il raziocinio che vincola con formule le parti del sistema; allora è palese che anche nelle formule si potrà operare siffatta alternazione. Così per es. in un triangolo variabile designati per a, b, c, i tre lati, e per A, B, C gli angoli rispettivamente opposti, noi potremo distribuire i sei elementi a, b, c, A, B, C, del triangolo in tre gruppi simmetrici 1.° (a, A), 2.° (b, B), 3.° (c, C): essendo chiaro che alternandoli come si vuole, il raziocinio che li andrà vincolando con formule non potrà variare; e però le formule continueranno a sussistere in mezzo a tale alternazione.

Per indicare che una quantità u è funzione delle variabili x, y, z.... si scrive

$$u = f(x, y, z \ldots).$$

La differenza tra lo stato attuale e lo stato successivo di una quantità variabile, si dinota facendo precedere la *caratteristica* δ alla lettera che rappresenta la detta quantità. Così l'espressione

$$x \pm \delta x$$

offre la quantità x con più o meno la variazione δx. Una tal variazione si chiama or *differenza*, or *grado*, or *passo*, ora *elemento*: si dice grado o passo, perchè si riguarda quasi come un passo che fa la quantità camminando per uno stato variabile; si dice *elemento* per essere come una delle analoghe parti elementari, onde la quantità crebbe successivamente e formossi.

È manifesto che la variazione di una quantità, funzione di altre, dipende dalle variazioni di queste. Così, se si ha

$$u = f(x, y, z \ldots),$$

sarà

$$u + \delta u = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \ldots);$$

e perciò

$$\delta u = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z \ldots) - f(x, y, z \ldots):$$

cioè *l'elemento o passo di una funzione è la differenza tra due stati successivi della medesima, e si ottiene sottraendo dallo stato della funzione, ove le variabili sono cresciute di un passo, lo stato precedente.*

5. *Limite* di una quantità è un'altra quantità, a cui la prima si può avvicinare continua al di là di ogni assegnata comunque piccolissima differenza. Chiamo *simultanei* i limiti di una quantità, quando questa non possa mai trovarsi intermedia fra due qualunque de'medesimi, o superar l'uno qualor sia dall'altro ecceduta. Dico poi *simultanei* i limiti rispettivi di più quantità, ogniqualvolta niu-

na di queste possa giungere a coincidere col suo limite, senza che ciascuna delle altre coincida col proprio.

Teorema. *Limiti simultanei* P, Q, R.... *di una medesima quantità* X *sono tutti eguali tra loro.*

Dimostrazione. Infatti se fra due di essi limiti, per es. P ed R, esistesse una differenza, la quantità X potendosi avvicinare a ciascuno di essi al di là di questa differenza, trovar si potrebbe intermedia a'medesimi, o sopravvanzare il minore e sottostare al più grande; il che si oppone alla ipotesi della loro simultaneità. Dunque

1.° *Limiti simultanei di quantità eguali sono eguali tra loro*: imperocchè limiti simultanei di quantità costantemente uguali, possono considerarsi come limiti simultanei di una sola e medesima quantità.

2.° *Se sussiste un' equazione, finchè le quantità che la compongono si trovano in un certo sistema, sussisterà egualmente quando tali quantità passano ad un altro sistema limite del primo.* Imperocchè i membri dell'equazione nel secondo sistema diventan limiti ai rispettivi membri dell'equazione nel sistema primitivo, non potendosi effettuare il passaggio delle quantità dall'un sistema all'altro, se non per gradi insensibili, ne'quali tuttavia l'equazione sussiste.

Segue da quì che tutti i teoremi relativi ai numeri razionali, sussistono anche pe' numeri irrazionali, potendosi questi riguardare come limiti de' primi.

Nota. Questo metodo che stabilisce l'eguaglianza de'limiti, col supporre fra essi una differenza che poi si trova esausta, si diceva dagli antichi *metodo dell'esaustioni.*

Della proporzione geometrica.

6. L'eguaglianza di due ragioni geometriche si dice *proporzione geometrica*. Allorchè in modo assoluto si dice proporzione, si sottintende geometrica.

Se in una proporzione si sostituisca ad ogni antecedente il prodotto del rispettivo conseguente per la ragione, la data proporzione si trasforma in una identità. Infatti la proporzione $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, ove chiamisi r la ragione, sicchè si abbia $A = Br$, $C = Dr$, si trasforma in

$$\frac{Br}{B} = \frac{Dr}{D}, \text{ ossia in } r = r,$$

identità manifesta.

Date più proporzioni, combinando in diverse guise i loro termini, altre moltissime possono dedursene, le quali perciò si diranno *dedotte* rispetto alle prime che sono le *fondamentali*.

Criterio delle proporzioni dedotte.

A dedurre con sicurezza nuove proporzioni dalle *fondamentali*, e a scoprirne con evidenza la legittimità, basta prendere da ogni rapporto delle proporzioni fondamentali *il prodotto del conseguente per la ragione*, e sostituirlo nelle proporzioni *dedotte* ovunque si trova l'equivalente *antecedente*: dopo ciò le proporzioni dedotte dovranno convertirsi in identità, cioè dovranno mostrarsi identiche le ragioni che le costituiscono.

Dimostrazione. Infatti, se le proporzioni fondamentali divengono identità, quando in esse si pone invece di ogni antecedente il prodotto del relativo conseguente per la ragione; identità debbono divenire del pari tutte le nuove proporzioni che da quelle si derivano per via di conseguenze necessarie, cioè per via di modificazioni identiche d'identiche ragioni.

Per es. voglia dimostrarsi che dalla proporzione

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, discende la seguente $\frac{a \pm mx}{a \mp nx} = \frac{b \pm my}{b \mp ny}$:

chiamata r la ragione di a ad x, e però di b ad y, applicando il criterio si avrà

$\frac{rx \pm mx}{rx \mp nx} = \frac{ry \pm my}{ry \mp ny}$, cioè l'identità $\frac{r \pm m}{r \mp n} = \frac{r \pm m}{r \mp n}$.

Nel modo medesimo si prova che da

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

si deriva

$$\frac{x}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz} =$$

$$\frac{\sqrt{[Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2(A'yz + B'zx + C'xy)]}}{\sqrt{[Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 2(A'bc + B'ca + C'ab)]}}.$$

Teorema. *Un' equazione omogenea rispetto a cer-*

te quantità, continua a sussistere, se a tali quantità si sostituiscano altre quantità rispettivamente proporzionali alle prime. Così per es. nell'equazione

$$(1)\ Ax^{2n} + By^{2n} + Cz^{2n} = A'y^nz^n + B'z^nx^n + C'x^ny^n,$$

omogenea rispetto alle quantità x, y, z, abbiasi

$$x : y : z :: p : q : r,$$

e però (designata per e la ragione $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$),

$$x = ep\ ,\ y = eq\ ,\ z = er.$$

Sostituendo questi valori di x, y, z, nella precedente equazione, e dividendo per e^{2n}, si avrà

$$Ap^{2n} + Bq^{2n} + Cr^{2n} = A'q^nr^n + B'r^np^n + C'p^nq^n:$$

cioè l'equazione (1) sussiste tuttavia, dopo che alle quantità x, y, z, si sono sostituite le quantità p, q, r.

Si vede in generale che l'equazione risultante dalla prescritta sostituzione, non è che l'equazion primitiva, divisa per una certa quantità.

Nota. Esistono molti trattati sulla proporzione; ma la proporzione non è che un attributo delle quantità proporzionali: conviene considerar queste in astratto, rilevarne le proprietà, e fissarne i criterj.

Proporzionalità delle quantità variabili semplice, diretta, inversa, composta.

7. Due quantità variabili si dicono *proporzionali* o che *variano in proporzione*, se la ragione di due stati comunque diversi dell'una, è costantemente uguale alla ragione de'due stati corrispondenti dell'altra. Così in un circolo l'angolo centrale è proporzionale all'opposto arco, perchè la ragione di due stati dell' angolo si dimostra esser uguale alla ragione degli stati corrispondenti dell' arco.

Teorema. *Se due quantità sono proporzionali, 1.° la ragione de' loro corrispondenti valori è costante; 2.° l' una di esse è uguale al prodotto dell'altra per una costante, e viceversa.* Dim. Y_1, Y_2, Y_3, ... rappresentino diversi stati della prima quantità, ed X_1, X_2, X_3, ... gli stati rispettivamente corrispondenti della seconda: la proporzionalità delle due quantità esige che si abbia

$$\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{X_1}{X_2}\,,\quad \frac{Y_1}{Y_3}=\frac{X_1}{X_3}\,,\ldots$$

donde (supponendo giusta la convenzion fondamentale delle matematiche che Y_1, Y_2, Y_3, ..., X_1, X_2, X_3, ..., sieno numeri esprimenti le ragioni de'diversi stati delle due quantità alla rispettiva unità di misura), deducesi alternando i termini medj

$$\frac{Y_1}{X_1}=\frac{Y_2}{X_2}=\frac{Y_3}{X_3}=\ldots$$

cioè se due quantità sono proporzionali, la ragione degli stati corrispondenti delle medesime, è costante.

Chiamata r questa ragione, si avrà

$$Y_1 = rX_1\ ,\ Y_2 = rX_2\ ,\ Y_3 = rX_3\ , \ldots$$

sicchè, se per x, y s'intendano due valori corrispondenti e variabili delle due quantità, viene a stabilirsi la seguente formula

$$y = rx\ ,$$

per cui si potrà dire che una quantità proporzionale ad un' altra, è uguale al prodotto di questa per una costante.

Viceversa: due quantità sono proporzionali, se l' una è uguale al prodotto dell' altra per una costante: imperocchè da $y_1 = rx_1$, $y_2 = rx_2$, viene $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Dunque *due quantità proporzionali non variano che per gradi proporzionali, e viceversa*: imperocchè siffatti gradi non sono in sostanza che stati corrispondenti delle due quantità.

Teorema. *Varia sempre una ragione* $\frac{x}{y}$, *ad ogni variamento non proporzionale de' suoi termini.*

Dim. Infatti non può sussister la proporzione $\frac{y}{x} = \frac{y + \delta y}{x + \delta x}$ a meno che non si abbia $\frac{y}{x} = \frac{\delta y}{\delta x}$, cioè a meno che i gradi δy, δx non siano in proporzione con y, x.

Due quantità x, y si dicono *reciprocamente o inversamente proporzionali*, se l'una x è proporzionale ad $\frac{1}{y}$, *reciproco dell'altra*, mentre per opposizione *la proporzionalità* si dice *diretta*, quando x è proporzionale ad y.

Una quantità U dicesi variare *nella ragion composta di molte altre* s, t, v, x, y, z ...., quando varia in proporzione col prodotto di queste.

Una quantità x dicesi variare in ragion *duplicata*, *triplicata*, ..., o *subduplicata*, *subtriplicata* .... di *un altra quantità* y, se varia in proporzione colla *seconda*, *terza* .... *potenza* o *radice di tale* quantità.

Criterii delle quantità proporzionali.

La proporzionalità si può considerare, 1.° tra due quantità; 2.° tra una quantità e un sistema di molte altre; 3.° tra due sistemi di quantità. Di qui la ricerca di un criterio per ciascuno di questi tre casi.

I. Criterio

8. *Due quantità* così tra loro dipendenti, che ciascuna cresca o diminuisca ad ogni minimo crescere o diminuire dell'altra, *saranno proporzionali*, *se* (in qualunque stato si contemplino) *al raddoppiarsi*, *triplicarsi*, *quadruplicarsi* ..... *dell'una*; *si raddoppia*, *triplica*, *quadruplica* ..... *necessariamente anche l'altra*.

Dimostrazione. Siano x, x_1 due stati qualunque della prima quantità; ed y, y_1 i due stati corrispondenti della seconda: io dico che la enunciata condizione ha sempre per conseguenza necessaria la proporzione

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}.$$

Infatti x ed x_1 o sono *commensurabili* od *incommensurabili.*

Supponiamo primieramente che sieno ambedue commensurabili dall'unità u, e che u entri m volte in x, ed n in x_1; cioè si abbia $x=mu$, $x_1=nu$ (ove m ed n son numeri interi): sarà

$$\frac{x}{x_1}=\frac{m}{n}.$$

Si chiami u_1 lo stato della seconda quantità che corrisponde allo stato u della prima. Quando u diviene mu, nu; u_1 diverrà per la condizion dell'enunciato mu_1, nu_1. Così i due stati della seconda quantità che corrispondono ai due stati $mu=x$, $nu=x_1$ della prima, sono rappresentati non meno da y, y_1 che da mu_1, nu_1. Dunque $y=mu_1$, $y_1=nu_1$; e per conseguente

$$\frac{y}{y_1}=\frac{m}{n},$$

Dunque $$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}.$$

Supponiamo in secondo luogo che x, x_1 sieno incommensurabili. Si chiamino δx, δy, i residui che lasciano gli antecedenti x, y, misurati che siano dalle unità u, u_1, rispettivamente *equi-summultiple* de' conseguenti x_1, y_1.

$x - \delta x$, x_1 saranno commensurabili, e si avrà per la conclusion precedente

$$\frac{x - \delta x}{x_1} = \frac{y - \delta y}{y_1}.$$

Ora u od u_1 può attenuarsi al di là di ogni assegnata comunque piccolissima quantità, e quindi anche δx o δy. Dunque $\frac{x}{x_1}$, $\frac{y}{y_1}$ sono limiti delle ragioni commensurabili $\frac{x - \delta x}{x_1}$, $\frac{y - \delta y}{y_1}$, e di più limiti simultanei, non potendo l'una di queste ragioni trovarsi al di sopra del suo limite, quando l'altra è al di sotto del suo.

Dunque (§. 5.)

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}.$$

Così rimane pienamente dimostrato che per conoscere se una quantità è proporzionale ad un'altra, basta osservare se al raddoppiarsi, triplicarsi, quadruplicarsi .... dell' una; si raddoppia, triplica, quadruplica ... anche l'altra.

Due quantità saranno *inversamente proporzionali*, se al duplicarsi, triplicarsi, quadruplicarsi ... dell' una; si subduplica, subtriplica, subquadruplica ... l'altra. Imperocchè se al duplicarsi, triplicarsi, quadruplicarsi ... dell'una x, l'altra y si subduplica, subtriplica, subquadruplica ...; allora è manifestamente $\frac{1}{y}$ che si duplica, triplica, quadruplica ...., ossia che è direttamente proporzionale con x: e però si avrà.

$$\frac{x}{x_{\prime}}=\frac{y^{-1}}{y_{\prime}^{-1}}=\frac{y_{\prime}}{y}.$$

Applicazione. Nella geometria la sovrapposizione dimostra immediatamente che in un circolo, 1.° ad angoli centrali uguali si oppongono archi uguali; 2.° che l'angolo centrale cresce o diminuisce, e si raddoppia, triplica, quadruplica ... con l'opposto arco. Dunque l'angolo centrale è proporzionale all'opposto arco.

II. Criterio

9. *Se una quantità* U *varia al variare di più quantità* $s, t, v, x, y, z \ldots$, *e varia proporzionalmente a ciascuna di esse, quando si conservano costanti tutte le altre; si conchiuda che in ogni caso ella segue la ragion composta di tutte, o che varia in proporzione col prodotto di tutte.*

Dimostrazione. La quantità U variando unicamente al variare delle quantità $s, t, v, x, y, z \ldots$, e perciò essendone funzione, io la contrasegnerò così

$$U=f(s, t, v, x, y, z \ldots);$$

e per indicare i diversi stati di una quantità, apporrò degli apici alla lettera che la rappresenta. Chiamo R la ragione fra due stati qualunque della quantità U, dimodochè si abbia in generale

$$(1)\ U=U_{n}\ R:$$

indicando n il numero delle quantità s, t, v, x, y, z... variate in U.

Ciò posto

1.° Sia $n = 2$, ed $U_2 = f(s', t', v, x, y, z\ldots)$ L'equazione (1) equivarrà in tal caso a

$$f(s, t, v, x, y, z\ldots) = f(s', t', v, x, y, z\ldots)\,R,$$

che divisa per $U_1 = f(s', t, v, x, y, z\ldots)$, diventa

$$\frac{f(s, t, v, x, y, z\ldots)}{f(s', t, v, x, y, z\ldots)} = \frac{f(s', t', v, x, y, z\ldots)}{f(s', t, v, x, y, z\ldots)}R:$$

Ora in questa equazione il primo membro rappresenta la ragione de'due stati, ne'quali si trova U, per la variazione della sola quantità s; ed il coefficiente di R rappresenta la ragione de'due stati ne' quali si trova U per la variazione della sola t. Quindi per la ipotesi fondamentale, cotesta equazione si riduce a

$$\frac{s}{s'} = \frac{t'}{t}R: \text{ donde } R\left[=\frac{U}{U_2}\right] = \frac{s}{s'}\cdot\frac{t}{t'},$$

cioè *se delle quantità* s, t, v, x, y, z..., *le varianti son due*; U *segue la ragion composta di queste due.*

2.° Sia $n = 3$, ed $U_3 = f(s', t', v', x, y, z\ldots)$: l'equazione (1) equivarrà a

$$f(s, t, v, x, y, z\ldots) = f(s', t', v', x, y, z\ldots)\,R,$$

che divisa per $U_2 = f(s', t', v, x, y, z\ldots)$, diventa

$$\frac{f(s, t, v, x, y, z \ldots)}{f(s', t', v, x, y, z \ldots)} = \frac{f(s', t', v', x, y, z \ldots)}{f(s', t', v, x, y, z \ldots)} R.$$

Ora in questa equazione il primo membro rappresenta la ragione de' due stati ne' quali si trova U per la variazione delle due quantità s, t; ed il coefficiente di R rappresenta la ragione de' due stati ne' quali si trova U per la variazione della sola quantità v. Quindi per la conclusion precedente cotesta equazione si riduce a

$$\frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} = \frac{v'}{v} R: \text{ donde } R\left[= \frac{U}{U_3}\right] = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'};$$

cioè *se delle quantità s, t, v, x, y, $z \ldots$, le varianti son tre*; U *segue la ragion composta di queste tre.*

3.° Nello stesso modo, se $n = 4$, ed $U_4 = f(s', t', v', x', y, z \ldots)$, l'equazione (1) divisa per $U_3 = f(s', t', v', x, y, z \ldots)$, si riduce a

$$\frac{f(s, t, v, x, y, z \ldots)}{f(s', t', v', x, y, z \ldots)} = \frac{f(s', t', v', x', y, z \ldots)}{f(s', t', v', x, y, z \ldots)} R:$$

che per la conclusion precedente diviene

$$\frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} = \frac{x'}{x} R; \text{ donde } R\left[= \frac{U}{U_4}\right] = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{x}{x'}.$$

Ormai ben si scorge che l'andamento del raziocinio è sempre lo stesso: dunque si può conchiudere in generale

$$\frac{U}{U_n} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{x}{x'} \cdot \frac{y}{y'} \cdot \frac{z}{z'} \cdots,$$

e perciò (§. 7) $U = A . s\, t\, v\, x\, y\, z \ldots,$

designando A un coefficiente costante. Pertanto, *se le quantità s, t, v, x, y, z . . . variano tutte simultaneamente; U segue la ragion composta di tutte.*

Qualora tra le quantità s, t, v, x, y, z . . . ve ne fosse alcuna, x per es., che restando costanti le altre, seguisse la ragion inversa di U, è chiaro che nell' ultimo risultato si dovrà scrivere invece di essa il suo reciproco x^{-1}, il quale è direttamente proporzionale con U.

Applicazione. Nella geometria la sovrapposizione dimostra immediatamente, 1.° che due parallelepipedi sono coincidibili, se un triedro dell'uno è coincidibile insieme agli spigoli con un triedro dell' altro; 2.° che un parallelepipedo di angoli costanti cresce o diminuisce coi tre spigoli concorrenti ad uno de' suoi vertici, e che si raddoppia, triplica, quadruplica . . . con uno qualunque di essi, rimanendo costanti gli altri due. Dunque *un parallelepipedo di angoli costanti varia in proporzione col prodotto degli spigoli concorrenti ad uno de' suoi vertici.*

Dunque, ove si scelga per unità di volume il cubo avente per lato l'unità lineare, il parallelepipedo rettangolo sarà uguale al prodotto della base per l'altezza.

III. Criterio

10. *Se due sistemi di quantità* 1.° ($l, m, n, p, q \ldots$), 2.° ($s, t, v, x, y \ldots$) *sieno così tra loro dipendenti che ogni singola quantità dell' uno riesca proporzionale ad ogni singola quantità dell' altro,*

quando restano invariabili in entrambi i sistemi le quantità rimanenti; si conchiuda che in qualunque caso il prodotto di tutte le quantità del 1.° sistema, varia in proporzione col prodotto di tutte le quantità del secondo.

Dimostrazione. Nel 2.° sistema $(s, t, v, x, y, z \ldots)$ si tengano ferme tutte le quantità, tranne s.

s in vigor della ipotesi e del criterio precedente, varierà al variare delle quantità del 1.° sistema $l, m, n, p, q \ldots$, seguendone la ragion composta, e perciò si avrà

$$s = A . l\, m\, n\, p\, q \ldots,$$

denotando A una costante.

Or da qui si deriva $l = s A^{-1} m^{-1} n^{-1} p^{-1} q^{-1} \ldots$, e questa equazione dimostra che la quantità l del 1.° sistema $(l, m, n, p, q . .)$ varia in ragion inversa di ciascuna delle quantità compagne $m, n, p, q, \ldots$, quando in entrambi i sistemi si conservano costanti tutte le altre quantità. Dunque, in forza di questa conseguenza e della ipotesi, l varia proporzionalmente al variare di ogni singola quantità del sistema $(m^{-1}, n^{-1}, p^{-1}, q^{-1}, \ldots; s, t, v, x, y \ldots)$, sostando tutte le altre. Si avrà dunque pel criterio precedente

$$\frac{l}{l_{,}} = \frac{m^{-1}\, n^{-1}\, p^{-1}\, q^{-1} \ldots s\, t\, v\, x\, y \ldots}{m_{,}^{-1}\, n_{,}^{-1}\, p_{,}^{-1}\, q_{,}^{-1} \ldots s_{,}\, t_{,}\, v_{,}\, x_{,}\, y_{,} \ldots},$$

e quindi

$$\frac{l\, m\, n\, p\, q \ldots}{l_{,} m_{,} n_{,} p_{,} q_{,} \ldots} = \frac{s\, t\, v\, x\, y \ldots}{s_{,} t_{,} v_{,} x_{,} y_{,} \ldots}:$$

ciò che era da dimostrarsi.

Osservazioni sulla proporzionalità delle quantità immaginarie: in qual senso le quantità proporzionali possano dirsi quantità eguali.

11. Questi criterj sussistono ancora nel caso che le quantità variabili divengano immaginarie. Imperocchè una quantità immaginaria della forma

$$f(x) + \varphi(x)\sqrt{-1},$$

si dice che diviene doppia, tripla, quadrupla ..., qualora doppia, tripla, quadrupla ..... divenga simultaneamente ciascuna delle sue parti reali $f(x)$, $\varphi(x)$. Così la proporzionalità delle quantità immaginarie variabili, si riduce a quella delle quantità reali che vi sono comprese.

12. Nella proporzionalità se scelgansi ad unità di misura delle rispettive grandezze certi loro stati corrispondenti, potrà dirsi in forza della definizione delle quantità proporzionali e del num.3:

1.° Che una quantità è uguale ad un' altra, se la prima sia proporzionale alla seconda;

2.° Che una quantità è uguale al prodotto di molte altre, se la prima sia proporzionale al prodotto delle seconde;

3.° Che il prodotto delle quantità di un sistema, è uguale al prodotto delle quantità di un altro sistema; se il prodotto delle prime sia proporzionale al prodotto delle seconde.

Così, per es., la proporzione

$$\frac{l}{l_1} \cdot \frac{m}{m_1} \cdot \frac{n}{n_1} = \frac{s}{s_1} \cdot \frac{t}{t_1} \cdot \frac{v}{v_1},$$

diventa $l\,m\,n = s\,t\,v$, ove scelgansi ad unità di misura delle quantità l, m, n, s, t, v, i loro stati corrispondenti l_1, m_1, n_1, s_1, t_1, v_1.

Adoperando questo linguaggio, è manifesto che le proporzioni si cangiano in equazioni tra quantità che prese nel loro senso letterale sono eterogenee, in equazioni perciò che presentano una contradizione apparente. Non è a dir quanto giovi il saper all'uopo sostituire alla *sincopata espressione apparentemente contradittoria*, quello che vi è di sottinteso, e che vi riconduce l'esattezza dissipando l'assurdo.

Le applicazioni degli esposti criterj si estendono naturalmente a quanto involga obbietto di quantità: scienze, arti e commercio. Per esempio, nell'industria fabbricante e commerciale da una parte si hanno gli elementi de'mezzi che somministra la natura e l'arte, non che i tempi ne' quali essi hanno agito o debbono agire; dall'altra, gli elementi degli effetti che questi mezzi hanno prodotto o debbono produrre. I nostri criterj giovano evidentemente a determinar subito, quando la ragion composta degli elementi de' mezzi segua la ragion composta degli elementi degli effetti.

La teorìa generale delle quantità proporzionali sembra essere il vero anello che unisce all'algebra tutte le diverse parti delle matematiche.

TEORICA DE'VALORI DELLE PROIEZIONI.

L'applicazion dell'algebra alla geometria consiste nel tradurre in lingua algebrica le quistioni relative alle quantità estese, onde più facilmente risolverle e dimostrarle: per essa le moltiplici proprietà geometriche si compendiano in brevi formule, nelle quali poi si vedono e si seguono le immagini e i movimenti dell'estensione. Le basi di questa scienza possono ridursi a tre: alla trigonometria; alla teorica delle proiezioni e delle coordinate; ed al calcolo infinitesimale. Nella presente memoria mi propongo di esporre, un poco più generalmente e precisamente che d'ordinario, i principii de'valori delle proiezioni, ed i mezzi di ridurre la proiezione delle aree a quella delle rette: dichiaro come, date più rette, si determina la retta che proiettata sopra un asse mutabile a piacimento, è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle prime, retta che con nome desunto dalla meccanica, dico *risultante*, chiamando le altre *componenti*; e dimostro che una retta moltiplicata per la proiezione che riceve da un'altra retta, è uguale alla somma delle componenti dell'una, moltiplicate rispettivamente per la proiezione che ricevon dall'altra. Da questo teorema, il quale nella teorica delle forze divenendo il principio delle velocità virtuali tutta in se racchiude la meccanica, si deriva un nuovo metodo sommamente semplice, elegante e spedito di trattare la geometria a due e a tre coordinate, finita ed infinitesimale, del quale darò un saggio in seguito.

Definizioni - proiezione di un punto, di una linea e di una superficie: asse e piano dirigente: conseguenze: distanze relative e simboli delle proiezioni.

(*) 13. *Un punto proiettato parallelamente a un piano dato sopra una linea*, è l'intersezione che quivi produce il piano condotto dal punto parallelamente al dato.

Un punto proiettato parallelamente ad un asse sopra una superficie, è quivi il piede della retta condotta dal punto parallelamente all'asse dato.

Un punto proiettato, si dice *proiezione del punto*. La proiezione di un punto è *ortogonale* od *obliqua*, secondochè la retta che lo proietta, è perpendicolare od obliqua all'estensione sopra cui lo proietta.

a) *La proiezione di una linea o di una superficie*, è il luogo geometrico delle proiezioni de' suoi punti.

b) La retta che unisce il punto colla sua proiezione, si dice *retta proiettante*. Similmente, il piano che proietta un punto sopra una linea, si chiama *piano proiettante*. È palese che i punti com-

(*) I numeri de' §§. fanno seguito a quelli dell'articolo sulle quantità proporzionali.

presi in una stessa retta o in uno stesso piano proiettante, hanno tutti la medesima proiezione. Il luogo geometrico delle rette, che proiettano una linea sopra una superficie, si chiama *superficie cilindrica proiettante*: quindi tutte le linee che abbracciano la medesima superficie proiettante, hanno evidentemente la stessa proiezione.

c) Il piano o l'asse parallelamente a cui si proietta, dirigendo tutte le rette proiettanti, si dirà *piano* o *asse dirigente*; l'inclinazione del piano o asse dirigente alla linea o superficie che riceve le proiezioni, *obliquità di proiezione*; e le proiezioni si diranno di *eguale obliquità*, se le linee o superficie che le ricevono, inclinino egualmente ai rispettivi piani o assi dirigenti; ed *omologhe*, se siano fatte sopra un medesimo asse o piano, parallelamente allo stesso piano o asse dirigente. Allorchè si nominano le proiezioni, prescindendo da ogni asse e piano dirigente, s'intendono *le ortogonali*.

Dato il piano dirigente, la proiezione di una linea sopra un asse, è in questo il segmento compreso fra i piani proiettanti gli estremi della linea; essendochè in tale segmento cadono tutte le proiezioni de'punti intermedii della medesima. Quindi 1.° la proiezione sopra un asse di più linee intercette fra due piani proiettanti, è la medesima per tutte; 2.° le proiezioni di una medesima linea sovr' assi paralleli, sono eguali in tutti, siccome rette parallele comprese tra piani paralleli; 3.° per proiettare un punto od una linea sopra un asse, si può proiettare dapprima sopra una superficie od una linea, ed in seguito proiettarne la proiezione sull'asse.

d) La distanza di due punti proiettata sopra una retta, dicesi anche distanza de' due punti *stimata nel senso della retta.* La distanza di un punto da una superficie, *stimata nel senso di un asse*, è la retta condotta dal punto alla superficie parallelamente all'asse. La distanza di un punto da una linea, *stimata nel senso di un piano*, è la retta condotta dal punto alla linea parallelamente al piano.

e) Affine di meglio parlare alla immaginazione e di conseguire simmetria ne' risultati, nella presente teoria io designerò i piani dirigenti e i piani che ricevono le proiezioni, con *lettere grandi*; e con *lettere piccole*, gli assi dirigenti e gli assi che ricevono le proiezioni. Per indicare che una linea p è proiettata sull' asse x, essendo D il piano dirigente, si scriverà

$$^{\mathrm{D}}p_x.$$

Similmente, per indicare che un'estensione a è proiettata sul piano X, essendo d l'asse dirigente, si scriverà

$$^{d}a_{\mathrm{X}}.$$

In una parola, nell'estensione da proiettarsi collocheremo in alto e alla sinistra il piano o asse dirigente, e in basso e alla destra l'asse o piano che riceve la proiezione. Nel caso delle proiezioni ortogonali si ometterà di segnare il piano o asse dirigente: così il simbolo a_x, indicherà la proiezione della linea a sull'asse x. È evidente che *un'estensione è uguale alla sua proiezione sopra se medesma:* così $a_a = a$.

L'angolo formato da due estensioni p ed x, s'indicherà così

$$px:$$

cioè si porrà un punto in alto e alla sinistra dinanzi alle lettere rappresentanti le due estensioni.

Nota 1. Immaginiamo una linea che varii di grandezza: se *co' gradi positivi* essa progredisce in un senso, *co' gradi negativi* retrocederà in senso contrario. Dunque una linea, se generata da un punto moventesi in un senso, si riguarda come *positiva*; generata da un punto moventesi in senso contrario, dovrà riguardarsi come *negativa*; *e il segno* (±) *indicherà il senso del moto generatore*. Le lettere impiegate a designare una linea variabile, si ordinano in modo che il punto generator della linea non passi per il luogo indicato da una lettera qualunque, se non dopo di esser passato per il luogo della lettera che precede. Così l'ordine delle lettere serve a rappresentare il senso del moto generatore.

Nota 2. Una retta a partire da uno qualunque de' suoi punti, presenta due direzioni *opposte* (vale a dire, a partire da quel punto si può camminare sulla retta in due sensi contrarii), delle quali se l'una si prende per positiva, l'altra è negativa. Quindi per conoscere completamente una retta, bisogna conoscerne tre cose, *la grandezza*, *la direzione*, e *la posizione*.

Proiezione de' punti sopra un asse.

14. Per trovare la proiezione P (fig. 1.) di un punto M sopra un asse Ox in un modo facile ed uniforme, si fissa l'*origine dell'asse* in un punto qualunque O: ivi l'asse si concepisce diviso in due, l'uno *positivo*, e l'altro *negativo*: se l'asse è *orizzontale*, suole tenersi positivo quello che corre dalla si-

nistra alla destra dell'origine; e quello che corre dal basso in alto, se l'asse è *verticale*, od obliquo all'orizzonte.

La parte dell'asse compresa tra l'origine e la proiezione del punto, quale OP, si dice *ascissa del punto*; ed è *positiva* o *negativa*, secondochè si conta sull'asse positivo o sul negativo. È palese, che *le ascisse de' punti non solo fanno conoscere colle loro estremità le proiezioni de' medesimi, ma eziandio le mutue distanze di tali proiezioni.*

Se l'ascissa di un punto (sia positiva, sia negativa) s'indica per es. colla lettera x, l'asse su cui si conta, si suole indicare colla stessa lettera posta all' uopo tra parentesi, come per es. asse (x).

PROIEZIONI DELLE RETTE.

Espressione algebrica delle medesime sia per mezzo delle linee trigonometriche, sia per mezzo delle ascisse: proiezione del contorno di un poligono.

15. Una retta proiettata sopra un piano parallelamente ad un asse, è un'altra retta: imperocchè le linee proiettanti i diversi punti della retta, essendo parallele e attraversate dalla retta, sono tutte nel piano determinato dalla retta e da una di esse; e d'altronde l'intersezione di due piani è una retta.

a) Le proiezioni sopra un piano di due rette parallele (essendo qualunque l'asse dirigente), sono parallele: giacchè riescono paralleli i piani proiettanti due rette parallele. Dunque *la proiezione in un piano di un parallelogrammo è un altro paral-*

lelogrammo; e però *sono eguali e parallele le proiezioni di due rette uguali e parallele.*

16. Teorema. *La proiezione* ortogonale *di una retta* a *sopra un asse* x, o *sopra un piano* x, *è uguale al prodotto della medesima pel coseno della inclinazione reciproca*: cioè $a_x = a \cos{}^{\cdot} ax$, $a_{\mathrm{x}} = a \cos{}^{\cdot} a\mathrm{x}$.

Dimostrazione. Immaginando o costruendo l'analoga figura, si vedrà che la proiezione ortogonale di una retta a sopra un asse o sopra un piano, può riguardarsi come un cateto di un triangolo avente per ipotenusa la retta data, e per angolo adiacente al cateto, l'inclinazione della retta a alla sua proiezione; e d'altronde un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa pel coseno dell'angolo adiacente.

a) Poichè

$$ab_a = ab \cos{}^{\cdot} ab = ba_b;$$

perciò *una retta moltiplicata per la proiezione che riceve da un'altra, è uguale alla seconda moltiplicata per la proiezione che riceve dalla prima.*

17. Teor. *La proiezione* obliqua *di una retta* a *sopra un asse* x, *è uguale al prodotto della retta per la ragione de' seni degli angoli che il piano dirigente* D *fa colla retta e coll' asse*: cioè

$${}^{\mathrm{D}}a_x = a \frac{\operatorname{sen}{}^{\cdot} \mathrm{D}a}{\operatorname{sen}{}^{\cdot} \mathrm{D}x}.$$

Dim. Si conduca per l'origine O (fig. 1.) la linea OM parallela alla retta data a e diretta nel medesimo senso: MP rappresenti in profilo il piano che, parallelamente al piano dirigente OD, proietta in P sull'asse $Ox = (x)$ il punto M; OP rappresenterà il valore della proiezione di a, e sarà $= {}^{\mathrm{D}}a_x$. Da O si conduca Op perpendicolare al piano MP, e però anche al dirigente OD. I triangoli POp, MOp rettangoli in p, danno

$$Op = OP\cos POp = OM\cos MOp:$$

$$\text{ma}\quad OP = {}^{\mathrm{D}}a_x,\ \cos POp = \operatorname{sen} DOP = \operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}x,$$
$$OM = a,\ \cos MOp = \operatorname{sen} DOM = \operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}a:$$

dunque sostituendo

$${}^{\mathrm{D}}a_x \operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}x = a \operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}a, \quad \text{e però} \quad {}^{\mathrm{D}}a_x = a\frac{\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}a}{\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}x}.$$

L'espressione $a\frac{\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}a}{\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}x}$ rappresenta esattamente il valore della proiezione di a, offrendone la grandezza e la direzione. Infatti essendo la retta a positiva e $\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}x$ costante, la nominata espressione sarà positiva o negativa insieme con $\operatorname{sen}{}^{\cdot}\mathrm{D}a$. Ora questo seno (se l'angolo ${}^{\cdot}\mathrm{D}a$ si conti a partire dal piano dirigente OD e piegando verso l'asse Ox positivo) sarà positivo o negativo, secondochè l'angolo ${}^{\cdot}\mathrm{D}a$ resta dalla parte del piano dirigente che guarda l'asse positivo o negativo, e però secondochè è positiva o negativa la proiezione di a, come rilevasi dalla figura.

a) Teor. *La proiezione* obliqua *di una retta a sopra un piano* x, *è uguale al prodotto della retta per la ragione de' seni degli angoli che l'asse dirigente d fa colla retta e* ~~*col piano, cioè*~~ sua projezione x sul piano

$${}^{d}a_{\mathrm{x}} = a\frac{\operatorname{sen}{}^{\cdot}da}{\operatorname{sen}{}^{\cdot}d\mathrm{x}}.$$

La dimostrazione è la stessa che quella del precedente teorema: solo convien supporre nella fig. 1. che OD rappresenti ~~in profilo~~ l'asse dirigente, Ox il piano che riceve le proiezioni; e Op un piano perpendicolare all'asse dirigente, e però alla linea proiettante MP.

b) Da questi due teoremi si ricava, che *le rette parallele sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe.*

18. Teor. *La proiezione di una retta a sopra un asse* (x), *essendo qualunque il piano dirigente* D, *è rappresentata nella grandezza, direzione e posizione da*

$$x' - x\,;$$

intendendo per x *l'ascissa del punto donde la retta incomincia,* e *per* x' *l'ascissa del punto ove la retta finisce.*

Dim. La proiezione della retta a sull'asse (x), è in quest'asse il segmento compreso fra i piani che proiettano gli estremi di a parallelamente al piano dirigente (§. 13). Or questo segmento quando giace tutto intero sull'asse (x) positivo, ovvero sull'asse (x) negativo, è manifestamente uguale alla differenza tra le ascisse x', x, relative agli estremi di a: così in questo caso sussiste il teorema. Che se la retta a cade proiettata, parte sull'asse (x) positivo e parte sul negativo, allora una delle ascisse, per es. quella del punto donde incomincia a, è certo negativa, e nel supposto esempio potrà farsi $x = -\mathrm{x}$, e si avrà $x' - x = x' + \mathrm{x}$, cioè la proiezione di a eguale alla somma de' valori positivi delle ascisse: lo che si accorda perfettamente colla figura. Inoltre l'espressione $x' - x$ si accorda pure colla figura nel mostrarci che la proiezione di a è negativa (cioè diretta nel senso dell'asse (x) negativo) ogni volta che l'ascissa del punto, donde la retta incomincia, è maggiore dell'ascissa del punto ove la retta finisce. Dunque in ogni caso *la proiezione di una retta sopra un asse, è uguale alla differenza delle ascisse de'punti ove la retta finisce ed incomincia.*

19. Teor. *La somma delle proiezioni de'lati di un poligono sopra un asse* (x), *essendo qualunque il piano dirigente* D, *è nulla.*

Dim. Il poligono sia di n lati $a, a', a'', \ldots a^{(n-1)}$, i quali a cominciare da a, si succedano per ordine giusta il corso del perimetro. $x, x', x'', \ldots x^{(n-1)}$ siano le ascisse de'vertici consecutivi a cominciare da dove comincia il lato a: si noti che dopo il vertice *nesimo*, ritorna il primo vertice, e però $x^{(n)} = x$.

Ciò posto, le proiezioni de'lati sull'asse (x) saranno

$$ {}^{\mathrm{D}}a_x = x' - x,\ {}^{\mathrm{D}}a'_x = x'' - x',\ \ldots\ {}^{\mathrm{D}}a^{(n-1)}_x = x - x^{(n-1)}. $$

Ora sommando membro a membro, e l'una dopo l'altra tutte queste uguaglianze, la somma de' secondi membri si riduce a zero, e però si ha

$$ {}^{\mathrm{D}}(a + a' + a'' \ldots + a^{(n-1)})_x = 0. $$

Nota. Per valutare con precisione, quanto alla grandezza e direzione, le proiezioni di più rette date sopra un asse Ox (fig. 1), basta condurre per l'origine il piano dirigente OD, poi una linea parallela ed eguale ad ognuna delle rette date, e diretta nel medesimo senso: le proiezioni delle rette così condotte, avranno la stessa grandezza e direzione che le proiezioni delle prime rette, ossia lo stesso valore; e per sapere se sono positive o negative, basterà osservare se cadono sull' asse positivo o negativo, ovvero se le rette date, *riportate all'origine*, restano dalla parte del piano dirigente che guarda l'asse positivo o negativo.

Retta risultante e sue proprietà.

20. *La risultante* di più rette date divergenti da un centro, è la retta la cui proiezione sopra un asse mutabile (essendo qualunque il piano dirigente) è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe di tutte le rette date, le quali si diranno *componenti della prima*. Quindi è palese che, trattandosi di proiezioni, si potrà sostituire la risultante alle componenti, e viceversa. Si sa dalla meccanica, che se le rette componenti rappresentassero forze, la retta risultante rappresenterebbe la forza unica cui equivalgon le prime. È di qui che si sono desunte le denominazioni di risultante e di componenti.

a) Teor. *La risultante di due rette* VA, VB (fig. 2.), *è la diagonale* VR *del parallelogrammo costruito sulle medesime prese per lati.*

Dimostrazione. x, x', x'' designino sopra un asse (x) le ascisse de' vertici V, A, R, essendo qualunque il piano dirigente. Le proiezioni delle rette VA, AR, VR, saranno

$$x' - x \,,\; x'' - x' \,,\; x'' - x;$$

ed $x'' - x'$ proiezione di AR, rappresenterà pure la proiezione di VB, essendo AR e VB rette parallele, uguali e dirette nel medesimo senso.

Ciò posto, è manifesto che la proiezione $x''-x$ della diagonale VR, è uguale alla somma delle proiezioni $x'-x$, $x''-x'$ di VA, VB: dunque la diagonale VR è, per la definizione, la risultante delle due rette date VA, VB.

b) Teor. *La risultante di tre rette date* VA, VB, VC (fig. 2.) *non situate nel medesimo piano, è la diagonale* VR′ *del parallelepipedo costruito sulle medesime prese per ispigoli.*

Dim. Infatti VR, diagonale del parallelogrammo costruito sopra VA, VB, è la risultante di VA, VB; e VR′, diagonale del parallelogrammo costruito sopra VR, VC, è la risultante di VR, VC, e però di VA, VB, VC. Ora VR′ è pure evidentemente la diagonale del parallelepipedo costruito sopra VA, VB, VC. Dunque ec.

c) Problema. *Date più rette divergenti da un punto, trovare la loro risultante.*

Soluz. Sulle prime due rette, prese per lati, si formi un parallelogrammo: la diagonale sarà la loro risultante. Su questa diagonale e sulla terza retta, prese per lati, si formi un nuovo parallelogrammo: la nuova diagonale sarà la risultante delle prime tre rette date. Proseguendo così, l'ultima diagonale sarà la risultante di tutte le rette date.

In cotesti parallelogrammi successivi, i lati paralleli alle rette date formano evidentemente un poligono, il quale è chiuso dall'ultima diagonale. Quindi *per trovare* più speditamente *la risultante di più rette date, si formi un poligono, i lati del quale* (*a cominciare dal punto donde divergono le rette date*) *siano successivamente paralleli ed egua-*

li a ciascheduna delle rette date, e dirette nel medesimo senso: la retta che chiude il poligono, è la risultante richiesta. Dunque, viceversa, *il lato di un poligono, stimato in senso contrario al corso del perimetro, è la risultante di tutti gli altri lati.*

d) Teor. *La risultante di più rette date è unica, e però si può tenere qual ordine si vuole nel determinarla.*

Dim. Supponiamone possibili due R, R′, e diverse da zero: nel piano delle medesime conduciamo per la loro comune origine un asse (x) perpendicolare ad R, e però obliquo ad R′. La proiezione ortogonale di R sopra (x) sarà nulla, e non quella di R′. Ora sì la prima come la seconda proiezione, dovendo essere uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle medesime componenti, dovrebbe avere uno stesso valore. Dunque è assurda la fatta ipotesi di due risultanti.

e) Teor. *Una retta r moltiplicata per la proiezione che riceve da un'altra q, è uguale alla somma delle componenti a, b, c, d... dell'una r, moltiplicate rispettivamente per la proiezione che ricevon dall'altra q:* cioè

$$qr_q = rq_r = aq_a + bq_b + cq_c + dq_d + \text{ec.}$$

Dim. Si proiettino ortogonalmente sopra q le rette r, a, b, c, d, ...: si avrà, per la definizione della risultante,

$$r\cos qr = a\cos qa + b\cos qb + c\cos qc + d\cos + \text{ec.}$$

e, moltiplicando tutto per q,

$$rq\cos qr = aq\cos qa + bq\cos qb + cq\cos qc + \text{ec.}$$

Ora $q\cos{}^{\cdot}qr$, $q\cos{}^{\cdot}qa$, $q\cos{}^{\cdot}qb$, $q\cos{}^{\cdot}qc$, ec. sono le proiezioni q_r, q_a, q_b, q_c, ec., che la risultante e le componenti ricevono rispettivamente dalla retta q. Dunque ec.

f) Teor. *Il quadrato della risultante r è uguale alla somma de' quadrati delle sue componenti a, b, c, d, ..., più due volte la somma delle medesime moltiplicate a due a due e pel coseno dell'angolo che comprendono*: cioè

$$(1)\quad \begin{aligned} r^2 = {} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{ec.} \\ & + 2ab\cos{}^{\cdot}ab + 2ac\cos{}^{\cdot}ac + 2ad\cos{}^{\cdot}ad \,.\,. \\ & + 2bc\cos{}^{\cdot}bc + 2bd\cos{}^{\cdot}bd \,.\,. \\ & + 2cd\cos{}^{\cdot}cd + \text{ec.} \end{aligned}$$

Dim. Si proietti r ortogonalmente sopra ciascuna delle rette r, a, b, c, d ...: si avrà, pel teorema precedente, rr, ossia

$$(2)\qquad r^2 = ar_a + br_b + cr_c + dr_d + \text{ec.};$$

ma per la definizione della risultante

$$\begin{aligned} r_a &= a + b\cos{}^{\cdot}ab + c\cos{}^{\cdot}ac + d\cos{}^{\cdot}ad + \text{ec.} \\ r_b &= b + a\cos{}^{\cdot}ab + c\cos{}^{\cdot}bc + d\cos{}^{\cdot}bd + \text{ec.} \\ r_c &= c + a\cos{}^{\cdot}ac + b\cos{}^{\cdot}bc + d\cos{}^{\cdot}cd + \text{ec.} \\ r_d &= d + a\cos{}^{\cdot}ad + b\cos{}^{\cdot}bd + c\cos{}^{\cdot}cd + \text{ec.} \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella formula (2) e riducendo, si avrà la formula (1).

21. Teor. *Se più rette si proiettano omologamente sopra un piano, la risultante delle loro proiezioni coincide colla proiezione della loro risultante.*

Dim. La risultante di più rette date può considerarsi come l'ultimo lato di un poligono, i cui lati rimanenti siano paralleli ed uguali alle rette date, e diretti nel medesimo senso; e viceversa. Ora la proiezione di tal poligono sopra un piano è manifestamente un altro poligono, i cui lati sono paralleli ed uguali alle omologhe proiezioni delle rette date e della risultante, e diretti nel medesimo senso. Dunque la proiezione della risultante delle rette date, ultimo lato di questo poligono, è la risultante delle proiezioni delle stesse rette, proiezioni rappresentate dai lati rimanenti.

PROIEZIONI DELLE AREE.

Definizioni - area; asse del piano: convenzione propria a render sensibile lo stato positivo o negativo di un'area, e a ridurre la proiezione delle aree a quella delle rette.

22. *Area* è ogni superficie piana chiusa da una linea rientrante.

a) *Asse di un piano* è una retta indefinita perpendicolare al piano in un punto fissato ad arbitrio. Noi supporremo, che l'asse di un piano si divida in due a partire dal piano: l'uno *positivo*, e l'altro *negativo*; e poscia, che ciascuno di essi, a guisa di una persona ritta sul piano, abbia la sua *parte destra* e *sinistra*. Nella declinazione de' piani si diranno *omologhi* i loro assi dello stesso nome, cioè e i positivi, e i negativi.

b) Teor. *La declinazione di due piani è uguale a quella de' loro assi omologhi.*

Dim. VA, VB rappresentino due piani in profilo; e Va, Vb i corrispondenti assi omologhi, assi che coincidono allorchè è nulla la declinazione de'due piani. Per V si conduca un piano perpendicolare allo spigolo de'due piani VA, VB: tale piano conterrà gli assi Va, Vb, e inciderà ne'due piani l'angolo AVB, misura della loro declinazione. Ora gli angoli AVB, aVb sono eguali, avendo ambedue lo stesso complemento aVB: dunque la declinazione de'due piani è uguale a quella de' loro assi omologhi.

Si noti che sono complementarii, 1.° gli angoli che una retta fa con un piano e coll'asse del piano; 2.° gli angoli che un piano fa con un altro piano e coll'asse di questo.

c) Lo stato positivo o negativo di una linea si desume dal senso in cui si muove il punto che genera la linea: lo stato positivo o negativo di un' area può del pari desumersi dal senso del moto che genera l'area. Moto generatore di superficie piana, è il moto rotatorio di una retta intorno ad un asse perpendicolare alla retta.

Supponiamo che ciascun' area giacente in un piano sia animata da un moto rotatorio intorno all' asse del piano: è manifesto che quando essa rota dalla destra alla sinistra dell' asse positivo, roterà dalla sinistra alla destra dell'asse negativo, e viceversa. Ciò posto:

1.° *noi immagineremo che ogni area positiva tenda a rotare dalla destra alla sinistra dell'asse positivo; e però dalla destra alla sinistra dell'asse negativo, ogni area negativa.*

2.° *E converremo di rappresentare ogni area positiva con un proporzionale segmento dell' asse positivo; e però con un proporzionale segmento dell' asse negativo, ogni area negativa* (§. 3).

Queste due convenzioni sono valevoli a ridurre la proiezione delle aree a quella delle rette. Si avverta, che quando senz'altro aggiunto si dirà, 1.° *asse*, si sottintenda *positivo*; 2.° *dalla destra alla sinistra*, o *dalla sinistra alla destra*, si sottintenda *dell'asse del piano*.

d) Noi qui designeremo il piano e l'area con lettera grande; e con la stessa lettera, ma piccola, l'asse del piano e dell'area. E converremo, che se A_X rappresenta sul piano X la proiezione dell' area A, A_x rappresenti sopra x (asse del piano X) la proiezione di un segmento A dell'asse a.

Valore della proiezione ortogonale ed obliqua di un' area.

23. Teor. *La proiezione* ortogonale *di un' area* A *sopra un piano* X, *è uguale al prodotto dell' area pel coseno della sua declinazione dal piano*: cioè $A_X = A cos \cdot AX$.

Divideremo la dimostrazione in due parti. Primieramente dimostreremo, che $A cos \cdot AX$ rappresenta con esattezza sul piano X la proiezione ortogonale di A, *quanto al valore numerico*; poscia, *quanto allo stato positivo o negativo* giusta la convenzion fondamentale.

Prima parte. 1.° Sia A l'area di un triangolo ABC (fig. 4.) il cui piano interseca lungo MN il piano MNX = (X): dagli estremi di uno fra i suoi tre lati, non perpendicolare ad MN, per es. di AB, tiriamo perpendicolari ad MN le Aa, Bb; e per C la A'B' parallela ad AB, e terminante tra aA, bB, prolungate se occorre: ne nascerà il parallelogrammo

AB′ doppio del triangolo ABC, avendo con questo comune la base AB e l'altezza, e sarà $=\overline{AA'}.\overline{ab}=2A$.
Ora siffatto parallelogrammo proiettato sul piano (X), diventa un altro parallelogrammo, il quale, presa per base la proiezione del lato AA′ (cioè $\overline{AA'}cos\cdot AX$), avrà un' altezza $=\overline{ab}$, e quindi una superficie

$$=\overline{AA'}.\overline{ab}cos\cdot AX=2Acos\cdot AX.$$

Dunque la proiezione del triangolo ABC, essendo metà della proiezione del parallelogramo AB′, sarà $=Acos\cdot AX$.

2.° Sia A un' area poligona: essa potrà decomporsi in triangoli t, t', t'' . . . , le cui proiezioni sul piano (X), sommate daranno la proiezione di A. Si avrà dunque

$$A_X=(t+t'+t''\,,\,,\,)cos\cdot AX=Acos\cdot AX.$$

3.° Finalmente sia A un'area chiusa da una linea curva; essa, come limite de'poligoni inscritti e circoscritti, proiettata sul piano (X) diverrà $=Acos\cdot AX$.

Dunque, in ogni caso, $Acos\cdot AX$ rappresenta con esattezza sul piano (X), quanto al valore numerico, la proiezione di A.

Seconda parte. Da un punto della intersezione de'piani (A), (X), elevati gli assi omologhi a, x, imaginiamo che l' area A roti continua dalla destra alla sinistra dell'asse a: è facile a vedere che sul piano (X) la proiezione A_X di A, roterà intorno all'asse x positivo

1.° Dalla destra alla sinistra, finchè la declinazione ·XA varia nel primo quadrante o nel quarto;

2.° Dalla sinistra alla destra, finchè la declinazione ·XA varia nel secondo quadrante o nel terzo;

Allorchè poi la declinazione ·XA passa dal primo al secondo quadrante, e dal terzo al quarto, la proiezione A_X svanisce evidentemente.

Pertanto la proiezione ortogonale di A sul piano (X), è positiva o negativa giusta la convenzion fondamentale, e si annulla insieme con l'espressione $A\cos{\cdot}AX$. Così rimane pienamente dimostrato il teorema.

a) Poichè

$$A_X = A\cos{\cdot}AX = A\cos{\cdot}ax = A_x;$$

perciò, *rappresentando l'area* A *con un segmento* A *dell'asse a, alla proiezione ortogonale da piano a piano potrà surrogarsi la proiezione ortogonale da asse ad asse.*

b) Teor. *La proiezione* obliqua *di un'area* $\bar{A}$ *sopra un piano* X, *è uguale al prodotto dell'area per la ragione de'seni degli angoli che l'asse dirigente d fa coll'area e col piano*: cioè

$$^{d}A_X = A\frac{sen{\cdot}dA}{sen{\cdot}dX}.$$

Dim. OM (fig. 1.) rappresenti in profilo l'area A; MP la superficie cilindrica, che proietta sul piano $Ox = X$, l'area A parallelamente all'asse dirigente OD: OP rappresenterà in profilo sul piano X la proiezione di A, e si avrà $OP = {}^{d}A_X$. Da O si conduca il piano Od perpendicolare all'asse dirigente OD, e però alla superficie cilindrica proiettante MP prolungata se occorre: infine Op designi in profilo la proiezione ortogonale che il piano Od riceve sia dall'area $OM = A$, sia dall'area $OP = {}^{d}A_X$. Si avrà pel teorema precedente

$$Op = OP \cos POp = OM \cos MOp$$

ma
$$\cos POp = sen POD = sen\cdot dX ,$$
$$\cos MOp = sen MOD = sen\cdot dA :$$

dunque sostituendo

$${}^{d}A_X sen\cdot dX = A sen\cdot dA, \text{ e però } {}^{d}A_X = A\frac{sen\cdot dA}{sen\cdot dX}.$$

Quest'ultima eguaglianza dimostra che *le aree parallele sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe.*

c) Essendo

$${}^{d}A_X = A\frac{sen\cdot dA}{sen\cdot dX} = A\frac{\cos\cdot da}{\cos\cdot dx} = A\frac{sen\cdot {}^{D}a}{sen\cdot {}^{D}x} = {}^{D}A_x,$$

ossia
$${}^{d}A_X = {}^{D}A_x ;$$

perciò *per ridurre la proiezione delle aree a quella delle rette, basta rappresentare le aree con proporzionali segmenti de' proprii assi, e poscia surrogare ai piani i loro assi e viceversa.*

Area risultante e sue proprietà.

24. *Area risultante* di più aree date divergenti da un centro, è l'area la cui proiezione sopra un piano mutabile a piacimento (essendo qualunque l'asse dirigente), è sempre uguale alla somma delle

omologhe proiezioni delle aree date, le quali si diranno *aree componenti della prima*. È palese che, trattandosi di proiezioni, si può surrogare l'area risultante alle componenti, e viceversa.

a) Probl. *Date più aree* A, B, C, ..., *trovarne l'area risultante*.

Soluz. Dal centro donde divergono le aree date, elevati sulle medesime i relativi assi omologhi *a*, *b*, *c* ...., prendiamovi sopra segmenti rispettivamente uguali ad A, B, C .... (§. 3): la risultante R di questi segmenti rappresenterà la grandezza e l'asse dell'area risultante. Infatti proiettiamo sopra un asse qualunque x i segmenti R, A, B, C, .., essendo D il piano dirigente: si avrà

$$ {}^{D}R_{x} = {}^{D}(A + B + C + \text{ec.})_{x}\,; $$

donde, surrogando agli assi i piani e viceversa, si trae

$$ {}^{d}R_{X} = {}^{d}(A + B + C + \text{ec.})_{X}\,: $$

Or questa formula esprime che sul piano X la proiezione dell'area R, essendo *d* l'asse dirigente, è uguale alla somma delle omologhe proiezioni delle aree date A, B, C, ec.

b) L'area risultante gode quindi le stesse proprietà, che la retta da noi chiamata risultante. Dunque

1.° *Un'area moltiplicata per la proiezione che riceve da un'altra, è uguale alla somma delle aree componenti dell'una, moltiplicate rispettivamente per la proiezione che ricevon dall'altra.*

2.° *Il quadrato dell'area risultante è uguale alla somma de'quadrati delle aree componenti, più* *due volte la somma delle medesime moltiplicate a due a due e pel coseno dell'angolo che comprendono.*

c) Le aree date siano due A, B, ed R la loro risultante: è facile a vedere che i piani di A, B, R, s'intersecheranno tutti e tre secondo una medesima linea. Inoltre *ciascuna delle aree componenti* A, B, *sarà uguale alla proiezione che sopra il suo piano riceve da* R, *essendo asse dirigente una retta qualunque situata nel piano dell'altra componente.* Infatti proiettiamo sul piano di A le aree A, B, R, prendendo per asse dirigente una retta d situata nel piano di B: si avrà per la definizione

$$^{d}\text{R}_{\text{A}} = {}^{d}(\text{A} + \text{B})_{\text{A}}:$$

Ora è palese, che la proiezione di A sopra se medesima, è uguale ad A, e che la proiezione di B, fatta parallelamente all'asse d situato nel piano di B, svanisce in una linea; cioè $^{d}\text{A}_{\text{A}} = \text{A}$, $^{d}\text{B}_{\text{A}} = 0$: dunque $^{d}\text{R}_{\text{A}} = \text{A}$.

d) Le aree date siano tre A, B, C, ed R la loro risultante. *Ciascuna delle aree componenti* A, B, C *sarà uguale alla proiezione che sopra il suo piano riceve da* R, *essendo asse dirigente la intersezione de'piani delle altre due componenti.* Infatti proiettiamo sul piano di A le aree R, A, B, C, prendendo per asse dirigente la intersezione d de'piani di B, e di C; si avrà

$$^{d}\text{R}_{\text{A}} = {}^{d}(\text{A} + \text{B} + \text{C})_{\text{A}};\ \text{ma}\ {}^{d}\text{A}_{\text{A}} = \text{A},\ {}^{d}\text{B}_{\text{A}} = 0,\ {}^{d}\text{C}_{\text{A}} = 0:$$

dunque . . . . . $^{d}\text{R}_{\text{A}} = \text{A}$.

Quindi *data un'area, se ne avranno le aree componenti rispettivamente parallele a tre piani, proiettando l'area data su ciascuno de' tre piani, essendo asse dirigente la intersezione degli altri due piani.*

Nota. Il piano chiamato *invariabile* dall'autore della meccanica celeste, non è altro che il piano dell'area risultante.

e) Teor. *Se parallelamente agli assi delle facce interne di un poliedro tiriamo da un punto altrettante rette nella stessa direzione, ed eguali rispettivamente alle facce del poliedro; la risultante di tali rette sarà zero, e però una qualunque di esse, stimata in senso contrario, sarà la risultante delle altre.*

Dim. Se le proiezioni sopra un piano si riguardano come positive o negative, secondochè le rette proiettanti partano dalle facce interne od esterne del poliedro; si rileverà facilmente, che la somma delle proiezioni della prima specie, è uguale alla somma delle altre proiezioni, *e però eguale a zero la somma di tutte.* Inoltre si vede, che le facce interne del poliedro che danno la prima specie di proiezioni, debbono fare col piano angoli acuti; ed angoli ottusi, le facce interne rimanenti. Ciò posto, se alle facce interne sostituiamo eguali segmenti de' loro assi, si dovrà verificare di questi proiettati sopra una retta, ciò che abbiamo verificato di quelle proiettate sopra un piano (§. 23 c).

Così i poliedri hanno, rispetto alle proiezioni, le stesse proprietà che i poligoni. Si noti che *gli angoli che fanno tra loro le facce interne, sono supplementarii agli angoli de' loro assi*; come *gli angoli* *interni di un poligono sono supplementarii agli angoli che fanno i suoi lati, riportati ad un punto* (§. 19. nota).

Aree chiamate momenti: *proprietà del momento della risultante.*

25. *Momento di una retta* è il prodotto della retta per la sua distanza da un *punto* supposto *fisso*: la distanza tra siffatto punto e la retta, si dice *braccio della retta*; ed il punto fisso, *centro de'bracci* o *de'momenti*. Il braccio di una retta può essere *ortogonale* alla retta, od *obliquo*: quando altro non si aggiunga, si supporrà ortogonale. L'angolo obliquo onde una retta declina dal suo braccio, si dirà *obliquità del braccio*.

a) *Il momento di una retta con braccio ortogonale è*, per la definizione, *un'area doppia del triangolo avente per base la retta, e per vertice il centro de'bracci.*

b) Se una retta $VA = a$ (fig. 5.) declina dal suo braccio $Ma_{,} = a_{,}$ coll'angolo $Ma_{,}A = \omega$, condotta Mn perpendicolare a VA, si trarrà dal triangolo $Ma_{,}n$,

$$Mn = a_{,} sen\omega :$$

cioè, *moltiplicando il braccio obliquo pel seno di obliquità, si ottiene il braccio ortogonale.* Inoltre il triangolo VMA sarà $= \frac{1}{2}\, aa_{,}\, sen\omega$; cioè *il triangolo avente per base una retta di braccio obliquo, e per vertice il centro de'bracci, è uguale al semipro-*

dotto del momento (aa) *pel seno di obliquità*. Quindi, chiamati *omologhi* i momenti ne' quali i bracci declinano dalle proprie rette con eguale angolo, potremo stabilire, che *i momenti omologhi di più rette sono aree proporzionali ai triangoli aventi per base le rette, e per vertice il centro de'bracci*.

È manifesto potersi sempre supporre un momento eguale ad un'area data: quindi la teorica delle proiezioni delle aree può ridursi alla teorica delle proiezioni de'momenti.

c) Affine di fissare con chiarezza il segno ($\pm$) de'momenti, noi supporremo:

1.° Che ciascuna retta tenda a muoversi nel senso della propria direzione, e per conseguente a far rotare il proprio braccio ed il proprio momento intorno al centro de'bracci;

2.° Che nel centro de'bracci s'innalzi positivo e negativo l'*asse di ciascun momento*, cioè l'asse di ogni piano determinato da una retta e dal suo braccio;

3.° Che un momento sia *positivo* o *negativo*, secondochè tende a rotare dalla destra alla sinistra dell'asse positivo o negativo.

d) Teor. *In un piano il momento della risultante di più rette è uguale alla somma de'momenti omologhi delle medesime*.

Dim. Nel piano supposto (fig. 6) siano

$$Va = a,\ Vb = b,\ Vc = c,\ \text{ec.}$$

più rette divergenti dal punto V; $Vr = r$ sia la loro risultante, ed M il centro de'bracci. Per V e per M conduciamo $VM = D$: presa la retta D per asse dirigente, proiettiamo r, a, b, c, ec. sopra un asse (x) perpendicolare a D. Poichè in questa ipotesi (*) $sen{\cdot}x\mathrm{D} = 1$, si avrà

$$(1)\qquad r\,sen{\cdot}r\mathrm{D} = a\,sen{\cdot}a\mathrm{D} + b\,sen{\cdot}b\mathrm{D} + c\,sen{\cdot}c\mathrm{D} + \text{ec.}$$

Ciò posto, i bracci che dal centro M vanno ortogonali alle rette r, a, b, c, ec., siano

$$\mathrm{M}r_{\prime} = r_{\prime},\ \mathrm{M}a_{\prime} = a_{\prime},\ \mathrm{M}b_{\prime} = b_{\prime},\ \mathrm{M}c_{\prime} = c_{\prime},\ \text{ec.};$$

i triangoli rettangoli MV$r_{\prime}$, MV$a_{\prime}$, MV$b_{\prime}$, MV$c_{\prime}$, ec. daranno

$$sen{\cdot}r\mathrm{D} = \frac{r_{\prime}}{\mathrm{D}},\ sen{\cdot}a\mathrm{D} = \frac{a_{\prime}}{\mathrm{D}},\ sen{\cdot}b\mathrm{D} = \frac{b_{\prime}}{\mathrm{D}},\ \text{ec.}$$

Sostituendo i valori di questi seni nell'equazion precedente, e moltiplicando per D, risulta

$$(2)\qquad rr_{\prime} = aa_{\prime} + bb_{\prime} + cc_{\prime} + \text{ec.}$$

(*) *Nota. Angolo* è la superficie piana generata da un raggio indefinito rotante intorno ad un punto. Quindi un angolo se generato da un raggio moventesi in un senso, si riguarda come *positivo*; generato da un raggio moventesi in senso contrario, dovrà riguardarsi come *negativo*. Noi converremo di riguardare gli angoli come positivi o negativi, secondochè il moto rotatorio che li ha generati, si suppone fatto dalla destra alla sinistra, o dalla sinistra alla destra. Inoltre nell'indicarli col simbolo $\cdot pq$, converremo che il raggio generatore si muova passando dalla posizione indicata dalla prima lettera, alla posizione indicata dalla seconda. In virtù di questa convenzione si avrà

$$sen{\cdot}\mathrm{D}a = -\,sen{\cdot}a\mathrm{D},\ \text{e}\ \frac{sen{\cdot}\mathrm{D}a}{sen{\cdot}\mathrm{D}x} = \frac{sen{\cdot}a\mathrm{D}}{sen{\cdot}x\mathrm{D}}.$$

Supposte positive le rette D, r, a, b, c, ec., lo stato positivo o negativo de'momenti $rr_{,}$, $aa_{,}$, $bb_{,}$, $cc_{,}$, ec. dipende dallo stato positivo o negativo de'bracci, e però de'seni $sen{\cdot}r$D, $sen{\cdot}a$D, ec. Or questi seni, ove gli angoli si contino positivi girando dalla destra alla sinistra, riescono solamente positivi per le rette situate alla destra di VM, cioè *per le rette che tendono a far rotare i proprii momenti dalla destra alla sinistra*. Così nell'ultima formula (2), l'espressione algebrica de' momenti è in pieno accordo col loro stato positivo o negativo giusta la convenzion fondamentale; ed il proposto teorema è completamente dimostrato.

Tale teorema si può anche enunciare (come in meccanica) così: *in un piano il momento della risultante è uguale all'eccesso de'momenti che tendono a rotare nel medesimo senso, sopra i momenti che tendono a rotare in senso contrario.*

e) Risulta poi da questo teorema, che *in un piano, immaginati i triangoli aventi per vertice il centro de'bracci, e per base la risultante e ciascuna delle componenti; il triangolo della risultante è uguale alla somma de' triangoli delle componenti* (§. 6) (avuto per altro il debito riguardo ai segni giusta la convenzion fondamentale).

f) Teor. *Il momento della risultante di più rette divergenti da un punto, coincide col momento risultante de'momenti omologhi delle medesime rette.*

Dim. Immaginati i triangoli aventi per vertice il centro qualsivuole de'bracci, e per base la risultante e ciascuna componente, tutto riducesi a provare che il triangolo della risultante proiettato sopra un piano qualunque, diventa eguale alla somma de' triangoli delle componenti omologamente proiettati (§. 24). Ora tutti questi triangoli proiettati nel piano, hanno per vertice comune la proiezione del centro de'bracci, e per base la proiezione della risultante e di ciascuna componente. Quindi il primo di tali triangoli (in forza del §. 21, e del teor. prec.) è uguale alla somma degli altri.

D. Chelini delle Scuole Pie

SAGGIO DI GEOMETRIA ANALITICA

TRATTATA CON NUOVO METODO.

Il presente saggio riposa interamente sui principii da me stabiliti nelle proiezioni, i quali stanno a quelli di cui si fa uso comunemente, come il genere alla specie; e non debbono certo portare alcuna oscurità nella scienza, ma bensì nuovo lume, presentando ad ogni passo immagini sensibili e forme geometriche ne'simboli astratti dell'algebra. Si vedono le diverse parti della geometria, così a due come a tre coordinate, disporsi quasi da se medesime in ordine perfettamente simmetrico intorno ad un centro unico, costituito dalle belle proprietà della *risultante.*

Spero poi che niuno mi saprà mal grado dell'aver io continuo riguardo al moto onde si genera l'estensione; poichè in tal guisa vengo a togliere ogni ambiguità relativa ai segni, e a mettere in intimo contatto la geometria colla meccanica, la quale, come riflette egregiamente Lacroix, è lo scopo principale dello studio delle matematiche.

PRIMA PARTE.

GEOMETRIA A DUE COORDINATE.

La geometria a due coordinate insegna a rappresentare simbolicamente la posizione de'punti e il corso delle linee sul piano, onde con più facilità scoprirne i rapporti. La dividerò in due capi: nel 1.° tratterò delle coordinate, della retta e delle linee algebriche in generale; nel 2.° delle linee di second'ordine e delle curve simili.

CAPO PRIMO.

Scopo e natura delle coordinate.

Assi coordinati: coordinate di un punto: equazione della linea: intersezioni: distanza tra due punti ed equazione generale del circolo.

26. I punti sparsi in un piano si riportano ordinatamente ad un medesimo centro mediante le convenzioni seguenti.

Per un punto O (fig. 7), fissato ad arbitrio nel piano, si conviene di condurre sotto una inclinazione qualunque due rette indefinite xx', yy', le quali si dicono *assi coordinati*, e si designano rispettivamente colle lettere (x), (y), chiuse all'uopo tra parentesi: il primo di questi assi si suole supporre *orizzontale*. Il punto fisso O, da cui partono gli assi, si chiama *origine degli assi*, ed ivi ogni asse si divide in due, l'uno *positivo* e l'altro *negativo*.

a) *Le coordinate di un punto* riferito a due assi, sono su questi i lati del parallelogrammo avente per diagonale la retta che unisce il punto coll'origine degli assi: esse, siccome segmenti degli assi (x), (y), si designano rispettivamente colle lettere x, y, ed hanno un *valore positivo* o *negativo*, secondochè si contano sovr'assi positivi o negativi.

Dato un punto M, per *trovarne le coordinate*, basta condurre per esso due rette parallele agli assi

(x), (y): verrà così a chiudersi un parallelogrammo, i cui lati diretti lungo gli assi, saranno le coordinate richieste.

Viceversa: *date due coordinate* x, y, per *trovare il punto cui esse appartengono*, basta costruire sulle medesime (prese per lati) un parallelogrammo: il vertice, che quivi resta opposto alla origine, sarà il punto cercato. (È in questa guisa che nelle carte geografiche si trova il luogo, di cui si conosce la longitudine e la latitudine.) Oppure si prenda sull'asse (x) a partire dalla origine O, un segmento $OP = x$; e dall'estremo P di x parallelamente all'asse (y), si guidi $PM = y$: l'estremo M di y coinciderà manifestamente col punto determinato nella guisa precedente, e però sarà il punto richiesto.

In questo secondo metodo di risolvere il problema, la coordinata $y = MP$, si chiama *ordinata*, mentre la corrispondente coordinata $x = OP$, si dice *ascissa*, essendo parte tagliata od *abscissa* sull' asse (x). Da quì l'asse (x) si chiama *asse delle ascisse*, e l'asse (y), *asse delle ordinate*.

Nota. Giova rendersi familiare la considerazione delle coordinate di un punto sotto gli aspetti seguenti. Le coordinate di un punto, sono, nel senso degli assi le componenti della retta che va dalla origine al punto. – La coordinata di un punto relativa ad un asse, è la sua distanza dall'altro asse, stimata parallelamente al primo asse; ovvero, è la proiezione che riceve questo asse (essendo l' altro dirigente) dalla retta che va dalla origine al punto; oppure, è sopra tale asse la distanza tra l'origine e la proiezione del punto, essendo dirigente l'altro asse. – L'*ordinata* di un punto è la retta che proietta un punto sopra un asse, essendo dirigente l'altro asse; mentre l'*ascissa* è la distanza tra il piede dell'ordinata e l'origine.

b) Fatte queste convenzioni, è facile il rappresentare simbolicamente la posizione de' punti e il corso delle linee sul piano.

Dato un punto, determinato dalle coordinate x, y, si rappresenterà così: *punto* (x, y); o anche più semplicemente, *punto* xy.

Data una linea piana, riportando ogni punto del suo corso a due assi coordinati (x), (y), è manifesto che la determinazione dell' ascissa x nella figura, trae seco necessariamente la determinazione dell' ordinata y, e viceversa; e però che ciascuna delle due coordinate è funzione dell' altra: cioè $f(x, y) = 0$. Così le coordinate x, y, per rappresentare il corso di una linea, debbono vincolarsi con un'equazione.

Viceversa, ogni equazione $f(x, y) = 0$, fra due coordinate x, y, rappresenterà simbolicamente il corso di una linea. Infatti per ogni valore di x, l'equazione fornirà il valore corrispondente di y, e per conseguente manifesterà nella figura la linea descritta dal punto xy. In generale *ogni linea piana può considerarsi come il luogo geometrico di un'equazione* $f(x, y) = 0$, *la quale per ogni valore di* x *fornisca il corrispondente di* y, *e viceversa.*

Ogni equazione, che rappresenti il corso di una linea, si dice *equazion della linea*, o *alla linea*: ed una linea si designa per mezzo della sua equazione, per es. linea $f(x, y) = 0$.

c) Due equazioni $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, coesistenti fra due incognite o coordinate x, y, rappresentano le *intersezioni* della linea $f(x, y) = 0$, colla linea $\varphi(x, y) = 0$. Quindi la risoluzione di due equazioni a due incognite, fa trovare i punti comuni alle linee rappresentate dalle due equazioni. Viceversa, le coordinate delle intersezioni di due linee, danno le radici dell'equazioni rappresentanti le due linee. *La costruzione geometrica dell'equazioni* consiste nel determinarne le radici per mezzo della intersezione delle linee rappresentate dall'equazioni.

e) Una retta a che cominci dal punto $x'y'$, e termini al punto xy, si designerà così: retta $x'y'.xy$. Essa nel senso degli assi avrà per componenti $x-x'$, $y-y'$. Imperocchè se sopra la medesima, presa per diagonale, si costruisce un parallelogrammo con lati paralleli agli assi (x), (y); questi lati saranno (come si vede chiaramente immaginando la figura) $x-x'$, $y-y'$. Per conseguenza si avrà (§. 20. *f*)

$$a^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos xy,$$

ed

$a^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, nel caso degli assi ortogonali.

Supponiamo adesso che la retta a costante roti intorno all'estremo $x'y'$ reso fisso: l'altro estremo xy descriverà una circonferenza. Quindi le due precedenti sono l'equazioni più generali della circonferenza del raggio a e centro $x'y'$: la prima per gli assi obliquangoli, e la seconda per gli assi ortogonali.

Dunque, perchè un'equazione di secondo grado

$$Ax^2+By^2+2Cxy-D=o,$$

rappresenti un circolo, nel quale il centro sia l'origine delle coordinate, dovrà accordarsi coll'equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos xy - a^2 = 0;$$

e però somministrare $A = B$, $\frac{D}{A} = a^2$, $\frac{C}{A} = \cos xy$.

27. Ne' raziocinii, onde si vincolano insieme le quantità estese, si sogliono queste supporre nel loro stato positivo. Le formule ottenute in questa ipotesi, sussisteranno non solamente nel caso che le quantità svaniscano (§. 5 2°), ma nel caso eziandio che passino allo stato negativo. Infatti il raziocinio che stabilirebbe le formule in quest'ultima ipotesi, è chiaro che (avuto il debito riguardo ai segni) coinciderebbe col raziocinio che le ha stabilite nella prima ipotesi. Così queste formule sussisteranno in qualunque stato siano le quantità.

Rapporti fra le componenti, proiezioni ed angoli delle rette.

28. Dall'origine O (fig. 7) e dalla parte interna degli assi coordinati Ox, Oy, eleviamo perpendicolari ai medesimi due nuovi assi Oy_1, Ox_1: l'angolo che Ox_1 fa con Ox, e Oy_1 con Oy, sarà complemento all'angolo xOy degli assi coordinati, e per conseguente l'angolo $x_1 O y_1$ de' nuovi assi sarà *supplemento* all'angolo xOy de' primi assi: quindi *i nuovi assi* si diranno *supplementarii de' primi* (*).

(*) Introduco qui gli assi supplementarii principalmente per conservare una corrispondenza simmetrica colla geometria a tre coordinate, ove l'uso di tali assi, apportando molta evidenza e facilità, è di un vantaggio incontrastabile. Li dico poi *supplementarii* degli assi coordinati, perchè nella geometria a tre coordinate determinano un triangolo sferico supplementario di quello determinato dagli assi coordinati.

a) Le proiezioni L, M *di una retta r sopra due assi coordinati* (x), (y), *sono proporzionali alle sue componenti* l_1, m_1 *parallele agli assi supplementarii* (x_1), (y_1); *e la ragione delle prime alle seconde è uguale al seno degli assi coordinati: vale a dire*

$$\text{(H)} \quad \ldots\ldots \quad \frac{L}{l_1} = \frac{M}{m_1} = \frac{sen \cdot xy}{1}.$$

Dim. Proiettiamo r, l_1, m_1 sull'asse (x): sarà (§. 20)

$$L = r_x = (l_1 + m_1)_x.$$

Ora, essendo l'asse (y_1) perpendicolare ad (x), si ha $(m_1)_x = 0$, e però $L = (l_1)_x = l_1 cos \cdot x_1 x = l_1 sen \cdot xy$. Da qui e dal principio di simmetria si trae la proporzionalità (H).

Corollarii. Ciò posto,

1°. Se nella formula (§. 20 f)

$$r^2 = l^2_1 + m^2_1 + 2 l_1 m_1 cos \cdot x_1 y_1$$

omogenea rispetto alle quantità 1, l_1, m_1, sostituiamo a queste quantità le rispettivamente proporzionali $sen \cdot xy$, L, M (§. 6), e $- cos \cdot xy$ a $cos \cdot x_1 y_1$, avremo

$$r^2 sen^2 xy = L^2 + M^2 - 2LM\, cos \cdot xy;$$

dalla quale si dedurrà il valor di una retta, date che ne siano le proiezioni sugli assi coordinati. Ed è a notarsi che r rappresenta il raggio del circolo circoscritto al triangolo (2L, $\cdot xy$, 2M); essendochè il centro di siffatto circolo, proiettato ortogonalmente su ciascuno de'lati 2L, 2M, debbe cadervi nel mezzo.

2°. Siano l, m le componenti della retta r nel senso degli assi coordinati: sarà (§. 20)

$$r_{x_1} = (l + m)_{x_1} = (l_1 + m_1)_{x_1}.$$

Ma (essendo (y) perpendicolare a (x_1)), $(l+m)_{x_1} = l_{x_1} = l\cos{\cdot}x_1x = l\,\mathrm{sen}{\cdot}xy$; $(l_1+m_1)_{x_1} = l_1 + m_1\cos{\cdot}x_1y_1 = l_1 - m_1\cos{\cdot}xy$. Dunque

$$l\,\mathrm{sen}{\cdot}xy = l_1 - m_1\cos{\cdot}xy.$$

Sostituendo a 1, l_1, m_1, le quantità rispettivamente proporzionali $\mathrm{sen}{\cdot}xy$, L, M, avremo

$$l\,\mathrm{sen}^2{\cdot}xy = \mathrm{L} - \mathrm{M}\cos{\cdot}xy.$$

Si avverta che, in virtù del principio che la proiezione della risultante è uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle componenti, si ha

$$\mathrm{L} = l + m\cos{\cdot}xy.$$

Da queste due ultime formule si deducono per simmetria le componenti di una retta nel senso degli assi, date che ivi ne siano le proiezioni, e viceversa.

b) Si noti che (essendo $\mathrm{L} = r\cos{\cdot}xr$, $\mathrm{M} = r\cos{\cdot}ry$) le proiezioni L, M, nel caso di $r = 1$, diventano i coseni degli angoli che r fa cogli assi (x), (y); e diventano le componenti di r nel caso degli assi ortogonali. In questo caso sarà

$$l = r\cos{\cdot}xr,\quad m = r\cos{\cdot}ry = r\,\mathrm{sen}{\cdot}xr;$$

e però $\dfrac{m}{l} = \mathrm{tang}{\cdot}xr$, e (facendo $l=1$) $m = \mathrm{tang}{\cdot}xr$.

c) *Trovar l'angolo di due rette r, r', di cui nel senso degli assi (x), (y), sono date le componenti l, m; l', m'.*

Soluz. Proiettiamo r sulle rette r', l', m': avremo (§. 20 *e*)

$$r'r\cos{\cdot}rr' = l'r\cos{\cdot}xr + m'r\cos{\cdot}ry.$$

Ma $r\cos{\cdot}xr = l + m\cos{\cdot}xy$, $r\cos{\cdot}ry = m + l\cos{\cdot}xy$ (§. 20); dunque, sostituendo,

(1) $\quad rr'\cos{\cdot}rr' = ll' + mm' + (lm' + l'm)\cos{\cdot}xy.$

Il valore di $sen\cdot rr'$, anzichè dedurlo da $sen\cdot rr' = \sqrt{(1 - cos^2\cdot rr')}$, si può rinvenire nel modo seguente, che ha il vantaggio di offrire un'immagine geometrica del risultato, e di fissarne il segno con precisione.

Poichè, qualunque sia la posizione di due rette r, r', si sa dalla geometria che il loro angolo è uguale all'angolo di due altre rette condotte da un punto parallelamente alle prime e nel medesimo senso; supponiamo che le rette r, r' partano dalla origine O degli assi (x), (y): le coordinate della estremità di r saranno l, m; ed l', m' le coordinate della estremità di r'.

Fermo ciò, il punto $l'm'$ si riguardi come centro di momenti con braccio ortogonale. Il momento di r sarà doppio del triangolo (r, rr', r') [§. 25 a]; e però $= rr'sen\cdot rr'$; e i momenti delle componenti l, m di r saranno rispettivamente (§. 25. $a.b.c.$)

$$lm'sen\cdot xy; \; - l'msen\cdot xy.$$

Dunque (§. 25 d)

$$rr'sen\cdot rr' = (lm' - l'm)\, sen\cdot xy. \tag{2}$$

Quindi

$$tang\cdot rr' = \frac{(lm' - l'm)\, sen\cdot xy}{ll' + mm' + (lm' + l'm)\, cos\cdot xy}, \tag{3}$$

formula che fornisce il rapporto $\frac{m'}{l'}$, cognito che sia il rapporto $\frac{m}{l}$ e la declinazione di r' da r.

d) Se *delle rette* r, r' sono *date le proiezioni* (L, M), (L', M') *sugli assi coordinati* (x), (y), *per determinarne l'angolo* rr', basterà supporre nelle formule (1), (2), (3), che le (l, m), (l', m') rappresentino le componenti di r, r', parallele agli assi supplementarii, e poi surrogare a $(1, l, m)$, $(1, l', m')$ le quantità rispettivamente proporzionali $(sen\cdot xy, \mathrm{L}, \mathrm{M})$, $(sen\cdot xy, \mathrm{L}', \mathrm{M}')$, e $-cos\cdot xy$ a $cos\cdot x_1y_1$: otterremo

$$(1)' \quad rr'sen^2\cdot xy cos\cdot rr' = \mathrm{LL}' + \mathrm{MM}' - (\mathrm{LM}' + \mathrm{L}'\mathrm{M})cos\cdot xy,$$

$$(2)' \quad rr'sen\cdot xy sen\cdot rr' = \mathrm{LM}' - \mathrm{L}'\mathrm{M}.$$

e) Proiettiamo r sulle rette r', l', m': le corrispondenti proiezioni saranno $rcos\cdot rr'$, L, M; e si avrà (§. 20 *e*)

$$(1)'' \qquad rr'cos\cdot rr' = l'\mathrm{L} + m'\mathrm{M}.$$

Inoltre nella $(2)'$ sostituiamo $\mathrm{L} = l + mcos\cdot xy$, $\mathrm{M} = m + lcos\cdot xy$: avremo

$$(2)'' \quad rr'sen\cdot xy sen\cdot rr' = l\mathrm{M}' - m\mathrm{L}' - (l\mathrm{L}' - m\mathrm{M}')cos\cdot xy.$$

Le formule $(1)''$, $(2)''$ risolvono il seguente problema: *date nel senso degli assi (x), (y) le componenti di una retta, e le proiezioni di un'altra retta, determinar l'angolo delle due rette.*

f) Noi sappiamo che *le rette parallele sono proporzionali alle loro proiezioni e componenti omologhe* (§. 17 *b*). Viceversa due rette r, r' saranno parallele, se le componenti l, m dell'una secondo due assi, siano proporzionali alle componenti omologhe dell'altra. Infatti, sussistendo la proporzione $l : m :: l' : m'$, la (2) somministra $sen\cdot rr' = o$. D'altronde immaginando la figura riesce chiaro, che la direzione di r, r' è fissata invariabilmente dalle loro componenti; e che non si può alterare il parallelismo di r, r', senza turbare la proporzione $l:m::l':m'$. Dunque, sussistendo questa proporzione, è forza che sussista pure il parallelismo di r, r'. In virtù di tale discorso possiamo stabilire in generale, che *due rette saranno parallele, se le proiezioni dell' una* *sopra due assi, siano proporzionali alle proiezioni omologhe dell'altra.*

Pertanto supponendo le r, r' *parallele*, avremo

$$\frac{r'}{r}=\frac{l'}{l}=\frac{m'}{m}=\frac{L'}{L}=\frac{M'}{M}:$$

la quale proporzionalità (a causa de' teoremi : $l sen^2 \cdot xy = L - M cos \cdot xy$, $L = l + m cos \cdot xy$) assume la forma

$$\frac{r'}{r}=\frac{l' sen^2 \cdot xy}{L - M cos \cdot xy}=\frac{m' sen^2 \cdot xy}{M - L cos \cdot xy}=$$

$$\frac{L'}{l + m cos \cdot xy}=\frac{M'}{m + l cos \cdot xy}.$$

g) Supponiamo le due rette r, r' *perpendicolari* tra loro: la (1)'' darà $o = l'L + m'M$, e quindi

$$\frac{l'}{M}=\frac{m'}{-L}=\frac{\sqrt{(l'^2 + m'^2 + 2l'm' cos \cdot xy)}}{\sqrt{(L^2 + M^2 - 2LM cos \cdot xy)}}=$$

$$\frac{r'}{r sen \cdot xy}=\frac{l'}{m + l cos \cdot xy}=\frac{m'}{-(l + m cos \cdot xy)}.$$

Ciò posto, le M, $-L$ si potranno riguardare come le componenti di una retta parallela ad r', ed $=$ $r sen \cdot xy$: quindi, per la proporzionalità delle rette parallele colle loro proiezioni omologhe, si avrà pure

$$\frac{r'}{r sen \cdot xy}=\frac{L'}{M - L cos \cdot xy}=\frac{M'}{-(L - M cos \cdot xy)}.$$

Nota 1. Le proporzioni *f*) e *g*) risolvono il seguente problema: date le proiezioni L, M, o le componenti l, m di una retta, determinare le omologhe proiezioni o componenti di un'altra retta *perpendicolare* o *parallela* alla prima.

Nota 2. Le formule (2), (2)' somministrano l'area T di un triangolo di cui siano date nel senso degli assi (x), (y) le componenti o le proiezioni di due de'suoi lati r, r'. Supponiamo che i lati r, r' partano dal punto $\alpha\beta$ e vadano rispettivamente ai punti $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$: sarà $l = \alpha' - \alpha$, $m = \beta' - \beta$; $l' = \alpha'' - \alpha$, $m' = \beta'' - \beta$; e quindi

$$T = \tfrac{1}{2} rr' \operatorname{sen} rr' = \tfrac{1}{2}[(\alpha' - \alpha)(\beta'' - \beta) - (\alpha'' - \alpha)(\beta' - \beta)] \operatorname{sen} xy,$$

valore di un triangolo di cui sono dati i vertici.

Equazione della retta nel piano.

L'equazione della retta nel piano può presentarsi sotto due forme, ciascuna delle quali avendo delle proprietà particolari, merita di essere considerata a parte.

1.ª *Equazione della retta e sue proprietà.*

29. *Trovar l'equazione di una retta riportata a due assi coordinati* (x), (y).

Soluz. Consideriamo sulla retta un segmento v che cominci dal punto $\alpha\beta$, e termini al punto variabile xy: le componenti di v rispettivamente parallele agli assi (x), (y), saranno $x - \alpha$, $y - \beta$ (§.26 *e*). Per un punto qualunque del piano tiriamo parallela a v una linea r, le cui componenti parallele agli assi (x), (y), siano l, m. Poichè le rette parallele sono proporzionali alle loro componenti omologhe, si avrà

$$\text{(A)} \ldots \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{v}{r}.$$

Questa equazione appartiene soltanto alla retta condotta pel punto $\alpha\beta$ parallelamente alla risultante delle linee l, m, cioè ad una retta unica.

a) Esaminiamo le modificazioni che possono darsi alle quantità α, β, l, m, senz'alterare la natura e la generalità dell'equazione (A) della retta.

1.° α, β sono le coordinate di un punto preso ad arbitrio sulla retta: questo punto si può dunque prendere nell'incontro della retta con uno degli assi (incontro ch'esiste sempre, non potendo la retta esser parallela simultaneamente ai due assi). In questa ipotesi sarà zero la coordinata parallela all' altro asse: così se tale incontro è nell'asse (y), sarà $\alpha = 0$; se nell'asse (x), sarà $\beta = 0$. Pertanto *senza derogare alla generalità dell'equazione* (A), *noi possiamo supporre* $= 0$, *una delle due quantità* α, β.

Se la retta passa per l'origine, prendendo quivi il punto $\alpha\beta$, sarà $0 = \alpha = \beta$. Dunque l'equazione generale di ogni retta che passa per l'origine, è $\frac{x}{l} = \frac{y}{m}$.

2.° l, m sono nel senso degli assi (x), (y), le componenti della retta r, alla quale debb'esser parallela la retta v rappresentata dall' equazione (A): quindi *il rapporto tra* l, m, *serve a fissar la direzione della retta* v. Riesce poi manifesto, immaginando la figura, che senza cangiare la posizione di r, una delle tre quantità r, l, m, si può fissare ad arbitrio, e farla $= 1$, e che poscia con essa resta fissata ciascuna delle altre due. Si avverta che tra r, l, m, e gli angoli $\cdot xy$, $\cdot xr$, $\cdot ry$, coesistono le formule

$$l = r\frac{sen\cdot yr}{sen\cdot yx},\ m = r\frac{sen\cdot xr}{sen\cdot xy},\ \cdot xy = \cdot xr + \cdot ry,$$

donde

$$\frac{r}{sen\cdot xy} = \frac{l}{sen\cdot ry} = \frac{m}{sen\cdot xr} =$$

$$\frac{\sqrt{(l^2 + m^2 + 2lm\cos xy)}}{\sqrt{(\mathrm{sen}^2 xr + \mathrm{sen}^2 ry + 2\,\mathrm{sen}\,xr\,\mathrm{sen}\,ry\cos xy)}},$$

ove l'ultimo membro è una conseguenza de'due che precedono, e rappresenta co'suoi termini i termini del primo membro.

Concludiamo adunque, che *senz'alterare la natura e la generalità dell'equazione* (A) *della retta*, è *sempre lecito di supporre* $=$ o, *una delle due quantità* α, β; *ed* $= 1$, *una delle tre* r, l, m. *Il rapporto tra* l, m, *serve a fissar la direzione della retta* v, *mentre le quantità* α, β, *ne fissano un punto; quindi variando soltanto il rapporto* $\frac{m}{l}$, *la retta* (A) *gira intorno al punto* $\alpha\,\beta$; *e variando soltanto il punto* $\alpha\beta$, *la retta* (A) *si muove parallelamente a se medesima.*

Nota. Per indicare la direzione determinata dal rapporto tra l ed m, diremo *direzione* (l, m), o anche più semplicemente *direzione* lm.

Osservazioni.

I. Dal modo onde sarà scritta l'equazione della retta (A), noi converremo che ciascuno rilevi da se medesimo (essendo cosa facilissima) quando si suppone $=$ o, una delle due quantità α, β; ed $= 1$, una delle tre r, l, m. Per es. nell'equazione

$$v = \frac{x}{l} = \frac{y - \beta}{m}, \text{ si è fatto } r = 1,\ \alpha = 0;$$

mentre in $x = \dfrac{y - \beta}{m}$, si è fatto $l = 1$, $\alpha = 0$.

Si noti che in questa *il numero delle costanti* l, m, α, β, è ridotto a due, cioè *al minimo.*

II. Ogni equazione di primo grado tra le variabili x, y, potendosi ridurre alla forma

$y = mx + \beta$, donde $x = \frac{y-\beta}{m}$, rappresenta una retta.

III. L'equazion della retta che passa pe'punti $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, è $\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha} = \frac{y-\beta}{\beta'-\beta}$. Infatti questa proporzionalità significa che le rette $(\alpha\beta.xy)$, $(\alpha\beta.\alpha'\beta')$, col punto comune $\alpha\beta$, hanno la stessa direzione (§. 28. g). Quindi affinchè i tre punti $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, siano in linea retta, è necessario e basta che si abbia
$\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha} = \frac{\beta''-\beta}{\beta'-\beta}$.

IV. *Affinchè due rette*

$$\text{(A)} \qquad \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m},$$

$$\text{(A')} \qquad \frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'},$$

siano parallele è necessario e basta che si abbia (§. 28. g) $l : m :: l' : m'$; *ed* $l : m :: l' : m' :: \alpha' - \alpha : \beta' - \beta$, *affinchè coincidano*. Infatti quest'ultima proporzionalità significa che la retta $(\alpha\beta.\alpha'\beta')$ avente le estremità sulle prime due, ha la stessa direzione delle medesime.

V. Se la retta (A) è parallela all'asse (y), sarà $l = 0$, e però

$$x - \alpha = l\frac{y-\beta}{m} = 0; \text{ donde } x = \alpha, \ \frac{y-\beta}{m} = \frac{0}{0}$$

(valore indeterminato):
dunque *una retta parallela ad uno degli assi, ha la stessa equazione che il punto di sua intersezio-*

ne coll'altro asse : lo che riesce d'altronde evidente pensando alla figura.

2.ª Equazione della retta e sue proprietà.

30. *L'equazione*

(B) $$Ax + By = D,$$

rappresenta il corso di una retta distante dall'origine O (fig. 7) *dell'intervallo*

$$K = \frac{D}{g},$$

ove g è un segmento di tale distanza avente sugli assi (x), (y), *le proiezioni* A, B.

Dim. Prendiamo, a partire dalla origine O, sull'asse (x) un segmento OA $=$ A; sull'asse (y) un segmento OB $=$ B: e all'estremità di questi segmenti eleviamo sugli assi due perpendicolari, le quali concorreranno necessariamente in qualche punto g. Designata per g la retta Og, prendiamo sulla medesima (prolungata se occorre) un segmento

$OK = \frac{D}{g} = K$, e sopra questo segmento nella sua estremità s'innalzi perpendicolare una retta indefinita : questa retta sarà il luogo geometrico dell' equazione (B). Infatti consideriamo in essa un punto qualunque M $= (x, y)$: OM avrà per componenti x, y (§. 26. *a*). Quindi il noto principio delle proiezioni (§. 20. *c*) fornisce

$$g.\text{OM}\cos g.\text{OM} = x.\text{A} + y.\text{B};$$

ma $$g.\text{OM}\cos g\,\text{OM} = g\text{K} = \text{D}:$$

dunque D $= Ax + By$. Così ogni punto xy della retta KM verifica questa equazione, ed inoltre si vede che non può verificarla altro punto al di là o al di qua di KM.

a) Risulta dalla fatta costruzione

1.° Che senz'alterare la natura e la generalità dell'equazione (B), si può sempre fissare ad arbitrio una delle tre quantità g, A, B, e farla $= 1$, e che poscia con essa resta fissata ciascuna delle due rimanenti. E ciò apparisce pure dall'equazione

$$g^2 sen^2 \cdot xy = A^2 + B^2 - 2AB cos \cdot xy \quad (\S. 28.)$$

2.° Che il rapporto fra A, B serve a fissare la *direzione* di g, e conseguentemente della retta (B); mentre $D = gK$, serve a fissare la distanza K di questa retta dalla origine O. Quindi se facciamo variare il rapporto fra A, B, restando costante K, la retta (B) si muoverà in giro *toccando* continuamente una circonferenza del centro O e raggio K; e se facciamo variare K, restando costante il rapporto fra A, B, la retta (B) si muoverà *parallelamente a se medesima.*

3.° Se supponiamo che K parta dal punto $\alpha\beta$ e termini al punto $x'y'$, l'equazione $A(x - \alpha) + B(y - \beta) = D$, rappresenterà la retta che nel punto $x'y'$ tocca il circolo del centro $\alpha\beta$ e del raggio K. Siano ortogonali gli assi coordinati: presa $g = K$, sarà

$$A = x' - \alpha, \quad B = y' - \beta,$$

e la tangente di siffatto circolo diverrà

$$(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) = K^2.$$

Osservazioni.

I. L'equazione di una retta (B) passante per l'origine delle coordinate, sarà $Ax + By = o$: dovendo essere in questo caso $K = o$, e però $D = gK = o$. Viceversa, ove sia $D = o$, sarà $K = \frac{D}{g} = o$, e la retta (B) passerà per l'origine.

II. Affinchè la retta (B) passi pel punto $\alpha\beta$, dovrà essere

$$D = A\alpha + B\beta = Ax + By,$$

donde $$A(x-\alpha) + B(y-\beta) = 0;$$

ed affinchè passi per due o più punti dati $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$,..., dovrà essere

$$D = A\alpha + B\beta = A\alpha' + B\beta' = ...$$

Queste relazioni servono a manifestare se più punti dati sono in linea retta, e a sciogliere il seguente problema « *trovar l'equazion della retta che passa per due punti dati.* »

In generale, allorchè la retta (B) debbe sodisfare a certe condizioni, i rapporti fra A, B, D, si supporranno incogniti, e si determineranno mediante l'equazioni esprimenti tali condizioni.

III. *Affinchè due rette*

(B) $$Ax + By = D,$$

(B') $$A'x + B'y = D',$$

siano parallele, è necessario e basta che si abbia (§. 28. g) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{g}{g'}$; *ed* $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{D}{D'}$, *perchè coincidano.* Infatti, poichè

$$\frac{D}{g} = K, \quad \frac{D'}{g'} = K', \text{ ove sia } \frac{D}{D'} = \frac{g}{g'},$$

sarà necessariamente $K = K'$. Così le due rette essendo parallele, e di più alla stessa distanza dalla origine e dalla medesima parte, coincidono.

Se la retta (B) fosse parallela ad uno degli assi (x), (y), per es. ad (y), allora g perpendicolare alla retta (B), lo sarebbe pure ad (y), e però sarebbe $B = 0$.

IV. L'equazione (B), oltre quello che si è di sopra dichiarato, ha pure un altro significato geometrico, che giova conoscere per le sue applicazioni alla meccanica, e si trova sciogliendo nel modo che che segue il problema: *trovar la retta, luogo geometrico dell'equazione* (B).

Siano Ox, Oy, (fig. 7) gli assi coordinati, e sia M un punto xy verificante l'equazione (B). Parallelamente ad Oy si conduca $MA = A$; e parallelamente ad Ox, $MB = -B$: la risultante $MD = s$ di $(-B, A)$, indefinitamente prolungata, sarà la retta richiesta. Infatti riguardiamo l'origine O come centro di momenti, i cui bracci inclinino alle rette rispettive coll'angolo xy degli assi. In questa ipotesi, la componente A avrà il braccio x, ed il momento positivo Ax, tendendo a rotare dalla destra alla sinistra (§. 25. *c*). La componente $-B$, avrà il braccio y, ed il momento positivo By. Chiamato h il braccio della risultante s, sarà (§. 25. *d*)

$$sh = Ax + By = D.$$

Ora è facile a vedere che questa equazione si verifica per ogni punto della retta s prolungata indefinitamente: dunque tale retta sarà il luogo geometrico dell'equazione (B).

Da quì il seguente teorema: *l'equazione* $Ax + By = D$, *è ad una retta, nella quale* D *rappresenta intorno all'origine il momento di una sua parte* s *avente nel senso degli assi* (x), (y), *le componenti* $-B$, A.

Nota. Il problema di tracciare una retta, di cui è data l'equazione, si può sciogliere, sia partendo dalle proprietà geometriche dell'equazione, sia determinando le coordinate di due qualunque de' suoi punti, per es. *de' punti ove la retta attraversa i due assi* (x), (y).

Rapporti tra le due equazioni (A) *e* (B) *di una medesima retta.*

31. *Ridurre l'equazione* (B) *di una retta alla forma* (A), *e viceversa.*

Soluz. Primieramente, supponendo che il punto $\alpha\beta$ appartenga alla nostra retta, si avrà

$$A\alpha + B\beta = D;$$

e da quì il valore di una delle due coordinate α, β, determinatane l'altra ad arbitrio: per es. se si fa

$\beta = o$, sarà $\alpha = \frac{D}{A}$.

In secondo luogo essendo g perpendicolare a (B), e però ad (A), sarà pel principio delle proiezioni (§. 20 *e*); $o = lA + mB$, donde

$$\frac{l}{B} = \frac{m}{-A} = \frac{\sqrt{(l^2 + m^2 + 2lm\cos xy)}}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos xr)}} = \frac{r}{g\,\mathrm{sen}\, xy},$$

Viceversa: queste medesime formule servono a ridurre l'equazione (A) di una retta alla forma (B), valendo esse a fornire il rapporto delle tre quantità A, B, D, in funzione delle tre α, β, $\frac{l}{m}$.

Pertanto, poichè è facilissimo il passaggio dall'una forma all'altra, in ogni problema noi potremo prevalerci di quella che meglio si presta alle indagini de'rapporti, e conduce a più eleganti risultamenti.

Inclinazione delle rette e valore di una retta condotta da un punto ad un'altra retta.

32. *Trovar l'angolo che fanno tra loro* 1.° *le rette* (A) ed (A'), *ovvero* (B) e (B'); 2.° *le rette* (A) e (B).

Soluz. 1.° Poichè le rette (A) e (A') declinano l'una dall'altra come le r, r', risultanti di (l, m), (l', m'); e le rette (B) e (B') come le g, g', che sugli assi (x), (y) hanno per proiezioni A, B; A', B'; il problema è risoluto al §. 28 *c. d.*

2.° Le formule del §. 28 *e* somministrano

$$gr\cos{}^{\cdot}rg = lA + mB\,,$$

$$gr\,\mathrm{sen}.xy\;\mathrm{sen}{}^{\cdot}rg = lB - mA - (lA - mB)\cos.xy.$$

Ora, poichè g e (B) sono perpendicolari tra loro, gli angoli che la retta r fa con g e (B), saranno complementarii; e però, chiamato θ l'angolo onde r declina da (B), sarà $\cos{}^{\cdot}rg = \mathrm{sen}\theta$, $\mathrm{sen}{}^{\cdot}rg = \cos\theta$. Dunque

$$gr\,\mathrm{sen}\theta = lA + mB,$$

$$gr\,\mathrm{sen}{}^{\cdot}xy\cos\theta = lB - mA - (lA - mB)\cos{}^{\cdot}xy.$$

a) Se le due rette (A) e (B) sono *parallele*, e però g perpendicolare ad r, sarà $o = lA + mB$, e quindi (§. 28 g)

$$\frac{l}{B} = \frac{m}{-A} = \frac{\sqrt{(l^2 + m^2 + 2lm\cos{}^{\cdot}xy)}}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos.xy)}} = \frac{r}{g\,\mathrm{sen}{}^{\cdot}xy}.$$

b) Se (A) e (B) sono *perpendicolari tra loro*, r e g, essendo ambedue perpendicolari alla retta (B), saranno parallele, e conseguentemente proporzionali alle loro proiezioni omologhe (§. 17 *b*). Ed avremo (§. 28 f)

$$\frac{g}{r} = \frac{A}{l + m\cos{}^{\cdot}xy} = \frac{B}{m + l\cos{}^{\cdot}xy} = \frac{A - B\cos{}^{\cdot}xy}{l\,\mathrm{sen}^2{}^{\cdot}xy} = \frac{B - A\cos{}^{\cdot}xy}{m\,\mathrm{sen}^2{}^{\cdot}xy}.$$

a) *Trovare la retta* h *condotta dal punto* $\alpha'\beta'$ *sotto l'angolo* θ *ad un'altra retta*, 1.° *dell'equazione* (A); 2.° *dell'equazione* (B). [Stabiliremo le formule nella ipotesi che il punto $\alpha'\beta'$ sia intermedio tra l'origine e la retta (A) o (B)].

Soluz. 1.° Supponiamo che la retta r, risultante di l, m, parta dal punto $\alpha\beta$: la perpendicolare calata dal punto $\alpha'\beta'$ sulla direzione di r, ossia sulla retta (A), sarà $= h sen\theta$. Quindi, rispetto al centro $\alpha'\beta'$, la r avrà per momento $r.h sen\theta$, e le componenti l, m, avranno per momenti $-l(\beta-\beta') sen \cdot xy$, $m(\alpha-\alpha') sen \cdot xy$: dunque (§. 25 d)

$$hr sen\theta = [(\alpha-\alpha')m - l(\beta-\beta')] sen \cdot xy.$$

2.° La perpendicolare $h sen\theta$ calata dal punto $\alpha'\beta'$ sulla retta $Ax + By = D$, è uguale alla distanza che passa tra cotesta retta, e la parallela $Ax + By = A\alpha' + B\beta'$ condotta pel punto $\alpha'\beta'$; però è uguale alla differenza tra le distanze $\frac{D}{g}$, $\frac{A\alpha' + B\beta'}{g}$, che passano tra l'origine e siffatte parallele: sarà dunque

$$h sen\theta = \frac{D - (A\alpha' + B\beta')}{g}.$$

Se la retta (B) passa pel punto $x'y'$, sarà $D = Ax' + By'$; e la distanza tra il punto $\alpha'\beta'$ e la retta (B) diverrà

$$h sen\theta = \frac{A(x'-\alpha') + B(y'-\beta')}{g}.$$

h designi il segmento della retta (A) compreso tra il punto $\alpha\beta$ e la retta (A') o (B); ed il punto $\alpha\beta$ si supponga intermedio tra l'origine e (A') o (B): essendo $rr' sen\theta = (lm' - l'm) sen \cdot xy$,

$gr sen\theta = lA + mB$, sarà in corrispondenza

$$h = r\frac{(\alpha'-\alpha)m' - l'(\beta'-\beta)}{lm' - l'm},$$

$$h = r\frac{D - (A\alpha + B\beta)}{lA + mB}.$$

Quindi, chiamato $x'y'$ il punto ove (A) incontra (A') o (B), per determinare x', y', avremo

$$\frac{h}{r} = \frac{x' - \alpha}{l} = \frac{y' - \beta}{m}.$$

Nota. Se h è *perpendicolare* alla retta (A) o (B), sarà $sen\theta = 1$, e si avrà la soluzione del seguente problema: *trovare la perpendicolare h condotta da un punto ad una retta.*

b) Trovare il punto $x'y'$ ove la retta h, condotta dal punto $\alpha'\beta'$ sotto l'angolo θ alla retta (A) o (B), *incontra* (A) o (B).

Soluz. La retta h ha nel senso degli assi le componenti $x'-\alpha'$, $y'-\beta'$. Ora l', m' siano nel senso de'medesimi assi, le componenti di una retta r' parallela ad h: essendo note l'angolo θ, il rapporto $\frac{m'}{l'}$ potrà determinarsi per mezzo del §. 28 *c*.

Si avrà quindi

$$\frac{h}{r'} = \frac{x' - \alpha'}{l'} = \frac{y' - \beta'}{m'},$$

e da qui il valore di $x'-\alpha'$, $y'-\beta'$, e però di x', y'.

Nota. Se h è *perpendicolare* alla retta (A), e però ad r, avremo (§. 28 g)

$$\frac{h}{r sen\cdot xy} = \frac{x' - \alpha'}{m + l cos\cdot xy} = \frac{y' - \beta'}{-(l + m cos\cdot xy)};$$

e se h è *perpendicolare* a (B), e però *parallela* a g, avremo (§. 28 *f*)

$$\frac{h}{g sen^2\cdot xy} = \frac{x' - y'}{A - B cos\cdot xy} = \frac{y' - \beta'}{B - A cos\cdot xy}.$$

Trasformazione delle coordinate.

34. *Trasformar le coordinate di un punto*, significa mutarne o *l' origine*, o *la direzione*, o *la direzione* e *l'origine*.

Un sistema di assi *muta origine*, quando si trasporta da un luogo ad un altro parallelamente a se stesso; e *muta direzione*, quando gli assi mantenendo fissa l'origine, cangiano le mutue inclinazioni.

Dopochè gli assi (x), (y), si saranno mutati, noi li denoteremo rispettivamente colle stesse lettere, ma opportunamente accentate.

a) *Trasformare le coordinate x, y di un punto, in altre coordinate x', y'.*

Soluz. Le coordinate della nuova origine O′ rispetto all'antica O, siano α, β; e sia M il punto simboleggiato da xy rispetto alla origine O, e da $x'y'$ rispetto all'origine O′. Da O′ tiriamo al punto M la retta $O'M = v$: le componenti di v parallele ai primi assi (x), (y), saranno $x-\alpha$, $y-\beta$; e le componenti di v dirette nel senso de' nuovi assi (x'), (y'), saranno x', y'. Ora queste componenti o sono *parallele* alle prime, od *oblique*.

Nel 1.° *caso* (poichè le proiezioni di una retta sovr'assi paralleli sono eguali) si avrà

$$\begin{matrix} x-\alpha=x' \\ y-\beta=y' \end{matrix}, \text{ e però } \begin{matrix} x=\alpha+x' \\ y=\beta+y'. \end{matrix}$$

Nel 2.° *caso* (in cui è compreso pure il primo) proiettiamo v, x', y' sull'asse (x), essendo dirigente l'asse (y): le corrispondenti proiezioni saranno $x-\alpha$, $x'\dfrac{sen\cdot yx'}{sen\cdot yx}$, $y'\dfrac{sen\cdot yy'}{sen\cdot yx}$ (§. 17). Ora, per la definizione della risultante (§. 20), la prima di queste proiezioni debbe esser uguale alla somma delle seconde: dunque

$$x-\alpha=\frac{x'\,sen\cdot x'y+y'\,sen\cdot y'y}{sen\cdot xy}.$$

Similmente, proiettiamo v, x', y' sull'asse (y), essendo dirigente l'asse (x): si avrà

$$y-\beta=\frac{x'\,sen\cdot xx'+y'\,sen\cdot xy'}{sen\cdot xy};$$

ove tra gli angoli esistono evidentemente i seguenti rapporti:

$$\cdot xy=\cdot xx'+\cdot x'y=\cdot xy'+\cdot y'y;$$
$$\cdot x'y'=\cdot x'x+\cdot xy'=\cdot x'y+\cdot yy',$$

purchè rispetto al modo di riconoscere lo stato positivo e negativo degli angoli, si ritenga la convenzione già fatta nelle proiezioni (§. 25 *d. nota*).

b) l, m, siano nel senso degli assi (x), (y), le componenti di una retta $=1$ e parallela al nuovo asse (x'): sarà (§. 17 *e.* 20 *f.*)

$$l=\frac{sen\cdot yx'}{sen\cdot yx},\ m=\frac{sen\cdot xx'}{sen\cdot xy},$$

$$1=l^2+m^2+2lm\cos\cdot xy.$$

Nel caso degli assi (x), (y) ortogonali, le l, m saranno sui medesimi proiezioni ortogonali, e però

$$l=\cos\cdot xx'=sen\cdot x'y,\ m=\cos\cdot x'y=sen\cdot xx'.$$

Similmente una retta $=1$, e parallela all'asse (y'), abbia nel senso degli assi (x), (y), le componenti l', m': queste saranno vincolate dalle stesse formule che le l, m, purchè ad x' si sostituisca y'.

Ciò posto, le formule generali per trasformare le coordinate diventano

$$x-\alpha=lx'+l'y'$$
$$y-\beta=mx'+m'y'.$$

Mediante le formule precedenti, le coordinate contenute nell'equazione di una linea si potranno trasformare in altre coordinate, senza che perciò si muti il grado dell'equazione. Il passaggio da coordinate a coordinate, è uno de'mezzi più efficaci per discoprire le proprietà delle curve e delle superficie. Nella soluzione delle questioni particolari, si procura di scegliere le coordinate in guisa, che per la via più breve si giunga ai risultamenti. D'ordinario si dà la preferenza agli assi ortogonali.

Nota 1.° Allorchè, dopo aver designata con una sola lettera ognuna delle inclinazioni cogli assi, nell'equazioni delle linee e delle superficie si trasformeranno le coordinate, noi converremo di sopprimer gli accenti nelle nuove coordinate. Questa convenzione vale a semplificare i calcoli, senza nuocere alla chiarezza: giacchè l'andamento medesimo del discorso basta a far conoscere a qual sistema di assi siano relative le coordinate di un'equazione.

35. *Le coordinate polari* consistono nella *lunghezza e direzione variabile* di una retta mobile intorno a un punto fisso: la retta si chiama *raggio vettore*; e *polo*, il punto fisso. È manifesto che ogni punto particolare determina una particolare lunghezza e direzione del raggio vettore, cioè un sistema di coordinate polari; e che, viceversa, ogni sistema di coordinate polari determina un punto, ed uno solo.

a) *Trasformare le coordinate ordinarie in coordinate polari, e viceversa.*

Soluz. Sia $x'y'$ il polo, xy un punto qualunque, v il raggio vettore del punto xy, ed l, m siano nel senso degli assi (x), (y), le componenti di una retta $=1$ e parallela a v. Il raggio vettore v e la sua direzione (l, m) saranno le coordinate polari del punto xy. Ciò posto si ha

$$v=\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}\text{, donde } x=lv+x',\ y=mv+y';$$

ove $$l=\frac{sen\cdot yv}{sen\cdot yx},\ m=\frac{sen\cdot xv}{sen\cdot xy},$$

$$1=l^2+m^2+2lm\cos\cdot xy\,;$$

e nel caso degli assi ortogonali, $l=sen\cdot vy=\cos\cdot xv$, $m=sen\cdot xv$, $1=l^2+m^2$.

Viceversa,

$$v=\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+2\,(x-x')\,(y-y')\cos\cdot xy]},$$

$$l=\frac{x-x'}{v},\ m=\frac{y-y'}{v}.$$

Nota. L'equazione ad una curva tra coordinate polari, si dice *equazion polare* della curva.

Linee algebriche in generale.

Loro ordine, diametro, centro, tangente, normale, asintoti.

36. Una linea riferita ad assi coordinati, si chiama *algebrica*, se l'equazione che la rappresenta, è algebrica, o almeno riducibile a divenire algebrica: altrimenti la linea si dice *trascendente* o *meccanica*.

Una linea algebrica si dice del *primo*, *secondo*, *terzo*, ... *n^simo^ ordine*, secondochè la sua equazione, ridotta a funzione intera e razionale rispetto alle coordinate, è della *prima*, *seconda*, *terza*, ... *n^sima^ dimensione*. Così la retta è una linea del prim'ordine; e dell'ordine n^{simo} la linea

$$\text{(A)}\quad Ay^n+(Bx+C)y^{n-1}+(Dx^2+Ex+F)y^{n-2}+(Gx^3+Hx^2+Ix+K)y^{n-3}+\text{ec.}=0.$$

Se un'equazione fra due coordinate è il prodotto di più fattori razionali, essa rappresenterà una *linea complessa*, ossia un complesso di tante linee distinte, quanti sono i fattori razionali che abbraccia.

a) *Una linea del n^{simo} ordine non può aver comuni con una retta più di n punti.*

Dim. Imperocchè supponendo che l'equazione (A) coesista tra x, y, coll' equazione della retta

$$v = \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m},$$ e però che si abbia

$x = lv + \alpha, y = mv + \beta$; fatte le sostituzioni, si avrà un'equazione del n^{simo} grado rispetto a v, e quindi v non potrà ricevere più di n valori, e conseguentemente incontrare la curva in più di n punti.

Così una linea di second'ordine non può aver comuni con una retta più di due punti.

Dalle proprietà de'coefficienti dell'equazioni algebriche si possono dedurre facilmente molti teoremi generali relativi alle rette che attraversano le curve.

Le distanze tra il piede di un'ordinata e i punti ove l'asse delle ascisse taglia una curva, sono chiamate da Carnot *ascisse naturali*.

b) *In una curva algebrica*

$$Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} \ldots + Py + Q = 0,$$

il prodotto delle ascisse naturali è proporzionale al prodotto delle ordinate corrispondenti. (comprendendovi le ascisse e le ordinate immaginarie).

Dim. Infatti per ogni ascissa x, il prodotto delle ordinate corrispondenti sarà, com' è noto dall'algebra, $\frac{Q}{A}$. Ora Q è un polinomio in x che può mettersi sotto la forma

$H(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\omega)$, essendo H il coefficiente della massima potenza di x; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$, le ascisse relative ad $y=0$; e per conseguente $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma, \ldots x-\omega$ le distanze tra il punto (x, o), piede dell'ordinata y, ed i punti della curva (α, o), (β, o), (γ, o), ... (ω, o), distanze che costituiscono le ascisse naturali. È adunque provato che *il prodotto delle ascisse naturali sta al prodotto delle ordinate corrispondenti in ragion inversa de' coefficienti* H, A, *della massima potenza, dell'ascissa e dell'ordinata.*

Per es. è noto dalla geometria che nel circolo (linea di 2° ordine) il prodotto delle ascisse naturali è uguale al prodotto delle ordinate corrispondenti.

c) In una curva si dice *diametro* o *linea diametrale* il luogo geometrico del punto medio di una corda moventesi parallelamente a se medesima. Tutte le corde parallele dimezzate da un diametro, si diranno *corde coniugate al diametro*; e viceversa il diametro si dirà *coniugato* alle corde parallele che dimezza. In generale una retta si dirà *coniugata* ad un diametro, se sia parallela alle corde coniugate al diametro; e questo *coniugato* a quella.

Un diametro rettilineo perpendicolare alle sue corde coniugate, si dice *asse principale della curva*; e i punti ove attraversa la curva, si dicono *vertici della curva.*

Nella curva rappresentata dall'equazione

$$A x^{2m} + B y^{2n} = D ,$$

ciascuno degli assi (x), (y), è un diametro. Imperocchè per ogni valore di una delle due coordinate x, y, cotesta equazione somministra sempre due valori eguali e di segno contrario per l'altra. Così ciascuno degli assi dimezza tutte le corde parallele all'altro.

Due diametri rettilinei si dicono *coniugati*, se le corde coniugate all'uno sono parallele all'altro.

Se nel punto ove un diametro attraversa la curva, si conduce una retta parallela alle corde coniugate ad esso diametro, tale retta sarà tangente.

Dim. Infatti è palese che laddove il diametro attraversa la curva, ivi ne svanisce la corda coniugata, e però ivi la secante che nasce dal prolungamento della corda, riunendo in un solo i due punti comuni colla curva, si trasmuta in tangente. Dunque ec.

Viceversa: *una retta, che tocchi un arco di curva in un punto dato, è parallela alle corde coniugate al diametro che passa per siffatto punto*, (*), es-

(*) Questa proposizione può dedursi dalla definizione stessa della curva come segue. La *direzione fissata da due punti*, è la retta che passa per questi due punti. Una linea si dice *poligona o curva*, secondochè cangia *ad intervalli* o *continuamente* direzione. E' chiaro che non si può cangiar direzione, se prima non si ha una direzione, o una tendenza per una direzione: dunque la curva, cangiando direzione in ogni punto del suo corso, ha in ogni punto una tendenza per una direzione determinata. La retta esprimente la direzione cui tende in un punto dato la curva, si chiama *tangente* della curva; ed *è unica come la direzione che rappresenta*. La tangente può anche considerarsi come una secante nata dal prolungamento di una corda che svanisce; perchè la corda a misura che si avvicina a svanire, tende a prender la direzione della curva.

Giova notare, 1. che se in un *punto singolare* concorrono più rami di curva, le tangenti saranno tante quanti i rami: e che tuttavia resterà vero che per un punto di un arco non si può condurre che una sola tangente, non esistendo più tangenti in un punto se non perchè ivi s'incrociano più archi; 2. che il teorema „ *la curva è limite de' poligoni inscritti e cir-*

sendochè per un punto dato non si può condurre ad un arco che una sola tangente.

d) *Centro di una curva*, è il centro di simmetria della medesima, vale a dire il punto, ove restano dimezzate tutte le corde che vi passano.

Se una curva sia simmetrica intorno ad un centro, preso questo per origine delle coordinate, l'equazione di tal curva dovrà riuscire di grado pari rispetto ai termini che contengono le coordinate.

Dim. Supponiamo la curva riferita al centro, e $v = \frac{x}{l} = \frac{y}{m}$, un raggio di simmetria. Sostituendo nell'equazione di essa $x = lv$, $y = mv$, l'equazione risultante dovrà fornire per v de' valori uguali due a due, e di segno contrario, e però esser della forma

$$(v) \ldots \; Av^{2m} + Bv^{2m-2} + Cv^{2m-4} + \ldots + Pv^{2} + Q = 0,$$

cioè tale che non si alteri, ove a v si surroghi $-v$. Ma tale non può riuscire evidentemente, a meno che l'equazione della curva riferita al centro, non sia di grado pari rispetto ai termini che contengono le coordinate.

Viceversa: *una curva sarà simmetrica intorno alla origine, se la sua equazione sia di grado pari rispetto ai termini che contengono le coordinate.* Imperocchè se dalla origine si guidi alla curva il

---

coscritti „ è una conseguenza immediata dell'assioma „ *la frequenza della linea poligona in cangiar direzione ha per limite la continuità*; 3. che analoghe proposizioni possono stabilirsi riguardo alle superficie curve, partendo dalla definizione – *la direzione fissata da tre punti non posti in linea retta, è il piano che passa per questi tre punti.*

raggio $v = \frac{x}{l} = \frac{y}{m}$, e quindi si sostituisca nell' equazion della curva $x = lv$, $y = mv$; l'equazion risultante nella fatta ipotesi diverrà della forma (v), e però non darà per v che de' valori eguali e di segno contrario.

Pertanto l'equazion delle linee di second'ordine, simmetriche intorno all'origine, sarà della forma

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = D,$$

cioè omogenea rispetto ai termini che contengono le coordinate.

Una curva algebrica non può avere più di un centro di simmetria.

Dim. Siano (fig. 8) O, O', due centri di una medesima curva, ed M uno qualunque de'suoi punti. Si prolunghi il raggio MO in ON = OM: il punto N apparterrà alla curva per la ipotesi che O è un centro. Similmente si prolunghi il raggio MO' in O'N' = O'M, e il raggio NO' in O'M' = O'N: i punti N', M' apparterranno pure alla curva. Ora la considerazione de'triangoli coincidibili che si vedono nella figura, ci dimostra che il quadrilatero MM'N'N è un parallelogrammo, ove le rette MM', NN' sono parallele ad OO', e ad egual distanza da OO'. Dunque i punti M', N' sono alla stessa distanza da OO', che i punti M, N. Similmente i punti M', N', considerati rispetto al centro O, determineranno sulle rette MM', NN' due altri punti M'', N'' della curva: poi questi, considerati rispetto ad O', ne determineranno due altri M''', N''', e così continuamente. Quindi ciascuna delle rette MM', NN' avrà un' infinità di punti comuni colla curva. Or ciò è impossibile in una curva algebrica (§.35 *a*) a meno che non consista in un sistema di rette parallele, situate due a due ad egual distanza dalla linea de'centri: dunque è pure impossibile più di un centro.

e) In un dato punto M (fig. 9) di una curva piana AMS riferita a due assi Ox, Oy, si dice, 1.° *tangente* o *toccante*, il segmento della retta MT che ivi tocca la curva, compreso tra il contatto e l'asse delle ascisse Ox; e *suttangente*, la distanza TP tra il piede della tangente e il piede dell'ordinata PM: 2.° *normale*, il segmento MN della normale alla curva, compreso tra il contatto e l'asse delle ascisse; e *sunnormale*, la distanza NP tra il piede della normale, e il piede dell'ordinata.

Ciascuna di queste sei quantità: *ascissa e ordinata, tangente e suttangente, normale e sunnormale*, è funzione di una qualunque delle altre. Infatti osservando la figura riesce evidente che la determinazione di una di coteste sei quantità, per es. dell'ascissa, trae seco la determinazione di ciascuna delle altre.

Supposta determinata in funzione dell'ascissa l'ordinata e la suttangente, esprimere per mezzo di queste la tangente, normale e sunnormale.

Soluz. Rappresentiamo per y l'ordinata; per t la tangente e per t_1 la suttangente; per n la normale e per n_1 la sunnormale: ove t, n, si contino a partire dal punto di contatto, t avrà nel senso degli assi (x), (y) le componenti $-t_1$, $-y$; ed n, avrà le componenti n_1, $-y$. Ciò posto, poichè t ed n sono perpendicolari tra loro, avremo (§. 28. *g*)

$$\frac{n}{t\,sen{\cdot}xy}=\frac{n_1}{y+t_1cos{\cdot}xy}=\frac{y}{t_1+y\,cos{\cdot}xy},$$

oltre di essere $t=\sqrt{(t^2_1+y^2+2t_1y\,cos{\cdot}xy)}$;

dunque $n_1 = \frac{y^2 + yt_1 \cos xy}{t_1 + y\cos xy}$, $n = \frac{yt \operatorname{sen} xy}{t_1 + y\cos xy}$,

f) *Asintoto di una curva*, è una linea che correndo in un certo senso a fianco della curva, le si va di continuo avvicinando siccome a limite, senza mai poterla toccare.

Quindi gli *asintoti rettilinei* possono considerarsi come tangenti, il cui punto di contatto va a perdersi in una lontananza infinita. Da quì il metodo di rinvenirli quando esistono. Allorchè si dice *asintoto* senz'altro aggiunto, s'intenda asintoto rettilineo.

Nota. Allorchè in un calcolo si hanno più coordinate, delle quali alcune si suppongano in uno *stato fisso*, ed altre *in uno stato attualmente variabile*; queste seconde si dicono *coordinate correnti.*

Tutti i mezzi analitici per iscoprire le proprietà di una curva, si riducono a quattro: 1.° conoscenza delle proprietà dell'equazione che ha per luogo geometrico la curva data; 2.° combinazione dell' equazion della retta con quella della curva; 3.° trasformazione delle coordinate; 4.° teorica degli infinitesimi.

CAPO SECONDO.

LINEE DI SECOND'ORDINE.

Equazion generale e sua trasformazione, centro, diametri e classificazione delle linee di second'ordine.

37. L'equazion generale delle linee di second' ordine riferite a un sistema qualunque di assi coor-

dinati (x), (y), può scriversi sotto la forma (*)

$$(\mathrm{A}) \ldots \begin{array}{l} \mathrm{A}x^2 \\ \mathrm{B}y^2 \end{array} + 2\mathrm{C}xy - 2\left|\begin{array}{l} \mathrm{A}'x \\ \mathrm{B}'y \end{array}\right. - \mathrm{D} = 0,$$

simmetrica rispetto ai due sistemi di quantità $(x, \mathrm{A}, \mathrm{A}')$, $(y, \mathrm{B}, \mathrm{B}')$, restando essa invariabile, allorchè si alternano le lettere di un sistema colle corrispondenti lettere dell'altro.

Si noti 1.° che i coefficienti A, B, C non possono supporsi nulli simultaneamente, senzachè l'equazione (A) cessi di essere di secondo grado; 2.° che divisa l'equazione (A) per uno de' suoi coefficienti, questi si riducono a cinque, e che per conseguenza da questi cinque dipende essenzialmente la natura della linea correlativa.

a) *Nell'equazione* (A) *trasformare le coordinate in altre di origine e direzione diversa, e poscia in coordinate polari.*

Soluz. 1.° Alle coordinate x, y converrà sostituire (§. 34)

$$lx + l'y + \alpha, \quad mx + m'y + \beta,$$

ove lm, $l'm'$ rappresentano le direzioni delle nuove ascisse ed ordinate. Avvertendo essere simmetrici i due sistemi di quantità $(x, l, l', \mathrm{A}, \mathrm{A}')$ $(y, m, m', \mathrm{B}, \mathrm{B}')$,

(*) Le quantità simmetriche e dello stesso segno, invece di scriverle di seguito l'una dopo l'altra, le scriverò sovente l' una sotto l'altra, anteponendo loro una linea verticale affetta dal segno e coefficiente comune: il segno + lo tralascerò sempre nel principio. Così l'espressione

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}x^2 \\ \mathrm{B}y^2 \\ \mathrm{C}z^2 \end{array} + 2\left|\begin{array}{l} \mathrm{A}'yz \\ \mathrm{B}'zx \\ \mathrm{C}'xy \end{array}\right.,$$

equivale a $\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + 2(\mathrm{A}'yz + \mathrm{B}'zx + \mathrm{C}'xy)$.

tale sostituzione può eseguirsi a colpo d'occhio determinando successivamente i coefficienti di x^2, xy, x, e deducendo per simmetria quelli di y^2, y. Designiamo per P, 2Q, -2R i tre primi; per P′, -2R′ i due ultimi; e per S il complesso de'termini senza coordinate. Ove si noti che questi coefficienti debbono comporsi di due parti simmetriche rispetto ai due accennati sistemi di quantità, e che perciò basta conoscer l'una di tali parti per dedurne subito l'altra in simmetria, troveremo assai rapidamente

$$P = Al^2 + Bm^2 + 2Clm = (Al + Cm)l + (Bm + Cl)m,$$

vale a dire: P, coefficiente di x^2, *è ciò che diventano nell'equazione* (A) *i termini della* 2^a *dimensione in* x, y, *allorchè* ad x, y *surroghiamo* l, m. In virtù della simmetria, P′ è ciò che diviene P se ad l, m si sostituisce l', m'.

$$Q = All' + Bmm' + C(lm' + l'm) =$$
$$(Al + Cm)l' + (Bm + Cl)m' = (Al' + Cm')l + (Bm' + Cl')m;$$
$$-R = (Al + Cm)\alpha + (Bm + Cl)\beta - (A'l + B'm) =$$
$$(A\alpha + C\beta - A')\,l + (B\beta + C\alpha - B')\,m.$$

Si ottiene poi R′, se in R surroghiamo l', m', ad l, m.

Infine è facile a vedere, che $-$ S *è ciò che diventa il primo membro di* (A), *allorchè ad* x, y *si sostituisce* α, β.

Poste queste determinazioni, (A) si muta in

$$(A)_1 \ldots \begin{matrix} Px^2 \\ P'y^2 \end{matrix} + 2Qxy - 2\left|\begin{matrix} Rx \\ R'y \end{matrix}\right. - S = o.$$

2. Sia $\alpha\beta$ il polo, e $v = \dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m}$, il raggio vettore del punto xy della curva: converrà sostituire in (A) (§. 35) $x = lv + \alpha, y = mv + \beta$. Il risultato di tale sostituzione è chiaro esser ciò che diventa $(A)_1$, se in essa facciamo

$o = l' = m' = y$, ed $x = v$: sarà dunque

$$(A)_2 \ldots\ldots P v^2 - 2Rv - S = o.$$

Queste trasformazioni di (A) in $(A)_1$, $(A)_2$, sono due mezzi efficacissimi ed elementari per discoprire le proprietà delle linee di second'ordine.

b) CENTRO. *Dato che esista il centro, per determinarne le coordinate* α, β, basta trasportare nel medesimo l'origine degli assi : dopo simile trasporto, la trasformata $(A)_1$ dovrà risultare di grado pari rispetto ai termini affetti dalle coordinate, qualunque sia la loro direzione (§. 36 *d*) : dovrà dunque aversi $o = R = R'$. Ora queste equazioni dovendo verificarsi indipendentemente dalle direzioni lm, $l'm'$, si risolvono in

$$(1) \quad \begin{matrix} A' = A\alpha + C\beta \\ B' = B\beta + C\alpha \end{matrix}, \text{ donde } \begin{matrix} \alpha = \dfrac{A'B - B'C}{AB - C^2}, \\ \beta = \dfrac{B'A - A'C}{AB - C^2}. \end{matrix}$$

Pertanto ogni volta che il denominatore $AB - C^2$ non è zero, le coordinate α, β sono certamente ambedue finite, ed è certa l'esistenza del centro. Più sotto vedremo la verità dell'inverso, vale a dire se il surriferito denominatore riesce $= o$, la linea è priva di centro.

Nota 1.° Dalle (1) si trae

$$A'\alpha + B'\beta = A\alpha^2 + B\beta^2 + 2C\alpha\beta, \text{ e quindi}$$

$$S = D + A'\alpha + B'\beta = D + \frac{BA'^2 + AB'^2 - 2A'B'C}{AB - C^2}.$$

In questo caso, (A) divenuta $Pv^2 - S = o$, somministra

$$v^2 = \frac{S}{P} = \frac{D + A'\alpha + B'\beta}{Al^2 + Bm^2 + 2Clm},$$

e quindi il valore di un raggio v condotto dal centro alla curva, datane la direzione lm.

2.° Se debbasi trasportare l'origine delle coordinate nel centro, senza mutarne la direzione; allora $(A)_1$ (fatto $l = 1$, $m = o$, $l' = o$, $m' = 1$) diverrà
$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy - (D + A'\alpha + B'\beta) = o.$$

38. DIAMETRI. *Determinare una linea diametrale è* (per la definizione §. 36 *c*) lo stesso, che determinare il luogo geometrico del punto medio $\alpha\beta$ di una corda $2v$ moventesi parallelamente a se medesima. La semicorda v, partendo dal punto $\alpha\beta$ e terminando al punto xy della curva (A), è rappresentata dall' equazione $v = \frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m}$. Sostituendo in (A) $x = lv + \alpha$, $y = mv + \beta$, otterremo come sopra il risultato $(A)_2$, ove la direzione lm di v si deve supporre costante, e variabile il punto medio $\alpha\beta$. Ora l'equazione $(A)_2$ non può dare per la semicorda v due valori eguali e di segno contrario, come si richiede, se non sia
$$o = R = (Al + Cm)\alpha + (Bm + Cl)\beta - (A'l + B'm).$$
Ma questa condizione dimostra che $\alpha\beta$, punto medio di $2v$, scorre sulla retta
$$(R) \ldots\ldots (Al + Cm)x + (Bm + Cl)y = A'l + B'm,$$
la quale è verificata dalle coordinate del centro. Dunque 1.° *nelle linee di second'ordine ogni diametro è una retta, e passa pel centro quando esiste*; 2.° *condotti due diametri, se s'incontrano, l'incontro sarà il centro*; 3.° *il diametro coniugato ad una data corda, è la retta che passa pel suo mezzo, e pel mezzo di un'altra corda parallela alla data.*

La direzione lm delle corde coniugate al diametro $R = o$, si dirà *direzione coniugata a tale diametro*; e viceversa, *il diametro* $R = o$, si dirà *coniugato alla direzione* lm.

Si noti che le due equazioni $P\varphi^2 - S = o$, $R = o$, potrebbero tener le veci dell'equazione (A) nel rappresentare le linee di second'ordine. Infatti la 1.ª di quest'equazioni fa conoscer le corde 2φ corrispondenti ad ogni punto del diametro rappresentato dalla 2.ª; e con ciò ambedue fanno conoscere pienamente la curva.

a) Se la direzione $l'm'$ sia la direzione del diametro (R), avremo pel noto teorema (§. 31)

$$o = l'(Al + Cm) + m'(Bm + Cl) = Q:$$

così $Q = o$, *determina la direzione* $l'm'$ *di un diametro, conoscendo la direzione* lm *delle sue corde coniugate, e viceversa.*

Inoltre dall'identità

$$l'(Al+Cm)+m'(Bm+Cl)=l(Al'+Cm')+m(Bm'+Cl')$$

si rileva, che *se la direzione* $l'm'$ *delle corde coniugate ad un diametro* $R' = o$, *è parallela ad un altro diametro* $R = o$; *anche la direzione* lm *delle corde coniugate a questo, è parallela al primo*; *e i due diametri sono coniugati tra loro* (§. 36 *c*). Dunque 1.° data la direzione di un diametro, l'equazione $Q = o$ farà conoscere la direzione del coniugato; 2.° *Condotte due corde parallelamente ad un diametro, i loro punti di mezzo determineranno il diametro coniugato al primo.*

b) *Trovar l'angolo che una corda fa col suo diametro coniugato.*

Soluz. Designiamo per p la retta che sugli assi (x), (y), ha per proiezioni ortogonali $Al + Cm$, $Bm + Cl$. L'angolo θ che la corda 2φ fa col diametro coniugato (R), sarà in virtù della formula nota (§. 32)

$$p\,sen\theta = l(Al + Cm) + m(Bm + Cl) =$$
$$Al^2 + Bm^2 + 2Cml = P.$$

Nota. 1.° Se risulti $P = o$, sarà $sen\theta = o$, e per conseguente la corda $2v$ parallela al diametro cui è coniugata: assurdo manifesto. Dunque allorchè risulta $P = o$, la retta $2v$ non può esser corda, nè deve porsi $R = o$. Dunque *la condizione essenziale all'esistenza di una corda parallela ad una data direzione lm, e del diametro corrispondente* (R), *si riduce a ciò che non riesca* $P = o$.
2.° Il rapporto tra l, m, che serve a determinare la direzione di una corda, essendo da principio arbitrario, si può in infinite guise prender così che non renda $P=o$, a meno che non sia $o=A=B=C$, cioè a meno che l'equazione (A) non cessi di esser di secondo grado. D'altronde è cosa evidente per se medesima, che *in ogni curva reale possono esistere infiniti sistemi di corde parallele, e però infiniti diametri.*

Intanto noi conosciamo il significato geometrico de'coefficienti R, Q, P dell'equazione $(A)_1$. $R=o$ è l'equazione di un diametro coniugato alla direzione lm; $Q = o$ esprime la condizione perchè la direzione $l'm'$ appartenga a tale diametro; e $P = psen\theta$, somministra l'angolo θ che cotesto diametro fa colle corde coniugate.

39. *Ridurre* $(A)_1$ *alla forma più semplice.* Supposto P' diverso da zero, prendiamo per asse delle ascisse il diametro coniugato alla direzione $l'm'$ del nuovo asse (y'), cioè prendiamo il diametro che nel sistema de'primi assi ha per equazione $R' = o$: affinchè lm sia la sua direzione, conforme alla ipotesi, dovrà essere $Q = o$. Ciò posto l'equazione $(A)_1$ diventa

$$(A)' \ldots\ldots \quad Px^2 + P'y^2 - 2Rx - S = o\,.$$

Or qui possono avvenire due casi: o il coefficiente P risulta eguale a zero, oppure diverso da zero.

Nel 1.° caso la (A)′ diviene

$$(B) \ldots\ldots\ldots P'y^2 - 2Rx - S = o ;$$

ed è a notarsi che l'evanescenza di

$$Q = (Al + Cm)l' + (Bm + Cl)\, m',$$

non può trar seco l'evanescenza di

$$P = (Al + Cm)\, l + (\, Bm + Cl\,)\, m\,,$$

senza che sia

$$o = Al + Cm = Bm + Cl, \text{ e però } R = A'l + B'm.$$

Infatti, se ciò non fosse, le due equazioni $Q = o$, $P = o$, esprimerebbero che le direzioni lm, $l'm'$ del diametro e delle corde coniugate, coincidono colla direzione della retta (§. 31)

$$(Al + Cm)x + (\, Bm + Cl\,)y = o;$$

cioè esprimerebbero l'assurdo che il diametro è parallelo alle corde che dimezza. Viceversa, non può essere $o = Al + Cm = Bm + Cl$, senza che l'evanescenza di Q tragga seco quella di P.

Nel 2.° caso, ponendo l'origine $\alpha\beta$ nell'incontro de'due diametri $R' = o$, $R = o$, i quali sono coniugati a causa di $Q = o$, la (A)′ si riduce a

$$(C) \ldots Px^2 + P'y^2 = S = D + A'\alpha + B'\beta.$$

Così l'equazione (A) è sempre riducibile ad una delle due (B), (C), delle quali la prima (non potendo divenire omogenea rispetto ai termini che contengono le coordinate) rappresenta le linee *prive di centro* (§. 36 *d*), e la seconda rappresenta le linee *simmetriche intorno all'origine*.

Le linee di second'ordine possono adunque dividersi in due classi: *in linee senza centro*, ed *in linee con centro*. Sì le une come le altre sono comprese nell'equazione unica (A)'; e si dicono *sezioni coniche*, perchè si offrono con tutte le loro varietà nelle sezioni piane di un cono a base circolare.

a) Affinchè l'equazione (B) rappresenti una curva, è necessario che il coefficiente R risulti diverso da zero. In questa ipotesi surrogando

$x - \frac{S}{2R}$ ad x, (B) diventa

$$(B)_1 \ldots\ldots P'y^2 = 2Rx;$$

la quale, essendo verificata da $o = x = y$, dimostra che l'origine è sopra la curva. Dunque ogni volta che R è diverso da zero, l'asse (x) attraversa certamente la curva, e ponendo quivi l'origine $\alpha\beta$, sarà $S = o$. È evidente che, cangiando all'uopo il segno di x, si può fare in modo che il coefficiente di x abbia il segno che più aggrada. Quindi l'equazione $(B)_1$, non potendo assumere nella sua semplicità un'altra forma essenzialmente diversa, rappresenta una sola specie di curva, chiamata *parabola* (Vedi il §. 43).

b) Nell'equazione (C), supposta S positiva, (se non lo fosse, si renderebbe tale cambiando il segno a tutta l'equazione) possono avvenire due casi rispetto ai coefficienti P, P'. Poichè 1.° o sono ambedue dello stesso segno, e dovranno risultare positivi (altrimenti l'equazione avendo il primo membro essenzialmente negativo ed il secondo positivo, sarebbe assurda); 2.° o l'uno positivo e l'altro negativo, e sarà indifferente alla natura della linea il supporre negativo piuttosto l'uno che l'altro, essendo arbitraria la denominazione degli assi coordinati: noi supporremo negativo P'.

Quindi l'equazione (C), potendo assumere due forme essenzialmente diverse e due sole, comprende due specie di curve.

1.ª *Ellisse* ..... $Px^2 + P'y^2 = S$;
2.ª *Iperbola* .... $Px^2 - P'y^2 = S$.

Fatto $\frac{S}{P} = a^2$, $\frac{S}{P'} = b^2$, donde $P = \frac{S}{a^2}$, $P' = \frac{S}{b^2}$,
coteste due equazioni divise per S, diventano

$$\text{(C)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\pm b^2} = 1, \qquad \text{e quindi}$$

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2, y^2 = \frac{\pm b^2}{a^2}(a^2 - x^2):$$

ove le quantità a^2, $\pm b^2$ sono i quadrati di *due semidiametri coniugati*, cioè rappresentano i quadrati delle distanze reali o immaginarie che intercedono tra il centro ed i punti ove gli assi (x), (y) attraversano la curva (vedi i §§. 46, 47). Ed è a notarsi, 1.° che si passa dalla ellisse alla iperbola solchè si cangi b in $b\sqrt{-1}$; 2.° che de'due diametri dell' iperbola $2a$, $2b\sqrt{-1}$, l'uno reale e l'altro immaginario, il reale attraversando la curva si dice *diametro trasverso*; 3.° che due diametri coniugati se sono principali, cioè ad angolo retto, si chiamano *assi della curva*, de'quali il maggiore nella ellisse e il trasverso nella iperbola, si dice *primo asse*; e l'altro *secondo asse*: il primo asse si designerà costantemente per a; 4.° Che supponendo P, P' costanti, a^2, b^2 crescono e diminuiscono in proporzione con S.

Direzioni principali.

40. Diremo *coniugate* le direzioni lm, $l'm'$ vincolate da

$$Q = (Al + Cm)l' + (Bm + Cl)m' = o,$$

cioè *le direzioni di ogni sistema di assi coordinati, rispetto ai quali l'equazione delle linee di second ordine assume la forma* (A)'. *E due direzioni coniugate* si chiameranno principali, *allorchè sono perpendicolari l'una all'altra.* È evidente che l'esistenza di un asse principale (§. 36 *d*) trae seco necessariamente l'esistenza di due direzioni principali.

Poniamo

$$(Al + Cm)x + (Bm + Cl)y = f(lm):$$

supposte coniugate le due direzioni lm, $l'm'$, si potrà stabilire, a causa di $Q = o$, 1.° che delle due rette $f(lm)$, $f(l'm')$, ciascuna è parallela alla direzione di cui è funzione l'altra (§. 32), e che per conseguenza, quando le direzioni son principali, ciascuna di coteste due rette è perpendicolare alla direzione di cui essa è funzione; 2.° che quindi *perchè una direzione lm sia principale, è necessario e basta che sia perpendicolare alla retta f(lm).*

Pertanto, rappresentando per p la retta che sugli assi (x), (y), ha per proiezioni $Al + Cm$, $Bm + Cl$, e per z l'angolo degli assi (x), (y); a *determinare le direzioni principali lm*, si avrà la proporzionalità (§. 32 *b*)

$$\frac{p}{1} = \frac{Al + Cm}{l + m\cos z} = \frac{Bm + Cl}{m + l\cos z} =$$

$$\frac{Al^2 + Bm^2 + 2Clm}{l^2 + m^2 + 2lm\cos z} = \frac{P}{1}.$$

È palese, che se fosse cognita p, la cognizione della direzione lm dipenderebbe da un'equazione di primo grado. Cerchiamo adunque un'equazione tra p e i coefficienti A, B, C, eliminando lm

dalla riportata proporzionalità. Combinando ivi il primo membro col secondo si ottiene

$$p(l + m\cos z) = Al + Cm;$$

e ponendo in evidenza i coefficienti totali di l, m, e poscia alternando l, A con m, B,

$$(lm)\ \ldots\ \begin{array}{l}(p - A)\,l + (p\cos z - C)m = o,\\ (p\cos z - C)\,l + (p - B)m = o:\end{array}$$

equazioni, ciascuna delle quali, cognita che sarà p, darà il valore del rapporto $\frac{l}{m}$, e conseguentemente combinata con $1 = l^2 + m^2 + 2lm\cos z$, determinerà la direzione lm.

Da esse, eliminando m e dividendo per l, si trae

$$(p - A)(p - B) - (p\cos z - C)^2 = o,$$

e ordinando per p,

$$(p)\ \ldots\ p^2 \operatorname{sen}^2 z - (A + B - 2C\cos z)p + AB - C^2 = o;$$

equazione che nel caso degli assi (x), (y) ortogonali, diventa

$$(p)_1 \qquad p^2 - (A+B)p + AB - C^2 = o.$$

Così la determinazione delle direzioni principali dipende dalla cognizione delle radici dell'equazione (p). Si avverta che ad ogni radice reale di (p) e diversa da zero, corrisponde una direzione lm perpendicolare a un asse principale (§. 38 b).

a) L' equazione (p) *ha sempre le sue radici reali, ed una almeno diversa da zero.*

Dim. Supponiamo (poichè è lecito §. 39) che l'equazione (A) sia ridotta alla forma

$$(A)'\ \ldots\ Ax^2 + By^2 - 2A'x - D = o:$$

l'equazione (p) (fatto $C = o$) diviene

$$(p)_2\ \ldots\ p^2 \operatorname{sen}^2 z - (A + B)p + AB = o.$$

Ricerchiamo adesso le condizioni, perchè o tutte due le radici di $(p)_2$, o una, o nissuna sia eguale a zero.

1.° Perchè le radici di $(p)_2$ riescano tutte due eguali a zero, si richiede che ne svaniscano i due ultimi termini (*Algebra*), o che si abbia

$$1.^a\ AB = o,\quad 2.^a\ A + B = o\,.$$

Se per verificar la 1.ª di queste, si pone $= o$ una delle due quantità A, B, per es. A; la 2.ª diventa $B = o$. Così non si può verificare simultaneamente la 1ª e 2ª, senza che sia $o = A = B$, cioè senza che l'equazione $(A)'$ cessi di essere di secondo grado. Dunque l' equazione $(p)_2$ non può avere uguali a zero tutte le sue radici.

2.° Perchè una radice di $(p)_2$ riesca $= o$, si richiede che sia (*Alg.*)

$$AB = o\,,$$

cioè $= o$, uno dei due coefficienti A, B.

3.° Perchè nessuna delle radici di $(p)_2$ riesca $= o$, si richiede che non sia $= o$ il prodotto AB.

In ogni caso l'equazione $(p)_2$ risoluta somministra

$$p = \frac{1}{2sen^2z}\left(A + B \pm \sqrt{[(A + B)^2 - 4ABsen^2z]}\right),$$

ove le radici sono sempre reali, essendo

$$(A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2,\ \text{e però}$$

$$(A + B)^2 > 4AB,\ \text{e}\ \textit{a fortiori} > 4ABsen^2z.$$

Risulta da questo esame che l'equazione $(p)_2$, e per conseguenza (p), ha sempre le sue radici reali, ed una almeno diversa da zero; e che però esiste sempre un asse principale per lo meno (§. 38 *b*).

Dunque l'equazione (A) può sempre ridursi col metodo già insegnato (§. 39 *b*) alla forma

$$Px^2 + P'y^2 - 2Rx - S = o\,,$$

in modo che le direzioni lm, $l'm'$ de'nuovi assi (x), (y), siano *principali. In questo caso i coefficenti* P, P′ sono, com'è noto (§. 37. *a*), ciò che diventa $Al^2 + Bm^2 + 2Clm$, allorchè la direzione lm si suppone principale; *sono adunque le radici dell'equazione* (p), e però sarà

$$AB - C^2 = PP'$$

E poichè tali coefficienti debbono essere ambedue reali dal momento che n'esiste uno (§. 39), si ha un nuovo motivo per conchiudere che le radici di (p) sono reali. Quindi il numero delle positive (per la regola di Descartes) sarà eguale alle variazioni di segno.

b) Ciò posto, le radici reali di (p) possono risultare o una eguale a zero, o ambedue dello stesso segno, oppure di segno diverso. Nel primo caso il binomio $AB - C^2$, prodotto di tali radici, sarà *nullo*; sarà *positivo* nel secondo; e *negativo* nel terzo. Quindi affinchè l'equazione (A) possa rappresentare o una parabola, o un'ellisse, o un'iperbola; dovrà essere

$$AB - C^2 \left.\begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix}\right\} o.$$

Si noti che, supposte A, B positive, se fosse $AB - C^2 = o$, ossia

$$C^2 = AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2;$$

risulterebbe $\qquad A + B > 2C$:

e che perciò se fosse $AB - C^2 > o$, ossia $C^2 < AB$, risulterebbe *a fortiori* $A + B > 2C > 2C\cos z$; e conseguentemente l'equazione (p) offrirebbe due variazioni di segno, e positive le sue radici.

d) Data una linea di second'ordine, è necessariamente determinato il rapporto tra i coefficienti P, P', radici dell'equazione (p); quindi comunque si trasformino le coordinate, e si mutino in corrisponza i coefficienti A, B, C dell'equazione (A), il rapporto delle radici dell'equazione (p) resterà immutabile.

e) Se le due radici P, P' di (p) sono eguali, l'equazione (A) non potrà rappresentare altra curva reale che la circonferenza (§. 26 *e*). In questo caso esisteranno evidentemente infiniti sistemi di direzioni principali. Se le due radici di (p) sono disuguali, a ciascheduna di esse corrisponderà una particolare direzion principale lm, ed una sola (*). Pertanto *le linee di second'ordine offrono due sole direzioni principali, tranne la circonferenza che ne ha infinite.*

(*) Infatti supponiamo che (A) sia da bel principio

$$Px^2 + P'y^2 - 2Rx - S = 0,$$

e principali le direzioni degli assi (x), (y). L'equazioni (lm) destinate a somministrare le direzioni principali, diverranno

$$0 = (p - P)\, l = (p - P')\, m,\ 1 = l^2 + m^2.$$

Ciò posto, facendo $p = P$, sarà $m = 0$, ed $l = 1$, cioè alla radice P di (p) corrisponde una sola direzion principale, quella dell'asse (x). E per ragion di simmetria alla radice P' di (p) corrisponde la sola direzion principale dell'asse (y). Quando poi si ha $P = P'$, allora ogni direzione può assumersi per principale, risultando $\frac{0}{0} = l = m$.

Parametri e fuochi.

41. Nell'ellisse ed iperbola $y^2 = \frac{\pm b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, trasportiamo l'origine delle coordinate dal centro all' estremità ($x = \mp a$, $y = 0$) del diametro $2a$: ad x converrà surrogare $x \mp a$, e si avrà

$$y^2 = \frac{\pm b^2}{a^2}(\pm 2ax - x^2).$$

Ciò posto, nelle tre linee di second'ordine rappresentate da

$$y^2 = \frac{2R}{P'}x, \quad y^2 = \frac{2b^2}{a}x \mp \frac{b^2x^2}{a^2},$$

il coefficiente della prima potenza dell' ascissa x, considerato come rappresentante una corda, si dice *parametro*, e si suole designare per $2p$. Si ha dunque

$$1.^\circ \ 2p = \frac{2R}{P'}, \text{ e però } x : y :: y : 2p;$$

$$2.^\circ \ 2p = \frac{2b^2}{a}, \text{ e però } 2a : 2b :: 2b : 2p:$$

cioè *il parametro, nella parabola è una corda terza proporzionale dopo l'ascissa e l'ordinata; e dopo il primo ed il secondo diametro coniugato nella ellisse ed iperbola.*

a) Intanto il paragone dell'equazioni

$$y^2 = 2px,$$

$$y^2 = 2px \mp \frac{b^2x^2}{a^2} = 2px \mp \frac{px^2}{a},$$

dimostra, che quanto più cresce a e diminuisce x, tanto meno il primo membro differisce da $2px$ nelle due ultime, e però dalla mutua coincidenza i punti corrispondenti delle tre curve. Dunque 1.° *gli archi ellittici ed iperbolici tanto meno differiranno dai parabolici, quanto saranno più prossimi al vertice, ed avranno maggiore il primo asse*; 2.° *l'ellisse e l'iperbola si trasformano in una parabola, allorchè il primo asse diventa infinito*: quindi dalle proprietà delle prime due curve, potranno subito dedursi le proprietà corrispondenti della parabola.

b) I nomi imposti alle linee di second'ordine di *parabola*, di *ellisse* e d'*iperbola*, significano *curva per eguaglianza*, *curva per difetto*, e *curva per eccesso*; e sembrano trarre origine da ciò che nelle medesime curve, y^2 è rispettivamente $=$, $<$, $>2px$.

42. Fuoco, in ciascuna delle linee di second'ordine, *è sul primo asse il piede di un'ordinata eguale al semiparametro.* Nella parabola, crescendo le ordinate continuamente insieme colle ascisse, non può esistere che una sola ordinata eguale al semiparametro, e però un fuoco solo: mentre nelle altre due curve, attesa la loro simmetria intorno al centro, debbono esistere due ordinate eguali al semiparametro, e però due fuochi. In queste si chiama eccentricita' *la distanza tra il centro e ciascun fuoco*, e si suole rappresentare per *ae*.

a) *Trovare il fuoco della parabola $y^2=2px$, supponendo* (x) *asse principale.* Soluz. Il fuoco deve coincidere (per la definizione) coll'estremo di quell'ascissa x che corrisponde a un'ordinata $y=p$. Conviene adunque determinar quest'ascissa per mezzo dell'equazione $p^2=2px$. Da quì si trae

$$x=\frac{1}{2}p=\frac{1}{4}2p:$$

cioè *nella parabola la distanza tra il fuoco ed il vertice, è uguale a un quarto del parametro.*

b) *Trovare i fuochi della ellisse e della iperbola* $ay^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$, *supponendo* (x), (y) *assi principali*. Soluz. I fuochi debbono coincidere (per la definizione) cogli estremi di quelle ascisse x che corrispondono alle ordinate $y = p$. Conviene adunque determinar queste ascisse (ciascuna delle quali rappresenta l'eccentricità ae) per mezzo dell'equazione $a^2p^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$. Or da quì, a causa di $p = \frac{b^2}{a}$, si trae

$$x = \pm \sqrt{(a^2 \mp b^2)} = \pm ae.$$

Dunque la distanza tra il centro e ciascun fuoco, ossia L'ECCENTRICITA', 1.° *nella ellisse è uguale al cateto di un triangolo avente per ipotenusa il semiasse maggiore, e il semiasse minore per l'altro cateto*; 2.° *nella iperbola è uguale alla ipotenusa di un triangolo avente per cateti i due semiassi*.

c) Nella formula $a^2 \mp b^2 = a^2e^2$, risulta $e < 1$ per la ellisse, ed $e > 1$ per la iperbola. Sostituendo $\pm b^2 = a^2(1 - e^2)$ nell'equazione $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$, si ottiene

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2),$$

equazione all'ellisse o all'iperbola, secondochè abbiasi $e <$, ovvero > 1.

Nota. Nelle linee di second'ordine RAGGIO VETTORE è *una retta qualunque condotta dal fuoco alla curva*.

PARABOLA

considerata rispetto alla forma, diametri, e raggio vettore.

43. L'equazione della parabola $P'y^2-2Rx=o$, somministrando

$$y=\pm\sqrt{\frac{2R}{P'}}.x,$$

dimostra che ad ogni valore di x corrisponde una corda $2y$, la quale per x negativa è *immaginaria*; per $x=o$, *nulla*, e però prolungata diventa *tangente* (§. 36 c); ed in seguito *cresce continua* per x positiva e crescente. Quindi *la parabola*, luogo geometrico di tale equazione, *si compone di una branca con rami infiniti* (fig. 10). Inoltre la medesima equazione dimostra pure che *il quadrato dell' ordinata varia in proporzion dell'ascissa.*

Se in $P'y^2-2Rx-S=o$, riesca $R=o$; si avrà $y=\pm\sqrt{\frac{S}{P'}}$, la quale rappresenterà o un sistema di due rette parallele, o una retta, o niente, secondochè sia $\frac{S}{P'}>,=,<o$. Dunque *varietà della parabola è un sistema di due rette parallele, reali o immaginarie, distinte o coincidenti.*

44. Affinchè l'equazione (A) possa rappresentare una parabola, abbiamo veduto dover risultare (§. 39) $o=Al+Cm=Bm+Cl$, donde $\frac{m}{l}=\frac{A}{-C}=\frac{-C}{B}$, e però $C=\sqrt{AB}$, ove al radi-

cale converremo di sottintendere il segno $\pm$, secondochè C sia positiva o negativa. Ciò posto sarà $\frac{m}{l}=\frac{-\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, e per conseguenza $\frac{l}{\sqrt{B}}=\frac{m}{-\sqrt{A}}=$

$$\frac{\sqrt{(l^2+m^2+2lm\cos z)}}{\sqrt{(A+B-2C\cos z)}}=\frac{1}{\sqrt{(A+B-2C\cos z)}}:$$

dunque la direzione lm de'diametri è costante, ossia *tutti i diametri della parabola sono paralleli fra loro.*

L'equazione $R'=o$ de'diametri, divenuta $(Al'+m'\sqrt{AB})x+(Bm'+l'\sqrt{AB})y=A'l'+B'm'$, ossia $(l'\sqrt{A}+m'\sqrt{B})(x\sqrt{A}+y\sqrt{B})=A'l'+B'm'$, si cangia in

$$(1)\ \ldots\ x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=\frac{A'l'+B'm'}{l'\sqrt{A}+m'\sqrt{B}},$$

mentre l'equazion più generale (A) della parabola assumerà la forma

$$(2)\ \ldots\ (x\sqrt{A}+y\sqrt{B})^2-2(A'x+B'y)-D=o.$$

L' intersezione del diametro (1) colla parabola (2), fatto $\frac{A'l'+B'm'}{l'\sqrt{A}+m'\sqrt{B}}=q$, si riduce alla intersezione delle due rette

$$(3)\ \ldots\ x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=q,\ A'x+B'y=\tfrac{1}{2}(q^2-D);$$

e questa intersezione sarà l'origine $\alpha\beta$ della parabola (B) (§. 39 *a*).

a) Per determinare l'equazione (B) della parabola riferita a due assi coniugati, avremo

$$P'=(l'\sqrt{A}+m'\sqrt{B})^2,$$

$$R=A'l+B'm=\frac{A'\sqrt{B}-B'\sqrt{A}}{\sqrt{(A+B-2C\cos z)}},$$

e quindi $y^2 = \frac{2R}{P'}x = \frac{2(A'\sqrt{B} - B'\sqrt{A})x}{P'\sqrt{(A+B-2C\cos z)}}$. Se la direzione $l'm'$ è principale, P' sarà la radice diversa da zero dell' equazione (p), e però sarà (§. 40) $P' = \frac{A+B-2C\cos z}{sen^2 z}$, e quindi

$$y^2 = 2\frac{(A'\sqrt{B} - B'\sqrt{A})sen^2 z}{(A+B-2C\cos z)^{1+\frac{1}{2}}}x.$$

E la direzione $l'm'$, siccome perpendicolare al diametro (1), si trarrà da (§. 32 *b*. 28)

$$\frac{l'}{\sqrt{A} - \cos z\sqrt{B}} = \frac{m'}{\sqrt{B} - \cos z\sqrt{A}} = \frac{1}{sen z\sqrt{(A+B-2C\cos z)}}.$$

b) Supponiamo parallele le due rette (3): sarà (§. 28 *f*) $A' : B' :: \sqrt{A} : \sqrt{B}$. Sostituendo $B' = A'\sqrt{\frac{B}{A}}$ nell'equazione (♣), otterremo

$$(x\sqrt{A} + y\sqrt{B})^2 - 2\frac{A'}{\sqrt{A}}(x\sqrt{A} + y\sqrt{B}) - D = o,$$

donde $x\sqrt{A} + y\sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{A}}[A' \pm \sqrt{(A'^2 + AD)}]$; la quale dimostra che nella fatta ipotesi *la parabola si riduce ad un sistema di due rette parallele, reali o immaginarie, distinte o coincidenti, secondochè abbiasi* $A'^2 + AD >, <, = o$.

Nota. La parabola (♣) può considerarsi come generata dalla intersezione M (fig. 7) di due rette MQ, MP aventi per equazioni

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{B} = gk,\ A'x + B'y = g'k',$$

e mobili in guisa che le loro distanze $Ok = k$,

$Ok' = k'$ dalla origine O, verifichino la (☒), ossia rendano

$$g^2k^2 - 2g'k' - D = o.$$

[g, g' sono le rette che sugli assi (x), (y) hanno le proiezioni $(\sqrt{A}, \sqrt{B})$, (A', B')]

Se prendiamo per nuovi assi le rette Ox, Oy rispettivamente parallele a Mk, Mk', i due triangoli variabili $Ok'P$, OkQ forniscono (a causa degli angoli $OPk' = M = OQk$, e di $sen M = sen \cdot g'g$) $k = y sen \cdot g'g$, $k' = x sen \cdot g'g$, e quindi

$$y^2 - \frac{2g'}{g^2 sen \cdot g'g} x - \frac{D}{g^2 sen^2 \cdot g'g} = o,$$

donde
$$y^2 = \frac{2g'}{g^2 sen \cdot g'g} x$$

surrogando $x - \dfrac{D}{2g' sen \cdot g'g}$ ad x. E si noti essere (§. 28. 2') $gg' senz sen \cdot g'g = A' \sqrt{B} - B' \sqrt{A}$,

$$g^2 sen^2 z = A + B - 2C cos z.$$

c) Supponiamo che l'equazione (A) si riduca alla forma $y^2 = 2px$, o che si abbia $B = 1$, $A' = p$, $o = A = C = B' = D$. Fermo ciò, sarà

1.° $q = \dfrac{A'l' + B'm'}{l'\sqrt{A} + m'\sqrt{B}} = p\dfrac{l'}{m'}$; e l' equazione de'diametri $x\sqrt{A} + y\sqrt{B} = q$, diverrà

$$y = p\frac{l'}{m'}, \text{ donde } \frac{y}{l'} = \frac{p}{m'}.$$

Sia xy il punto ove questo diametro attraversa la parabola: la direzione $l'm'$ delle corde coniugate a tale diametro, sarà pure la direzione della tangente t (§. 36 *c*) condotta pel punto xy, e però (§. 36 *e*)

$$t = \frac{-t_1}{l'} = \frac{-y}{m'}, \text{ e quindi } \frac{t_1}{y} = \frac{y}{p};$$

donde $$t_1 = \frac{y^2}{p} = 2x:$$

da cui si ricava che, *qualunque sia il diametro* (x) *cui si riferisce la parabola, la suttangente t_1 è sempre doppia dell'ascissa x.*

$$2.° \quad P' = (l'\sqrt{A} + m'\sqrt{B})^2 = m'^2, \quad \frac{R}{P'} = \frac{p}{m'^2}.$$

Fatto $\frac{p}{m'^2} = p'$, l'equazione $y^2 = \frac{2R}{P'}x$, diverrà $y^2 = 2p'x$, e le coordinate α, β della nuova origine rispetto all'antica, date da $\alpha\sqrt{A} + \beta\sqrt{B} = q$, $A'\alpha + B'\beta = \frac{1}{2}(q^2 - D)$, saranno

$$\alpha = \tfrac{1}{2}p\frac{l'^2}{m'^2}, \quad \beta = p\frac{l'}{m'}.$$

Per mezzo di queste formule dall' equazione $y^2 = 2px$, relativa ad un diametro, si passa all'equazione $y^2 = 2p'x$, relativa ad un altro diametro. Se il primo diametro fosse l'asse principale, chiamato θ l'angolo che le corde coniugate al secondo diametro fanno colla direzion diametrale lm, sarà

$$l' = \cos\theta, \quad m' = \operatorname{sen}\theta,$$

e $$p' = \frac{p}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}p\cot^2\theta, \quad \beta = p\cot\theta;$$

ove si avverta, che *il prodotto del parametro p' di un diametro qualunque pel quadrato del seno delle sue corde coniugate è costante, ed è uguale al parametro dell'asse principale, parametro che però sarà il minimo di tutti.*

d) Data una parabola, per trovare graficamente la direzione de' diametri basta condurre due corde parallele e dimezzarle: la retta che passerà pe' punti medii di tali corde, sarà un diametro. Poscia se conduciamo due corde perpendicolari a siffatto diametro, la retta che passerà pe'punti medii di queste corde, sarà un nuovo diametro perpendicolare alle corde coniugate; sarà dunque l'asse principale.

45. *Nella parabola $y^2 = 2px$ riferita all'asse principale, esprimere il raggio vettore di un punto in funzione dell'ascissa corrispondente.*

Soluz. Il raggio vettore (fig. 10) $FM = v$ condotto al punto $M = (x, y)$, e l'ordinata $MP = y$, danno luogo al triangolo rettangolo, $FMP = (v, y, x - \frac{1}{2}p)$, il quale fornisce

$$v^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = 2px + x^2 - px + \frac{1}{4}p = (x + \tfrac{1}{2}p)^2:$$

donde $$v = x + \tfrac{1}{2}p,$$

cioè *il raggio vettore è uguale all'ascissa più un quarto del parametro.*

Se $2p'$ sia il parametro del diametro Mx, avremo $FM = v = x + \frac{1}{2}p =$ (§. prec. c)

$$\tfrac{1}{2}p\cot^2\theta + \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}\frac{p}{sen^2\theta} = \frac{1}{4}.2p',$$

cioè *il parametro relativo a un punto* M *della parabola è quadruplo del raggio vettore condotto a questo punto.*

Nella parabola si chiama *direttrice* una retta DL perpendicolare all'asse, al di là del vertice A per un quarto del parametro.

a) *Ogni punto m della parabola equidista dal fuoco* F *e dalla direttrice; ogni punto interno m' è più vicino al fuoco che alla direttrice, ed ogni punto esterno m'' è più vicino alla direttrice che al fuoco.* Infatti $PD = x + \frac{1}{2}p = Fm$, ed $Fm' <$, $Fm'' > Fm = PD$.

Quindi *la parabola* si può definire geometricamente: *una curva, luogo de'punti situati ciascuno ad egual distanza da un fuoco e da una direttrice.*

b) Per un punto dato condurre una tangente alla parabola.

Soluz. Il punto dato o è sulla parabola in M, o fuor della parabola in *r*.

Nel 1.° caso si conduca il raggio vettore FM: poi ML perpendicolare alla direttrice DL: tirata FL, la retta MH perpendicolare sul mezzo H di FL, sarà tangente al punto M; essendochè, tranne questo, essa avrà ogni altro punto fuori della curva. Infatti se da un punto qualunque *r* di questa retta si conduce *r*F, *r*L, ed *rl* perpendicolare a DL; si avrà $rF = rL > rl$, cioè il punto *r* più vicino alla direttrice che al fuoco.

Nel 2.° caso, fatto centro in *r* con un raggio $= rF$, tracciamo sulla direttrice un punto L, o L': la bisettrice *r*T dell'angolo F*r*L sarà tangente alla parabola, e il punto di contatto si troverà laddove la retta condotta da L parallelamente all'asse (x), attraversa *r*T. Imperocchè essendo la bisettrice *r*T perpendicolare al mezzo della retta FL, si ha $ML = MF$. Quindi *r*M è tangente in virtù del metodo che precede.

c) Giova intanto ritenere, 1.° che la tangente dimezza l'angolo FML compreso tra il raggio vettore ed il prolungamento del diametro Mx condotto pel punto di contatto; 2.° che per conseguenza un raggio vettore FM ed un diametro Mx, condotti ad un medesimo punto della parabola, inclinano con eguali angoli FMT, xM*r* alla tangente, e però anche ad MN normale alla curva. (Quindi i raggi luminosi, e in genere tutti i raggi elastici xM paralleli all'asse, incontrando la parabola sotto l'angolo d'incidenza xMN, dovranno riflettersi per MF sul fuoco, in virtù del teorema fisico, che nel rimbalzo de'raggi elastici l'angolo di riflessione NMF debbe riuscire uguale all'angolo d'incidenza xMN).

d) Essendo l'angolo FMT $=$ TML $=$ MTF, il triangolo MFT è isoscele, e però FT $=$ FM $= x + \frac{1}{2}p = x +$ FA: dunque AT $= x$: dunque *il vertice* A *equidista dal piede della tangente e dell'ordinata.* Dunque l'asse Ay passerà per H, mezzo di MT. Dunque se dal fuoco si abbassano delle perpendicolari FH $= q$ sulle tangenti della parabola, il luogo geometrico de'piedi di tali perpendicolari sarà l'asse (y). E a causa de'triangoli simili TFH, TNM, il fuoco F è ad egual distanza v dal piede della tangente e della normale, e $q = \frac{1}{2}n$, e NA $= v + \frac{1}{2}p = x + p$, e per conseguente *la sunnormale* PN $= p$, cioè *è uguale al semiparametro.* Dunque MN $= n = \sqrt{\text{NP.NT}} = \sqrt{2pv}$,
$t = \sqrt{\text{TN.TP}} = 2\sqrt{vx}$.

ELLISSE ED IPERBOLA

considerate rispetto alla forma, diametri, e raggio vettore.

46. Se nell'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, facciamo successivamente $y = 0$, $x = 0$, avremo in corrispondenza $x = \pm a$, $y = \pm b$, le quali equazioni rappresentano i punti $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, ove l'ellisse attraversa gli assi (x), (y), e dimostrano esser due siffatti punti su ciascun asse, situati ad egual distanza dal centro.

L' equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, somministrando

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, fa palese che ad ogni valore di x corrisponde una corda $2y$, la quale, se x si allunga al di là de'limiti $+a, -a$, è *immaginaria*; per $x=\pm a$, *svanisce* e però prolungata diviene *tangente* (§. 36 *c*); in seguito, a misura che x dentro questi limiti si accorcia verso il centro, *cresce* e nel centro sale alla massima grandezza $2b$. Potrebbe ripetersi lo stesso discorso alternando x, a con y, b. Dunque l'ellisse, luogo geometrico di cotesta equazione, è una curva rientrante, circoscritta dal parallelogrammo PQQ'P' (fig. 11) costruito sopra i due diametri coniugati $2a$, $2b$, ed ha la forma ovale rappresentata dalla figura.

Chiamato z l'angolo compreso fra i due semidiametri a, b, il parallelogrammo PQQ'P' sarà

$$=2a.2b\,\text{sen}z=4ab\,\text{sen}z.$$

a) Supposti gli assi (x), (y) ortogonali, 1.° abbiasi $a=b$: l' ellisse si trasformerà nel circolo $x^2+y^2=a^2$ (§. 26 *e*). 2.° Nell'equazione $Px^2+P'y^2=S$, risulti $S=o$: il primo membro essendo essenzialmente positivo, non potrà svanire se non con x, y; e però l' ellisse si ridurrà ad un punto. Se risultasse

$$S=D+\frac{BA'^2+AB'^2-2A'B'C}{AB-C^2}<o,$$

l'ellisse sarebbe immaginaria. Pertanto le *varietà* dell'ellisse si riducono al *circolo*, al *punto*, e all'*ellisse immaginaria*. E l'equazione (A) rappresenterà un'ellisse reale, o un punto, o un'ellisse immagina-

ria, se con $AB - C^2 > o$ (§. 40 b), risulti
S $>$, $=$, $<$ o.

b) Nel caso dell'ellisse immaginaria è a notarsi, che l'equazion generale

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy - 2 \ (A'x + B'y) - D = o,$$

posta sotto la forma

$$[x\sqrt{A} + \frac{Cy - A'}{\sqrt{A}}]^2 + \frac{1}{A}[y\sqrt{(AB - C^2)} + \frac{A'C - AB'}{\sqrt{(AB - C^2)}}]^2 - (\frac{AB'^2 + AB'^2 - 2A'B'B}{AB - C^2} + D) = o,$$

mostra che fornirebbe sempre un risultato positivo per qualsivoglia valore reale di x, y.

47. Se nell'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, facciamo successivamente $y = o$, $x = o$, avremo in corrispondenza $x = \pm a$, $y = \pm b\sqrt{-1}$, le quali equazioni manifestano che la iperbola attraversa l'asse (x), in due punti reali $(\pm a, o)$, e l'asse (y) in due punti immaginarii $(o, \pm b\sqrt{-1})$, situati ad egual distanza dal centro.

L'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, somministrando

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{(1 - \frac{a^2}{x^2})},$$

dichiara che ad ogni valore di x corrisponde una corda $2y$, la quale, se x si abbrevia dentro i limiti $+a, -a$, è *immaginaria*; per $x = \pm a$, *svanisce* e però prolungata diviene *tangente*; in seguito, a misura che x si allunga al di là di questi limiti, $2y$ cresce continuamente, e progredendo verso l'infinito si avvicina, come a limite proprio ed unico, ad esser $= 2\frac{bx}{a}$, di cui per altro è sempre più breve. Quindi le due rette $y = \pm \frac{b}{a} x$, incr

ciate nel centro dell' iperbola, tendendo ambed
a toccarla ad una distanza infinita, ne sono gli *asi*
toti, ed asintoti unici evidentemente al pari dell'i-
perbola che abbracciano. Dunque l'iperbola, luog

geometrico dell'equazione $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{(1 - \frac{a^2}{x^2})}$, s

compone di due branche simmetriche, ed infinite,
separate sull'asse (x) da un intervallo $2a$, e conte-
nute dentro gli angoli opposti di due asintoti in-
crociati nel centro (fig. 12).

Da questa descrizione si ricava

1.° Che, a causa dell'equazion $y = \pm \frac{b}{a} x$ de-

gli asintoti la quale per $x = a$ somministra $y = \pm b$,
il parallelogrammo PQQ′P′ costruito sopra due dia-
metri coniugati qualunque $2a$, $2b$, oltre di toccare
l'iperbola co' lati $2b$, $2b$, tiene i suoi vertici sugli
asintoti.

2.° Che ogni secante $2y = \frac{2b}{a} x$, che attraver-

sando l'iperbola termina agli asintoti, è dimezzata
dal diametro (x) coniugato alla direzione di tale se-
cante; e che per conseguenza, se la secante si muta
in tangente, la porzion della tangente compresa tra
gli asintoti, sarà divisa in due parti uguali dal pun-
to di contatto.

a) Se gli assi (x), (y) siano ortogonali, ed ab-
biasi $a = b$; l'iperbola prende il nome di *equilate-
ra*. Se nell'equazione $Px^2 - P'y^2 = S$, risulti $S = o$;

si avrà $y = \pm x \sqrt{\frac{P}{P'}}$, la quale rappresenta un sistema di due rette divergenti. Pertanto le *varietà della iperbola* si riducono ad *un sistema di due rette divergenti*. E l'equazion generale (A) rappresenterà un'iperbola, o un sistema di due rette divergenti, se con $AB - C^2 < o$ (§. 40. b), risulti S diversa da zero, od $= o$.

b) *Trasformare le coordinate dell'iperbola in altre parallele agli asintoti, ritenendo l'origine nel centro.*

Soluz. Ad x, y converrà sostituire $lx + l'y$, $mx + m'y$, ove lm, $l'm'$ rappresentano le direzioni de' due asintoti $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{-b}$. Designando per d, d' le rispettive risultanti di (a, b), $(a, -b)$, avremo

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{1}{d}, \quad \frac{l'}{a} = \frac{m'}{-b} = \frac{1}{d'},$$

donde $l = \frac{a}{d}$, $m = \frac{b}{d}$, $l' = \frac{a}{d'}$, $m' = \frac{-b}{d'}$;

e quindi $lx + l'y = a\left(\frac{x}{d} + \frac{y}{d'}\right)$,

$mx + m'y = b\left(\frac{x}{d} - \frac{y}{d'}\right)$. Surrogate ad x, y queste espressioni, l' equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si riduce a

$$xy = \frac{dd'}{4},$$

la quale dimostra che *le coordinate asintotiche dell' iperbola sono reciprocamente proporzionali.*

Sia θ l'angolo compreso dai due asintoti, e però dalle due rette d, d', segmenti de'medesimi. Il triangolo (d, θ, d') che è $= \frac{1}{2} dd' sen\theta$, risultante dalle metà de' due parallelogrammi eguali costruiti sulle componenti (a, b), e $(a, -b)$, è uguale a uno di tali parallelogrammi. Dunque l' equazione

$xysen\theta = \frac{1}{4} dd' sen\theta$, significa che *il parallelogrammo costruito sulle coordinate asintotiche x, y, prese per lati, è costante, ed è uguale alla metà del parallelogrammo costruito sopra due semidiametri coniugati, presi per lati.*

All'equazion precedente si perviene ancora così. L'iperbola

$$(1) \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

può considerarsi come generata dalla intersezione delle due rette

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = gk, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = g'k',$$

parallele agli asintoti, e le cui distanze k, k' dall'origne O (fig. 7) variano continue in modo da verificar la (1), ossia da rendere

$$gg'kk' = 1.$$

[g, g' sono rette che sugli assi (x), (y) hanno le proiezioni $\left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}\right)$, $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$].

Se prendiamo per nuovi assi gli asintoti, e osserviamo essere $gg' = \pi - \theta$, si avrà (§. 44 nota)

$$k = ysen\theta, \; k' = xsen\theta, \; gg' senzsen\theta = \frac{2}{ab} \; (\S.28.2),$$

e quindi l'equazion della iperbola tra gli asintoti

$$xysen\theta = \frac{1}{2} absenz.$$

48. Nell'ellisse e nell'iperbola due raggi o semidiametri si diranno *coniugati* o *principali*, se le loro direzioni siano coniugate o principali.

Nell'espressione generale

$\nu^2 = \dfrac{S}{Al^2 + Bm^2 + 2Clm}$ di un raggio ν condotto dal centro alla curva (§. 37 b), supponiamo che la direzione lm sia principale: sarà (§. 40) $Al^2 + Bm^2 + 2Clm = p$, ed il raggio principale si trarrà da $\nu^2 = \dfrac{S}{p}$, donde $p = \dfrac{S}{\nu^2}$. *I quadrati de' raggi principali sono adunque reciprocamente proporzionali alle radici dell'equazione* (p) (§. 40).

Nell'equazione (p) fatto $AB - C^2 = U$, sostituiamo $\dfrac{S}{\nu^2}$ a p, e moltiplichiamo tutto per $\dfrac{\nu^4}{U}$: si otterrà

$$(\nu) \ldots \nu^4 - (A + B - 2C\cos z)\frac{S}{U}\nu^2 + \frac{S^2}{U}\operatorname{sen}^2 z = 0.$$

Quest'equazione, ridotta che sia al secondo grado facendo $\nu^2 = \rho$, rappresenta colle sue radici i quadrati de'raggi principali; e colle proprietà de'suoi coefficienti vale a mettere in evidenza i rapporti tra i raggi principali e un sistema qualunque di raggi coniugati.

Supponiamo che l'equazione (A) si riduca alla forma $a'^2y^2 \pm b'^2x^2 = \pm a'^2b'^2$, o che si abbia $A = \pm b'^2$, $B = a'^2$, $C = 0$, $S = \pm a'^2b'^2$: sarà $U = \pm a'^2b'^2$, $\dfrac{S}{U} = 1$; e l'equazione (ν) diverrà

$$\nu^4 - (a'^2 \pm b'^2)\nu^2 \pm a'^2b'^2\operatorname{sen}^2 z = 0,$$

la quale, chiamati a^2, $\pm b^2$ i quadrati de' raggi principali, ha per radici $a^2, \pm b^2$. Avremo adunque per la teoria dell'equazioni

$$a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2,\quad a'^2 b'^2 sen^2 z = a^2 b^2.$$

Dalle quali formule si deduce:

1.° Che nella ellisse *la somma*, e nella iperbola *la differenza de' quadrati de' diametri coniugati è costante*;

2.° *Che nell'ellisse ed iperbola il parallelogrammo costruito sopra due semidiametri coniugati, presi per lati, è costante.*

Nota (fig. 11). *Il parallelogrammo* PP'Q'Q *circoscritto all'ellisse e costruito sopra due diametri coniugati, oltre di esser costante, è il* MINIMO *di tutti gli altri parallelogrammi circoscrittibili all'ellisse.* Infatti consideriamo il parallelogrammo $Srr'S'$ circoscritto all' ellisse in guisa, che i diametri paralleli ai suoi lati non siano coniugati. Il lato $S'r' = Tt$ sarà $> aA = PQ$, essendochè i lati SS', rr', sono esterni all'ellisse. Quindi il parallelogrammo Sr' è maggiore del parallelogrammo PQ', avendo maggiore la base $S'r'$, e comune l'altezza.

a) Nell'ellisse ed iperbola $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$, supposti principali gli assi (x), (y), analizziamo l'espressione di un raggio ρ, condotto dal centro alla curva in una direzione variabile lm. Per l'ellisse si avrà

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2m^2 + b^2l^2} = a^2 \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}m^2 + l^2} = b^2 \frac{1}{m^2 + \frac{b^2}{a^2}l^2}.$$

Ora questa formula, ove si avverta essere

$$1 = l^2 + m^2,\ a^2 > b^2,\ \text{e però}\ \frac{a^2}{b^2}m^2 + l^2 > 1,$$

$$m^2 + \frac{b^2}{a^2}l^2 < 1,$$ manifesta che *nell'ellisse i raggi*

principali a, b hanno la proprietà di essere, l'uno il MASSIMO, *e l'altro il* MINIMO *de' raggi.*

Per l'iperbola si avrà

$$v^2 = \frac{-a^2b^2}{a^2m^2 - b^2l^2} = a^2 \frac{1}{l^2 - \frac{a^2}{b^2}m^2} = -b^2 \frac{1}{m^2 - \frac{b^2}{a^2}l^2}.$$

E questa formula, ove si rifletta che il denominatore è massimo quando è massima la sua parte positiva e minima la parte negativa, dimostra che *nell'iperbola i due raggi principali sono i* MINIMI, *l'uno de' raggi reali o trasversi, l'altro de' raggi immaginarii.*

b) Allorchè l'equazione (A) è $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$, e però $A = \pm b^2$, $B = a^2$, $D = \pm a^2b^2$, $o = A' = B' = C$; (essendo (x), (y) due diametri coniugati qualunque)

1.° L'equazione generale de' diametri $R' = o$, diventa

$$a^2m'y \pm b^2l'x = o, \text{ donde } \frac{a^2y}{l'} = \frac{\mp b^2x}{m'}.$$

Sia xy il punto, ove questo diametro attraversa l'ellisse o l'iperbola: la direzione $l'm'$ delle corde coniugate a tale diametro, sarà pure la direzione della tangente t condotta pel punto xy (§. 36 *c*), e però (§. 36 *e*)

$$t = \frac{-t_1}{l'} = \frac{-y}{m'}, \text{ e quindi } \frac{t_1}{a^2y} = \frac{y}{\mp b^2x}, \text{ donde}$$

$$t_1 = \frac{a^2}{\mp b^2} \cdot \frac{y^2}{x} = -\left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right);$$

e la distanza $OT = x - t_1$ (fig. 9) *tra il centro* O *e il piede della tangente sarà* $= \frac{a^2}{x}$, cioè *terza proporzionale dopo x ed a.*

2.° L'equazione $Q=o$, diventa

$$a^2mm' \pm b^2ll' = o, \text{ donde } \frac{m}{l}\cdot\frac{m'}{l'} = \frac{\mp b^2}{a^2},$$

la quale dimostra che nell'ellisse, essendo $\frac{m}{l}, \frac{m'}{l'}$ rapporti di segno contrario, due semidiametri coniugati non possono esser abbracciati ambedue dall' angolo di due altri semidiametri coniugati; e che all'incontro nell'iperbola, essendo $\frac{m}{l}, \frac{m'}{l'}$ del medesimo segno, l'angolo di due semidiametri coniugati contiene l'angolo di due altri semidiametri coniugati, oppure ne è contenuto.

3.° $P=a^2m^2 \pm b^2l^2$, $P'=a^2m'^2 \pm b^2l'^2$, $S=\pm a^2b^2$. Fatto $\frac{S}{P}=a'^2$, $\frac{S}{P'}=\pm b'^2$, l'equazione

$Px^2+P'y^2=S$, fornisce $\frac{x^2}{a'^2} \pm \frac{y^2}{b'^2}=1$.

Per mezzo di queste formule dall'equazione relativa a un sistema di diametri coniugati, si passa all' equazione relativa a un altro sistema di diametri coniugati.

---

c) Nell'ellisse ed iperbola $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}=1$, le corde che uniscono gli estremi di un diametro $2a$ con un punto qualunque xy della curva, si dicono *corde supplementarie*.

Le direzioni lm, $l'm'$ *di due corde supplementarie* v, v', *sono coniugate*. Dim. Partendo tali corde l'una dal punto (a, o), l'altra dal punto $(-a, o)$, e terminando ambedue al punto xy, somministrano

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y}{m}, \quad \frac{x+a}{l'}=\frac{y}{m'},$$

e moltiplicando, $\frac{x^2-a^2}{ll'}=\frac{y^2}{mm'}$, donde

$$\frac{m}{l}\cdot\frac{m'}{l'}=\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{\mp b^2}{a^2}.$$

Supposto che a, b designino i raggi principali, ed ω, ω' gli angoli onde le corde supplementarie declinano dal primo asse $2a$, si avrà

$$tang\omega=\frac{y}{x-a},\ tang\omega'=\frac{y}{x+a},\ tang\omega tang\omega'=\frac{\mp b^2}{a^2};$$

e quindi per l'angolo $\omega-\omega'$ compreso tra le due corde suddette

$$tang(\omega-\omega')=\frac{tang\omega-tang\omega'}{1+tang\omega tang\omega'}=\frac{2ay:(x^2-a^2)}{(a^2\mp b^2):a^2}=\frac{\mp 2b^2}{ae^2y}.$$

Analizziamo questo risultato, supponendo y positiva.

1.° La formula $tang(\omega-\omega')=\frac{-2b^2}{ae^2y}$, prova che, unito un punto M della ellisse cogli estremi dell'asse aA $=2a$, l'angolo aMA $=\omega-\omega'$, avendo la tangente negativa, è necessariamente *ottuso*: il che d' altronde si rileva osservando tutti i punti della ellisse essere interni alla circonferenza descritta sopra aA come diametro. E poichè un angolo ottuso è tanto più grande, quanto minore è il valor numerico della tangente, ne segue che l'angolo aMA cresce con y, ed è *massimo* quando y è massima, cioè $=b$. Così i diametri coniugati aperti col massimo angolo da una parte, e però col minimo dall'altra, sono paralleli alle corde che uniscono un vertice del secondo asse coi vertici del primo, e di più è facile a vedere che sono eguali tra loro, e però a $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (§. 48).

2.° La formula $tang(\omega-\omega')=\frac{2b^2}{ae^2y}$, dimostra che nella iperbola l' angolo $aMA=\omega-\omega'$, avendo una tangente positiva, è sempre *acuto*, e diminuisce continuo, allorchè y cresce continua.

d) *Trovare graficamente gli assi principali di un' ellisse od iperbola.* Con un raggio tirato dal centro alla curva, si descriva un circolo, che sarà diviso in quattro archi dalla curva: i due diametri dimezzanti questi archi, saranno gli assi richiesti. Infatti i punti, ove il circolo taglia la curva, determinano un quadrilatero di cui ciascun angolo insiste sopra un diametro; determinano cioè un rettangolo: i due diametri coniugati alle corde rappresentanti i lati di tale rettangolo, saranno perpendicolari alle medesime, e però assi principali.

49. *Nell'ellisse ed iperbola* (§. 42 *c*) $y^2=(1-e^2)(a^2-x^2)$, *esprimere i raggi vettori di un punto in funzione dell'ascissa corrispondente.*

Soluz. I raggi vettori $FM=v$, $fM=v'$ del punto $M=(x,y)$, e l'ordinata $MP=y$, danno luogo ai triangoli rettangoli $FMP=(v,y,x-ae)$, $fMP=(v',y,x+ae)$, il primo de'quali somministra

$$v^2=y^2+(x-ae)^2=(1-e^2)(a^2-x^2)+(x-ae)^2=(a-ex)^2.$$

Da qui 1.° *per l'ellisse* (a causa di $e<1$, $x<a$, e però $ex<a$) si trae

$$v=a-ex:$$

il valore di v' può dedursi evidentemente da quello di v, cangiando il segno di e. Quindi

$$v' = a + ex;$$

e per conseguenza $v + v' = 2a$, cioè *la somma de' raggi vettori di un punto, è uguale al primo asse.*

2.° *Per l'iperbola* (a causa di $e > 1$, $x > a$, e però $ex > a$) si trae

$$v = ex - a:$$

il valor di v' può dedursi evidentemente da quello di v cangiando il segno di a. Quindi

$$v' = ex + a;$$

e per conseguenza $v' - v = 2a$, cioè *la differenza de' raggi vettori di un punto è uguale al primo asse.*

a) La somma delle distanze ai fuochi di ogni punto situato dentro l'ellisse, è minore del primo asse; situato fuori, è maggiore. Infatti

$$1.° \; fm' + m'F < fM + FM = 2a.$$

$$2.° \; fm'' + m''F > fM + FM = 2a.$$

Quindi *l'ellisse* si può definire geometricamente: *una curva, luogo de' punti per ciascuno de' quali la somma delle distanze a due fuochi è costante.*

La differenza delle distanze ai fuochi di ogni punto situato dentro l'iperbola, è maggiore del primo asse; situato fuori, è minore. Infatti

$$1°.\, fm' - Fm' = fm' - (Fm - mm') = fm' + mm' - Fm > fm - Fm,$$

$$2.°\, fm'' - Fm'' = (fm'' - mm'') - Fm < fm - Fm:$$

Quindi *l'iperbola* si può definire geometricamente: *una curva, luogo de' punti per ciascuno de' quali la differenza delle distanze a due fuochi, è costante.*

b) Per un punto dato condurre una tangente all'ellisse o all'iperbola.

Soluz. Il punto dato o è sulla curva in M (fig. 11, 12), o fuor della curva in r.

Nel 1.° caso, condotti i raggi vettori fM, FM, si prenda sulla direzione dell' uno fM una parte $ML = MF$, talchè sia $fL = 2a$: tirata FL, la retta MH perpendicolare sul mezzo H di FL, sarà tangente al punto M, essendochè, tranne questo, essa avrà ogni altro punto fuori della curva.

Infatti condotti ad un punto qualunque r di questa retta i raggi fr, Fr, si avrà
1.° per la ellisse $fL = 2a < fr + rL = fr + rF$;
2.° per l'iperbola $fL = 2a > fr - rL = fr - rF$.

Nel 2.° caso, fatto centro in r con un raggio $= rF$, descrivo una circonferenza; poi fatto centro in f con un raggio $= 2a$, descrivo un'altra circonferenza che intersecherà la prima in due punti, uno de'quali sia L: la bisettrice dell' angolo FrL sarà tangente alla curva, e il punto di contatto si troverà laddove la nominata bisettrice incontra il raggio fL in M. Imperocchè essendo la bisettrice rM perpendicolare al mezzo della retta FL, si ha $ML = MF$. Quindi rM è tangente in virtù del metodo che precede.

c) Giova intanto ritenere, 1.° che la tangente dimezza l'angolo FML, il quale nella ellisse è *supplemento*, e nella iperbola è *uguale* a quello formato dai raggi vettori condotti al punto di contatto; 2.° che per conseguenza i raggi vettori condotti ad un medesimo punto della curva, declinano con angoli eguali dalla tangente, nonchè dalla normale MN. (Quindi i raggi elastici FM che parton da un fuoco, incontrando la curva, se questa è un'ellisse si rifletteranno, seguendo Mf, nell'altro fuoco; e se una iperbola, si rifletteranno seguendo una direzione MR che passa per l'altro fuoco).

d) Il triangolo fMF, nel quale la normale MN

dimezza l'angolo al vertice nella ellisse, ed il supplemento di tale angolo nella iperbola, somministra (geom.)

$$fM(a+ex):fN::FM(\pm(a-ex)):FN$$
$$::fM\pm FM(2a):fN\pm FN(2ae);$$

donde $FN=\pm e(a-ex)$, $fN=e(a+ex)$.

Da queste espressioni possono derivarsene moltissime altre relative ai punti notabili O,N,F,P,T, e alle distanze fra questi punti e le rette che si vedono nella figura.

Equazione polare, rette coniugate ai diametri, tangenti e asintoti delle linee di second'ordine.

50. Nella parabola (fig. 10) si è trovato il raggio vettore $FM=v=x+\frac{1}{2}p$, ove x è contata dal vertice A. Ora il triangolo $FMP=(v, y, x-\frac{1}{2}p)$, fatto l'angolo $AFM=\varphi$, somministra
$FP=x-\frac{1}{2}p=-v\cos\varphi$, donde $x=\frac{1}{2}p-v\cos\varphi$.

Quindi $v=x+\frac{1}{2}p=p-v\cos\varphi$, e però $v=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$.

Nella ellisse ed iperbola (fig. 11, 12) si è trovato il raggio vettore $FM=v=\pm(a-ex)$, ove x è contata dal centro O. Ora il triangolo FMP $=(v, y, x-ae)$, somministra $FP=x-ae=\pm v\cos\varphi$, donde $x=ae\pm v\cos\varphi$. Quindi $v=\pm(a-ex)=$
$\pm a\mp ae^2-ev\cos\varphi$, e però $v=\dfrac{\pm a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}=$

$\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$.

La formula $v=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$, che vale a rappresentare la parabola, l'ellisse o l'iperbola, secondochè abbiasi $e =, <, > 1$, si chiama *equazion polare* delle linee di second'ordine.

51. *Trovare l'equazione della retta coniugata a un diametro nel punto $\alpha\beta$, e l'equazione di tale diametro e della tangente.*

Soluz. Pel punto $\alpha\beta$ si conduca nella curva (A), il diametro (§. 38)

$(A\alpha + C\beta - A')\, l + (B\beta + C\alpha - B')\, m = o$:

la retta coniugata a questo diametro nel punto $\alpha\beta$, avrà la direzione lm, e però l'equazione

$v = \dfrac{x' - \alpha}{l} = \dfrac{y' - \beta}{m}$. Ora se nella precedente ad l, m surroghiamo $x' - \alpha$, $y' - \beta$, e ordiniamo rispetto ad x', y', si avrà la retta

$$(1) \ldots (A\alpha + C\beta - A')\, x' + (B\beta + C\alpha - B')\, y' = A\alpha^2 + B\beta^2 + 2C\alpha\beta - (A'\alpha + B'\beta),$$

la quale, contenendo il punto corrente $x'y'$, coincide con v, cioè è coniugata al diametro nel punto $\alpha\beta$.

Siffatta retta debbe avere (per la definizione §. 36 c) la proprietà di camminare parallela a se stessa, allorchè segue il punto corrente xy del diametro coniugato. Quindi la proporzionalità (§. 28 f)

$$(2) \ldots \frac{Ax + Cy - A'}{A\alpha + C\beta - A'} = \frac{By + Cx - B'}{B\alpha + C\alpha - B'},$$

rappresenterà il corso xy del diametro passante pel punto $\alpha\beta$.

Se il punto $\alpha\beta$ sia in xy sopra la curva (A), la retta (1) diverrà tangente, e (il 2° membro della (1) divenendo $= D + A'x + B'y$ a causa della (A)) avremo

$$(3) \ldots (Ax + Cy - A')x' + (By + Cx - B')y' = D + A'x + B'y,$$

equazion generale della tangente in xy.

a) Quando è dato il punto $x'y'$ da cui si debbe condur la tangente, allora sarà ignoto il punto xy di contatto, e converrà determinarlo per mezzo dell' (A) e della (1), che ordinata rispetto ad x, y, si muta in

$$(4) .. (Ax'+Cy'-A')x+(By'+Cx'-B')y=D+A'x'+B'y',$$

equazione ad una corda coniugata al diametro condotto pel punto $x'y'$. Quindi l'angolo che co'lati passa per gli estremi di tale corda, ed ha per vertice il punto $x'y'$, sarà un angolo circoscritto alla curva (A). Dunque *ogni angolo circoscritto ad una linea di second'ordine, ha i punti di contatto agli estremi di una corda coniugata al diametro che passa pel vertice dell'angolo.*

Se cotesta corda (4) de'contatti gira intorno a un punto qualunque xy, il vertice $x'y'$ del corrispondente angolo circoscritto scorrerà lungo la retta (3), cioè lungo una retta coniugata al diametro passante pel punto xy. In generale si vede che dato il moto della corda de'contatti, si potrà subito determinare il moto del vertice $y'x'$.

52. Poichè l'*asintoto* è una retta

$v=\frac{x'-x}{l}=\frac{y'-y}{m}$, che tocca la curva in un punto xy situato a una distanza v infinita, per averne l'equazione, si sostituisca $x=x'-lv, y=y'-mv$ nella (A) e nella (3) ordinata rispetto ad x, y, cioè nella (4): quindi, divise l'equazioni risultanti l'una per v^2, e l'altra per v, si faccia $v=\infty$: si otterrà in corrispondenza

$$(5) \ldots\ldots P=Al^2+Bm^2+2Clm=0,$$

$$(6) \ldots\ldots (Ax'+Cy'-A')l+(By'+Cx'-B')m=0,$$

la prima delle quali somministra per la direzione lm

$$(5)_1 \quad \ldots\ldots \frac{m}{l} = \frac{1}{B}\left[-C \pm \sqrt{(C^2 - AB)}\right].$$

Supponiamo 1.° $C^2 = AB$: sarà $\frac{m}{l} = \frac{-\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, e dalla (6) si dedurrà (§. 44 *a*) $x\sqrt{A} + y\sqrt{B} = \frac{A'\sqrt{B} - B'\sqrt{A}}{\sqrt{P}} = \infty$. Dunque *nella parabola gli asintoti non esistono.* 2.° $C^2 < AB$: la direzione lm sarà immaginaria. Dunque *nella ellisse gli asintoti sono immaginarii.* 3.° $C^2 > AB$: la direzione lm avrà due valori reali. Dunque *nella iperbola esistono due asintoti incrociantisi nel centro.* E tali asintoti, essendo rappresentati da $R = o$ coesistente con $P = o$, *si potranno riguardare come diametri paralleli alla direzione cui sono coniugati* (§.38 *b*).

Nota. L' equazione generale della tangente e degli asintoti si ottiene ancora così. Nell'equazione $(A)_2$, cioè (§. 37 *a*) $Pv^2 - 2Rv - S = o$, la secante v riunisca in un solo i due punti comuni alla curva, trasformandosi in tangente: $(A)_2$ dovrà avere uguali le sue radici, e però risolversi in

$$R^2 + PS = o,\ v = \frac{R}{P},$$

La prima di queste equazioni esprime la condizione, cui debbe sodisfare la direzione lm della tangente v di cui $\alpha\beta$ è un punto. Quindi 1.° supponiamo $\alpha\beta$ un punto corrente xy di v: $R^2 + PS = o$ rappresenterà le tangenti aventi la direzione lm; 2.° sostituiamo $x - \alpha, y - \beta$ ad l, m: $R^2 + PS = o$ rappresenterà le tangenti che partono dal punto $\alpha\beta$; e però se $\alpha\beta$ è sulla curva, essa cangiata in

$R = o$ (a causa di $S = o$) rappresenterà una tangente in $\alpha\beta$.

Infine se la tangente ν si voglia infinita o asintoto, sarà $P = \frac{R}{\nu} = \frac{R}{\infty} = o$, e quindi

$o = R^2 + PS = R$, come sopra.

SIMILITUDINE DELLE QUANTITA' ESTESE

criterii di similitudine per le linee in genere, ed in particolare per le linee di second' ordine.

53. *Due sistemi geometrici* sono SIMILI, *se possono disporsi in guisa, che, irradiando da un centro i punti dell'uno, si ottengano quelli dell'altro con variare siffatti raggi in un rapporto costante*: in questa disposizione i due sistemi si diranno CENTRATI. Il centro, i raggi che ne partono, il rapporto costante in cui variano, si appellano centro, raggi e rapporti di similitudine. Chiamo *simili* od *omologhi* i punti situati sullo stesso raggio, e a distanze dal centro che stiano fra loro nel rapporto costante della supposta similitudine; ed *elementi simili* od *omologhi*, le parti che sono luoghi geometrici di punti omologhi. Laonde nell'estensioni simili, sono omologhi i lor punti singolari, non che i punti determinati per via di costruzioni identiche.

Ciò posto, si può facilmente conseguir l'evidenza delle seguenti proposizioni.

1.ª *Il luogo geometrico di tutti i punti che attorno un centro sono simili in un dato rapporto ai punti di una retta, è un' altra retta parallela alla prima, compresa tra i medesimi raggi, e stante* *alla prima nel dato rapporto di similitudine.* Quindi due rette saranno simili attorno un centro, se lo siano i loro estremi: e ad una linea curva non può assomigliarsi che una linea curva.

2.ª *Il luogo geometrico di tutti i punti che attorno un centro sono simili in un dato rapporto ai punti di una figura piana, è un'altra figura piana parallela alla prima e compresa tra i medesimi raggi.* Quindi ad un angolo rettilineo o diedro non può assomigliarsi che un altro angolo rettilineo o diedro di lati rispettivamente paralleli e diretti nel medesimo senso, cioè uguale; e due poligoni o due poliedri saranno simili, se lo siano i loro vertici. In generale, due figure saranno simili, se lo siano i loro contorni.

3.ª In due figure simili sono proporzionali le rette omologhe, e però i contorni poligonali o curvilinei di parti omologhe, e in genere tutte le linee omologhe. Secondochè poi due figure simili sono di superficie o di volume, staranno fra loro come i quadrati o come i cubi delle linee omologhe, e per conseguente come le loro parti omologhe.

4.ª *Le tangenti ai punti omologhi di curve simili centrate, sono parallele ed omologhe.* Infatti due rette centrate sono parallele ed omologhe, se due punti dell'una sono omologhi a due punti dell' altra. Ora le tangenti a punti omologhi possono considerarsi come secanti parallele, riunenti in un solo i punti omologhi che aveano comuni colla curva.

Per analoga ragione due piani che toccano in punti omologhi due superficie simili centrate, sono paralleli ed omologhi.

a) Se riferita una figura ad un centro, si prolungano in un dato rapporto i raggi al di là del centro, ne nascerà una nuova figura somigliante alla simmetrica della data, e che perciò può dirsi *inversamente simile* alla data. È facile a comprendersi che le figure *inversamente* simili, hanno le stesse proprietà che le simili *direttamente*.

b) I criterii delle figure simili si riducono a mostrare, che sono sodisfatte le condizioni essenziali della similitudine prescritte dalla definizione; e però ad osservare, se i dati delle proposte figure sono sufficienti a renderle centrate in guisa, che l'una riesca il luogo geometrico di tutti i punti simili, in un medesimo rapporto, ai punti dell'altra. Per questa via si potrebbero dimostrare i criterii di similitudine che sogliono darsi nella geometria elementare.

54. *Data l'equazione di una curva qualunque* $f(x, y) = o$, *trovar l'equazione di un'altra curva simile, riportata ad un sistema di assi, omologhi a quelli cui è riportata la prima.* Soluz. Sia xy un punto della prima curva, ed $x'y'$ il punto simile della seconda: le ascisse x, x', e le ordinate y, y' di punti simili, avendo omologhe l'estremità, saranno linee omologhe. Dunque, per la proprietà fondamentale (3.ª) de' sistemi simili, si avrà

$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \mu$, ove μ designa il rapporto di similitudine. Sostituendo $x = \mu x'$, $y = \mu y'$ in $f(x, y) = o$, si avrà tra x', y' l'equazione $f(\mu x', \mu y') = o$, la quale apparterrà alla seconda curva.

a) Quindi per rilevare se una curva $\varphi(x, y) = o$, è simile ad un'altra $f(x, y) = o$, basterà vedere se l'equazione $\varphi(x, y) = o$ può ridursi, sia immediatamente, sia mediante la trasformazione delle coordinate, ad essere identica all'equazione

$k f(\mu x, \mu y) = o$, ove k è un coefficiente costante.

55. Se l'equazione di una curva $f(x, y, a, b, c \ldots) = 0$, sia omogenea rispetto alle coordinate x, y, e ad una o più linee costanti a, b, c, necessarie a determinare la natura e l'andamento della curva; siffatte linee si dicono *parametri della curva*. In questo senso, in $y^2 = 2px$, $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, le linee p, a, b, sono parametri. Tutte le curve, che si possono rappresentare con una medesima equazione dando diversi valori ai parametri, si dicono appartenere ad una medesima *famiglia*. Così, delle tre precedenti equazioni, la prima rappresenta la famiglia delle parabole chiamate *Apolloniane*; e le altre due, le famiglie dell'ellissi e delle iperbole.

a) *Due curve appartenenti ad una medesima famiglia, e con un solo parametro, sono simili.* Dim. Siano $f(x, y, a) = 0$, $f(x, y, a') = 0$, l'equazioni delle due curve riferite ad assi omologhi, e $\frac{a}{a'} = \mu$. La seconda equazione è identica alla

$0 = k f(\mu x, \mu y, a) = k f(\mu x, \mu y, \mu a')$, rappresentante le curve simili alla prima, potendosi quivi sopprimere μ, per la supposta omogeneità rispetto ad x, y, a (§. 6 (1)). Dunque ec.

Così *le parabole avendo un solo parametro, sono curve simili.*

b) Nel modo medesimo si può dimostrare, che *due curve appartenenti ad una medesima famiglia e con più parametri, saranno simili; se i parametri dell'una siano rispettivamente proporzionali ai parametri dell'altra.* Così due ellissi o due iperbole saranno simili, se i raggi principali dell'una siano proporzionali ai raggi omologhi dell'altra.

Nota 1.° Due iperbole si dicono *coniugate*, se l'asse trasverso di ciascuna, è l'asse non trasverso dell'altra: quindi se un'iperbola ha gli assi inversamente proporzionali agli assi omologhi di un'altra, ciascuna sarà simile alla coniugata dell'altra. Le iperbole coniugate hanno comuni gli asintoti.

2.° Se due ellissi od iperbole, rappresentate da equazioni (A), abbiano le coordinate x, y inclinate sotto un medesimo angolo z, e rispettivamente proporzionali i coefficienti A, B, C de'termini della 2ª dimensione; saranno ellissi simili, ovvero iperbole l'una simile all'altra o alla coniugata dell'altra. Infatti è noto che in siffatte curve il rapporto de'quadrati de'raggi principali a, b, è uguale al rapporto che hanno tra loro le radici dell'equazione (p) (§.48). Ora in questa equazione entrano soltanto le quantità A, B, C, z: dunque il rapporto delle sue radici sarà lo stesso per tutte l'equazioni (A) che, con z eguale, hanno proporzionali le A, B, C.

Nota. Due oggetti simili, hanno la stessa *forma*; vale a dire, da qualsivoglia lato si rimiri l'uno di essi, produce sull'occhio nostro la stessa impressione che l'altro, veduto dal medesimo lato. Ciò deriva immediatamente dalla definizione della similitudine. Quindi *le figure simili si possono riguardare come diversi stati di una medesima figura che varia di grandezza e non di forma.* Ed in geometria sono a distinguersi quattro specie di eguaglianze: 1. eguaglianza *diretta* di forma e di grandezza, o *eguaglianza perfetta*; 2. eguaglianza *inversa* di forma e di grandezza, o *simmetria*; 3. eguaglianza di forma e non di grandezza, o *similitudine*; 4. eguaglianza di grandezza e non di forma, o *equivalenza.*

PARTE SECONDA.

GEOMETRIA A TRE COORDINATE.

La geometria a tre coordinate insegna a rappresentare simbolicamente la posizione de'punti, il corso delle linee e lo spandersi delle superficie nello spazio, onde con più facilità scoprirne i rapporti. La dividerò in due capi: nel 1.° tratterò delle coordinate, della retta, del piano, della generazione delle più semplici superficie curve, e delle superficie algebriche in generale; nel 2.° delle superficie di second'ordine.

CAPO PRIMO.

Scopo e natura delle coordinate nello spazio:

Assi coordinati: coordinate di un punto: equazioni delle linee e superficie: intersezioni, distanza tra due punti, ed equazioni della sfera.

56. I punti sparsi nello spazio si riportano ordinatamente ad un medesimo centro mediante le convenzioni seguenti.

Per un punto O (fig. 13), fissato ad arbitrio nello spazio, si conviene di condurre sotto una inclinazione qualunque tre rette indefinite xx', yy', zz' non situate in un medesimo piano, le quali si dicono *assi coordinati*, e si designano rispettivamente colle lettere (x), (y), (z) chiuse tra parentesi. Il punto fisso O, da cui partono gli assi, si chiama *origine degli assi*; ed ivi ogni asse si divide in due, l'uno *positivo* e l'altro *negativo*.

Cotesti assi determinano *tre piani coordinati* che spartiscono tutto quanto lo spazio in otto angoli triedri, i quali due a due sono opposti in simmetria attorno l'origine: per es. al triedro cogli spigoli positivi si oppone simmetrico il triedro cogli spigoli negativi. I piani coordinati si accennano colle lettere degli assi che li determinano, cioè per xy, yz, zx.

Nota 1.ª Noi passeremo da un piano coordinato all'altro, girando in ciascun piano dalla destra alla sinistra del suo asse eretto all'origine sulla faccia interna del piano. Ciò posto, le formule risguardanti il piano xy si cangeranno nelle formule risguardanti il piano yz, surrogando agli assi (x), (y), e alle lettere relative ad (x), (y), gli assi (y), (z), e le lettere relative ad (y), (z). Analoghe sostituzioni si faranno passando dal piano yz al piano zx.

2.ª Gli elementi del triedro determinato dagli assi positivi (x), (y), (z), si scriveranno sotto i simboli trigonometrici nel modo che segue. Le facce angolari $\cdot yz$, $\cdot zx$, $\cdot xy$ si designeranno rispettivamente per X_1, Y_1, Z_1, cioè ciascheduna si designerà colla lettera grande dell'asse coordinato che non vi è contenuto, marcandola con apice al piede; e gli opposti angoli diedri si denoteranno per x, y, z. Il simbolo xp indicherà, al solito, l'angolo che l'asse (x) fa coll'estensione p.

3.ª Gli assi (x_1), (y_1), (z_1), elevati all'origine perpendicolarmente sull'interno de'piani coordinati X_1, Y_1, Z_1, determinano un nuovo triedro supplementario del triedro determinato dagli assi coordinati (x), (y), (z) (Geom.): in esso le facce angolari y_1z_1, z_1x_1, x_1y_1, essendo rispettivamente perpendicolari agli assi (x), (y), (z), saranno designate per X, Y, Z (§. 22. *d*). I due sistemi di assi xyz, $x_1y_1z_1$ si diranno *supplementarii l'uno dell'altro*. Immaginiamo una sfera che abbia per centro l'origine, e per raggio l'unità lineare: i due triedri supplementarii xyz, $x_1y_1z_1$, incideranno sopra la superficie della medesima due triangoli sferici supplementarii, il primo de'quali avrà per lati X_1, Y_1, Z_1, e per angoli x, y, z; il secondo avrà per lati X, Y, Z, e per angoli x_1, y_1, z_1. Ciò posto, si sa dalla trigonometria sferica, 1.° che il prodotto $sen Y_1 sen Z_1 sen x$ si mantiene costante, allorchè si alternano per ordine le lettere del sistema (x, Y_1, Z_1) colle lettere di uno de'due sistemi (y, Z_1, X_1), (z, X_1, Y_1). Noi faremo

$$H = sen Y_1 sen Z_1 sen x =$$

$$\sqrt{(1 - cos^2 X_1 - cos^2 Y_1 - cos^2 Z_1 + 2 cos X_1 cos Y_1 cos Z_1)}.$$

Similmente si mantiene costante il prodotto

$$sen Y sen Z sen x_1 = sen y sen z sen X_1 = H_1,$$

allorchè si alternano per ordine le lettere del sistema (X_1, y, z) colle lettere di uno de'due sistemi (Y_1, z, x), (Z_1, x, y). 2.° Che si ha

$$\cos' xx_1 = sen' X_1 x = sen Y_1 sen z = \frac{H}{sen X_1},$$

e però $\quad \cos' yy_1 = \dfrac{H}{sen Y_1},\ \cos' zz_1 = \dfrac{H}{sen Z_1}.$

Si avverta che quando gli assi coordinati sono ortogonali, i due triedri supplementarii xyz, $x_1y_1z_1$ coincideranno evidentemente in un solo, e sarà

$$1 = H = H_1.$$

a) *Le coordinate di un punto riferito a tre assi*, sono su questi gli spigoli del parallelepipedo avente per diagonale la retta che unisce il punto coll' origine degli assi. Esse si rendono sensibili, se stando in una stanza di forma parallelepipeda, si prendano per assi coordinati gli spigoli della stanza divergenti da uno de'suoi angoli.

Le coordinate, siccome segmenti degli assi (x), (y), (z), si designano rispettivamente colle lettere x, y, z; ed hanno *un valore positivo o negativo*, secondochè si contano sovr'assi positivi o negativi.

Dato un punto M (fig. 13), per *trovarne le coordinate* basta condurre per esso tre piani paralleli ai piani coordinati: verrà così a chiudersi un parallelepipedo, i cui tre spigoli diretti secondo gli assi saranno le coordinate richieste.

Viceversa: date tre coordinate x, y, z, per trovare il punto cui esse appartengono, basta costruire sulle medesime (prese per ispigoli) un parallelepipedo: il vertice che quivi resta opposto alla origine, sarà il punto cercato. Oppure si prenda sull'asse (x), a partire dalla origine O, un segmento $OP = x$; dall'estremo P di x parallelamente all' asse (y) si guidi $PM' = y$; e infine dall'estremo M' di y parallelamente all'asse (z) s'inalzi $M'M = z$: l'estremo M di z coinciderà manifestamente col punto determinato nella guisa precedente, e però sarà il punto richiesto.

Giova talvolta considerare le coordinate di un punto sotto uno degli aspetti seguenti. – Le coordinate di un punto sono nel senso degli assi le componenti della retta che va dalla origine al punto. – La coordinata di un punto relativa ad un asse, è la sua distanza dal piano determinato dagli altri due assi, stimata parallelamente al primo asse; ovvero è la proiezione che riceve questo asse (essendo dirigente il piano determinato dagli altri due) dalla retta che va dalla origine al punto; oppure è sopra tale asse la distanza tra l'origine e la proiezione del punto, essendo dirigente il piano determinato dagli altri due assi.

Fatte queste convenzioni, è facile di rappresentare simbolicamente la posizione de'punti, il corso delle linee, e lo spandersi delle superficie nello spazio.

b) Un punto determinato dalle coordinate x, y, z, si rappresenta così: punto (x, y, z); o più semplicemente: punto xyz.

c) Data una linea nello spazio, riportando ogni punto del suo corso a tre assi coordinati, è manifesto che la determinazione di una coordinata x nella figura, trae seco necessariamente la determinazione delle altre due coordinate y, z; e che però ciascuna di queste è funzione della prima, cioè $y = f(x)$, $z = F(x)$: così, per rappresentare il corso di una linea nello spazio, le coordinate x, y, z debbono vincolarsi con due equazioni.

Viceversa, due equazioni $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, fra tre coordinate x, y, z, rappresentano simbolicamente il corso di una linea nello spazio. Infatti per ogni valore di x, le due equazioni forniranno i valori corrispondenti di y, z, e per conseguente manifesteranno la linea descritta dal punto corrente xyz. In generale *ogni linea può considerarsi come il luogo geometrico di due equazioni, le quali per ogni valore di una coordinata x forniscano i corrispondenti valori delle altre due coordinate y, z, e viceversa.*

Nota 1.ª L'equazioni $f(x, y) = o$, $F(x, z) = o$, rappresentano le proiezioni di una linea ne' piani xy, xz, sopra le quali elevate due superficie cilindriche parallele l'una all'asse (z), e l'altra all'asse (y), esse presenteranno nella loro intersezione la linea designata dalle due equazioni. Se da queste due equazioni si elimina x, ne risulta una terza equazione $\varphi(y, z) = o$, che rappresenterà la proiezione della linea sul piano yz.

2.ª Una retta parallela ad uno degli assi, ha manifestamente la stessa equazione che il punto di sua intersezione col piano determinato dagli altri due assi.

d) Data una superficie nello spazio, riportando i suoi punti a tre assi coordinati (x), (y), (z), è manifesto che la determinazione di due coordinate x, y nella figura, trae seco necessariamente la determinazione della terza coordinata z, la quale conseguentemente è una funzione delle prime due, cioè $z = f(x, y)$: così, per rappresentare lo spandersi di una superficie nello spazio, le coordinate x, y, z debbono vincolarsi con una equazione.

Viceversa, un' equazione $f(x, y, z) = o$, rappresenta simbolicamente lo spandersi di una superficie nello spazio. Infatti per ogni valore di x, tale equazione rappresenta una linea parallela al piano yz: rappresenta adunque una superficie generata da una linea che si muove parallelamente ad uno de'piani coordinati. In generale *ogni superficie può considerarsi come il luogo geometrico di un' equazione* $f(x, y, z) = o$, *la quale per ciascun valore di una delle coordinate fornisca una linea parallela al piano determinato dalle altre due.*

Una superficie cilindrica parallela ad uno degli assi, per es. a z, ha manifestamente la stessa equazione che la linea di sua intersezione col piano determinato dagli altri due assi.

e) L'equazioni di due superficie $f(x, y, z)=o$, $F(x, y, z) = o$, coesistenti tra le medesime coordinate, rappresentano evidentemente il luogo geometrico de'punti comuni ad ambedue le superficie, o le linee di loro mutua intersezione.

Nota. La intersezione che una linea od una superficie fa in una data linea o superficie, si chiama *traccia.*

f) Una retta a che cominci dal punto $x'y'z'$ e termini al punto xyz, si designerà così: retta $x'y'z'.xyz$. Essa nel senso degli assi avrà per componenti $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. Imperciocchè se sopra la medesima presa per diagonale si costruisce un parallelepipedo cogli spigoli paralleli agli assi (x), (y), (z), questi spigoli saranno (come si vede chiaramente immaginando la figura) $x-x'$, $y-y'$ $z-z'$. Per conseguenza si avrà (§. 20 f)

$$a^2 = \begin{array}{l}(x-x')^2\\ (y-y')^2\\ (z-z')^2\end{array} + 2\left|\begin{array}{l}(y-y')(z-z')\cos X_1\\ (z-z')(x-x')\cos Y_1\\ (x-x')(y-y')\cos Z_1,\end{array}\right.$$

ed $a^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$ nel caso degli assi ortogonali.

g) Supponiamo adesso che la retta a costante giri intorno all'estremo $x'y'z'$ reso fisso: l' altro estremo si moverà sulla superficie di una sfera del raggio a. Quindi le due precedenti sono l'equazioni generali della sfera del raggio a e centro $x'y'z'$: la prima per gli assi obliquangoli, e la seconda per gli assi ortogonali.

Dunque perchè un'equazione di secondo grado

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2(A'yz+B'zx+C'xy)-D=0;$$

rappresenti una sfera nella quale il centro sia l'origine delle coordinate, dovrà accordarsi coll' equazione

$$x^2+y^2+z^2+2(yz\cos X_1+zx\cos Y_1+xy\cos Z_1)-a^2=0,$$

e però somministrare

$$A=B=C, \frac{D}{A}=a^2, \frac{A'}{A}=\cos X_1, \frac{B'}{A}=\cos Y_1, \frac{C'}{A}=\cos Z_1.$$

Rapporti fra le componenti, proiezioni, ed angoli delle rette.

57. È noto che le rette parallele sono proporzionali alle loro proiezioni e componenti omologhe (§. 17 b). Viceversa, due rette r, r' saranno parallele, se le componenti l, m, n dell'una secondo tre assi coordinati, siano proporzionali alle componenti omologhe dell'altra. Infatti immaginando la figura riesce chiaro, che la direzione di r, r' è fissata invariabilmente dalle loro componenti, e che non si può alterare il parallelismo di r, r', senza turbare la proporzione $l:m:n::l':m':n'$. Dunque sussistendo questa proporzione, è forza che sussista pure il parallelismo di r, r'. In virtù di tale discorso possiamo stabilire in generale, che *due rette saranno*

parallele, se le proiezioni dell' una sopra tre assi siano proporzionali alle proiezioni omologhe dell' altra.

Pertanto supponendo le r, r' parallele, ed (L, M, N) (L', M', N') le loro proiezioni ortogonali sugli assi (x), (y), (z), avremo

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'},$$

proporzionalità che risolve il seguente problema: *date le componenti o le proiezioni di una retta rispetto a tre assi coordinati, determinare le omologhe componenti o proiezioni di un'altra retta parallela alla prima.*

a) Le proiezioni L, M, N *di una retta* r *sopra tre assi coordinati* (x), (y), (z), *moltiplicate ciascuna pel seno della opposta faccia angolare* X_1, Y_1, Z_1, vale a dire $L sen X_1$, $M sen Y_1$, $N sen Z_1$, *rappresentano nel senso degli assi supplementarii* (x_1), (y_1), (z_1) (§. 56 3.ª) *le componenti della retta* $r.H$ *parallela ad* r; *ove* H *è* $= sen\, Y_1\, sen\, Z_1\, sen x$.

Dim. Siano l_1, m_1, n_1 le componenti della retta r nel senso degli assi supplementarii: sarà (§. 20)

$$L = r_x = (l_1 + m_1 + n_1)_x.$$

Ora, essendo il piano $y_1 z_1 = X$ perpendicolare ad (x), si ha $(m_1 + n_1)_x = o$, e però

$$L = (l_1)_x = l_1 cos\cdot xx_1 = (\text{§. 56 3.ª})\ l_1 \frac{H}{sen X_1}.$$ Da qui

e dal principio di simmetria si trae la proporzionalità

$$\text{(H)} \qquad \frac{L sen X_1}{l_1} = \frac{M sen Y_1}{m_1} = \frac{N sen Z_1}{n_1} = \frac{Hr}{r}.$$

Corollarii. Ciò posto, riflettendo essere (per le note proprietà de' triangoli sferici supplementarii)

$senX = senx$, $senY = seny$, $senZ = senz$, $cosX = -cosx$, $cosY = -cosy$, $cosZ = -cosz$,

1.° Avremo la formula (§. 20 *f*)

$$H^2r^2 = \begin{matrix} L^2sen^2X_1 \\ M^2sen^2Y_1 \\ N^2sen^2Z_1 \end{matrix} - 2 \left| \begin{matrix} MNsenY_1senZ_1cosx \\ NLsenZ_1senX_1cosy \\ LMsenX_1senY_1cosz, \end{matrix} \right.$$

dalla quale si dedurrà il valor di una retta, date che ne siano le proiezioni sui tre assi coordinati. Ed è a notarsi che r rappresenta il raggio della sfera circoscritta alla piramide triangolare, la quale nel senso degli assi (x), (y), (z) ha per ispigoli 2L, 2M, 2N ; essendochè il centro di questa sfera proiettato ortogonalmente su ciascuno degli spigoli 2L, 2M, 2N, debbe cadervi nel mezzo.

2.° *Viceversa*, le proiezioni di Hr sugli assi supplementarii, moltiplicate ciascuna pel seno dell' opposta faccia angolare X, Y, Z, rappresenteranno nel senso degli assi coordinati (x), (y), (z), le componenti della retta

$$Hr.H_1 = H^2r\frac{senx}{senX_1}, \text{ parallela ad } r;$$

vale a dire rappresenteranno le

$$lH^2\frac{senx}{senX_1}, \; mH^2\frac{seny}{senY_1}, \; nH^2\frac{senz}{senZ_1}.$$

Si avrà dunque

$$H^2l = senX_1[LsenX_1 - MsenY_1cosz - NsenZ_1cosy].$$

Si avverta che, in virtù del principio che la proiezione della risultante è uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle componenti, si ha

$$L = l + mcosZ_1 + ncosY_1 .$$

Queste due formule e le loro simmetriche somministrano le componenti di una retta nel senso degli *assi coordinati, date che ivi ne siano le proiezioni, e viceversa*:

Si noti che (essendo $L = r\cos\cdot rx$, $M = r\cos\cdot ry$, $N = r\cos\cdot rz$) le proiezioni L, M, N, nel caso di $r = 1$, diventano i coseni degli angoli che r fa cogli assi (x), (y), (z); e diventano le componenti di r nel caso degli assi ortogonali.

b) *Trovar l'angolo di due rette* r, r', *di cui nel senso degli assi* (x), (y), (z), *sono date le componenti* l, m, n; l', m', n'.

Soluz. Proiettiamo r sulle rette r', l', m', n': avremo (§. 20 *e*)

$$r'.r\cos\cdot rr' = l'.r\cos\cdot xr + m'.r\cos\cdot yr + n'.r\cos\cdot zr.$$

Ma (§. 20) $r\cos\cdot xr = l + m\cos Z_1 + n\cos Y_1$,

$r\cos\cdot yr = m + l\cos Z_1 + n\cos X_1$,

$r\cos\cdot zr = n + l\cos Y_1 + m\cos X_1$;

dunque sostituendo

$$(1) \qquad rr'\cos\cdot rr' = \begin{matrix} ll' \\ mm' + \\ nn' \end{matrix} \left| \begin{matrix} (mn' + m'n)\cos X_1 \\ (nl' + n'l)\cos Y_1 \\ (lm' + l'm)\cos Z_1. \end{matrix} \right.$$

c) Il valore di $sen\cdot rr'$, anzichè dedurlo da $sen\cdot rr' = \sqrt{(1 - \cos^2\cdot rr')}$, si può rinvenire nel modo seguente, che ha il vantaggio di offrire un'immagine geometrica delle diverse parti del risultato, e inoltre di determinare gli angoli onde il piano (rr') declina da'tre assi (x), (y), (z).

Supponiamo, poichè è lecito, che le rette r, r' partano dalla origine O degli assi (x), (y), (z): le coordinate della estremità di r saranno l, m, n; ed l', m', n' le coordinate della estremità di r'. Fermo ciò, il punto $l'm'n'$ si riguardi come centro di momenti con braccio ortogonale: il momento di r sarà doppio del triangolo $(r, \cdot rr', r')$, ed $= rr' sen\cdot rr'$.

Decomponiamo adesso il momento di r in tre momenti paralleli ai piani coordinati X_1, Y_1, Z_1 (§. 24 *d*). Indicando col simbolo MOM. la frase *momento di*, si avrà (§. 25 *f*)

$$^x(\text{MOM}.r)_{X_1} = {}^x(\text{MOM}.l + \text{MOM}.m + \text{MOM}.n)_{X_1}.$$

Ma $$^x(\text{MOM}.l)_{X_1} = 0,$$

$$^x(\text{MOM}.m+\text{MOM}.n)_{X_1} = (\S.\ 28\ e)\ (mn'-m'n)senX_1.$$

Dunque

$$^x(\text{MOM}.r)_{X_1}=(mn'-m'n)senX_1,$$

e similmente $$^y(\text{MOM}.r)_{Y_1}=(nl'-n'l)senY_1,$$

$$^z(\text{MOM}.r)_{Z_1}=(lm'-l'm)senZ_1.$$

Rappresentiamo tutti questi momenti con rette prese sugli assi de'loro piani a partire dalla origine O (§. 22 *c*). La retta $rr'sen{\cdot}rr'$, perpendicolare al piano (rr'), avrà nel senso degli assi supplementarii (x_1), (y_1), (z_1) le componenti

$(mn'-m'n)senX_1$, $(nl'-n'l)senY_1$, $(lm'-l'm)senZ_1$;

da qui la sua espressione.

d) Le proiezioni poi della retta $rr'sen{\cdot}rr'$ sugli assi (x), (y), (z), si otterranno moltiplicandone le nominate componenti rispettivamente per

$\dfrac{H}{senX_1}$, $\dfrac{H}{senY_1}$, $\dfrac{H}{senZ_1}$. Siffatte proiezioni sono proporzionali ai coseni degli angoli λ, μ, ν che l'asse del piano (rr') fa cogli assi (x), (y), (z) (§. 17 *b*), cioè

$$\frac{1}{\frac{1}{H}rr'sen{\cdot}rr'} = \frac{cos\lambda}{mn'-m'n} = \frac{cos\mu}{nl'-n'l} = \frac{cos\nu}{lm'-l'm}.$$

e) Se delle rette r, r' sono date le proiezioni (L, M, N), (L', M', N') sugli assi coordinati (x), (y), (z), per determinare l'angolo ${\cdot}rr'$, basterà considerare la formula (1) rispetto alle componenti di Hr, Hr' nel senso degli assi supplementarii: avremo

$$H^2rr'cos{\cdot}rr' = \begin{array}{r} LL'\,sen^2X_1 \\ MM'\,sen^2Y_1 - \\ NN'\,sen^2Z_1 \end{array}\left|\begin{array}{l} (MN'+M'N)senY_1senZ_1cosx \\ (NL'+N'L)senZ_1senX_1cosy \\ (LM'+L'M)senX_1senY_1cosz. \end{array}\right.$$

E si troverà che la retta $Hrr'sen{\cdot}rr'$ ha nel senso degli assi coordinati (x), (y), (z) le componenti

$$MN'-M'N\;,\; NL'-N'L\;,\; LM'-L'M.$$

f) Proiettiamo r sulle rette r', l', m', n': le corrispondenti proiezioni saranno $rcos{\cdot}rr'$, L, M, N; ed avremo (§. 20 *e*)

$$rr'cos{\cdot}rr' = l'L + m'M + n'N,$$

formula che risolve il seguente problema: *date nel senso degli assi* (x), (y), (z) *le componenti di una retta, e le proiezioni di un'altra retta, determinar l'angolo delle due rette.*

g) Nota. Le formule in *c*) ed *e*) somministrano l'area di un triangolo di cui siano date nel senso degli assi (x), (y), (z), le componenti o le proiezioni di due de'suoi lati r, r'. Supponiamo che i lati r, r' partano dal punto $\alpha\beta\gamma$ e vadano rispettivamente ai punti $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$: sarà $l=\alpha'-\alpha$, $m=\beta'-\beta$, $n=\gamma'-\gamma$; $l'=\alpha''-\alpha$, $m'=\beta''-\beta$, $n'=\gamma''-\gamma$. Quindi le aree componenti del triangolo $\frac{1}{2}rr'sen{\cdot}rr'$, parallele ai piani coordinati X_1, Y_1, Z_1, diventano

$$\tfrac{1}{2}\,[(\beta'-\beta)(\gamma''-\gamma)-(\beta''-\beta)(\gamma'-\gamma)]senX_1\;,$$
$$\tfrac{1}{2}\,[(\gamma'-\gamma)(\alpha''-\alpha)-(\gamma''-\gamma)(\alpha'-\alpha)]senY_1\;,$$
$$\tfrac{1}{2}\,[(\alpha'-\alpha)(\beta''-\beta)-(\alpha''-\alpha)(\beta'-\beta)]senZ_1\;;$$

e con esse si esprime il valore di un triangolo di cui sono dati i vertici (*).

(*) N. B. Ordinando il §. 28 nella guisa del §. presente, rileveremo che ivi le proiezioni L, M sono nel senso degli assi supplementarii le componenti di $rsen{\cdot}xy$, e con ciò avremo maggior copia d'immagini geometriche.

Equazione della retta nello spazio e sue proprietà.

58. *Trovar l'equazione di una retta riportata a tre assi coordinati* (x), (y), (z).

Soluz. Consideriamo sulla retta un segmento v che cominci dal punto $\alpha\beta\gamma$, e termini al punto variabile xyz: le componenti di v rispettivamente parallele agli assi (x), (y), (z), saranno $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. Per un punto qualunque dello spazio tiriamo parallela a v una linea r, le cui componenti parallele agli (x), (y), (z), siano l, m, n. Poichè le rette parallele sono proporzionali alle loro componenti omologhe, si avrà

$$(A) \;\ldots\; \frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=\frac{v}{r}.$$

Queste due equazioni appartengono soltanto alla retta condotta pel punto $\alpha\beta\gamma$ parallelamente alla risultante delle linee l, m, n, cioè ad una retta unica.

a) Esaminiamo le modificazioni che possono darsi alle quantità α, β, γ, l, m, n, senz'alterare la natura e la generalità dell'equazioni (A) della retta.

1.° α, β, γ sono le coordinate di un punto preso ad arbitrio sulla retta: questo punto si può dunque prendere nell'incontro della retta con uno de' piani determinato da due de'tre assi (incontro che esiste sempre, non potendo la retta esser parallela simultaneamente ai tre piani coordinati, senza esserlo alle loro intersezioni (x), (y), (z), e però senza che gli assi (x), (y), (z) siano paralleli tra loro): in questa ipotesi sarà zero la coordinata parallela al terzo asse; così se tale incontro è nel piano yz sarà $\alpha=0$. Pertanto senza derogare alla generalità dell' equazioni (A), noi possiamo supporre $=$ o una delle tre quantità α, β, γ.

Se la retta passa per l'origine, prendendo quivi il punto $\alpha\beta\gamma$, sarà $o = \alpha = \beta = \gamma$. Dunque l'equazion generale di ogni retta che passa per l'origine, è $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

2.° l, m, n sono nel senso degli assi (x), (y), (z), le componenti della retta r, alla quale debb'esser parallela la retta v rappresentata dall'equazioni (A): quindi i rapporti tra l, m, n, quali $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, servono a fissar la *direzione* della retta v. Riesce poi manifesto, immaginando la figura, che senza cangiare la posizione di r, una delle quattro quantità r, l, m, n, si può fissare ad arbitrio e farla $= 1$, e che poscia con essa resta fissata ciascuna delle altre due. Si avverta che tra r, l, m, n, e gli angoli $\cdot X_1 r$, $\cdot Y_1 r$, $\cdot Z_1 r$, $\cdot X_1 x$, $\cdot Y_1 y$, $\cdot Z_1 z$ esistono le relazioni (§. 23 b)

$$l = r\frac{sen{\cdot}X_1 r}{sen{\cdot}X_1 x},\ m = r\frac{sen{\cdot}Y_1 r}{sen{\cdot}Y_1 y},\ n = r\frac{sen{\cdot}Z_1 r}{sen{\cdot}Z_1 z}.$$

Concludiamo adunque che *senz'alterare la natura e la generalità dell'equazioni* (A) *della retta, è sempre lecito di supporre* $=$ o *una delle tre quantità* α, β, γ; *ed* $= 1$ *una delle quattro* r, l, m, n. *I rapporti tra* l, m, n *servono a fissar la direzione della retta* v, *mentre le quantità* α, β, γ, *ne fissano un punto: quindi variando soltanto i rapporti* $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, *la retta* (A) *gira intorno al punto* $\alpha\beta\gamma$, *e va-*

riando il punto $\alpha\beta\gamma$, *la retta* (A) *si muove parallelamente a se medesima.*

Nota. Per indicare la direzione determinata dai rapporti tra l, m, n, diremo *direzione* (l, m, n), o anche più semplicemente *direzione lmn*.

Osservazioni.

I. Dal modo, onde saranno scritte l'equazioni della retta (A), noi converremo che ciascuno rilevi da se medesimo (essendo cosa facilissima) quando si suppone = o una delle tre quantità α, β, γ; ed = 1 una delle quattro r, l, m, n. Per es. nell'equazioni

$v = \frac{x}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$, si è fatto $r = 1$, $\alpha = 0$;

mentre in $x = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$, si è fatto $l = 1$,

$\alpha = 0$. Si noti che in ciascuno di questi due sistemi di equazioni il numero delle costanti l, m, n, α, β, γ, è ridotto a quattro, cioè *al minimo*.

II. Due equazioni di primo grado fra tre coordinate x, y, z, potendosi ridurre alla forma

$y = mx + \beta$, $z = nx + \gamma$, donde $x = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$,

rappresentano una linea retta.

III. L'equazion della retta, che passa pe' punti $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, è

$$\frac{x-\alpha}{\alpha'-\alpha} = \frac{y-\beta}{\beta'-\beta} = \frac{z-\gamma}{\gamma'-\gamma}.$$

Infatti questa proporzionalità significa che le rette $(\alpha\beta\gamma.xyz)$, $(\alpha\beta\gamma.\alpha'\beta'\gamma')$ col punto comune $\alpha\beta\gamma$, hanno la stessa direzione (§. 58). Quindi affinchè i tre punti $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ siano in linea retta, è necessario e basta che si abbia

$$\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha}=\frac{\beta''-\beta}{\beta'-\beta}=\frac{\gamma''-\gamma}{\gamma'-\gamma}.$$

IV. *Affinchè due rette*

$$\text{(A)}\qquad \frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n},$$

$$\text{(A')}\qquad \frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma'}{n'},$$

siano parallele, è necessario e basta che si abbia (§. 57) $l:m:n::l':m':n'$; ed $l:m:n::l':m':n'::\alpha'-\alpha:\beta'-\beta:\gamma'-\gamma$, *affinchè coincidano.* Infatti quest'ultima proporzionalità significa che la retta $(\alpha\beta\gamma.\alpha'\beta'\gamma')$ avente le estremità sulle prime due, ha la stessa direzione delle medesime.

V. Se la retta (A) è parallela ad uno de' piani coordinati, per es. al piano xy, sarà $n=0$, e però $z-\gamma=n\frac{x-\alpha}{l}=0$. Quindi la retta (A) verrà rappresentata dalle due equazioni

$$z=\gamma,\ \frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m};$$

la prima delle quali rappresenta il piano condotto dall'estremo di $z=\gamma$, parallelamente al piano xy, e la seconda rappresenta in questo piano il corso della retta.

Se la retta (A) è parallela ad uno degli assi coordinati, per es. all'asse (z), sarà $0=l=m$, e però $x-\alpha=l\frac{z-\gamma}{n}=0$, $y-\beta=m\frac{z-\gamma}{n}=0$. Quindi la retta (A) verrà rappresentata dalle due equazioni $x=\alpha$, $y=\beta$; mentre il rapporto $\frac{z-\gamma}{n}=\frac{0}{0}$

è indeterminato. Dunque una retta parallela ad uno degli assi, ha le stesse equazioni che il punto di sua intersezione col piano determinato dagli altri due assi.

Equazione del piano, e sue proprietà.

59. *L'equazione*

(B) . . . . . . $Ax + By + Cz = D$

rappresenta un piano distante dalla origine O *dell' intervallo* $k = \frac{D}{g}$, *ove* g *è un segmento di tale distanza, avente sugli assi coordinati* (x), (y), (z) *le proiezioni* A, B, C.

Dim. Prendiamo, a partire dalla origine O, sull'asse (x) un segmento $OA = A$; sull'asse (y) un segmento $OB = B$; sull'asse (z) un segmento $OC = C$; e all'estremità di questi segmenti eleviamo sopra gli assi (x), (y), (z) tre piani perpendicolari, i quali concorreranno necessariamente in qualche punto g. Designata per g la retta Og, prendiamo sulla medesima (prolungata se occorre) un segmento

$Ok = \frac{D}{g} = k$, e sopra questo segmento nella sua estremità s'innalzi perpendicolare un piano indefinito : questo piano sarà il luogo geometrico dell' equazione (B). Infatti consideriamo in esso un punto qualunque $M = (x, y, z)$: OM avrà per componenti x, y, z (§. 56 f). Quindi il noto principio delle proiezioni (§. 20 e) fornisce

$$g.OM\cos gOM = x.A + y.B + z.C \ ;$$

ma $g.OM\cos gOM = gk = D$: dunque $D = Ax + By + Cz$. Così ogni punto xyz del nostro piano verifica questa equazione, ed inoltre si vede che non può verificarla altro punto al di là o al di qua del medesimo piano.

a) Risulta dalla fatta costruzione

1.° Che senz'alterare la natura e la generalità dell'equazione (B), si può sempre fissare ad arbitrio una delle quattro quantità g, A, B, C, e farla $= 1$, e che poscia con essa resta fissata ciascuna delle tre rimanenti. E ciò apparisce pure dalla formula (§. 57 *a* 1.°) vincolante g, A, B, C.

2.° Che i rapporti tra A, B, C servono a fissare la *direzione* di g, e conseguentemente del piano (B); mentre $D = gk$, serve a fissare la distanza k di tal piano dall'origine O. Quindi se facciamo variare i rapporti tra A, B, C, restando costante k, il piano (B) si muoverà in giro *toccando* continuamente una sfera del centro O e raggio k; e se facciamo variare k, restando costanti i rapporti tra A, B, C, il piano (B) *si muoverà parallelamente a se medesimo*.

3.° Se supponiamo che k parta dal punto $\alpha\beta\gamma$ e termini al punto $x'y'z'$, l'equazione

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=D$$

rappresenterà il piano che nel punto $x'y'z'$ tocca la sfera del centro $\alpha\beta\gamma$ e del raggio k. Siano ortogonali gli assi coordinati : presa $g = k$, sarà

$$A = x' - \alpha,\ B = y' - \beta,\ C = z' - \gamma,$$

ed il piano tangente di siffatta sfera diverrà

$$(x'-\alpha)(x-\alpha) + (y'-\beta)(y-\beta) + (z'-\gamma)(z-\gamma) = k^2$$

Osservazioni.

I. L'equazione di un piano (B) passante per l'origine delle coordinate, sarà $Ax+By+Cz=0$: dovendo essere in questo caso $k = 0$, e però $D = gk = 0$. Viceversa, ove sia $D = 0$, sarà $k = \frac{D}{g} = 0$, e il piano (B) passerà per l'origine.

II. Ogni equazione di primo grado fra tre coordinate x, y, z, potendosi ridurre alla forma $Ax + By + Cz = D$, rappresenta un piano; e l'equazioni di due piani rappresentano una retta.

III. Affinchè un piano (B) passi pel punto $\alpha\beta\gamma$, dovrà essere

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma = Ax + By + Cz,$$

donde . . . . . $A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma) = o;$

e la distanza di questo piano dall'origine sarà

$$k = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{g}.$$

IV. Il piano condotto pel punto $x'y'z'$ perpendicolarmente alla retta (A), è

$$\left.\begin{array}{l}(l + m\cos Z_1 + n\cos Y_1)(x - x') \\ + (m + n\cos X_1 + l\cos Z_1)(y - y') \\ + (n + l\cos Y_1 + m\cos X_1)(z - z')\end{array}\right\} = o.$$

Infatti se sopra la retta (A), perpendicolare al piano, prendiamo un segmento $g = r$; le proiezioni A, B, C di questo segmento sugli assi coordinati, saranno (§. 57 2.°) $l + m\cos Z_1 + n\cos Y_1$, $m + n\cos X_1 + l\cos Z_1$, $n + l\cos Y_1 + m\cos X_1$.

V. Il piano condotto pel punto $x'y'z'$ parallelamente a due rette (A), (A') non parallele, è

$$(mn'-m'n)(x-x')+(nl'-n'l)(y-y')+(lm'-l'm)(z-z')=o.$$

Infatti se sull'asse del piano (rr'), cioè del piano parallelo alle due rette (A), (A'), prendiamo un segmento $g = \frac{1}{H} rr' sen{\cdot}rr$, le proiezioni A, B, C di questo segmento sugli assi coordinati $(x), (y), (z)$, saranno (§. 57 *d*) $mn' - m'n$, $nl' - n'l$, $lm' - l'm$.

Se supponiamo che le due rette r, r', partano dal punto $\alpha\beta\gamma$, e terminino ai punti $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, avremo $l=\alpha'-\alpha,\ m=\beta'-\beta,\ n=\gamma'-\gamma;$

$l'=\alpha''-\alpha,\ m'=\beta''-\beta,\ n'=\gamma''-\gamma;$

e quindi l'equazione del piano che passa per tre punti dati $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$.

Se le due rette (A), (A′) siano parallele, sarà (a causa di $l : m : n :: l' : m' : n'$) $o = mn'-mn' = nl'-n'l=lm'-l'm$. In questo caso si prenderà per r' la retta che unisce i punti $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ di (A), (A′).

Condurre un piano per la retta (A) perpendicolarmente al piano (B), è lo stesso che condurlo per (A) parallelamente all'asse g del piano (B); e però è lo stesso che condurlo pel punto $\alpha\beta\gamma$ parallelamente alle due rette r, g.

VI. L'intersezione de'due piani

(B) . . . . $Ax+By+Cz=D$,

(B′) . . . . $A'x+B'y+C'z=D'$,

è rappresentata dalla proporzionalità

$$\frac{x-\alpha}{BC'-B'C}=\frac{y-\beta}{CA'-C'A}=\frac{z-\gamma}{AB'-A'B}=\frac{v}{Hgg'sen{\cdot}gg'},$$

supponendo che il punto $\alpha\beta\gamma$ sodisfi alle due equazioni (B), (B′). Infatti l'intersezione de' due piani (B), (B′) essendo perpendicolare agli assi g, g' de' medesimi, è pure perpendicolare al piano (gg') determinato da tali assi. Ciò posto, se in tale intersezione prendiamo un segmento $r = Hgg'sen{\cdot}gg'$, le componenti l, m, n di questo segmento secondo gli assi coordinati, saranno (§. 57 e) $BC'-B'C$, $CA'-C'A$, $AB'-A'B$.

VII. Affinchè due piani (B), (B′) siano paralleli, è necessario e basta che si abbia (§. 57)

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{g}{g'};\ \text{ed}\ \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$$

perchè coincidano. Infatti, poichè $\frac{D}{g} = k$, $\frac{D'}{g'} = k'$, ove sia $\frac{D}{D'} = \frac{g}{g'}$, sarà necessariamente $k = k'$. Così i due piani essendo paralleli, e di più alla stessa distanza dalla origine e dalla medesima parte, coincidono.

Se il piano (B) fosse parallelo ad uno degli assi coordinati, per es. a z; allora g, perpendicolare al piano (B), lo sarebbe pure a (z), e però sarebbe $C = o$: quindi l'equazione (B) diverrebbe $Ax + By = D$, cioè l'equazione del piano coinciderebbe coll'equazione della sua traccia nel piano xy.

Se il piano (B) fosse parallelo ad uno de' piani coordinati, per es. al piano xy; allora g, perpendicolare al piano (B), lo sarebbe pure agli assi (x), (y), e però sarebbe $o = A = B$: quindi (B) diverrebbe $Cz = D$, cioè l'equazione del piano coinciderebbe coll'equazione della sua traccia nell'asse (z).

VIII. Per aver la traccia che un piano (B) segna nel piano determinato da due degli assi coordinati, basta in (B) fare $= o$ la coordinata parallela al terzo asse. Così la traccia di (B) nel piano xy, è $Ax + By = D$.

Inclinazione delle rette e de' piani: distanze tra i punti, le rette ed i piani.

60. *Trovar l'angolo che fanno tra loro,* 1.° *le rette* (A) ed (A'), *ovvero i piani* (B), (B'); 2.° *la retta* (A) *e il piano* (B).

Soluz. 1.° Poichè le rette (A) e (A') declinano l'una dall'altra come le r, r', risultanti di (l, m, n),

(l', m', n'); e i piani (B) e (B') come i loro assi g, g', i quali sopra (x), (y), (z) hanno per proiezioni (A, B, C), (A', B', C'); il problema è risoluto al §. 57.

2.° La formula in f) del §. 57 somministra

$$gr\cos gr = lA + mB + nC.$$

Ora, poichè g e (B) sono perpendicolari tra loro, gli angoli che la retta r fa con g e (B), saranno complementarii, e però, chiamato θ l'angolo onde r declina da (B), sarà $\cos rg = \operatorname{sen}\theta$. Dunque

$$gr\operatorname{sen}\theta = lA + mB + nC.$$

a) Se (A) e (B) *sono perpendicolari tra loro*, le rette r e g essendo ambedue perpendicolari al piano (B), saranno parallele, e conseguentemente proporzionali alle loro proiezioni omologhe. Ed avremo (§. 57 2.°)

$$\frac{g}{r} = \frac{A}{l + m\cos Z_1 + n\cos Y_1} = \frac{B}{m + n\cos X_1 + l\cos Z_1}$$
$$= \frac{C}{n + l\cos Y_1 + m\cos X_1}.$$

b) Affinchè la retta (A) sia parallela al piano (B), è necessario e basta che sia

$$o = lA + mB + nC;$$

a cui aggiungendo

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D,$$

cioè l'ipotesi che il punto $\alpha\beta\gamma$ della retta (A) appartenga pure al piano (B), si avranno le condizioni perchè la retta (A) sia contenuta nel piano (B).

61. *Trovare la retta h condotta dal punto $\alpha'\beta'\gamma'$ sotto l'angolo θ 1.° ad un' altra retta* (A); 2.° *ad un piano* (B). [Stabiliremo le formule nella ipotesi che il punto $\alpha'\beta'\gamma'$ sia intermedio tra l'origine e la retta (A) o il piano (B)].

Soluz. 1.° Supponiamo che la retta r, risultante di l, m, n, parta dal punto $\alpha\beta\gamma$: la perpendicolare calata dal punto $\alpha'\beta'\gamma'$ sulla direzione di r, ossia sulla retta (A), sarà $= h sen\theta$. Quindi, rispetto al centro $\alpha'\beta'\gamma'$, la r avrà per momento $r.h sen\theta$, i cui momenti componenti paralleli ai piani coordinati X_1, Y_1, Z_1, saranno (§. 57 c)

$$[(\beta-\beta')n-m(\gamma-\gamma')]senX_1,$$
$$[(\gamma-\gamma')l-n(\alpha-\alpha')]senY_1,$$
$$[(\alpha-\alpha')m-l(\beta-\beta')]senZ_1.$$

Da qui il valore di $rh sen\theta$.

2.° La perpendicolare $h sen\theta$ calata dal punto $\alpha'\beta'\gamma'$ sul piano $Ax+By+Cz=D$, è uguale alla distanza che passa tra cotesto piano e il piano parallelo $Ax+By+Cz=A\alpha'+\beta B'+C\gamma'$ condotto pel punto $\alpha'\beta'\gamma'$; e però è uguale alla differenza tra le distanze $\frac{D}{g}$, $\frac{A\alpha'+B\beta'+C\gamma'}{g}$ che passano tra l'origine e cotesti piani paralleli: sarà dunque

$$h sen\theta=\frac{D-(A\alpha'+B\beta'+C\gamma')}{g}.$$

Se il piano (B) passa pel punto $x'y'z'$, sarà $D=Ax'+By'+Cz'$; e la distanza tra il punto $\alpha'\beta'\gamma'$ e il piano (B) diverrà

$$h sen\theta=\frac{A(x'-\alpha')+B(y'-\beta')+C(z'-\gamma')}{g}.$$

Se h designa il segmento della retta (A) compreso tra il punto $\alpha\beta\gamma$ e il piano (B), essendo $grsen\theta=lA+mB+nC$, sarà

$$h=r\frac{D-(A\alpha+B\beta+C\gamma)}{lA+mB+nC}.$$

Quindi, chiamato $x'y'z'$ il punto ove la retta (A) incontra (B), avremo per determinare x', y', z',

$$\frac{h}{r}=\frac{x'-\alpha}{l}=\frac{y'-\beta}{m}=\frac{z'-\gamma}{n}.$$

Nota. Se h è perpendicolare alla retta (A), o al piano (B), sarà $sen\theta=1$, e si avrà la soluzione del seguente problema: *trovare la perpendicolare condotta da un punto ad una retta, o ad un piano.*

a) Trovare il punto $x'z'y'$ ove la perpendicolare h condotta dal punto $\alpha'\beta'\gamma'$ alla retta (A), *o al piano* (B), *incontra* (A) o (B).

Soluz. 1.° La distanza k tra i punti $\alpha\beta\gamma$, $x'y'z'$ della retta (A), è uguale alla distanza tra i piani condotti pe' punti $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha\beta\gamma$ perpendicolarmente alla retta (A), e però si ha (§. 59. IV)

$$kr=\begin{cases}(l+m\cos Z_1+n\cos Y_1)(\alpha-\alpha')\\(m+n\cos X_1+l\cos Z_1)(\beta-\beta')\\(n+l\cos Y_1+m\cos X_1)(\gamma-\gamma').\end{cases}$$

Ciò posto, i valori delle coordinate $x'y'z'$ si trarranno dalla proporzionalità

$$\frac{k}{r}=\frac{x'-\alpha}{l}=\frac{y'-\beta}{m}=\frac{z'-\gamma}{n}.$$

2.° Poichè la perpendicolare

$h=\dfrac{D-(A\alpha'+B\beta'+C\gamma')}{g}$, è parallela a g, se per a,b,c si designino le componenti di g nel senso degli assi coordinati (§. 57 2.°), avremo per determinare x', y', z',

$$\frac{h}{g}=\frac{x'-\alpha'}{a}=\frac{y'-\beta'}{b}=\frac{z'-\gamma'}{c}.$$

Nota. La retta h condotta dal punto $\alpha'\beta'\gamma'$ alla retta (A) o al piano (B) sotto l'angolo θ, incontrerà (A) o (B) in un punto distante dal piede $x'y'z'$ della perpendicolare per un intervallo $= h\cos\theta$.

62. *Trovare la minima distanza h fra due rette* (A), (A').

Soluz. Pe' punti $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ delle due rette (A), (A'), conduciamo due piani paralleli alle medesime: essi conterranno rispettivamente le due rette; e la loro distanza (§. 59 V. 61 2.°)

$$h = \mathrm{H}\frac{(mn'-m'n)(\alpha'-\alpha)+(nl'-nl')(\beta'-\beta)+(lm'-l'm)(\gamma'-\gamma)}{rr'\operatorname{sen} rr'},$$

è uguale evidentemente alla minima distanza delle due rette.

Coroll. Se risulta $h=0$, le due rette (A) e (A') saranno evidentemente in un medesimo piano, e viceversa. Così *l'equazione*

$$0=(mn'-m'n)(\alpha'-\alpha)+(nl'-n'l)(\beta'-\beta)+(lm'-l'm)(\gamma'-\gamma),$$

esprime la condizione perchè due rette (A), (A') *siano in un medesimo piano.*

Trasformazione delle coordinate nello spazio.

63. *Trasformare le coordinate x, y, z, di un punto in altre coordinate x', y', z'.*

Soluz. Le coordinate della nuova origine O' rispetto all'antica O siano α, β, γ; e sia M il punto simboleggiato da xyz rispetto alla origine O; e da $x'y'z'$ rispetto alla origine O'. Da O' tiriamo al punto M la retta $O'M = v$: le componenti di v parallele ai primi assi (x), (y), (z), saranno $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; e le componenti di v dirette nel senso de' nuovi assi (x'), (y'), (z'), saranno x', y', z'. Ora queste componenti o sono *parallele* alle prime; od *oblique*.

Nel 1.° *caso* (poichè le proiezioni di una retta sovr'assi paralleli sono eguali) si avrà

$$\begin{matrix} x - \alpha = x' & & x = \alpha + x' \\ y - \beta = y', & \text{e però} & y = \beta + y' \\ z - \gamma = z' & & z = \gamma + z'. \end{matrix}$$

Nel 2.° *caso* (in cui è compreso pure il primo) proiettiamo v, x', y', z', sull'asse (x), essendo dirigente il piano $yz = X_1$: le corrispondenti proiezioni saranno $x - \alpha$, $x'\frac{sen \cdot X_1 x'}{sen \cdot X_1 x}$, $y'\frac{sen \cdot X_1 y'}{sen \cdot X_1 x}$, $z'\frac{sen \cdot X_1 z'}{sen \cdot X_1 x}$ (§. 17). Ora, per la definizione della risultante (§. 20), la prima di queste proiezioni debb' essere uguale alla somma delle seconde : dunque

$$x - \alpha = \frac{x' sen \cdot X_1 x' + y' sen \cdot X_1 y' + z' sen \cdot X_1 z'}{sen \cdot X_1 x};$$

e da quì per simmetria $y - \beta$, $z - \gamma$.

l, m, n siano nel senso degli assi (x), (y), (z) le componenti di una retta $= 1$, e parallela al nuovo asse (x'): sarà (§. 17 e 20 f)

$$l = \frac{sen \cdot X_1 x'}{sen \cdot X_1 x}, \; m = \frac{sen \cdot Y_1 x'}{sen \cdot Y_1 y}, \; n = \frac{sen \cdot Z_1 x'}{sen \cdot Z_1 z};$$

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 + 2(mn cos X_1 + nl cos Y_1 + lm cos Z_1).$$

Nel caso degli assi (x), (y), (z) ortogonali, le l, m, n saranno su i medesimi proiezioni ortogonali, e però

$$l = cos \cdot x'x, \; m = cos \cdot x'y, \; n = cos \cdot x'z.$$

Similmente una retta $= 1$ e parallela all'asse (y'), o (z'), abbia nel senso degli assi (x), (y), (z) le componenti l', m', n', o l'', m'', n'' ; queste componenti saranno vincolate dalle stesse formule che le l, m, n, purchè ad x' si sostituisca y', o z'.

Ciò posto, le formule generali per trasformare le coordinate diventano

$$x - \alpha = lx' + l'y' + l''z',$$
$$y - \beta = mx' + m'y' + m''z',$$
$$z - \gamma = nx' + n'y' + n''z'.$$

Nel passare da un sistema di assi ad un altro, converremo, giusta il costume, di sopprimer gli accenti alle nuove coordinate.

64. *Trasformare le coordinate ordinarie in coordinate polari, e viceversa* (§. 35).

Soluz. Sia $x'y'z'$ il polo, xyz un punto qualunque, v il raggio vettore del punto xyz, ed l, m, n siano nel senso degli assi (x), (y), (z), le componenti di una retta $= 1$ e parallela a v. Il raggio vettore v e la sua direzione (l, m, n) saranno le coordinate polari del punto xyz. Ciò posto, si ha

$$v = \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

donde $\quad x = lv + x', y = mv + y', z = nv + z';$

ove $\quad l = \frac{sen \cdot X_1 v}{sen \cdot X_1 x}, m = \frac{sen \cdot Y_1 v}{sen \cdot Y_1 y}, n = \frac{sen \cdot Z_1 v}{sen \cdot Z_1 z}.$

Viceversa

$$v = \left\{ \begin{matrix} (x - x')^2 \\ (y - y')^2 \\ (z - z')^2 \end{matrix} + 2 \left| \begin{matrix} (y - y')(z - z')\cos X_1 \\ (z - z')(x - x')\cos Y_1 \\ (x - x')(y - y')\cos Z_1 \end{matrix} \right. \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$l = \frac{x - x'}{v}, m = \frac{y - y'}{v}, n = \frac{z - z'}{v}.$$

Nel caso degli assi ortogonali sarà $l = \cos \cdot xv$, $m = \cos \cdot yv$, $n = \cos \cdot zv$. E se dinotiamo per θ l'angolo compreso tra il raggio r e il piano Z_1, e per φ l'angolo compreso tra l'asse (x) e la proiezione del raggio v sul piano Z_1, avremo

$\cos.zv = \operatorname{sen}\theta$, $\cos.xv = \cos\theta\cos\varphi$, $\cos.yv = \cos\theta\operatorname{sen}\varphi$;
delle quali formule le ultime due possono riguardarsi come una conseguenza del principio, che per proiettare una linea sopra un asse contenuto in un piano, si può proiettare dapprima sopra il piano, e poi proiettarne la proiezione sull'asse.

Equazioni generali delle più semplici superficie curve generate dal moto di una linea.

65. *Luogo geometrico di un punto o di una linea mobile*, è l'estensione in cui si trova successivamente il punto o la linea; e il punto si dice *generatore*, e la linea si dice *generatrice* dell'estensione.

Allorchè una superficie è il luogo geometrico di una linea che si muove secondo una legge assegnata radendo altre linee, queste seconde si chiamano *direttrici*.

Per trovar l'equazione del luogo geometrico, conviene, 1.° esprimer le leggi del moto generatore per mezzo di equazioni, riducendo al minimo numero le quantità variabili; 2.° eliminare queste quantità variabili in modo che ne risulti un' equazione tra le sole coordinate del punto generatore.

Gli esempi che seguono, daranno lume all'esposte nozioni.

a) Siano

$$(g) \qquad \varphi(x, y, z) = a, \quad \varphi'(x, y, z) = b,$$

l'equazioni di una retta generatrice, il cui moto sia soggetto alla legge espressa dall'equazione

$$(l) \qquad F(a, b) = 0,$$

la quale significa che le costanti arbitrarie *a*, *b* variano in guisa colla linea (*g*), che determinata l'una, lo è pure l'altra. Or qui surrogando ad a, b i loro valori $\varphi(x, y, z)$, $\varphi'(x, y, z)$, ove le coordinate x,y,z sono *correnti* per tutta l'estenzione della generatrice, si avrà

$$(l)' \qquad F[\varphi(x, y, z), \varphi'(x, y, z)] = 0 :$$

equazione che rappresenta la superficie generata dalla linea (g), giusta la legge assegnata (l).

Viceversa, ogni equazione della forma $(l)'$ rappresenta una superficie generata dalla linea (g) soggetta nel suo moto alla legge (l). Infatti, supposto che le quantità a, b variino continue in modo da verificare l'equazione (l), è palese che la generatrice (g) moventesi al variare di a, b, avrà ciascun de' suoi punti comuni colla superficie $(l)'$.

b) Supponiamo, per es., che la variazione di a, b, dipenda da ciò che la generatrice (g) si muova radendo la linea direttrice

$$(d) \qquad f(x, y, z) = 0, \; f'(x, y, z) = 0;$$

le coordinate x, y, z, relative ai punti comuni alla generatrice (g) ed alla direttrice (d), dovranno verificare le quattro equazioni (g) e (d): eliminandole da queste, ne risulterà tra a, b e quantità costanti un'equazione $F(a, b)=0$, da cui si dedurrà la superficie $(l)'$ generata dalla linea (g) conforme alla legge proposta.

66. *La superficie cilindrica* è il luogo geometrico di una retta che si muove parallelamente a se stessa, radendo una curva data.

Trovar l'equazion generale delle superficie cilindriche.

Soluz. Siano

$$Ax+By+Cz=D, \; A'x+B'y+C'z=D',$$

l'equazioni (g) della generatrice considerata come la intersezione di due piani che si muovono parallelamente a se medesimi. I coefficienti A,B,C, A′, B′, C′ si dovranno supporre costanti, e D, D′ variabili in modo che la determinazione dell'uno, tragga seco quella dell'altro, ossia che l'uno sia funzione dell'altro. Ciò posto, la legge (l) del moto generatore si riduce a $F(D, D') = 0$, la quale si troverà eliminando x, y, z dall'equazioni della generatrice e della direttrice. Quindi

$$F(Ax+By+Cz,\ A'x+B'y+C'z)=0$$

sarà l'equazion generale delle superficie cilindriche.

Se l'equazioni della generatrice (g) siano

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z}{n},$$

si dovrà supporre costante la direzione lmn, e variabile il punto $\left[\alpha=\frac{nx-lz}{n},\ \beta=\frac{ny-mz}{n}\right]$. Ciò posto, l'equazione delle superficie cilindriche assumerà la forma

$$F\left(\frac{nx-lz}{n},\ \frac{ny-mz}{n}\right)=0.$$

a) *Trovar l'equazione del cilindro obliquo avente per base una linea di second'ordine.*

Soluz. Siano $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z}{n}$ l'equazioni della retta generatrice; e

$$z=0,\ y^2=2px\mp\frac{p}{a}x^2,$$

quelle della curva direttrice. Eliminando da queste linee la x, y, z, ne risulterà tra α, β la relazione

$$\beta^2=2p\alpha\mp\frac{p}{a}\alpha^2,$$

esprimente la legge del moto generatore. Quindi l'equazion del cilindro richiesto sarà

$$(ny-mz)^2=2pn(nx-lz)\mp\frac{p}{a}(nx-lz)^2.$$

67. *Superficie conica* è il luogo geometrico di una retta, che si muove intorno ad un vertice radendo una curva data.

Trovar l' equazion generale delle superficie coniche.

Soluz. Sia $\alpha\beta\gamma$ il vertice della superficie conica; e

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

siano l'equazioni della retta generatrice. I rapporti $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ si dovranno supporre variabili in modo che la determinazione dell'uno tragga seco quella dell' altro. Ciò posto, la legge (l) del moto generatore si riduce a $F(\frac{l}{n}, \frac{m}{n})=0$, la quale si troverà eliminando x, y, z dall'equazioni della generatrice e della direttrice. Surrogando quivi ad l, m, n le quantità $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ rispettivamente proporzionali, si avrà

$$F(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma})=0,$$

per equazion generale delle superficie coniche.

a) Trovar l'equazione del cono avente per base una linea di second'ordine $z=0$, $y^2=2px\mp\frac{p}{a}x^2$.

Eliminando da questa linea direttrice e dalla generatrice le x, y, z, ne risulterà tra l, m, n la relazione

$$(\beta n - \gamma m)^2 = 2pn(\alpha n - \gamma l) \mp \frac{p}{a}(\alpha n - \gamma l)^2 ,$$

esprimente la legge (l) del moto generatore. Quindi l'equazione del cono richiesto sarà

$$(\beta z - \gamma y)^2 = 2p(z - \gamma)(\alpha z - \gamma x) \mp \frac{p}{a}(\alpha z - \gamma x)^2.$$

68. La superficie generata da una retta moventesi secondo una legge assegnata, da alcuni è detta superficie *storta*, da altri superficie *gobba*, e si potrebbe chiamare con maggior proprietà (a mio parere) *superficie rigata*. Se (come nelle superficie cilindriche e coniche) due posizioni successive della retta generatrice sono sempre in un piano, la superficie rigata prende il nome di *superficie sviluppabile*; potendosi, al pari delle superficie prismatiche e piramidali di cui sono limiti (§.36 *c nota*), svolgere e spandere in un piano senza rottura o duplicatura.

Trovar l'equazion della superficie generata da una retta, obbligata ad appoggiarsi sopra tre linee direttrici.

Soluz. Immaginiamo due coni $F\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)=0$, $f\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)=0$, abbracciati rispettivamente da due delle tre direttrici, e scorrenti col vertice comune $\alpha\beta\gamma$ la terza direttrice $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)=0$, $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=0$. La intersezione di questi coni, attraversando tutte e tre le direttrici, sarà la generatrice della nostra superficie. Dunque, eliminando α, β, γ da coteste quattro equazioni, l'equazion risultante sarà la dimandata. Se le direttrici che abbracciano i due coni, fossero rettilinee, i coni si aprirebbero in piani.

a) Trovar l'equazione della superficie rigata a tre direttrici rettilinee.

Soluz. Se due delle tre rette direttrici fossero in un piano, o tutte e tre parallele ad un piano, la superficie da generarsi non potrebbe essere che o un piano o impossibile, oppure una conoide della quale parleremo in appresso. Supposto che niuno di questi casi abbia luogo, prendiamo per assi coordinati tre rette parallele alle direttrici: l'equazioni di queste rette, come rispettivamente parallele agli assi (x), (y), (z), saranno quelle de'punti

$$(0, \beta, \gamma), (\alpha, 0, \gamma'), (\alpha', \beta', 0),$$

ne' quali esse attraversano i tre piani coordinati X_1, Y_1, Z_1. Ed è a notarsi non poter essere $\alpha' = \alpha$ a meno che le direttrici parallele a X_1 non siano in un medesimo piano contro l'ipotesi; nè, per eguale ragione, poter essere $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

I piani mobili attorno le prime due direttrici, siccome paralleli rispettivamente agli assi (x), (y), avranno per equazioni l'equazioni delle loro tracce nei piani X_1, Y_1 (§. 56 VI), cioè

$$z - \gamma = \frac{y - \beta}{m}, \quad z - \gamma' = \frac{x - \alpha}{l}.$$

Perchè la loro intersezione sia la generatrice, bisogna supporre che si muovano seguendo il punto corrente (α', β', z) della terza direttrice; e però che il loro moto, funzione di (l, m), sia diretto dalla legge

$$z = \gamma + \frac{\beta' - \beta}{m} = \gamma' + \frac{\alpha' - \alpha}{l}, \text{ donde}$$

$$-m(\alpha' - \alpha) + l(\beta' - \beta) - lm(\gamma' - \gamma) = 0.$$

Sottraendo $\gamma + \frac{\beta' - \beta}{m} = \gamma' + \frac{\alpha' - \alpha}{l}$ dalla generatrice

$z=\gamma+\frac{y-\beta}{m}=\gamma+\frac{x-\alpha}{l}$, si ottiene $\frac{x-\alpha'}{l}=\frac{y-\beta'}{m}$;

ed eliminando l, m da queste ultime due, si trova

$$(x-\alpha)(y-\beta')(z-\gamma)=(x-\alpha')(y-\beta)(z-\gamma'),$$

la quale si riduce al secondo grado, togliendone via il termine xyz comune ad ambedue i membri, e rappresenta la superficie richiesta. Poichè cotesta equazione è simmetrica rispetto ai due sistemi di quantità (α,β,γ), (α',β',γ'), ne segue che la nostra superficie può venir generata eziandio dalla retta

$$z-\gamma'=\frac{y-\beta'}{m'},\ z-\gamma=\frac{x-\alpha'}{l'},$$

il cui moto, funzione di (l', m'), è diretto dalla legge

$$-m'(\alpha-\alpha')+l'(\beta-\beta')-l'm'(\gamma-\gamma')=0.$$

Questa nuova generatrice incontra sempre la prima. Infatti nel loro incontro si ha

$$z-\gamma=\frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta}{m},\ z-\gamma'=\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta'}{m'};$$

e perchè ciò sia possibile, debbe aver luogo la condizione (§. 62)

$$(m-m')(\alpha-\alpha')+(l-l')(\beta'-\beta)+(l'm'-lm)(\gamma'-\gamma)=0;$$

condizione che esiste sempre, essendo la somma delle due seguenti

$$0=-m(\alpha'-\alpha)+l(\beta'-\beta)-lm(\gamma'-\gamma)=$$
$$-m'(\alpha-\alpha')+l'(\beta-\beta')-l'm'(\gamma-\gamma').$$

Dunque possiamo stabilire che la superficie rigata a tre direttrici rettilinee, 1.° può venir generata da due rette così tra loro vincolate, che *tre posizioni qualunque dell'una dirigano il movimento dell'altra*; 2.° che perciò due posizioni successive di una medesima generatrice sono sempre in un piano diverso, e che quindi *la superficie generata non è sviluppabile.*

b) Se per ciascuna di tre posizioni di una generatrice, ossia di tre direttrici, conduciamo due piani, paralleli rispettivamente alle altre due; ne risulteranno sei piani, i quali, essendo due a due paralleli a due delle tre direttrici e però tra di loro (§. 59 V), *chiuderanno un parallelepipedo: il centro di questo parallelepipedo sarà il centro della superficie. Dim.* Infatti 2α, 2β, 2γ siano tre spigoli contigui di cotesto parallelepipedo: se ne prendiamo il centro per origine delle coordinate, nell' equazioni superiori converrà porre $\alpha'=-\alpha$, $\beta'=-\beta$, $\gamma'=-\gamma$. Dopo ciò l'equazione della superficie diviene $(x-\alpha)(y+\beta)(z-\gamma)=(x+\alpha)(y-\beta)(z+\gamma)$, che sviluppata e fatte le riduzioni, si riduce a

$$\alpha yz-\beta zx+\gamma xy=\alpha\beta\gamma,$$

cioè di grado pari rispetto ai termini che contengono le coordinate, e dimostra che l'origine (centro del parallelepipedo) è il centro della superficie (§. 71 *d*), chiamata *iperboloide ad una falda.*

Se le tre direttrici fossero parallele ad un piano dato, i sei piani condotti (come sopra) per le medesime, si ridurrebbero a tre piani paralleli al dato, e il centro sarebbe a una distanza infinita, e la superficie generata sarebbe una *paraboloide iperbolica.*

69. *Superficie conoide* è il luogo geometrico di una retta che si muove parallelamente ad un piano *direttore*, nell'atto che va radendo una retta fissa ed una linea data. Qui, oltre il piano direttore, abbiamo due linee *direttrici*: la retta fissa è la prima direttrice, e la linea data è la seconda.

Trovar l' equazion generale delle superficie *conoidi. Soluz.* La retta generatrice può considerarsi come la intersezione che un piano

(1) $$Ax + By + Cz = D$$

moventesi parallelamente al piano dato, fa con altro piano

(2) $$A'(x-\alpha)+B'(y-\beta)+C'(z-\gamma)=o,$$

condotto per la direttrice

(3) $$\frac{x'-\alpha}{l}=\frac{y'-\beta}{m}=\frac{z'-\gamma}{n},$$

e mobile attorno la medesima. In questa ipotesi sono variabili i coefficienti D, A′, B′, C′; ma i tre ultimi sono vincolati dalla condizione (§. 60 *b*)

$$lA' + mB' + nC' = o.$$

Da questa e dalla (2) eliminando C′, risulta

$$\frac{A'}{B'}=\frac{(z-\gamma)m-n(y-\beta)}{n(x-\alpha)-l(z-\gamma)}.$$

Così la generatrice (*g*) è rappresentata dalle due equazioni

$$Ax+By+Cz=D,\ \frac{A'}{B'}=\frac{(z-\gamma)m-n(y-\beta)}{n(x-\alpha)-l(z-\gamma)},$$

ed il suo moto è diretto da una legge funzione di $(D, \frac{A'}{B'})$. Dunque

$$F(Ax+By+Cz,\ \frac{(z-\gamma)m-n(y-\beta)}{n(x-\alpha)-l(z-\gamma)})=o,$$

è l'equazion generale delle conoidi.

a) *Trovar l'equazion della conoide generata da una retta moventesi parallelamente al piano xy nell'atto che si appoggia sull'asse* (*z*), *e sopra una linea di second'ordine* $x=\alpha$, $z^2 = 2py \mp \frac{p}{a}y^2$.

Soluz. In questa ipotesi l'equazioni della generatrice saranno (§. 58 V)

$$z = \delta,\ y = \mu x.$$

Eliminando da queste e dalle precedenti $x, y, z,$ ne risulterà tra δ e μ la relazione

$\delta^2 = 2p\alpha\mu \mp \frac{p}{a}\alpha^2\mu^2$, esprimente la legge del moto generatore. Quindi l'equazione della conoide richiesta sarà $z^2x^2 = 2p\alpha xy \mp \frac{p}{a}\alpha^2y^2$.

b) Trovar l'equazion. della conoide, allorchè le linee direttrici sono due rette. Soluz. L'asse (z) sia una delle direttrici; l'asse (x) sia la retta che passa pe' punti ove le direttrici attraversano il piano direttore; l'asse (y) sia la linea incisa nel piano direttore dal piano condotto per (z) parallelamente all'altra direttrice. Questa seconda direttrice parallela al piano zy, e secante l'asse (x) in un punto $x = d$, sarà

$$x = d,\ y = mz.$$

E la generatrice parallela al piano direttore xy, sarà

$$z = \delta,\ y = \mu x;$$

e però il suo moto, funzione di (δ, μ), si troverà (eliminando x, y, z) diretto dalla legge $\frac{\mu}{\delta} = \frac{m}{d}$.

Quindi $$\frac{zx}{y} = \frac{d}{m},$$

è l'equazione della conoide richiesta.

Nota. Questa equazione essendo simmetrica rispetto a z, x, ne segue che la proposta superficie può venir generata eziandio dalla retta

$$x = \delta',\ y = \mu' z,$$

il cui moto, funzione di (δ',μ'), è diretto dalla legge $\frac{\mu'}{\delta'}=\frac{m}{d}$. *Questa nuova generatrice incontra sempre la prima.* Imperocchè la condizione del loro incontro esige che si abbia $\frac{\mu}{\delta}=\frac{\mu'}{\delta'}$.
E questa relazione esiste sempre in virtù della legge $\frac{m}{d}=\frac{\mu}{\delta}=\frac{\mu'}{\delta'}$, che dirige il moto dell'una e dell'altra generatrice. Pertanto, poichè il moto di una retta è determinato, se la retta sia obbligata ad appoggiarsi sopra tre rette fisse, possiamo stabilire, 1.° che la conoide in questione può venir generata da due rette così tra loro vincolate, che *tre posizioni qualunque dell'una parallele ad un piano, dirigano il movimento dell'altra*; 2.° che non può esistere simile vincolo, senza che *ciascuna delle generatrici si muova sempre parallelamente ad un piano, ed incontri l'altra in ogni sua posizione*; 3.° Che, siccome i piani paralleli dividono in parti proporzionali le rette che insieme attraversano, così le successive posizioni di una generatrice dividono in parti proporzionali tutte le diverse posizioni dell'altra; 4.° Che due posizioni successive di una medesima generatrice sono sempre in un piano diverso, e che quindi la superficie generata *non è sviluppabile*.

70. *Superficie di rivoluzione* è il luogo geometrico di una curva che rota intorno ad un asse fisso, chiamato *asse di rotazione*.

Trovar l'equazion generale delle superficie di rivoluzione.

Soluz. La superficie di rivoluzione può anche supporsi generata da un circolo di raggio variabile, perpendicolare all'asse di rotazione, e scorrente col centro lungo il medesimo asse. Tale circolo generatore potrà rappresentarsi così

$$Ax+By+Cz=D,\ \rho^2=\begin{matrix}(x-\alpha)^2\\(y-\beta)^2\\(z-\gamma)^2\end{matrix}+2\left|\begin{matrix}(y-\beta)(z-\gamma)\cos X_1\\(z-\gamma)(x-\alpha)\cos Y_1\\(x-\alpha)(y-\beta)\cos Z_1\end{matrix}\right.,$$

cioè come la sezione che un piano mobile, e perpendicolare all'asse di rotazione, incide in una sfera di raggio variabile ρ, e col centro $\alpha\beta\gamma$ nell'asse di rotazione. Secondo questa convenzione, sono variabili le quantità D, ρ^2, e l'una funzione dell'altra. Quindi la legge del moto generatore si riduce a

$$F(D,\ \rho^2)=0\ ;$$

la quale, surrogati a D, ρ^2 i loro valori, rappresenterà l'equazion generale delle superficie di rivoluzione.

a) Trovar l'equazione della superficie nata dalla rivoluzione attorno l'asse (x), 1.° di una linea di second'ordine $z=0,\ y^2=2px\mp\frac{p}{a}x^2$; *2.° di una retta* $x=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$.

Soluz. Supposti gli assi ortogonali, il circolo generatore sarà

$$x=D,\quad \rho^2=x^2+y^2+z^2;$$

il cui moto, funzione di $(D,\ \rho^2)$, si troverà (eliminando x,y,z) diretto dalla legge 1.° $\rho^2-D^2=2pD\mp\frac{p}{a}D$; 2.° $\rho^2-D^2=(mD+\beta)^2+(nD+\gamma)^2$. Quindi l'equazione della superficie richiesta sarà

1.° $a(y^2+z^2)\mp px^2-2apx=0$;

2.° $y^2+z^2-(m^2+n^2)x^2-2(m\beta+n\gamma)x-(\beta^2+\gamma^2)=0$.

Nota. Secondochè un'iperbola rota intorno l'asse trasverso o immaginario, la superficie generata si chiama *iperboloide di rivoluzione a due falde* o *ad una falda*. La superficie generata da una retta rotante intorno ad un asse, è, come vedremo, una iperboloide di rivoluzione ad una falda.

L'equazioni generali delle superficie cilindriche, coniche, conoidi e di rivoluzione, possono servire di criterio per conoscere se una data equazione rappresenti una delle nominate superficie. Criterii più diretti sono forniti dal calcolo infinitesimale.

Superficie algebriche in generale.

Loro ordine, piano diametrale, centro.

71. Le nozioni generali, che si sono date intorno le curve algebriche, si applicano del pari alle superficie, con la sola differenza che il corso delle prime si rappresenta con due coordinate, e con tre lo spandersi delle seconde. Pertanto noi quì ci limiteremo a dare alcune definizioni, e ad enunciare alcuni teoremi che si dimostrano nel modo medesimo che per le curve.

a) *Una superficie del n^{simo} ordine non può venir traforata da una retta in più di n punti*(§.36.*a*).

b) In una superficie curva si chiama *superficie diametrale* il luogo geometrico del punto medio di una corda moventesi parallelamente a se medesima. Tutte le corde parallele dimezzate da una superficie si diranno *corde coniugate a tale superficie*, e viceversa una superficie si dirà *coniugata* alle corde parallele che dimezza. In generale una retta si dirà coniugata ad una superficie, se sia parallela alle corde coniugate a tale superficie.

Un piano diametrale perpendicolare alle sue corde coniugate, si chiama *piano principale della superficie*.

Due piani diametrali si dicono *coniugati*, se le corde coniugate all'uno, sono parallele all'altro.

c) *Se per uno de' punti ove un piano diametrale attraversa la superficie curva, si conduce una retta parallela alle corde coniugate ad esso piano, tale retta sarà tangente.* Infatti è palese che in ciascuno de' punti ove un piano diametrale attraversa la superficie curva, ivi ne svanisce la corda coniugata, e però ivi la secante che nasce dal prolungamento della corda, riunendo in un solo i due punti comuni colla superficie curva, si trasmuta in tangente.

Viceversa, ogni retta che tocchi la superficie curva in un punto dato, può sempre supporsi parallela a un sistema di corde coniugate ad una superficie diametrale passante pel punto dato.

d) In una superficie curva si chiamerà *diametro* il luogo geometrico del centro di una sezione simmetrica, moventesi parallelamente a se medesima. Tutte le sezioni simmetriche e parallele, pel cui centro passa il diametro, si diranno *coniugate* al diametro; e questo coniugato a quelle. In generale, diremo piano coniugato ad un diametro, ogni piano parallelo alle sezioni coniugate al diametro. Similmente una retta passante pel diametro, e contenuta nel piano coniugato al medesimo, si dirà *linea coniugata al diametro*.

e) È manifesto, che laddove il diametro attraversa la superficie curva, ivi ne svanisce la sezione coniugata, e però ivi il piano che nasce dal prolungamento di tale sezione, si trasmuta in piano tangente. Ora questo piano tangente debbe d'altronde esser parallelo a tutte le corde coniugate alle superficie diametrali che passano pel punto di contatto; dunque il diametro dovrà trovarsi sopra ciascuna di tali superficie, dimezzando al pari di esse le corde coniugate; sarà dunque la loro comune intersezione. Pertanto, *allorchè le superficie diametrali sono piani* (come nelle superficie di second'ordine), *i diametri saranno linee rette.*

Un diametro rettilineo perpendicolare alle sezioni coniugate, si dice *asse principale* della superficie.

f) *Centro* di una superficie curva è il centro di simmetria della medesima, vale a dire il punto ove restano dimezzate tutte le corde che vi passano.

Se una superficie sia simmetrica intorno ad un centro, preso questo per origine delle coordinate, l'equazione di tal superficie dovrà riuscire di grado pari rispetto ai termini che contengono le coordinate, e viceversa (§. 36 *d*)

Una superficie algebrica non può avere più di un centro di simmetria, a meno che non consista in un sistema di rette parallele, cioè in piani paralleli o in superficie cilindriche (ivi).

CAPO SECONDO.

Superficie di second'ordine.

Equazion generale e sua trasformazione, centro, piani diametrali e riduzione dell'equazion generale.

72. L'equazion generale delle superficie di second'ordine riferite a un sistema qualunque di assi coordinati (x), (y), (z), può presentarsi sotto la forma

$$(A) \ldots \begin{array}{l} Ax^2 \\ By^2 \\ Cz^2 \end{array} + 2\left|\begin{array}{l} A'yz \\ B'zx \\ C'xy \end{array}\right. - 2\left|\begin{array}{l} A''x \\ B''y \\ C''z \end{array}\right. - D = o,$$

simmetrica rispetto ai tre sistemi di quantità

(x, A, A', A''), (y, B, B', B''), (z, C, C', C''),

restando essa invariabile, allorchè si alternano le lettere di un sistema colle corrispondenti lettere di uno qualunque de'rimanenti sistemi.

Si noti 1.° che i coefficienti A, B, C, A', B', C' non possono supporsi nulli simultaneamente, senza che l'equazione (A) cessi di essere di secondo grado; 2.° che divisa l'equazione (A) per uno de'suoi coefficienti, questi si riducono a *nove*; e che per conseguenza da questi *nove* dipende essenzialmente la natura della superficie correlativa.

a) *La sezione fatta da un piano in una superficie di second'ordine è una linea di second'ordine, od una retta. Dim.* Infatti è sempre permesso di prendere nel piano secante due de'tre assi coordinati, per es. gli assi (x), (y): in questa ipotesi la equazione della sezione sarà ciò che diventa (A), quando vi si pone $z=o$, cioè un'equazione di secondo grado tra le coordinate x, y; oppure di primo grado nel caso che riuscisse

$$o = A = B = C'.$$

b) *Nelle superficie di second'ordine due sezioni piane e parallele, ma non iperboliche, sono simili.*

Dim. Facciamo scorrere paralleli a se stessi i piani coordinati, trasportandone l'origine in un punto qualunque $\alpha\beta\gamma$, e però surrogando $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ ad x, y, z. Per questa sostituzione i termini della seconda dimensione nell'equazione (A), si manterranno evidentemente i medesimi. Ora è noto che due linee di second'ordine, non iperbole, sono simili, se le loro equazioni fra coordinate di eguale obliquità, presentano rispettivamente identici i termini della seconda dimensione (§. 55. *nota*). Dunque la nuova sezione, che nella superficie (A) fa per es. il piano xy, è simile alla sezione parallela che vi faceva nella posizione primitiva; e *le linee dell'una sono parallele e proporzionali alle linee omologhe dell'altra.*

Allorchè poi due sezioni parallele sono iperbole, se non riescono simili, l'una sarà simile alla iperbola coniugata dell'altra.

c) *Nell'equazione* (A) *trasformare le coordinate in altre di origine e direzione diversa, e poscia in coordinate polari.*

Soluz. 1.° Alle coordinate x, y, z converrà sostituire (§. 63)

$lx+l'y+l''z+\alpha, mx+m'y+m''z+\beta, nx+n'y+n''z+\gamma,$

ove lmn, $l'm'n'$ $l''m''n''$, rappresentano le direzioni de' nuovi assi coordinati (x'), (y'), (z'). Avvertendo essere simmetrici i tre sistemi di quantità

$(x, l, l'l'', A, A', A'')$, $(y, m, m'm'', B, B'B'')$, $(z, n, n'n'', C, C', C'')$,

tale sostituzione può eseguirsi a colpo d'occhio determinando successivamente i coefficienti P, 2Q, $-2R$ di x^2, yz, x, e deducendo per simmetria i coefficienti (P', 2Q', $-2R'$), (P'', 2Q'', $-2R''$) di

$(y^2, zx, y)\,(z^2, xy, z)$. Designiamo per $-S$ il complesso de' termini senza coordinate. Ove si noti che ciascuno di questi coefficienti debbe comporsi di tre parti simmetriche rispetto agli accennati sistemi di quantità, e che perciò basta conoscer l'una di tali parti per dedurne in simmetria ciascuna delle altre due, troveremo assai rapidamente

$$P = \begin{array}{l} Al^2 \\ Bm^2 \\ Cn^2 \end{array} + 2\left|\begin{array}{l} A'mn \\ B'nl \\ C'lm \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} (Al + B'n + C'm)l \\ (Bm + C'l + A'n)m \\ (Cn + A'm + B'l)n \end{array}\right. ,$$

vale a dire: P, *coefficiente di x^2, è ciò che diventano nell'equazione* (A) *i termini della* 2ª *dimenzione in x, y, z, allorchè ad x, y, z, surroghiamo l, m, n.* In virtù della simmetria, P', P'' è ciò che diviene P se ad l, m, n si sostituisce l', m', n', ovvero l'', m'', n''.

$$Q = \begin{array}{l} Al'l'' \\ Bm'm'' \\ Cn'n'' \end{array} + \left|\begin{array}{l} A'(m'n'' + m''n') \\ B'(n'l'' + n''l') \\ C'(l'm'' + l''m') \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (Al' + B'n' + C'm')l'' \\ (Bm' + C'l' + A'n')m'' \\ (Cn' + A'm' + B'l')n'' \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} (Al'' + B'n'' + C'm'')l' \\ (Bm'' + C'l'' + A'n'')m' \\ (Cn'' + A'm'' + B'l'')n' \end{array}\right. ;$$

$$-R = \begin{array}{l} (Al + B'n + C'm)\alpha \\ (Bm + C'l + A'n)\beta \\ (Cn + A'm + B'l)\gamma \end{array} - \left|\begin{array}{l} A''l \\ B''m \\ C''n \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} (A\alpha + B'\gamma + C'\beta - A'')l \\ (B\beta + C'\alpha + A'\gamma - B'')m \\ (C\gamma + A'\beta + B'\alpha - C'')n. \end{array}\right.$$

Si ottiene Q', Q'' se in Q ad $l'm'n'$, $l''m''n''$ si sostituisce $l''m''n''$, lmn, oppure lmn, $l'm'n'$. Si ottiene poi R', R'', se in R ad lmn si sostituisce $l'm'n'$, oppure $l''m''n''$.

Infine è facile a vedere, che $-S$ *è ciò che diventa il primo membro di* (A), *allorchè ad x, y, z surroghiamo α, β, γ.*

Poste queste determinazioni, (A) si muta in

$$(A)_1 \ldots\ldots \begin{array}{l} Px^2 \\ P'y^2 \\ P''z^2 \end{array} + 2\left|\begin{array}{l} Qyz \\ Q'zx \\ Q''xy \end{array}\right. - 2\left|\begin{array}{l} Rx \\ R'y \\ R''z \end{array}\right. - S = 0$$

2.° Sia $\alpha\beta\gamma$ il polo, e $v=\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$, il raggio vettore del punto xyz della superficie (A). Converrà sostituire in (A) (§.64) $x=lv+\alpha$, $y=mv+\beta$, $z=nv+\gamma$. Il risultato di tale sostituzione sarà evidentemente ciò che diventa $(A)_1$, se in essa facciamo $o=y=z$, ed $x=v$: sarà dunque

$(A)_2$ . . . . $Pv^2-2Rv-S=o$.

Nota. Se la retta v è tutta nella superficie, $(A)_2$ dovrà verificarsi indipendentemente da v, e però essere

$$o=P=R=S.$$

Se la secante v riunisce in un solo i due punti comuni colla superficie, trasformandosi in tangente; $(A)_2$ dovrà avere uguali le sue radici, e però risolversi in

$$R^2+PS=o,\ v=\frac{R}{P}.$$

La prima di queste equazioni esprime la condizione, cui debbe sodisfare la direzione lmn della tangente v di cui $\alpha\beta\gamma$ è un punto. Quindi 1.° supponiamo $\alpha\beta\gamma$ un punto corrente xyz di v; $R^2+PS=o$ rappresenterà la superficie luogo geometrico di tutte le tangenti aventi la direzione lmn, cioè *un cilindro circoscritto*; 2.° sostituiamo $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ ad l,m,n; $R^2+PS=o$ rappresenterà la superficie luogo geometrico delle tangenti che partono dal punto $\alpha\beta\gamma$; e però *un cono circoscritto* se $\alpha\beta\gamma$ è fuori della superficie, e se $\alpha\beta\gamma$ è sulla superficie, essa cangiata in $R=o$ (a causa di $S=o$) rappresenterà un piano tangente nel punto $\alpha\beta\gamma$.

Infine se la tangente v si voglia infinita o asintoto, sarà

$$P = \frac{R}{\nu} = \frac{R}{\infty} = 0\,;\ \text{e}\ 0 = R^2 + PS = R\,.$$

Di queste due equazioni la seconda $R = 0$ (sostituendo x, z, y ad α, β, γ) rappresenta *un piano asintotico*, cioè un piano che comprende tutti gli asintoti paralleli alla direzione lmn di una retta qualunque contenuta nella superficie rappresentata (sostituendo $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ ad l, m, n) dalla prima $P=0$.

e) Centro. *Dato che esista il centro*, per *determinarne le coordinate* α, β, γ, basta trasportare nel medesimo l'origine degli assi: dopo simile trasporto, la trasformata $(A)_1$ dovrà risultare omogenea rispetto ai termini affetti dalle coordinate, qualunque sia la loro direzione (§.71 *d*): dovrà dunque aversi $0 = R = R' = R''$. Ora queste equazioni, dovendo verificarsi indipendentemente dalle direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$, si risolvono in

$$(1) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} A'' &= A\alpha + B'\gamma + C'\beta \\ B'' &= B\beta + C'\alpha + A'\gamma \\ C'' &= C\gamma + A'\beta + B'\alpha; \end{aligned}$$

donde (combinando la prima colla seconda per eliminare β, e poi alternando nel risultato α e γ) si deriva

$$(AB - C'^2)\alpha + (BB' - C'A')\gamma = BA'' - C'B'',$$
$$(BB' - C'A')\alpha + (BC - A'^2)\gamma = BC'' - A'B'';$$

ed eliminando γ,

$$[(AB - C'^2)(BC - A'^2) - (BB' - C'A')^2]\,\alpha =$$
$$(BC - A'^2)(BA'' - C'B'') - (BB' - C'A')(BC'' - A'B'').$$

Dunque

$$\alpha = \frac{(BC - A'^2)A'' - (CC' - A'B')B'' - (BB' - C'A')C''}{ABC + 2A'B'C' - (AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)}$$

e per simmetria

$$\beta = \frac{(CA-B'^2)B''-(AA'-C'B')C''-(CC'-A'B')A''}{ABC+2A'B'C'-(AA'^2+BB'^2+CC'^2)}$$

$$\gamma = \frac{(AB-C'^2)C''-(BB'-C'A')A''-(AA'-B'C')B''}{ABC+2A'B'C'-(AA'^2+BB'^2+CC'^2)}$$

Pertanto ogni volta che il denominatore

$$ABC+2A'B'C'-(AA'^2+BB'^2+CC'^2)= U$$

non è zero, le coordinate $\alpha\beta\gamma$ hanno un valore finito, ed è certa l'esistenza del centro. Più sotto vedremo la verità dell'inverso, vale a dire se il surriferito denominatore riesce=o, il centro non esiste.

Nota. 1.° Dalle (1) si trae

$$A''\alpha+B''\beta+C''\gamma=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2(A'\beta\gamma+B'\gamma\alpha+C'\alpha\beta)$$

e quindi

$$S = D + A''\alpha + B''\beta + C''\gamma$$

$$=D+\frac{1}{U}\left|\begin{matrix}(BC-A'^2)A''^2\\(CA-B'^2)B''^2\\(AB-C'^2)C''^2\end{matrix}\right. -\frac{2}{U}\left|\begin{matrix}(AA'-C'B')B''C''\\(BB'-C'A')C''A''\\(CC'-A'B')A''B''.\end{matrix}\right.$$

In questo caso, (A)$_2$ divenuta $P\rho^2-S$, somministra

$$\rho^2=\frac{S}{P},$$

e quindi il valore di un raggio ρ condotto dal centro alla curva, datane la direzione *lmn*.

2.° Se debbasi trasportare l'origine delle coordinate nel centro, senza mutarne la direzione, allora (A) (fatto $l = 1$, $o = m = n$; $m'=1$, $o=l'=n'$; $n''=1$, $o=l''=m''$) diverrà

$$\left.\begin{matrix}Ax^2\\By^2\\Cz^2\end{matrix}\right. +2\left|\begin{matrix}A'yz\\B'zx\\C'xy\end{matrix}\right. -2\left|\begin{matrix}A''\alpha\\B''\beta\\C''\gamma\end{matrix}\right. -D=o.$$

f) Piani diametrali. *Determinare una superficie diametrale*, è (per la definizione §. 71 *b*) lo stesso

so che determinare il luogo geometrico del punto medio $\alpha\beta\gamma$ di una corda 2ν moventesi parallelamente a se medesima. La semicorda ν, partendo dal punto $\alpha\beta\gamma$ e terminando al punto xyz della superficie (A), è rappresentata dall'equazione
$\nu = \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$. Sostituendo in (A)
$x = l\nu + \alpha$, $y = m\nu + \beta$, $z = n\nu + \gamma$, otterremo il risultato $(A)_2$, ove la direzione lmn di ν si deve supporre costante, e corrente il punto medio $\alpha\beta\gamma$. Ora l' equazione $(A)_2$ non può dare per la semicorda ν due valori eguali e di segno contrario, come si richiede, se non sia

$$o = -R = \begin{cases} (Al + B'n + C'm)\alpha \\ (Bm + C'l + A'n)\beta - \\ (Cn + A'm + B'l)\gamma \end{cases} \begin{vmatrix} A''l \\ B''m \\ C''n. \end{vmatrix}$$

Ma questa condizione dimostra che $\alpha\beta\gamma$, punto medio di 2ν, scorre sul piano

$$(R) \ldots\ldots \begin{cases} (Al + B'n + Cm)x \\ (Bm + C'l + A'n)y = \\ (Cn + A'm + B'l)z \end{cases} \begin{cases} A''l \\ B''m, \\ C''n \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (Ax + B'z + C'y - A'')l \\ (By + C'x + A'z - B'')m = o \\ (Cz + A'y + B'x - C'')n \end{cases}$$

equazione che è verificata dalle coordinate del centro. Dunque *ogni superficie diametrale è un piano, e passa pel centro quando il centro esiste* (*).

(*) N. B. Designato per u il 1.º membro dell'equazione (A), ove si adoperino i simboli del calcolo infinitesimale, l'equazione (R) del piano diametrale potrà presentarsi sotto una delle due forme seguenti

1ª $\frac{1}{2}\left(\frac{dP}{dl}x + \frac{dP}{dm}y + \frac{dP}{dn}z\right) = A''l + B''m + C''n$;

2.ª $\frac{du}{dx}l + \frac{du}{dy}m + \frac{du}{dz}n = o.$

Dunque tre piani diametrali, che non s'intersechino lungo una medesima retta, manifesteranno col loro concorso *se* e *dove* esiste il *centro*.

La direzione lmn delle corde coniugate al piano diametrale $R=o$, si dirà *direzione coniugata a tale piano*, e viceversa.

Per *trovare un piano diametrale coniugato ad una data direzione*, si conducano tre corde parallele alla data direzione: il piano determinato dai loro punti di mezzo, sarà il richiesto.

Se la direzione $l'm'n'$ sia parallela al piano diametrale (R), avremo pel noto teorema (§. 60 *b*)

$$o=\begin{cases} l'(Al+B'n+C'm) \\ m'(Bm+C'l+A'n) \\ n'(Cn+A'm+B'l) \end{cases} = \begin{cases} l(Al'+B'n'+C'm') \\ m(Bm'+C'l'+A'n')=Q'. \\ n(Cn'+A'm'+B'l') \end{cases}$$

Ora questa identità dimostra che, *se la direzione lmn delle corde coniugate a un piano diametrale $R=o$, è parallela ad un altro piano diametrale $R'=o$; anche la direzione $l'm'n'$ delle corde coniugate a questo è parallela al primo, e i due piani diametrali sono coniugati tra loro.*

g) *Trovar l'angolo compreso tra una corda e il piano coniugato.*

Soluz. Designiamo per p la retta che sugli assi primitivi (x), (y), (z), ha per proiezioni ortogonali

$$Al+B'n+C'm,\ Bm+C'l+A'n,\ Cn+A'm+B'l,$$

L'angolo θ che la corda $2v$ fa col piano coniugato (R), si avrà da (§. 60)

$$p sen\theta=\begin{cases} (Al+B'n+C'm)l \\ (Bm+C'l+A'n)m=P. \\ (Cn+A'm+B'l)n \end{cases}$$

Se risulti $P=o$, sarà $sen\theta=o$, e per conseguente la corda $2v$ parallela al piano coniugato, da cui deve esser dimezzata: assurdo manifesto. Dunque *la con-*

dizione essenziale all'esistenza di una corda parallela ad una data direzione lmn, e del piano coniugato (R), *si riduce a ciò che non riesca* P=o.

Intanto noi conosciamo il significato geometrico de'coefficienti R, Q, P dell'equazione $(A)_1$. R=o è l'equazione di un piano coniugato alla direzione lmn; Q''=o esprime la condizione perchè la direzione $l'm'n'$ sia parallela o contenuta in tale piano; e $P=p\,sen\theta$ somministra l'angolo θ compreso tra cotesto piano e le corde coniugate.

h) Ridurre l'equazione $(A)_1$ *alla forma più semplice.*

Soluz. Supposto P'' diverso da zero, prendiamo per piano de'nuovi assi (x'), (y'), il piano coniugato alla direzione $l''m''n''$ del nuovo asse (z'), cioè il piano che nel sistema de'primi assi ha per equazione R''=o. Poichè le direzioni lmn, $l'm'n'$ de'nuovi assi (x'), (y') sono in questo piano, sarà $o=Q=Q'$. Inoltre la sezione che il nuovo piano $x'y'$ incide nella superficie (A), dovendo essere una linea di second'ordine od una sua varietà, potrà rappresentarsi con l'equazione

$$Px^2+P'y^2-2Rx-S=o.$$

Dunque l'equazione $(A)_1$ potrà sempre ridursi alla forma

$$(A)' \;\ldots\; Px^2+P'y^2+P''z^2-2Rx-S=o,$$

e però farsi $o=R'=R''=Q=Q'=Q''$.

Se uno od ambedue i coefficienti P, P' risultassero eguali a zero, l'equazione $(A)'$ non si potrebbe rendere omogenea rispetto alle coordinate, e per conseguenza rappresenterebbe superficie *prive di centro* (§.71 *d*). Ed è a notarsi che non può aver luogo l'evanescenza simultanea di Q, Q', Q'', e di uno de'coefficienti P, P', per es. di P, senza che sia

$$o = Al + B'n + C'm = Bm + C'l + A'n = Cn + A'm + B'l$$

e però $\qquad R = A''l + B''m + C''n.$

Infatti se ciò non fosse, le tre equazioni $o = Q' = Q'' = P$, esprimerebbero che le direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$ de'nuovi assi, sono tutte parallele al piano (§. 60 *b*)

$$(Al + B'n + C'm)x + (Bm + C'l + A'n)y + (Cn + A'm + B'l)z =$$

e però esprimerebbero l'assurdo che il piano diametrale $x'y'$ è parallelo alle corde $2z'$ che deve dimezzare.

Classificazione delle superficie di second'ordine.

73. I. Superficie senza centro. Un'equazione di secondo grado rappresentante una superficie senza centro, è sempre riducibile ad una delle tre seguenti equazioni

$$P''z^2 - 2Rx - S = o\,,$$
$$P'y^2 + P''z^2 - 2Rx - S = o\,,$$
$$P'y^2 - P''z^2 - 2Rx - S = o\,.$$

Imperocchè il segno di $2Rx$ varia a nostro arbitrio con x; e se P' non è zero, o ha lo stesso segno di P'', o segno diverso. Le superficie corrispondenti a tali equazioni si chiamano rispettivamente: *paraboloide cilindrica*, *paraboloide ellittica*, *paraboloide iperbolica.* Se R risulta $= o$, coteste superficie si mutano nelle seguenti *varietà* : 1.° *sistema di due piani paralleli* , distinti o coincidenti, reali o immaginarii; 2.° *cilindro ellittico*, reale o immaginario, od *una retta*; 3.° *cilindro iperbolico*, o *sistema di due piani che si segano.*

Prendasi l'origine $\alpha\beta\gamma$ nel punto ove l'asse (x)

attraversa la superficie: sarà $S=o$. Quindi fatto $\frac{R}{P'}=\frac{b^2}{a}$, $\frac{R}{P''}=\frac{c^2}{a}$, donde $P'=\frac{aR}{b^2}$, $P''=\frac{aR}{c^2}$, le tre precedenti equazioni, divise per aR somministrano

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},$$

ove le quantità $\frac{2b^2}{a}$, $\frac{2c^2}{a}$ rappresentano i parametri delle tracce paraboliche $y^2=2\frac{b^2}{a}x$, $z^2=2\frac{c^2}{a}x$, fatte dalle paraboloidi ne'piani xy, xz.

II. Superficie con centro. Un'equazione di secondo grado rappresentante una superficie con centro, è sempre riducibile ad una delle tre seguenti

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=S,$$
$$Px^2+P'y^2-P''z^2=S,$$
$$Px^2-P'y^2-P''z^2=S;$$

ove l'origine $\alpha\beta\gamma$ è nel centro, per cui passano i tre piani diametrali $R=o$, $R'=o$, $R''=o$. Infatti, supposta S positiva (se non lo fosse, si renderebbe tale cambiando il segno a tutta l'equazione), i coefficienti P, P', P″ sono o tutti e tre positivi (se fossero tutti negativi, l'equazione sarebbe assurda); o uno solo negativo; o due negativi. Le superficie corrispondenti a tali equazioni si dicono rispettivamente: *ellissoide*; *iperboloide ad una falda*; *iperboloide a due falde*. Se S risulta $=o$, coteste superficie si mutano nelle seguenti *varietà*: la prima *in un punto*; e le ultime due *in un cono* (§. 67).

Fatto $\frac{S}{P}=a^2$, $\frac{S}{P'}=b^2$, $\frac{S}{P''}=c^2$, donde

$P=\frac{S}{a^2}$, $P'=\frac{S}{b^2}$, $P''=\frac{S}{c^2}$, le tre precedenti equazioni divise per S, diventano

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

e quindi

$$b^2c^2x^2 \pm c^2a^2y^2 \pm a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2\ ;$$

ove le quantità a^2, $\pm b^2$, $\pm c^2$ sono i quadrati di *tre semidiametri coniugati*, cioè rappresentano i quadrati delle distanze reali o immaginarie che intercedono tra il centro e i punti ove gli assi (x) (y), (z) attraversano la superficie.

a) *Nota.* 1. Supposti gli assi ortogonali, dell'equazioni (§. 70 *a*)

$$\frac{y^2+z^2}{b^2}=\frac{x}{a},\ \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\left(\frac{y^2+z^2}{b^2}\right)=1\ ,$$

la prima rappresenta una paraboloide ellittica generata da una parabola rotante intorno al suo asse; la seconda, un'ellissoide generata da un'ellisse rotante intorno ad uno de'suoi assi; la terza, una iperboloide ad una falda generata da un'iperbola rotante intorno al suo asse immaginario; la quarta, una iperboloide a due falde generata da un' iperbola rotante intorno al suo asse trasverso. L'immagine di queste superficie, nel caso particolare che siano di rivoluzione, giova a concepirne la forma nella loro generalità; giacchè a quest'uopo non si deve far altro, che sostituire alle sezioni *circolari* perpendicolari all' asse di rotazione, sezioni *ellittiche*.

2. Dalla maniera onde l'equazione (A) si è ridotta ad (A)′ si raccoglie, che ogni sezione appar-

tenente alla famiglia delle ellissi od iperbole, dà luogo necessariamente a tre assi coniugati (x'), (y'), (z') della superficie, due de'quali sono diametri coniugati ed arbitrarii della sezione, e il terzo è un diametro della superficie coniugato alla sezione; e che inoltre a siffatta sezione corrisponde parallelo nel centro (quando esiste) un piano diametrale.

3. Se nelle superficie dotate di centro $Px^2 \pm P'y^2 \pm P''z^2 = S$, due piani $x'y'$, $y'z'$ sono coniugati, il primo contiene il diametro (x') coniugato al secondo, e viceversa; e *le corde coniugate ad un piano sono parallele al diametro coniugato al piano*. Conseguentemente *due piani diametrali saranno coniugati, se l'uno di essi contenga il diametro coniugato all'altro* (§. 72 *f*).

4. La intersezione di due piani coniugati a due diametri, è una retta coniugata al piano diametrale determinato dai due diametri. Infatti questi diametri, essendo coniugati ambedue alla direzione di tale intersezione, passano pe'punti medii delle corde parallele alla medesima, tre de'quali determinano d'altronde il piano cui esse sono coniugate.

Direzioni principali.

74. Diremo *coniugate* le direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$ vincolate da $o = Q = Q' = Q''$, cioè *le direzioni di ogni sistema di assi coordinati, rispetto ai quali l'equazione delle superficie di second'ordine assume la forma* (A)'. E tre direzioni coniugate si chiameranno *principali*, allorchè ciascuna è perpendicolare alle altre due.

L'esistenza di un piano principale (§. 71 *b*) *trae seco necessariamente l' esistenza di tre direzioni* *principali*. Infatti in $(A)'$ sia principale il piano $x'y'$. Noi potremo prendere per (x'), (y') gli assi principali della sezione che il piano $x'y'$ fa nella superficie $(A)'$. Dopo ciò i tre assi (x'), (y'), (z') dell' equazione $(A)'$ saranno evidentemente ortogonali tra loro, ed in conseguenza principali le loro direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$.

Poniamo $\left\{\begin{matrix}(Al+B'n+C'm)x\\(Bm+C'l+A'n)y\\(Cn+A'm+B'l)z\end{matrix}\right. = f(lmn)$:

supposte coniugate le tre direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$, si potrà stabilire, a causa di $o=Q=Q'=Q''$, 1.° che de'tre piani $f(lmn)$, $f(l'm'n')$, $f(l''m''n'')$, ciascuno è parallelo alle due direzioni, delle quali son funzioni rispettivamente gli altri due piani; e per conseguenza, allorchè le direzioni son principali, ciascuno di cotesti piani è perpendicolare alla direzione di cui esso è funzione; 2.° che quindi *perchè una direzione lmn sia principale, è necessario e basta che sia perpendicolare al piano* $f(lmn)$.

Pertanto, rappresentata per p la retta che sugli assi (x), (y), (z) ha per proiezioni $Al+B'n+C'm$, $Bm+C'l+A'n$, $Cn+A'm+B'l$, a *determinare le direzioni principali lmn* si avrà la proporzionalità (§. 60 a)

$$\frac{p}{1}=\frac{Al+B'n+C'm}{l+m\cos Z_1+n\cos Y_1}=\frac{Bm+C'l+A'n}{m+n\cos X_1+l\cos Z^1}$$
$$=\frac{Cn+A'm+B'l}{n+l\cos Y_1+m\cos X_1}$$
$$=Al^2+Bm^2+Cn^2+2[A'mn+B'nl+C'lm].$$

È palese che se'fosse cognita p, la cognizione della direzione lmn dipenderebbe da un'equazione di primo grado. Cerchiamo adunque un'equazione tra p

ed A, B, C, A', B', C', eliminando l, m, n dalla riportata proporzionalità. Combiniamo ivi il primo membro col secondo ponendo in evidenza i coefficienti totali di l,m,n, e poscia alterniamo l,A,A',X_1 con m, B, B', Y_1: otterremo

$$(lmn)\dots\quad \begin{matrix}(p-A)l+(p\cos Z_1-C')m+(p\cos Y_1-B')n=o,\\ (p\cos Z_1-C')l+(p-B)m+(p\cos X_1-A')n=o.\end{matrix}$$

Da quì eliminiamo m, e nel risultato alterniamo l, A, A', X_1, con n, C, C', Z_1: si avrà

$$(ln)\dots\quad \begin{matrix} o=l\left|\begin{matrix}(p-A)(p-B)\\ -(p\cos Z_1-C')^2\end{matrix}\right. + n\left|\begin{matrix}(p-B)(p\cos Y_1-B')\\ -(p\cos Z_1-C')(p\cos X_1-A'),\end{matrix}\right. \\ o=l\left|\begin{matrix}(p-B)(p\cos Y_1-B')\\ -(p\cos Z_1-C')(p\cos X_1-A')\end{matrix}\right. + n\left|\begin{matrix}(p-B)(p-C)\\ -(p\cos X_1-A')^2;\end{matrix}\right. \end{matrix}$$

equazioni ciascuna delle quali, cognita che sarà p, darà il valore del rapporto $\frac{l}{n}$; e quindi alternando l, A, A', X_1 con m, B, B', Y_1, darà pure il valore del rapporto $\frac{m}{n}$, e conseguentemente combinata

con $1=\begin{matrix}l^2\\ m^2\\ n^2\end{matrix}+2\left|\begin{matrix}mn\cos X_1\\ nl\cos Y_1\\ lm\cos Z_1\end{matrix}\right.$, determinerà la direzione principale lmn.

Da esse, eliminando n e dividendo per l, si trae

$$o=[(p-A)(p-B)-(p\cos Z_1-C')^2][(p-B)(p-C)-(p\cos X_1-A')^2]$$
$$-[(p-B)(p\cos Y_1-B')-(p\cos Z_1-C')(p\cos X_1-A')]^2;$$

e sviluppando le parentesi [ ], e dividendo per p-B,

$$o=(p-A)(p-B)(p-C)-\left|\begin{matrix}(p-A)(p\cos X_1-A')^2\\ (p-B)(p\cos Y_1-B')^2\\ (p-C)(p\cos Z_1-C')^2\end{matrix}\right.$$
$$+2(p\cos X_1-A')(p\cos Y_1-B')(p\cos Z_1-C').$$

Ordinando per p, e riducendo giusta le note relazioni di trigonometria sferica, fatto $sen X_1 sen Y_1 sen z = H$ (§. 56 3ª), troveremo

$$H^2 p^3 - \left\{\begin{array}{l} A sen^2 X_1 \\ B sen^2 Y_1 - 2 \\ C sen^2 Z_1 \end{array}\right|\begin{array}{l} A' sen Y_1 sen Z_1 cos x \\ B' sen Z_1 sen X_1 cos y \\ C' sen X_1 sen Y_1 cos z \end{array}\left.\right\} p^2$$

$$(p) \qquad + \left\{\begin{array}{l} (BC - A'^2) \\ (CA - B'^2) - 2 \\ (AB - C'^2) \end{array}\right|\begin{array}{l} (AA' - B'C') cos X_1 \\ (BB' - C'A') cos Y_1 \\ (CC' - A'B') cos Z_1 \end{array}\left.\right\} p - U = o$$

equazione che nel caso degli assi (x), (y), (z) ortogonali, diventa

$$(p)_1 \; \ldots\ldots \; p^3 - p^2 \left|\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}\right. + p \left|\begin{array}{l} (BC - A'^2) \\ (CA - B'^2) \\ (AB - C'^2) \end{array}\right. - U = o \, .$$

Così la determinazione delle direzioni principali dipende dalla cognizione delle radici dell'equazione (p). Si avverta che ad ogni radice reale di (p) e diversa da zero, corrisponde una direzione lmn perpendicolare a un piano principale (§. 72 g).

a) L' equazione (p) ha reali le sue radici, ed una almeno diversa da zero.

Dim. Supponiamo (poichè è lecito §. 72 h) che l'equazione (A) sia ridotta alla forma

$$(A)' \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'x - D = o:$$

l'equazione (p) (fatto $o = A' = B' = C'$) diviene

$$(p)_2 \quad H^2 p^3 - (A sen^2 X_1 + B sen^2 Y_1 + C sen^2 Z_1) p^2 + (BC + CA + AB) p - ABC = o.$$

Ricerchiamo adesso le condizioni, perchè o tutte e tre le radici di $(p)_2$, o due, o una, o nissuna sia eguale a zero.

1.° Perchè le radici di $(p)_2$ riescano tutte uguali a zero, si richiede che ne svaniscano i tre ultimi termini, o che si abbia

1.ª $ABC = o$, 2.ª $BC + CA + AB = o$,
3.ª $A sen^2 X_1 + B sen^2 Y_1 + C sen^2 Z_1 = o$.

Se per verificar la 1.ª di queste, si pone $=0$ una delle tre quantità A, B, C, per es. C, la 2.ª diventa $AB=0$; e se per verificar questa si pone $=0$ una delle due quantità A, B, per es. B, la 3.ª diventa $A sen^2 X_1=0$, donde $A=0$. Così non si può verificare simultaneamente la 1.ª, 2.ª, e 3.ª, senza che sia $0=A=B=C$, cioè senza che l'equazione $(A)'$ cessi di essere di secondo grado. Dunque $(p)_2$ non può avere uguali a zero tutte le sue radici.

2.° Perchè due radici di $(p)_2$ risultino eguali a zero, è d'uopo che si abbia

$$1.^a \; ABC=0, \quad 2.^a \; BC+CA+AB=0;$$

e per verificar queste due si richiede che siano eguali a zero due delle tre quantità A, B, C. In questo caso la terza radice di $(p)_2$ è reale e diversa da zero.

3.° Perchè una delle radici di $(p)_2$ risulti eguale a zero, fa d'uopo che sia

$$ABC=0,$$

cioè uguale a zero una delle tre quantità A, B, C. In questo caso le altre due radici di $(p)_2$ saranno reali. Infatti poniamo $=0$ una delle tre A, B, C per es. A; $(p)_2$ fornirà

$$p=\frac{1}{2H_2}\left\{\begin{matrix} B sen^2 Y_1 \\ C sen^2 Z_1 \end{matrix} \pm \left(\begin{matrix} (B sen^2 Y_1 + C sen^2 Z_1)^2 \\ -4BC sen^2 Y_1 sen^2 Z_1 sen^2 x \end{matrix}\right)^{\frac{1}{2}}\right\};$$

radici ambedue reali, essendo

$$(B sen^2 Y_1 + C sen^2 Z_1)^2 - 4BC sen^2 Y_1 sen^2 Z_1 = (B sen^2 Y_1 - C sen^2 Z^1)^2,$$

$$\text{e però } (B sen^2 Y_1 + C sen^2 Z_1)^2 > 4BC sen^2 Y_1 sen^2 Z_1 > 4BC sen^2 Y_1 sen^2 Z_1 sen^2 x .$$

4°. Perchè nessuna delle radici di $(p)_2$ risulti eguale a zero, si richiede che non sia eguale a zero il prodotto ABC. In questo caso l'equazione $(p)_2$, siccome di terzo grado, ha per lo meno una radice reale.

Dunque in ogni caso $(p)_2$ ha una radice reale diversa da zero. Dunque esiste sempre un piano principale per lo meno. Dunque l'equazione (A) col metodo già insegnato (§. 72 *h*) può sempre ridursi alla forma

$$Px^2+P'y^2+P''z^2-2Qx-S=o\ ,$$

in modo che le direzioni lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$ de nuovi assi (x), (y), (z), siano principali. In questa ipotesi i coefficienti

$$P,\ P',\ P''$$

sono, com'è noto (§. 72 *b*), ciò che diventa

$$Al^2+Bm^2+Cn^2+2(A'mn+B'nl+C'lm)\ ,$$

allorchè la direzione lmn si suppone principale; sono adunque le radici dell'equazione (p), e però si avrà

$$U=ABC+2A'B'C'-(AA'^2+BB'^2+CC'^2)=PP'P''\mu^2$$

E poichè tali coefficienti debbono essere tutti e tre reali dal momento che n'esiste uno diverso da zero (§. 72 *g*); *ne segue che le radici di* (p) *sono tutte reali.* Quindi il numero delle positive (per la regola di Descartes) sarà eguale alle variazioni di segno che hanno luogo ne'termini della stessa equazione. Così *dalla semplice inspezione dell'equazione* (p) *si può subito rilevare quale specie di superficie rappresenti l'equazione* (A) (*).

(*) *Nota* I. Ciascuno de'binomii

$$(b)\ \ldots\ BC-A'^2,\ CA-B'^2,\ AB-C'^2$$

risulti $=$, ovvero $>o$: le quantità A, B, C dovranno avere lo stesso segno. Supponiamole positive: si avrà (§. 40 *b nota*) *b*) Data una superficie di second'ordine, è necessariamente determinato il rapporto tra i coefficienti P, P′, P″, radici dell' equazione (*p*); quindi comunque si trasformino le coordinate, e si mutino in corrispondenza i coefficienti A, B, C, A′, B′, C′ dell'equazione (A), il rapporto tra le radici dell'equazione (*p*) resterà immutabile.

c) Se due delle radici P, P′, P″ di (*p*) sono eguali, per es. $P' = P''$ (lo che si può scoprire mediante i noti criterii alegebrici); l'equazione (A) non potrà rappresentare superficie curva, che non sia di rivo-

---

$$B+C-2A'>0,\quad C+A-2B'>0\ ,\quad A+B-2C'>0\ ;$$

e però sommando e dividendo per 2,

$$A+B+C-2(A'+B'+C')>0.$$

Per simile discorso, se i binomii (1) si moltiplicano dapprima rispettivamente per

$$sen^2Y_1 sen^2Z_1,\quad sen^2Z_1 sen^2X_1,\quad sen^2X_1 sen^2Y_1\ ,$$

si conchiuderà che il *secondo* termine dell'equazione (*p*) è negativo.

II. Risulti U=, ovvero >o: le identità

$$
\begin{array}{ll}
 & AU=(CA-B'^2)(AB-C'^2)-(AA'-B'C')^2\ ,\\
(2) & BU=(AB-C'^2)(BC-A'^2)-(BB'-C'A')^2\ ,\\
 & CU=(BC-A'^2)(CA-B'^2)-(CC'-A'B')^2\ ,
\end{array}
$$

dimostrano che nella fatta ipotesi i tre binomii (1) debbono aver lo stesso segno. Supponiamoli positivi: i secondi membri delle (2), siccome non minori di zero, forniranno (§. 40 *b nota*)

$$
\begin{array}{l}
(BC\quad A'^2)\\
(CA-B'^2)\\
(AB\quad C'^2)
\end{array}
-2\left|
\begin{array}{l}
(AA'-B'C')\\
(BB'-C'A')\\
(CC'-AB')
\end{array}\right.
>0\ ;
$$

e ne conchiuderemo per conseguenza che il *terzo* termine di (*p*) è *positivo*.

Pertanto se con U=o, ovvero >o, uno qualunque de' tre binomii (1) è positivo, non potranno aver luogo in (*p*) *permanenze di segno*, nè quindi *radici negative*; e la superficie (A) non potrà appartenere che alla famiglia delle paraboloidi ellittiche, o delle ellissoidi.

Se venga dato che le radici di (*p*) debbono aver lo stesso segno, e che nessuno de'binomii (1) è minore di zero; allora, risultando negativo il secondo termine di (*p*), affinchè in (p) non abbiano luogo permanenze di segno è necessario che U sia non minore di zero: così ricadiamo nel caso precedente.

luzione (§. 70 *a*). In questa ipotesi la direzione dell' asse (x) di rotazione sarà una delle direzioni principali della superficie, mentre l'altra coppia di direzioni principali sarà ogni sistema di due rette perpendicolari all'asse di rotazione e tra loro.

Se tutte e tre le radici di (p) sono eguali, l'equazione (A) non potrà rappresentare altra superficie che la sfera. In questa ipotesi esisteranno evidentemente infiniti sistemi di direzioni principali.

Se le tre radici di (p) sono disuguali, a ciascheduna di esse corrisponderà una particolare direzion principale, ed una sola (*). Pertanto *le superficie di second'ordine offrono tre sole direzioni principali, tranne le superficie di rivoluzione che ne hanno infinite.*

(*) Infatti supponiamo che (A) sia dal bel principio

$$Px^2+P'y^2+P''z^2-2Rx-S=o,$$

e principale la direzione degli assi (x), (y), (z). L'equazioni (lmn) destinate a somministrare le direzioni principali, diverranno

$$o=(p-P)l=(p-P')m=(p-P'')n,$$

ed
$$1=l^2+m^2+n^2.$$

Ciò posto, facendo $p=P$, sarà $o=m=n$, e perciò $l=1$, cioè alla radice P di (p) corrisponde una sola direzion principale, quella dell'asse (x). E per ragion di simmetria alle radici P', P'' di (p) corrispondono le sole direzioni principali degli assi (y), (z).

Se fosse $P'=P''$, alla radice P corrisponderebbe la direzione unica dell'asse (x); ma, oltre questa, sarebbe principale ogni direzione perpendicolare all'asse (x), risultando $l=o, \frac{o}{o}=m=n$, allorchè si fa $p=P'=P''$. E se fosse $P=P'=P''$, allora ogni direzione potrebbe assumersi a principale, risultando

$$\frac{o}{o}=l=m=n.$$

Sezioni piane delle superficie di second'ordine.

75. L'equazione fondamentale (A) sia fra le coordinate principali, e però della forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A''x - D = 0.$$

Le tracce che un piano secante fa ne' piani coordinati xy, yz, zx, abbiano rispettivamente le direzioni lm, $m'n'$, $n''l''$. Si prendano le prime due di tali tracce per nuovi assi (x'), (y'). Nella trasformata $(A)'$, si avrà

$$P = Al^2 + Bm^2,\ P' = Bm'^2 + Cn'^2,\ Q'' = Bmm',$$

essendo d'altronde

$$1 = l^2 + m^2 = m'^2 + n'^2,\ \cos x'y' = mm'.$$

Affinchè la linea che il piano secante $x'y'$ incide nella superficie (A), possa riuscir parabola, o elisse, o iperbola, conviene che l'espressione

$$PP' - Q''^2 = ABl^2m'^2 + BCm^2n'^2 + CAn'^2l^2,$$

risulti (§. 40. *b*) $=$, $>$, $<$ o.

Ciò posto, esaminiamo di quale specie di sezioni, è suscettibile ciascuna superficie di second'ordine.

I. Se sia 1.° $0=A=B$; 2.° $0=A$, $0<B$; 3.° $0=A$, $0<B$, $>C$; la quantità $PP'-Q''^2$ non potrà riuscire in corrispondenza che

1.° $=0$; 2.° $=0$, >0; 3.° $=0$, <0.

Dunque delle paraboloidi, *la cilindrica* ammette soltanto sezioni paraboliche e loro varietà; *la ellittica* sezioni paraboliche, ellittiche e loro varietà; *la iperbolica* sezioni paraboliche, iperboliche e loro varietà.

II. Se sia 1.° $o < A, B, C$; 2.° $o < A, B, > C$; 3.° $o < A, > B, C$; la quantità $PP' - Q''^2$ potrà riuscire in corrispondenza

1.° soltanto $> o$; 2.° e 3.° $=, >, < o$.

Dunque una sezione fatta da un piano *nell'ellissoide* è sempre un'ellisse; fatta nella *iperboloide* a una o a due falde, od in un *cono*, può essere una linea qualunque di second'ordine.

Teor. Se una superficie di second'ordine, penetrando in un'altra dello stess'ordine, v'incide nell' ingresso una linea piana; anche nell'uscirne (se abbia luogo l'uscita) v'inciderà una linea piana: vale a dire, *se la linea d'ingresso è piana, lo sarà pure la linea d'uscita*.

Dim. Prendiamo gli assi (x), (y) nel piano della linea d'ingresso; e l'equazion di questa linea comune ad embedue le superficie, sia

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy - 2(A''x + B''y) - D = o.$$

Ciò posto, l'equazioni dell'una e dell'altra superficie, riducendosi a questa per $z = o$, non differiranno tra loro che pe' termini in z, e però la loro differenza si potrà presentare sotto la forma

$$z(Lx + My + Nz - F) = o.$$

Quest' equazione, dovendo coesistere colle prime due, rappresenta una superficie che ha comuni con le prime due le linee d'ingresso e d'uscita. Ora essa rappresenta i due piani $z = o$, $Lx + My + Nz = F$, il primo de' quali xy contiene la linea d'ingresso: dunque il secondo conterrà la linea d'uscita.

Così, se una sfera entra per una linea piana, le linee d'ingresso e d'uscita saranno due circonferenze, essendochè nella sfera tutte le sezioni piane sono circoli.

Se risultasse 1.° $o = L = M = N$; il piano della linea d'uscita sarebbe a una distanza infinita, cioè non esisterebbe; 2.° $o = L = M = F$; il piano $Nz = o$ della linea di uscita, verrebbe a coincidere col piano della linea d'ingresso, e però *le due linee si confonderebbero in una linea unica di contatto*.

a) Vediamo adesso, se le superficie suscettibili di sezioni ellittiche, lo siano pure di sezioni circolari. Affinchè la sezione sia circolare, fa d'uopo che risulti (§. 26 *c*) $P = P'$, $Q'' = P\cos x'y'$, cioè

$$1.^a \; Al^2 + Bm^2 = Bm'^2 + Cn'^2 ;$$
$$2.^a \; Bmm' = (Al^2 + Bm^2)\, mm' .$$

Dalla 2.ª si ricava

$$mm'(A - B)l^2 = o,$$

la quale, supposte A, B, C disposte in ordine di grandezza, cioè $A < B < C$, non può essere verificata (stando alla ipotesi che il piano $x'y'$ seghi i due piani xy, yz) che da $m = o$, $l = 1$, oppure da $m' = o$; $n' = 1$. Ammettiamo il secondo caso $m' = o$, $n' = 1$, *il quale significa che il piano secante* $x'y'$, *è parallelo all'asse* (z): la 1.ª diverrà

$$A + (B - A)m^2 = C, \text{ donde } m^2 = \frac{C - A}{B - A}, \; l^2 = \frac{B - C}{B - A},$$

e quindi $$\frac{l}{m} = \pm \sqrt{\frac{B - C}{C - A}} :$$

espressione, la quale, secondochè il piano secante $x'y'$ *si suppone parallelo* all'asse (x), o all'asse (y), si muta per simmetria in (§. 56 1.ª)

$$\frac{m'}{n'}=\pm\sqrt{\frac{C-A}{A-B}},\quad \frac{n''}{l''}=\pm\sqrt{\frac{A-B}{B-C}},$$

ed è reale solamente nell'ultimo caso: essa, avendo due valori eguali e di segno contrario, corrisponde a due piani secanti che, *paralleli all'asse* (y), declinano da uno degli altri assi con angoli supplementarii. Pertanto *da un punto qualunque si possono tirare a una superficie di second'ordine* (tranne la paraboloide cilindrica ed iperbolica) *due sezioni circolari, e due sole, parallele ambedue alla coordinata principale affetta dal coefficiente medio, ma declinanti da ognuna delle altre coordinate principali con angoli supplementarii.* Queste due sezioni, considerate nel cono obliquo a base circolare, si dicevano dagli antichi *subcontrarie*.

Se fosse $B=C$, risulterebbe

$$\frac{n''}{l''}=\pm\infty,\ \text{donde}\ l''=0,\ n''=1\ ;$$

cioè il piano secante, parallelo a (y), lo sarebbe pure (z), e per conseguenza perpendicolare ad (x). Quindi *nelle superficie di rivoluzione, i due sistemi di sezioni circolari si riuniscono in un solo, nel sistema cioè delle sezioni perpendicolari all'asse di rotazione* (*).

(*) Poichè le due serie di sezioni circolari sono perpendicolari allo stesso piano principale, quelle delle loro corde che sono perpendicolari a tale piano, saranno (come coniugate) dimezzate dal medesimo. Cotesto piano principale conterrà dunque i centri delle due serie di sezioni circolari, ossia i diametri coniugati alle medesime (§. 71 *d*).

Due sezioni circolari non parallele, appartengono sempre ad una medesima sfera. Dim. Il piano principale che contiene tutti i centri delle sezioni circolari, tagli la circonferenza della *b*) *Nel cono obliquo a base circolare*, il piano determinato dalle rette, che dal vertice del cono scendono l'una al centro della base e l'altra perpendicolare alla base, è *piano principale*; dimezzando ad angolo retto tutte le sezioni parallele alla base, e però tutte le corde che gli sono perpendicolari. Quindi è *asse principale*, la retta che dimezza l'angolo inciso nel cono da siffatto piano principale.

Posta l'origine delle coordinate nel vertice del cono, prendiamo l'asse (z) sulla superficie del cono stesso, e l'equazione della base del raggio a, sia $z = -c$, $y^2 = 2ax - x^2$: l'equazione del cono si troverà essere (§. 67)

$$c\,(x^2 + y^2) + 2azx = o.$$

Seghiamo adesso questo cono col piano $Ax + By + Cz = D$, e cerchiamo l'equazion della sezione. Presi per nuovi assi (x'), (y') le tracce che il piano secante fa ne'piani coordinati zx, xy secondo le direzioni nl, $l'm'$, e per origine il punto ($x = o$, $y = o$, $z = -\gamma$) ove il medesimo piano taglia (z); l'equazione richiesta si trae da (§. 72 *b*)

$$\left.\begin{matrix}Px^2\\ P'y^2\end{matrix}\right. + 2Q'xy - 2\left|\begin{matrix}Rx\\ R'y\end{matrix}\right. - S = o,$$

---

prima sezione ne'punti A, B; e la circonferenza della seconda ne'punti A', B'. Si cerchi nel medesimo piano un punto O equidistante dai tre A, B, A'. La sfera del centro O e raggio OA conterrà le due sezioni circolari. Infatti tale sfera contiene, per costruzione, la prima sezione piana e il punto A' della seconda: dunque (poichè la linea di uscita debb'essere una circonferenza) conterrà pure la seconda, non potendo contenere la sezione circolare che passa per A' parallela alla prima, a meno che le sezioni circolari parallele, non siano perpendicolari alla linea dei centri, cioè a meno che la superficie non sia di rivoluzione contro l'ipotesi.

ove $P = cl^2 + 2anl$, $P' = c$, $Q = cll' + 2anl'$, $R = al\gamma$, $R' = al'\gamma$, $S = o$, e di più, $o = Al + Cn = Al' + Bm'$, $C\gamma = D$.

All'asse (y'), traccia del piano secante in xy, si prenda perpendicolare (x) e però parallelo (y): sarà $l' = o$, $m' = 1$; e l'equazion della sezione conica diverrà $y^2 + l(l + \frac{2a}{c}n)\, x^2 - \frac{2a}{c} l\gamma x = o$.

Il triangolo inciso nel cono dal piano coordinato zx, abbia al vertice del cono l'angolo θ, ed alla base l'angolo $\cdot zx = A$; e sia α l'angolo $\cdot zx'$. Risulterà $l = \frac{sen\cdot zx'}{sen\cdot zx} = \frac{sen\alpha}{sen A}$, $n = \frac{sen\cdot xx'}{sen\cdot xz'} = \frac{sen(A-\alpha)}{sen A}$, $\frac{2a}{c} = \frac{sen\theta}{sen(A+\theta)}$, e quindi

$$l\,(l + \frac{2a}{c}n) = \frac{sen\alpha[sen\alpha sen(A+\theta) + sen\theta sen(A-\alpha)]}{sen^2 A sen(A+\theta)} = \frac{sen\alpha sen\,(\alpha+\theta)}{sen A sen(A+\theta)}$$; e l'equazion della sezione conica si ridurrà a

$$(a) \quad y^2 + \frac{sen\alpha sen(\alpha+\theta)}{sen A sen(A+\theta)} x^2 - \gamma \frac{sen\alpha sen\theta}{sen A sen(A+\theta)} x = o.$$

Si avranno evidentemente tutte le diverse sezioni possibili del cono, facendo variare l'angolo α da zero sino a due retti $= \pi$. Affinchè poi (a) possa essere parabola, ellisse, iperbola; il coefficiente di x^2 dovrà riuscire $=, >, < o$. Si noti, che ciascuno degli angoli α, A, $A+\theta$, non potendo essere $> \pi$, il coefficiente di x^2 sarà positivo o negativo insieme con $sen(\alpha+\theta)$. Pertanto secondochè riesca

$sen(\alpha+\pi) =, >, < o$, ossia $\alpha + \theta =, <, > \pi$, la sezione conica (a) sarà parabola, ellisse, iperbola. Si vede poi che si avranno le varietà di coteste curve, allorchè il piano secante passa pel vertice del cono. In generale, una sezione piana nel cono è o parabola, o ellisse, o iperbola, secondochè il piano condotto pel vertice del cono parallelamente alla sezione, tocca il cono, o è fuori del cono, o penetra nel cono.

Se risultasse $\frac{sen\alpha sen(\alpha+\theta)}{sen A sen(A+\theta)} = 1$ (condizione verificata da $\alpha = A$, $= \pi - A - \theta$), e se oltre di essere (x) perpendicolare alla traccia (y'), il piano zx fosse principale, cioè perpendicolare al piano xy, e però ad (y'); allora l'equazione fra coordinate rettangolari rappresenterebbe un circolo. Così avremo nel cono le due maniere di sezioni circolari, quando il piano secante è perpendicolare al piano principale zx, e declina da (z) coll'angolo A, oppure $\pi - A - \theta$.

Se il cono è retto, si ha $A = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$, e però $sen A = cos\frac{1}{2}\theta = sen(A+\theta)$; ed (a) si muta in

$$y^2 + \frac{sen\alpha sen(\alpha+\theta)}{cos^2\frac{1}{2}\theta}x^2 - \gamma\frac{sen\alpha sen\theta}{cos^2\frac{1}{2}\theta}x = 0.$$

Sia $\theta = 0$, cioè il cono si apra in un cilindro: una sezione piana del medesimo non potrà essere che, o un sistema di due rette parallele, o un'ellisse, o un circolo.

c) *Nota*. I. Immaginiamo il cono protratto indefinitamente dall'una e dall'altra parte del vertice o *centro*: data l'equazione generale del cono riferito a tre assi coniugati, cioè $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (§. 67), il piano che tocca il cono nel punto lmn, o, a dir meglio, secondo la direzione lmn, sarà (§.72 *d*)

$$o = R = \frac{l}{a^2} x + \frac{m}{b^2} y - \frac{n}{c^2} z;$$

e la direzione lmn, come contenuta nel cono, renderà

$$o = P = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}.$$

Quando è dato il punto xyz, da cui si debbe condurre il piano tangente, converrà determinare lmn per mezzo di $P = o$, $R = o$. Così nel cono, i piani asintotici coincidono co'piani tangenti, essendo rappresentati dalle stesse equazioni (§. 72 *d*).

II. Gli asintoti delle sezioni iperboliche coniugate ad uno stesso diametro, essendo rispettivamente paralleli, giacciono in due piani che s'intersecano lungo tale diametro, e toccano il cono lungo due rette, parallele a'medesimi asintoti.

III. Ogni piano, che passando pel vertice è fuori del cono o penetra nel cono, è diametrale, essendo parallelo a sezioni ellittiche od iperboliche (§. 73 *a* 3); mentre ogni piano tangente al cono, è parallelo a sezioni paraboliche.

IV. Ogni retta, condotta pel vertice del cono al di qua o al di là della superficie di lui, è un diametro (§. 72 *g*), il quale, se è interno al cono, sarà necessariamente coniugato a sezioni ellittiche; e se esterno, a sezioni iperboliche.

V. Supposti gli assi (x), (y), (z), principali, facciamo $z = c$: de'raggi che dal vertice del cono vanno al contorno della ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (raggi i quali, considerati due a due, comprendono gli angoli di ogni sistema possibile di asintoti coniugati), i più lunghi e divergenti col massimo angolo sono quelli che vanno ai punti estremi del maggior asse

$2a$, e i più brevi e divergenti col minimo angolo sono quelli che vanno agli estremi del minor asse $2b$. Ciò posto, immaginiamo una sfera che abbia per centro il vertice del cono, e per raggio quello che si reca ad un estremo di $2a$, o di $2b$: la curva incisa nel cono da cotesta sfera dovrà presentare evidentemente due punti singolari agli estremi dell'asse $2a$, o $2b$, e così manifestare la direzione di tale asse. In generale poichè le sezioni ellittiche coniugate all'asse principale (z) del cono, hanno i loro assi paralleli, si vede che qualunque sia il raggio di tale sfera, la curva da essa incisa sopra ciascuna falda del cono offrirà sempre quattro punti singolari, due situati alla massima, e due alla minima distanza dall'asse. Da qui il metodo di determinare graficamente gli assi principali del cono.

SUPERFICIE SENZA CENTRO

considerate rispetto alla forma, piani diametrali, e criterii.

76. Paraboloide cilindrica. La paraboloide cilindrica $\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a}$, è generata da una retta che si muove parallelamente all'asse (y), radendo la parabola $y=0$, $\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a}$.

Affinchè l'equazione (A) ridotta alla forma (A)', possa rappresentare una paraboloide cilindrica, fa di mestieri che risultino identiche le tre condizioni (§. 72 h)

$$0=Al+B'n+C'm,\quad 0=Bm+C'l+A'n,\quad 0=Cn+A'm+B'l.$$

Infatti, poichè ogni sezione piana nella nostra superficie, è parabola o sua varietà (§. 75), è evidente che il nuovo asse (x') si può prendere secondo qualunque direzione lmn nel piano coniugato a (z'): dunque uno de' rapporti $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, debbe risultare affatto arbitrario. E onde ciò si avveri, è necessario che le tre precedenti condizioni si riducano ad una sola, ossia che le quantità l, m, n vi abbiano coefficienti rispettivamente proporzionali. Se l, m, n si riguardassero come coordinate correnti, coteste tre equazioni dovrebbero rappresentare un medesimo piano, parallelo al piano coniugato a (z'). Si avrà pertanto

$$A : B' : C' :: C' : A' : [illegible] : B' : C : A',$$

la quale proporzionalità si risolve nelle due seguenti terne di equazioni simmetriche

$$A' = \sqrt{BC}\,,\quad B' = \sqrt{CA}\,,\quad C' = \sqrt{AB}\;;$$

$$A = \frac{B'C'}{A'}\,,\quad B = \frac{C'A'}{B'}\,,\quad C = \frac{A'B'}{C'}\;;$$

e però annulla i due ultimi termini dell'equazione (p). Affinchè poi queste relazioni non siano assurde, conviene 1.° che le A, B, C abbiano lo stesso segno: noi le supporremo positive; 2.° che le A', B', C' siano o tutte e tre positive, o due negative; esse fissano il segno de' radicali.

Ciò posto, l'equazione generale (A) della paraboloide cilindrica è

$$(1)\;(x\sqrt{A}+y\sqrt{B}+z\sqrt{C})^2-2(A''x+B''y+C''z)-D=0;$$

e l'equazione $R''=0$ del piano diametrale si riduce a (§. 44)

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}+z\sqrt{C}=\frac{A''l''+B''m''+C''n''}{\sqrt{P''}}=q,$$

e dimostra che, qualunque sia la direzione $l'm''n''$, i piani diametrali sono paralleli tra loro (§. 59 2°).

a) La parabola cilindrica può considerarsi come generata dalla intersezione de'due piani

(2) $x\sqrt{A}+y\sqrt{B}+z\sqrt{C}=gk$, $A''x+B''y+C''z=g'k'$, mobili in guisa che loro distanze k, k' dalla origine O (fig. 7), verifichino la (1), ossia la $g^2k^2-2g'k'-D=0$. Nel piano (k, k') perpendicolare ai piani (2), prendiamo (a partire dalla origine) due nuovi assi (x'), (z'): ripetendo il discorso del §. 44 (*b. nota*), la (1) si trasformerà in $z^2=\dfrac{2g'}{g^2 sen^2 gg'}x$, donde si passerà alla $z^2=\dfrac{2g' sen^2 gg'}{g^3}x$ fra gli assi (x'), (z') principali (§. 44 *c* 2.°). L'asse (y') è la intersezione dei piani (2), allorchè si fa $gk=q$, $g'k'=\frac{1}{2}(q^2-D)$.

Degli assi principali, l'uno è parallelo alla retta generatrice (z), l'altro perpendicolare ai piani diametrali, e il terzo è perpendicolare ai primi due.

Se i piani (2) siano paralleli, cioè se abbiasi $\sqrt{A}:\sqrt{B}:\sqrt{C}::A'':B'':C''$, l'equazione (1) (§. 44 *b*) rappresenterà *un sistema di due piani paralleli, reali o immaginarii, distinti o coincidenti*, *secondochè abbiasi* $A''^2+AD>, <, =0$.

77. Paraboloide ellittica. Dall'equazione

$$(1)\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},$$

si deduce

1.° Che allo svanire successivo di ciascuna coordinata x, y, z, corrispondono ne'piani X_1, Y_1, Z_1 le *tracce* $(y=0, z=0)$, $z^2=\dfrac{2c^2x}{a}$, $y^2=\dfrac{2b^2x}{a}$, cioè un punto nel primo piano, e tracce paraboliche negli altri due, descritte intorno ad un medesimo diametro (x).

2.° Che ad ogni valore di x corrisponde una sezione ellittica parallela al piano X_1, la quale per x negativa è *immaginaria*; per $x =$ o *nulla*, e però il piano che nasce ivi dal suo prolungamento è *tangente* (§. 71 *c*) ; ed in seguito *cresce continua* insieme con x positiva. Si noti che i quadrati dei diametri omologhi delle sezioni ellittiche parallele, sono proporzionali all'*ascissa* x. Quindi, poichè le aree simili, cioè della stessa *forma*, sono proporzionali a'quadrati delle linee omologhe; ne conchiuderemo che nella paraboloide ellittica le sezioni coniugate ad un diametro (x), sono proporzionali all'ascissa x ; e che però tale superficie può supporsi generata da un'ellisse di forma costante, che movendosi parallelamente a se medesima, varia in proporzione dell'ascissa descritta dal suo centro, e diviene immaginaria quando quest'ascissa si fa negativa.

3.° Che ad ogni valore di y o di z corrisponde parallela al piano Y_1, o Z_1, una sezione parabolica di parametro costante.

Pertanto immaginiamo due parabole intorno ad un medesimo diametro (x), disposte in modo, che i loro piani incidano nel piano di un' ellisse due diametri coniugati. Ferma tale immagine, supponiamo che cotesta ellisse si muova parallelamente a se stessa, radendo co'vertici de'due diametri coniugati i corrispondenti contorni delle due parabole; oppure che una delle due parabole si muova parallelamente a se stessa, radendo sempre col medesimo punto il contorno dell'altra; nell'uno e nell' altro caso la superficie generata sarà la medesima paraboloide ellittica.

Nota. Sulla nostra superficie non si può applicare alcuna retta, come risulta dall'esame delle note condizioni (§. 72 *d nota*).

78. Paraboloide iperbolica. Dall'equazione.

$$(2) \qquad \frac{2x}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right),$$

si deduce

1.° Che allo svanire successivo di ciascuna coordinata x, y, z, corrispondono ne'piani X_1, Y_1, Z_1, le *tracce* $\frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}$, $z^2 = \frac{-2c^2}{a}x$, $y^2 = \frac{2b^2}{a}x$, cioè due rette incrociate nel primo piano; e tracce paraboliche negli altri due, così disposte che il diametro *positivo* dell'una, è il *negativo* dell'altra.

2.° Che a due valori eguali di x, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano X_1 due sezioni iperboliche *coniugate fra loro* (§. 55 *c*). Per $x = 0$, la sezione iperbolica diventa un piano, che *tocca* la superficie *lungo due rette incrociate nell'origine.* Ora, senz'alterare la forma (2), si può prendere per origine un punto qualunque delle tracce paraboliche ne'piani Y_1, Z_1: dunque da ogni punto di queste tracce si possono applicare sopra la superficie due rette, coniugate al diametro che passa per siffatto punto. Inoltre, collo stesso discorso che nella paraboloide ellittica, possiamo stabilire che nella paraboloide iperbolica le sezioni coniugate ad un diametro (x) sono proporzionali all' ascissa x; e che però cotesta superficie può supporsi generata da una iperbola di forma costante, la quale movendosi parallelamente a se medesima, varia in proporzioni dell'ascissa x descritta dal suo centro. Ed è a notarsi che quando tale ascissa si attenua, svanisce, e passa allo stato negativo, anche l'iperbola generatrice si attenua, svanisce, ed in seguito torna ad esistere in uno stato coniugato al precedente, inserendo le sue branche in angoli asintotici supplementarii a quelli di prima; e che gli asintoti delle sezioni coniugate ad un medesimo diametro della superficie, essendo rispettivamente paralleli, sono in due piani che s'intersecano lungo tale diametro, e incidono nella superficie due rette, parallele a'medesimi asintoti: dunque *per ogni diametro della superficie si possono condurre due piani asintotici.*

3.° Che ai diversi valori di y o di z corrispondono due sistemi di sezioni paraboliche costanti, così disposte, che il diametro positivo della sezione di un sistema, è il negativo di una sezione dell'altro sistema. Immaginiamo adunque due parabole disposte in modo, che il diametro positivo dell'una sia il negativo dell'altra, e che i loro piani incidano nel piano di una iperbola due diametri coniugati. Ferma tale immagine, supponiamo che cotesta iperbola (serbando costante la forma) si muova parallelamente a se stessa, radendo co'vertici del diametro trasverso il contorno della corrispondente parabola; oppure che una delle due parabole si muova parallamente a se stessa, radendo sempre col medesimo punto il contorno dell' altra. Nell'uno e nell'altro caso, la superficie generata sarà la medesima *paraboloide iperbolica.*

4.° Che siffatta superficie è una conoide (§.69). Infatti (designando per s, t due numeri variabili) ella può esser generata evidentemente da ciascuna delle due rette seguenti

$$1.^a \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = s, \; s\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \frac{2x}{a};$$

$$2.^a \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = t, \; t\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \frac{2x}{a};$$

le quali s'incontrano in ogni loro posizione; essendochè la condizione di tale incontro si riduce a ciò, che i binomii $\frac{y}{b} - \frac{z}{c}$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ possano avere per entrambe le generatrici uno stesso valore, e questa condizione si riduce a $x = \frac{ast}{2}$. Inoltre la 1.ª di esse si muove parallelamente al piano direttore $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$, e la 2.ª al piano direttore $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$; piani che s'intersecano lungo il diametro (x). Conchiudiamo pertanto, che *la paraboloide iperbolica è una conoide a due direttrici rettilinee.*

79. Affinchè l'equazione (A), ridotta alla forma (A'), possa rappresentare una paraboloide ellittica od iperbolica, fa duopo che una delle tre condizioni (§. 72 *h*)

$$0 = Al + B'n + C'm, \; 0 = Bm + C'l + A'n, \; 0 = Cn + A'm + B'l,$$

sia conseguenza necessaria delle altre due.

Infatti la direzione lmn, essendo quella del nuovo asse (x'), intersezione de' piani diametrali Y'_1, Z'_1, è geometricamente determinata. Ora a determinarla algebricamente mediante i rapporti $\frac{l}{m}$, $\frac{m}{n}$, bastano due delle tre precedenti equazioni; dunque una di esse debb'essere contenuta nelle altre due.

Quindi, se l, m, n si riguardano come coordinate correnti; coteste tre equazioni dovranno rappresentare tre piani, che partendo tutti e tre dall' origine, s'intersechino lungo una medesima linea. Ma perchè le intersezioni del terzo di tali piani col secondo e col primo, somministrate da (§. 56 VI)

$$\frac{l}{BC - A'^2} = \frac{m}{A'B' - CC'} = \frac{n}{C'A' - BB'},$$

$$\frac{l}{A'B' - CC'} = \frac{m}{CA' - B'^2} = \frac{n}{B'C' - AA'},$$

coincidano; si richiede che sia (§. 58 IV)

$$BC-A'^2 : A'B'-CC' : C'A'-BB' :: A'B'-CC' : CA-B'^2 : B'C'-AA';$$

e queste proporzioni (eguagliando i prodotti de' medii e degli estremi) si trovano tutte verificate dalla condizione unica $U = o$. Riteniamo adunque, che la direzione lmn de' diametri è costante, ossia che *nelle paraboloide ellittiche ed iperboliche i diametri sono tutti paralleli.*

E se osserviamo che la paraboloide ellittica non è suscettibile di sezioni iperboliche, nè di sezioni ellittiche la paraboloide iperbolica (§. 75), e che la natura delle sezioni fatte dai piani coordinati dipende da' tre binomii $CB—A'^2$, $CA—B'^2$; $AB—C'^2$; ne conchiuderemo che ciascuno de' medesimi binomii non può risultare negativo per la prima superficie (§. 72 *a* 40 *b*), nè positivo per la seconda. Pertanto *la paraboloide sarà ellittica od iperbolica, secondochè con* $U = o$, *uno qualunque de' tre binomii*

$$BC - A'^2,\ CA - B'^2,\ AB - C'^2,$$

risulti positivo (§. 74 *a nota*), *o negativo*; *mentre sarebbe cilindrica se ciascheduno di essi svanisse con* $U = o$ (§. 76).

Si avranno poi le varietà della paraboloide ellittica od iperbolica, cioè il cilindro ellittico od iperbolico allorchè risulti (§. 73)

$$R = A''l + B''m + C''n = 0, \text{ ossia}$$

$$(BC - A'^2)A'' - (CC' - A'B')B' - (BB' - C'A')C'' = 0;$$

e però, allorchè l'espressioni che danno le coordinate del centro, si riducono a $\frac{0}{0}$. In questo caso delle tre equazioni

$$A'' = A\alpha + B'\gamma + C'\beta, B'' = B\beta + C'\alpha + A'\gamma, C'' = C\gamma + A'\beta + B'\alpha,$$

tra le coordinate α, β, γ del centro, ciascuna sarà conseguenza delle altre due; dovendo esse rappresentare, non un punto, ma l'*asse centrale* (o di simmetria) del cilindro ellittico od iperbolico. Così una delle coordinate α, β, γ, è affatto arbitraria: facendo $\gamma = 0$, le prime due equazioni forniscono

$$\alpha = \frac{BA'' - C'B''}{AB - C'^2}, \quad \beta = \frac{AB'' - C'A''}{AB - C'^2}, \text{ e quindi}$$

$$S = D + A''\alpha + B''\beta = D + \frac{BA''^2 + AB''^2 - 2A''B''C'}{AB - C'^2}.$$

Fermo ciò, 1.° *la paraboloide ellittica diverrà un cilindro ellittico, reale o immaginario, od una retta, secondochè risulti* $S >, <, = 0$; 2.° *la paraboloide iperbolica diverrà un cilindro iperbolico, o due piani che s'intersecano, secondochè* S *risulti diversa da zero od eguale a zero*.

SUPERFICIE CON CENTRO

considerate rispetto alla forma, piani diametrali, criterii e raggi principali.

80. Ellissoide. Dall'equazione

$$(1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ donde } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{a^2}(a-x)(a+x),$$

si deduce immediatamente

1.° Che allo svanire successivo di ciascuna coordinata x, y, z, corrispondono ne'piani X_1, Y_1, Z_1 *tracce ellittiche*; e che gli assi (x), (y), (z) attraversano la superficie ne'punti $(\pm a, o, o)$, $(o, \pm b, o)$, $(o, o, \pm c)$, situati su ciascun asse ad egual distanza dal centro.

2.° Che a due valori uguali di x, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano X_1 due sezioni ellittiche coincidibili, le quali, se x si allunga al di là de'limiti $+a$, $-a$, sono *immaginarie*; per $x = \pm a$ *svaniscono* e però prolungate divengono *piani tangenti* (§. 71 c); in seguito, a misura che x dentro questi limiti si accorcia verso il centro, *crescono*, e nel centro si confondono insieme, salite alla massima grandezza $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Si può ripetere lo stesso discorso, dopo di avere alternato x, a con y, b, e con z, c. Dunque la ellissoide, luogo geometrico dell' equazione (1), è una superficie rientrante, circoscritta dal parallelepipedo costruito sopra i segmenti $2a$, $2b$, $2c$ degli assi, presi per diametri coniugati del parallelepipedo.

Immaginiamo tre ellissi così disposte, che due diametri coniugati dell'una siano rispettivamente comuni alle altre due. Ferma tale immagine, supponiamo che una di coteste ellissi si muova parallelamente a se stessa, radendo i contorni delle altre due co'vertici de'suoi diametri coniugati: la superficie così generata sarà, per ciò che precede, una ellissoide.

Si noti che le sezioni coniugate ad un diametro (x), sono proporzionali ai corrispondenti prodotti $(x-a)(x+a)$ delle ascisse naturali (§. 39 b 4.°);

e che sulla nostra superficie non si può applicare alcuna retta v (§. 72 *d nota*).

81. Iperboloide ad una falda. Dall'equazione

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\ \text{donde}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\left(1+\frac{c^2}{z^2}\right),$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},\ \text{ossia}\ \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

si deduce immediatamente

1.° Che allo svanire successivo di ciascuna coordinata x, y, z, corrispondono ne'piani X_1, Y_1, Z_1 le *tracce* $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, cioè iperbole ne'primi due, ed ellisse nell' ultimo; e che gli assi (x), (y), (z) attraversano la superficie ne'punti $(\pm a, o, o)$, $(o, \pm b, o)$, $(o, o, \pm c\sqrt{-1})$, situati su ciascun asse ad egual distanza dal centro.

2.° Che a due valori eguali di z, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano Z_1 due sezioni ellittiche coincidibili, le quali crescono e diminuiscono continue insieme con z, e però colla loro distanza dal centro; e nel centro, discese alla minima loro grandezza, si confondono colla *ellisse centrale* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Inoltre, a misura che z progredisce verso l'infinito, tali sezioni ellittiche tendono (siccome a limite proprio ed unico) a coincidere con le corrispondenti e simili sezioni del *cono centrale* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ (§. 67), di cui per altro sono sempre alquanto più estese. Quindi siffatto cono centrale è *interno* alla nostra superficie, ed *asintotico* della medesima.

3.° Che a due valori eguali di x, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano X_1, due sezioni iperboliche coincidibili, varianti in proporzione col prodotto delle ascisse naturali; le quali per $x = \pm a$, si trasformano in piani che toccano la superficie lungo due rette incrociate agli estremi del diametro $2a$; e allorchè x si allunga al di là de' limiti $(-a, +a)$, passano ad uno stato coniugato al precedente, e simile allo stato delle corrispondenti sezioni $\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{-x^2}{a^2}\right)$ del cono asintotico. E lo stesso discorso ha luogo rispetto a' diversi valori di y. Si vede poi in generale, che le sezioni della nostra iperboloide coniugate ad un diametro, sono parallele alle sezioni del cono asintotico coniugate allo stesso diametro , e tutte simili fra loro se ellittiche, e simili fra loro o coniugate se iperboliche, e viceversa; che per conseguente i piani *asintotici* del cono, lo sono pure della iperboloide (d'altronde sono essi rappresentati dalle stesse equazioni); che infine la superficie del cono asintotico, è *il limite di separazione* tra lo spazio interno ove sono contenuti tutti i diametri immaginarii della nostra iperboloide, e lo spazio esterno ove ne sono contenuti tutti i diametri trasversi.

Immaginiamo due iperbole descritte intorno ad uno stesso diametro immaginario, e così, che i loro diametri trasversi (coniugati all'immaginario) siano diametri coniugati di una ellisse. Ferma tale immagine, supponiamo che la ellisse si muova parallelamente a se medesima, radendo co' vertici de' suoi diametri i contorni delle due iperbole; oppure che una di queste iperbole, serbando costante la forma, si muova parallelamente a se stessa radendo co'vertici del suo diametro trasverso, prima il contorno della ellisse, e poscia, passata da zero in uno stato coniugato al precedente, il contorno dell'altra iperbola. Nell'uno e nell'altro caso la superficie generata, sarà, perciò che precede, la medesima iperboloide ad una falda.

4.° Che, designando per s, t due numeri variabili, ella può esser generata da ciascuna delle due rette seguenti

$$1.^{a}\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=s\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{x}{a}\right);$$

$$2.^{a}\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=t\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

le quali s'incontrano in ogni loro posizione, essendochè la condizione di tale incontro si riduce a ciò, che i binomii $\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}$, $\frac{a\pm x}{a}$ possano avere per entrambe le generatrici uno stesso valore; e questa condizione si riduce a determinare x mediante la proporzione $a-x:a+x::t:s$. E si avverta che coteste generatrici sono parallele alle corrispondenti generatrici del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, cioè alle rette

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-s\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{s}.\frac{x}{a};$$

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=t\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\frac{1}{t}.\frac{x}{a};$$

e che però considerate in tre loro posizioni diverse, sia l'una, sia l'altra, non sono mai parallele ad un piano; giacchè il cono, come non può esser traforato da una retta in più di due punti (§. 71 a), così non può aver comuni con un piano più di due rette. Dunque *la iperboloide ad una falda, è una superficie rigata a tre direttrici rettilinee, parallele agli spigoli di un angolo triedro* (§. 68 *a*).

82. Iperboloide a due falde. Dall'equazione

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \text{ donde}$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)=\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a),$$

si deduce immediatamente

1.° Che allo svanire successivo di ciascuna coordinata x, y, z, corrispondono ne' piani X_1, Y_1, Z_1 le tracce $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, cioè una ellisse immaginaria nel primo, ed iperbole negli ultimi due; e che gli assi (x), (y), (z) attraversano la superficie ne' punti $(\pm a, o, o)$, $(o, \pm b\sqrt{-1})$, $(o, o, \pm c\sqrt{-1})$, situati su ciascun' asse ad egual distanza dal centro.

2.° Che a due valori eguali di x, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano X_1 due sezioni ellittiche coincidibili, le quali, mentre variano proporzionalmente ai prodotti delle ascisse naturali, se x si abbrevia dentro i limiti $(+a, -a)$ sono *immaginarie*; per $x=\pm a$, *svaniscono*, e però prolungate si trasformano ivi in *piani tangenti*; ed in seguito, al di là di questi limiti *crescono* continuamente insieme con x, e a misura che progrediscono verso l'infinito, tendono (siccome a limite proprio ed unico) a coincidere colle corrispondenti e simili sezioni del *cono centrale* $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}$, di cui per altro sono sempre alquanto meno estese. Quindi siffatto cono centrale è *esterno* alla nostra superficie, ed *asintotico* della medesima.

3.° Che a due valori eguali di y, ma di segno contrario, corrispondono parallele al piano Y_1 due sezioni iperboliche coincidibili, le quali per $y=0$, sono *minime*; ed in seguito *crescono* continue insieme con x, serbando costante la forma, e simile a quella delle corrispondenti sezioni del cono asintotico. Si può ripetere lo stesso discorso, alternata y con z. Si vede poi in generale, che le sezioni della nostra iperboloide coniugate ad un diametro, sono parallele e simili alle sezioni del cono asintotico coniugate allo stesso diametro, e viceversa; che per conseguente i piani *asintotici* di tale cono, lo sono pure della iperboloide (d'altronde sono essi rappresentati dalle stesse equazioni); che infine la superficie del cono asintotico è *limite di separazione* tra lo spazio interno, ove sono contenuti tutti i diametri trasversi della iperboloide, e lo spazio esterno, ove ne sono contenuti tutti i diametri immaginarii.

Immaginiamo due iperbole descritte intorno ad uno stesso diametro trasverso, e così che i loro diametri immaginarii (coniugati al trasverso) siano diametri coniugati di una ellisse. Ferma tale immagine, supponiamo che la ellisse si muova parallelamente a se medesima radendo co'vertici de'suoi diametri i contorni delle due iperbole; oppure che una di queste iperbole, serbando costante la forma, si muova parallelamente a se stessa radendo co' vertici del suo diametro trasverso il contorno dell'altra iperbola: nell'uno e nell'altro caso la superficie generata, sarà, perciò che precede, la medesima *iperboloide a due falde*, sulla quale non si può applicare alcuna retta (§. 72 *d nota*).

83. Criterii *delle superficie con centro*. 1.° Osserviamo primieramente che per la ellissoide, la quale non è suscettibile che di sezioni ellittiche, ciascuno de' binomii $BC - A'^2$, $CA - B'^2$, $AB - C'^2$, debbe risultare positivo; e che (supponendo A, B, C positive) debbono inoltre risultare positive le radici dell'equazione (p) (§. 74 *a nota*). Ora queste condizioni si riducono, com' è noto (*ivi*), alle due seguenti:

$$AB - C'^2 > o,\quad U > o.$$

Poste queste due condizioni, la ellissoide sarà *reale*, *un punto*, *immaginaria*, secondochè ($\alpha\beta\gamma$ è il centro)

$$S = D + A''\alpha + B''\beta + C''\gamma,$$

risulti $>$, $=$, $<$ o.

2.° Assegnato il criterio della ellissoide, supponiamo che le radici P, P′, P″ di (p) non siano dello stesso segno, e che $U = HPP'P''$ risulti $<$ o; oppure $U > o$, ma $AB - C'^2$ non $>$ o: converrà evidentemente a quest'uopo, che l'equazione (p) abbia nel primo caso *negativa una* delle tre radici P, P′, P″, e le altre *due positive*; e una *positiva* e le altre *due negative* nel secondo caso. Quindi il criterio della iperboloide ad una o a due falde, sarà

$$U < o,\ e \pm S \gtrless o\,;$$

ovvero

$$U > o,\ AB - D'^2 \text{ non } > o,\ e \mp S > o,$$

ove il segno superiore è relativo alla iperboloide ad una falda. *Se risulti* $S = o$, *l'una e l'altra iperboloide si trasforma in un cono.*

84. Nelle superficie con centro, tre raggi o semidiametri si diranno *coniugati* o *principali*, se le

loro direzioni siano coniugate o principali. Nell'espressione generale (§. 72 b)

$$\nu^2 = \frac{S}{Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2\,(A'mn + B'nl + C'lm)}$$

di un raggio ν condotto dal centro alla superficie, supponiamo che la direzione lmn sia principale: sarà (§. 74) $\nu^2 = \frac{S}{p}$, donde $p = \frac{S}{\nu^2}$. *I quadrati de'raggi principali sono adunque reciprocamente proporzionali alle radici dell'equazione* (p) (§. 74). Sostituendo quivi $\frac{S}{\nu^2}$ a p, e moltiplicando tutto per $\frac{\nu^6}{-U}$, si ottiene

$$(\nu)\ldots\quad \begin{aligned} &\nu^6 - \left\{\begin{matrix}(BC - A'^2)\\(CA - B'^2)\\(AB - C'^2)\end{matrix} -2 \left|\begin{matrix}(AA' - B'C')\cos X_1\\(BB' - C'A')\cos Y_1\\(CC' - A'B')\cos Z_1\end{matrix}\right.\right\}\frac{S}{U}\,\nu^4 \\ &+\left\{\begin{matrix}A\,sen^2 X_1\\B\,sen^2 Y_1\\C\,sen^2 Z_1\end{matrix} -2 \left|\begin{matrix}A'\,sen\,Y_1\,sen\,Z_1\cos x\\B'\,sen\,Z_1\,sen\,X_1\cos y\\C'\,sen\,X_1\,sen\,Y_1\cos z\end{matrix}\right.\right\}\frac{S^2}{U}\,\nu^2 - H^2\frac{S^3}{U} = 0. \end{aligned}$$

Quest'equazione, ridotta che sia al terzo grado facendo $\nu^2 = \rho$, rappresenta colle sue radici i quadrati de'raggi principali, e colle proprietà de'suoi coefficienti vale a mettere in evidenza i rapporti tra i raggi principali e un sistema qualunque di raggi coniugati.

Supponiamo per es. che l'equazione (A) si riduca alla forma $b'^2c'^2x^2 + c'^2a'^2y^2 + a'^2b'^2z^2 = a'^2b'^2c'^2$, o che si abbia $A = b'^2c'^2$, $B = c'^2a'^2$, $C = a'^2b'^2$, $S = a'^2b'^2c'^2$, $o = A' = B' = C'$: sarà $U = a'^4b'^4c'^4$, $\frac{S}{U} = \frac{1}{a'^2b'^2c'^2}$; e l'equazione ($\nu$) diverrà

$$v^6 - v^4 \left| \begin{matrix} a'^2 \\ b'^2 \\ c'^2 \end{matrix} \right. + v'^2 \left| \begin{matrix} b'^2 c'^2 sen^2 X_1 \\ c'^2 a'^2 sen^2 Y_1 \\ a'^2 b'^2 sen^2 Z_1 \end{matrix} \right. - H^2 a'^2 b'^2 c'^2 = o ,$$

la quale, chiamati a^2, b^2, c^2 i quadrati de' raggi principali, ha per radici a^2, b^2, c^2. Avremo adunque per la teoria dell'equazioni

$$\left\{ \begin{matrix} a'^2 \\ b'^2 \\ c'^2 \end{matrix} \right. = \left\{ \begin{matrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{matrix} \right. , \quad \left\{ \begin{matrix} b'^2 c'^2 sen^2 X_1 \\ c'^2 a'^2 sen^2 Y_1 \\ a'^2 b'^2 sen^2 Z_1 \end{matrix} \right. = \left\{ \begin{matrix} b^2 c^2 \\ c^2 a^2 \\ a^2 b^2 \end{matrix} \right. , \quad H^2 a'^2 b'^2 c'^2 = a^2 b^2 c^2 .$$

Queste formule significano rispettivamente, che *nella ellissoide è quantità costante* : 1.° *la somma de' quadrati di ogni sistema di raggi coniugati*; 2.° *la somma de' quadrati delle facce*, 3.° *e il volume di ogni parallelepipedo avente i suoi diametri coniugati comuni colla ellissoide, e però circoscritto alla medesima : parallelepipedo che può dimostrarsi, come per la ellisse , essere il minimo di tutti gli altri circoscritti diversamente* (§. 48). Se mutiamo il segno a c'^2, c^2; od a c'^2, c^2, b'^2, b^2; i risultati saranno relativi alla iperboloide a una o a due falde.

85. Supposti principali gli assi (x), (y), (z), osserviamo adesso tra quai limiti ondeggi il valore del raggio v, al cangiare della sua direzione lmn.

Per la ellissoide, supposto $a^2 > b^2 > c^2$, si ha

$$v^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} = \frac{a^2}{l^2 + \frac{a^2}{b^2} m^2 + \frac{a^2}{c^2} n^2} = \frac{c^2}{n^2 + \frac{c^2}{a^2} l^2 + \frac{c^2}{b^2} m^2} ;$$

Ora questa formula, ove si avverta essere

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 \text{ , e però}$$

$$l^2 + \frac{a^2}{b^2} m^2 + \frac{a^2}{c^2} n^2 > 1 , \; n^2 + \frac{c^2}{a^2} l^2 + \frac{c^2}{b^2} m^2 < 1 ,$$

fa manifesto che i raggi principali a, c, hanno la proprietà di essere, l'uno il MINIMO , e l' altro il

MASSIMO de'raggi. Il raggio b, si dice il MEDIO de'principali. Riflettendo che le sezioni che passano pel centro, si segano sempre lungo un diametro; si vedrà che, delle sezioni fatte da un piano nella ellissoide, quella in cui gli assi principali sono rispettivamente i più piccoli o i più grandi (e però la MINIMA o la MASSIMA), è la sezione che ha comune coll'ellissoide l'asse minimo e medio, o l'asse medio e massimo.

Per la iperboloide ad una falda si ha

$$\rho^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}} = \frac{-c^2}{n^2 - \frac{c^2}{a^2} l^2 - \frac{c^2}{b^2} m^2};$$

e da questa formula si ricava: 1.° che ad $n = o$ corrisponde il luogo geometrico di tutti i minimi raggi trasversi, luogo che è la ellisse principale; quindi questa ellisse è la *minima* di tutte le sezioni ellittiche, e si chiama *gola* della superficie; 2.° che a $o = l = m$, corrisponde il minimo raggio immaginario: quindi *il raggio principale immaginario, è il minimo della sua specie.*

Per la iperboloide a due falde si ha

$$\rho^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}} = \frac{a^2}{l^2 - \frac{a^2}{b^2} m^2 - \frac{a^2}{c^2} n^2} = \frac{-1}{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} - \frac{l^2}{a^2}};$$

donde rileviamo, che *il raggio principale trasverso è il minimo della sua specie*, e che *il luogo geometrico de'minimi raggi immaginarii, è la ellisse principale immaginaria*, vale a dire: i minimi raggi non trasversi, considerati in quanto al valore reale, sono quelli della ellisse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

a) Per determinare graficamente la direzione degli assi principali nella *ellissoide*, si costruisca una sfera che abbia il centro comune colla ellissoide: le curve che la sfera inciderà nella ellissoide dovranno presentare ciascuna (com'è facile a concepire) quattro punti singolari, due a due simmetrici, e con essi determineranno la direzione degli assi principali. Gli assi principali delle *iperboloidi* sono quelli de'loro coni asintotici, assi che già sappiamo tracciare (§. 75 *c*).

Piani coniugati ai diametri, coni e cilindri circoscritti.

86. *Trovare l'equazione del piano, coniugato a un diametro nel punto* $\alpha\beta\gamma$; *e l'equazione di tale diametro, e del piano tangente.*

Soluz. Pel punto $\alpha\beta\gamma$ si conduca nella superficie (A) il piano diametrale

$$\left\{\begin{array}{l}(A\alpha + B'\gamma + C'\beta - A'')l \\ (B\beta + C'\alpha + A'\gamma - B'')m = 0 : \\ (C\gamma + A'\beta + B'\alpha - C'')n\end{array}\right.$$

la retta coniugata a questo piano nel punto $\alpha\beta\gamma$, avrà la direzione lmn, e però l'equazione

$$v = \frac{x'-\alpha}{l} = \frac{y'-\beta}{m} = \frac{z'-\gamma}{n};$$

e sarà una di quelle coniugate al diametro passante pel punto $\alpha\beta\gamma$(§.71*d*).Ora,se nella precedente ad l,m,n surroghiamo $x'-\alpha$, $y'-\beta$, $z'-\gamma$, e ordiniamo rispetto ad x', y', z', si avrà il piano

$$(1)\left\{\begin{array}{l}(A\alpha + B'\gamma + C'\beta - A'')x' \\ (B\beta + C'\alpha + A'\gamma - B'')y' = \\ (C\gamma + A'\beta + B'\alpha - C'')z'\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}A\alpha^2 \\ B\beta^2 + 2 \\ C\gamma^2\end{array}\right. \left|\begin{array}{l}A'\beta\gamma \\ B'\gamma\alpha - \\ C'\alpha\beta\end{array}\right. \left|\begin{array}{l}A''\alpha \\ B''\beta \\ C''\gamma;\end{array}\right.$$

il quale, contenendo il punto corrente di ogni retta ν coniugata al diametro nel punto $\alpha\beta\gamma$, sarà il piano coniugato a tale diametro.

Siffatto piano debbe avere (per la definizione) la proprietà di camminare parallelo a se stesso, allorchè segue il punto corrente xyz del diametro coniugato. Quindi la proporzionalità (§. 59 VIII)

$$(2)\quad \frac{Ax+B'z+C'y-A''}{A\alpha+B'\gamma+C'\beta-A''}=\frac{By+C'x+A'z-B''}{B\beta+C'\alpha+A'\gamma-B''}=\frac{Cz+A'y+B'x-C''}{C\gamma+A'\beta+B'\alpha-C''},$$

rappresenterà il corso xyz del diametro passante pel punto $\alpha\beta\gamma$.

Se il punto $\alpha\beta\gamma$ sia in xyz sulla superficie (A), il piano (1) diverrà tangente (§. 71 e), e (il 2° membro della (1) riducendosi a $D+A''x+B''y+C''z$ mediante la (A)) si muterà in

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(Ax+B'z+C'y-A'')x'\\&(By+C'x+A'z-B'')y'=D+A''x+B''y+C''z,\\&(Cz+A'y+B'x-C'')z'\end{aligned}\right.$$

equazion generale del piano tangente in xyz (§.72 d).

(a) Quando è dato il punto $x'y'z'$ da cui si debbe condurre il piano tangente, allora sarà ignoto il punto xyz di contatto, e converrà determinarlo per mezzo della (A) e della (3), che ordinata rispetto ad xyz, si converte in

$$(4)\quad \begin{aligned}&(Ax'+B'z'+C'y'-A'')x\\&(By'+C'x'+A'z'-B'')y=D+A''x'+B''y'+C''z';\\&(Cz'+A'y'+B'x'-C'')z\end{aligned}$$

equazione ad una sezione coniugata al diametro condotto pel punto $x'y'z'$. Quindi il cono, che abbraccia colla superficie il contorno di tale sezione ed ha per vertice il punto $x'y'z'$, sarà un cono *circoscritto* alla superficie (A). Dunque *ogni cono circoscritto ad una superficie di second'ordine, la tocca nel contorno di una sezione, coniugata al diametro che passa pel vertice del cono.*

Se cotesta sezione (4) de'contatti rota attorno il punto xyz, il vertice $x'y'z'$ del corrispondente cono circoscritto, sarà sempre nel piano (3), cioè nel piano coniugato al diametro passante pel punto xyz. In generale si comprende, che dato il moto della sezione (4) de'contatti, si potrà determinare il moto del vertice $x'y'z'$.

Ove si rifletta che le tangenti, coniugate a un piano diametrale, sono parallele fra loro, si vedrà che *allorquando un cilindro è circoscritto ad una superficie di second'ordine, la curva di contatto è situata nel piano diametrale, coniugato alla direzione lmn della generatrice del cilindro.*

Nel caso che le superficie di second'ordine divengano cilindriche o coniche, è facile a vedere, che il diametro coniugato al piano tangente, si muta in un piano diametrale; e i coni e cilindri circoscritti, si cangiano in due piani tangenti, inclinati o paralleli.

FINE.

NIHIL OBSTAT

E. Jacopini Censor Theol. Deput.

IMPRIMATUR

Fr. Dom. Buttaoni O. P. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

A. Piatti Patriarcha Antiochenus Vicesg.

Fig. 1.

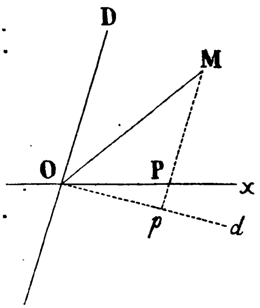


Fig. 2.

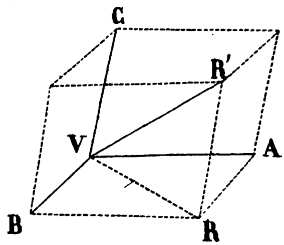


Fig. 3.

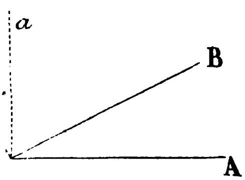


Fig. 4.

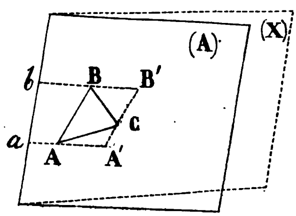


Fig. 5.

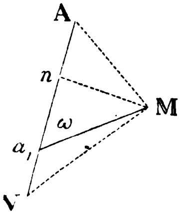
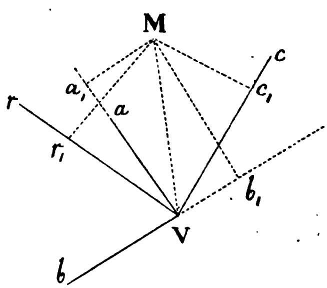


Fig. 6.



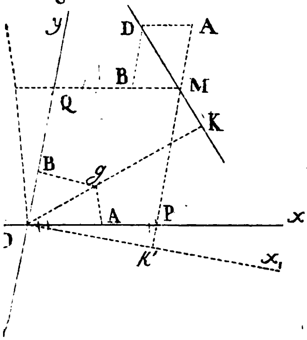


Fig. 7.

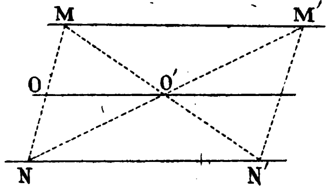


Fig. 8.

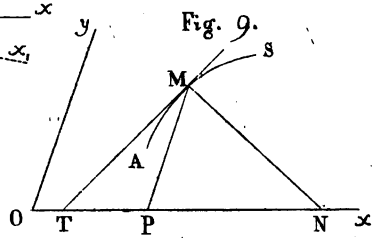


Fig. 9.

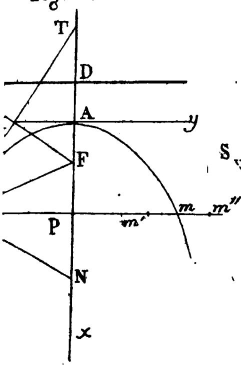


Fig. 10.

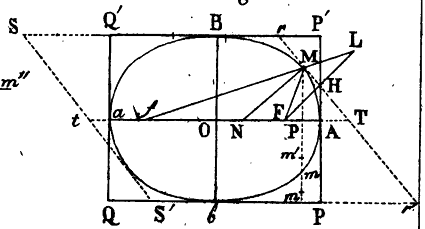


Fig. 11.

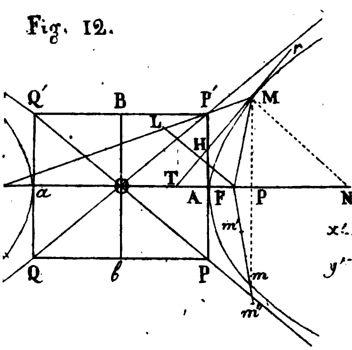


Fig. 12.

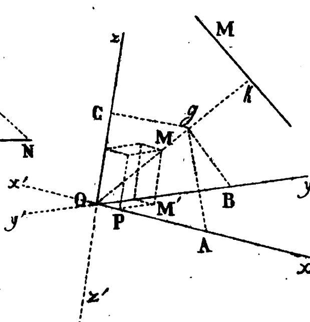


Fig. 13.

By Domenico Chelini.

Nota sulle proprietà di alcune espressioni algebriche relative alle superficie di second'ordine, e sulla riduzione di alcuni integrali multipli.

È noto che l' equazione delle superficie di second'ordine

$$(1)\qquad \begin{array}{l} Ax^2 \\ By^2 \\ Cz^2 \end{array} + 2\left|\begin{array}{l} A'yz \\ B'zx \\ C'xy \end{array}\right. - 2\left|\begin{array}{l} A''x \\ B''y \\ C''z \end{array}\right. - D = 0$$

riducesi, riportando la superficie agli assi principali e l'origine delle coordinate al centro, alla forma

$$(2)\qquad Lx^2 + My^2 + Nz^2 - S = 0.$$

In questa

$$S = D + \frac{1}{U}\left|\begin{array}{l} (BC - A'^2)A''^2 \\ (CA - B'^2)B''^2 \\ (AB - C'^2)C''^2 \end{array}\right. - \frac{2}{U}\left|\begin{array}{l} (AA' - B'C')B''C'' \\ (BB' - C'A')C''A'' \\ (CC' - A'B')A''B'' \end{array}\right.$$

$$U = ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2 = LMNH^2$$

ed $\qquad L, M, N,$

sono le radici dell'equazione

$$(3)\quad p^3 - \left\{\begin{array}{l} A\,sen^2 X_1 \\ B\,sen^2 Y_1 \\ C\,sen^2 Z_1 \end{array} - 2 \left| \begin{array}{l} A' sen\, Y_1\, sen\, Z_1\, cos x \\ B' sen\, Z_1\, sen\, X_1\, cos y \\ C' sen\, X_1\, sen\, Y_1\, cos z \end{array} \right.\right\} \frac{p^2}{H^2}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} BC - A'^2 \\ CA - B'^2 \\ AB - C'^2 \end{array} - 2 \left| \begin{array}{l} (AA' - B'C')\ cos\, X_1 \\ (BB' - C'A')\ cos\, Y_1 \\ (CC' - B'A')\ cos\, Z_1 \end{array} \right.\right\} \frac{p}{H^2} - \frac{U}{H^2} = 0,$$

e qui X_1, Y_1, Z_1, designano gli angoli yz, zx, xy degli assi coordinati; le lettere x, y, z, poste sotto i simboli trigonometrici, rappresentano nel triedro determinato dagli assi x, y, z gli angoli diedri, i cui spigoli sono rispettivamente gli assi x, y, z,

ed $$H = sen\, Y_1\ sen\, Z_1\, sen\, x.$$

(Si veda il saggio di geometria analitica stampato nel tom. LXXVI p.30 e 61 anno 1838 di questo giornale.) Ciò posto, giova rilevare il seguente

Teorema. *Nell'equazione* (3) *ciascuno de' coefficienti di* p^2, p, p^0, *conserva sempre lo stesso valore comunque si trasformino le coordinate, e si mutino in corrispondenza i coefficienti* A, B, C, A′ B′ C′, *nella* (1).

Dimostrazione. Le radici dell' equazione (3), che non contiene A″, B″, C″, non patiscono alterazione, se si suppone $A'' = 0$, $B'' = 0$, $C'' = 0$. Ma in questa ipotesi si ha $S = D$, e l'equazione (2) diventa

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - D = 0.$$

Ora è evidente che in questa, essendo fisso il termine D, non possono variare, al variar delle coordinate primitive, i coefficienti L, M, N, radici della (3), senza che varii la superficie di secondo ordine, che d'altra parte è già determinata per la (1).

Da qui poi si deriva, che *la quantità* S *conserva sempre lo stesso valore comunque si cangino l' origine e le direzioni degli assi*, *e però comunque varino in corrispondenza i coefficienti*

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',\ A'',\ B'',\ C'',\ D.$$

Infatti si è provato, che per cotesti cangiamenti non si mutano nella

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - S = 0$$

i coefficienti L, M, N; dunque neppur S si deve mutare.

Così, se lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$ siano le direzioni degli assi principali rispetto ai primitivi (*), e si cangino nelle principali le direzioni delle coordinate primitive; le A, B, C si convertiranno in L, M, N, svaniranno le A', B', C', e le A'', B'', C'' si cangeranno in

$$A''l + B''m + C''n,\ A''l' + B''m' + C''n',\ A''l'' + B''m'' + C''n'',$$

e però risulterà

(*) Dall'origine si tiri una retta = 1 parallelamente all'asse principale (x), e sulla medesima presa per diagonale si costruisca un parallelepipedo, di cui siano spigoli tre segmenti degli assi primitivi x, y, z; le lettere l, m, n designano cotesti tre spigoli. Lo stesso significato geometrico hanno rispetto agli assi grincipali (y); (z), le lettere l' m' n', l'' m'' n''.

$$S = D +$$

$$\frac{(A''l+B''m+C''n)^2}{L}+\frac{(A''l'+B''m'+C''n')^2}{M}+\frac{(A''l''+B''m''+ \ldots}{N}$$

Queste osservazioni, utili nello svolgere le proprietà delle superficie di second'ordine, giovano pure nella riduzione di alcuni integrali importanti.

Dato l'integrale triplo

$$\int U\, dx\, dy\, dz,$$

supponiamo che per un cangiamento delle variabili indipendenti, l' espressione U si cangi in U_1, e i differenziali dx, dx, dz nei trinomii

$$l dx + l' dy + l'' dz,\ m dx + m' dy + m'' dz,\ n dx + n' dy + n'' dz.$$

Fatto

$$K = (mn' - m'n)\, l'' + (nl' - n'l)\, m'' + (lm' - l'm)\, n'',$$

si avrà

$$\int U\, dx\, dy\, dz = \int K U_1\, dx\, dy\, dz,$$

purchè i limiti dell'integrale del secondo membro si determinino convenientemente riguardo ai limiti dell'integrale del primo membro.

Se il cangiamento delle variabili indipendenti si opera mediante il passaggio di un sistema di coordinate rettangolari in un altro sistema di coordinate pure rettangolari, il valor di K preso positivamente si ridurrà $= 1$, siccome è noto dalla geometria analitica, e si avrà

$$(A)\qquad \int U\,dx\,dy\,dz = \int U_1\,dx\,dy\,dz\,.$$

Sostituiamo nell'uno e nell'altro membro

$$x = ru\,,\; y = rv\,,\; z = rw\,,$$

ove

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\; u = \cos\omega,\; v = \operatorname{sen}\omega\cos\theta,\; w = \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta$$

e per questa sostituzione U divenga V, ed U_1 divenga V_1. Al prodotto

$$dx\,dy\,dz$$

converrà sostituire sotto il simbolo integrale

$$r^2 \operatorname{sen}\omega\;dr\;d\omega\;d\theta\,.$$

Quindi se i limiti dell'integrale

$$\text{rispetto ad}\begin{cases} r \\ \omega \\ \theta \end{cases} \quad \text{siano} \quad \begin{matrix} 0 & \text{e} & \infty \\ 0 & & \pi\,, \\ 0 & & 2\pi \end{matrix}$$

avremo

$$(B)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} V r^2 \operatorname{sen}\omega\;dr\;d\omega\;d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} V_1 r^2 \operatorname{sen}\omega\;dr\;d\omega\;d\theta.$$

Sia

$$U = \frac{e^{-r}}{r^2} F\left(\rho\frac{x}{r},\; \rho_1\frac{y}{r},\; \rho_2\frac{z}{r}\right),$$

ed in conseguenza

$$V = \frac{e^{-r}}{r^2} F (\rho u , \rho_1 v , \rho_2 w)$$

$$V_1 = \frac{e^{-r}}{r^2} F [\rho(lu + l'v + l''w), \rho_1(mu + m'v + m''w),$$
$$\rho_2 (nu + n'v + n''w)] .$$

Fatta l'integrazione rispetto ad r, avuto riguardo all'equazione

$$\int_0^\infty e^{-r} dr = - e^{-\infty} + e^0 = 1 ,$$

e posto

$$\rho_1 = 0, \ \rho_2 = 0, \ \rho l = a, \ \rho l' = b, \ \rho l'' = c,$$

d'onde $$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 ,$$

si otterrà

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F (au + bv + cw) \operatorname{sen}\omega \, d\omega \, d\theta =$$

$$2\pi \int_0^\pi F ((a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \cos\omega)) \operatorname{sen}\omega \, d\omega ,$$

formula di Poisson.

Nella formula (A) sia

$$U = \frac{re^{-r}}{P^3} F\left(\frac{P}{Q}\right), \text{ e } P = ax + by + cz, \ Q = (Ax^2 + By^2 + C$$

Facciamo

$$x = xA^{\frac{1}{2}} , \quad y = yB^{\frac{1}{2}} , \quad z = zC^{\frac{1}{2}} ,$$

d'onde

$$X^2+Y^2+Z^2=Q^2\,,\quad dx\,dy\,dz=\frac{dX\,dY\,dZ}{(ABC)^{\frac{1}{2}}}\,;$$

e $$\frac{a}{A^{\frac{1}{2}}}=a_1\,,\quad \frac{b}{B^{\frac{1}{2}}}=b_1\,,\quad \frac{c}{C^{\frac{1}{2}}}=c_1\,,$$

d'onde $$P=a_1X+b_1Y+c_1Z.$$

Sarà

$$\int\frac{re^{-r}}{P^3}F\left(\frac{P}{Q}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\frac{\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}}{(ABC)^{\frac{1}{2}}(a_1x+b_1y+c_1z)^3}F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dxdydz.$$

Mutiamo le coordinate rettilinee nelle coordinate polari ru, rv, rw. Posto

$$\left(\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}=\mu\,,$$

si avrà

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-r}}{p^3}F\left(\frac{p}{q}\right)sen\omega\,dr\,d\omega\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mu e^{-\mu r}}{(ABC)^{\frac{1}{2}}\,p_1^3}F(p_1)\,sen\omega\,dr\,d\omega\,d\theta,$$

ove p, q sono ciò che diventano P, Q, quando al coordinate x, y, z si sostituisce u, v, w; e p_1 è ci che diventa p, quando ad a, b, c si sostituisce

$$\frac{a}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{b}{\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{c}{\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}}.$$

Quindi fatto

$$\left(\frac{a^2}{\mathrm{A}} + \frac{b^2}{\mathrm{B}} + \frac{c^2}{\mathrm{C}}\right)^{\frac{1}{2}} = \rho,$$

si ottiene

$$(\mathrm{C}) \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{F}\left(\frac{p}{q}\right)\frac{sen\omega d\omega d\theta}{p^3} = \frac{2\pi}{\rho^3(\mathrm{ABC})^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi} \mathrm{F}(\rho cos\omega)\frac{se}{\omega}$$

Sia $\quad \mathrm{P} = ax + by + cz, \; \mathrm{Q} = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{A}x^2 \\ \mathrm{B}y^2 \\ \mathrm{C}z^2 \end{matrix} - 2 \begin{vmatrix} \mathrm{A}'yz \\ \mathrm{B}'zx \\ \mathrm{C}'xy \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}},$

essendo $\begin{matrix} \mathrm{A}x^2 \\ \mathrm{B}y^2 \\ \mathrm{C}z^2 \end{matrix} - 2 \begin{vmatrix} \mathrm{A}'yz \\ \mathrm{B}'zx \\ \mathrm{C}'xy \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} ax \\ by \\ cz \end{vmatrix} = 0$, un'equazione propria a rappresentare un'ellissoide.

Se le direzioni degli assi si cangiano nelle principali lmn, $l'm'n'$, $l''m''n''$ della ellissoide, e si trasporta l' origine delle coordinate al centro, l' equazione della ellissoide prenderà la forma

$$\mathrm{L}x^2 + \mathrm{M}y^2 + \mathrm{N}z^2 - \mathrm{S} = 0,$$

ove $\quad \mathrm{S} = \dfrac{1}{\mathrm{U}} \begin{vmatrix} (\mathrm{BC} - \mathrm{A}'^2)\, a^2 \\ (\mathrm{CA} - \mathrm{B}'^2)\, b^2 \\ (\mathrm{AB} - \mathrm{C}'^2)\, c^2 \end{vmatrix} - \dfrac{2}{\mathrm{U}} \begin{vmatrix} (\mathrm{AA}' - \mathrm{B}'\mathrm{C}')bc \\ (\mathrm{BB}' - \mathrm{C}'\mathrm{A}')ca \\ (\mathrm{CC}' - \mathrm{A}'\mathrm{B}')ab \end{vmatrix}$

$$= \frac{(al+bm+cn)^2}{\mathrm{L}} + \frac{(al'+bm'+cn')^2}{\mathrm{M}} + \frac{(al''+bm''+cn'')^2}{\mathrm{N}},$$

ed $U = ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2 = LMN.$

Ciò posto, la formula (C) dopo il cangiamento delle direzioni delle coordinate nelle direzioni principali della nominata ellissoide, diventa nella fatta ipotesi

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F\left(\frac{p}{q}\right)\frac{sen\omega d\omega d\theta}{p^3} = \frac{2\pi}{\sqrt{(US^3)}}\int_0^{\pi} F(cos\omega.\sqrt{S})\frac{sen\omega d\omega}{cos^3\omega}.$$

Se nella formula (A) la funzione sotto il simbolo integrale è

$$\frac{re^{-r}}{P^{\alpha}Q^{\beta}} F\left(\frac{P}{Q}\right), \text{ e } \alpha+\beta=3,$$

si troverà con lo stesso metodo
~~ed $\alpha+\beta=3$,~~

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{p^{\alpha}\cdot q^{\beta}} F\left(\frac{p}{q}\right) sen\omega\, d\omega\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(US^{\alpha})}}\int_0^{\pi} \frac{1}{cos^{\alpha}\omega} F(cos\omega.\sqrt{S})\, sen\omega\, d\omega,$$

nella quale formula sono contenute, come casi particolari, oltre la riportata di Poisson, alcune dimostrate dal sig. Cauchy nel V tomo de' suoi esercizi di matematica.

DOMENICO CHELINI
DELLE SCUOLE PIE
Professore di filosofia nel Collegio Nazareno.

ARTICOLO ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO

TOMO XCIV.