Luciano Pandolfi
Politecnico di Torino
Dipartimento di Matematica

Misura ed integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Indice

1 Introduzione

In questo capitolo si presentano gli elementi di una teoria dell'integrazione, dovuta a Lebesgue, più generale di quella di Riemann. E' noto che esistono funzioni, come la funzione di Dirichlet, che non sono integrabili secondo Riemann. Vedremo che la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue, ma la ragione per introdurre questo nuovo integrale non è di allargare la classe delle funzioni integrabili. La ragione invece è la seguente: in numerosi problemi dell'Analisi matematica è necessario scambiare il segno di limite, o di serie, con quello di integrale, si pensi per esempio alle serie di Fourier. Tipicamente, le serie di Fourier non convergono uniformemente, condizione che è richiesta per lo scambio di limiti ed integrali di Riemann. E' questa la ragione che ha indotto a costruire integrali più generali di quello di Riemann.

Consideriamo la funzione di *Dirichlet* da questo punto di vista.

Esempio 1 La funzione di Dirichlet è definita su $0 \leq x \leq 1$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q \text{ è razionale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essa è limite di una successione (f_k) di funzioni integrabili secondo Riemann. Si ricordi infatti che i razionali sono numerabili. Sia (q_r) la successione dei razionali e sia

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q_r \text{ con } r \leq k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente,

$$\lim f_k(x) = f(x)\,, \qquad \lim \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Non possiamo però dire che

$$\lim \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

perché la funzione $f(x)$ non è integrabile.

Se vogliamo dare un senso alla formula precedente, dovremo costruire una teoria dell'integrazione che permetta di integrare anche la funzione di Dirichlet.

Si osservi che se la formula precedente deve valere, allora l'integrale della funzione di Dirichlet deve essere nullo. ∎

La funzione di Dirichlet è la funzione caratteristica dei razionali di $[0,1]$ e quindi il suo integrale è la "misura" dell'insieme di tali razionali. Dunque, l'insieme dei razionali di $[0,1]$ deve avere "misura di Lebesgue" nulla. Si ricordi che tale insieme non è misurabile secondo Peano-Jordan. D'altra parte la teoria della misura di Peano-Jordan è insufficiente anche per la trattazione del solo integrale di Riemann. Per vedere questo enunciamo la seguente caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.

Diciamo che un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è *nullo* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione di intervalli aperti (a_r, b_r), disgiunti o meno, tali che:

$$I \subseteq \bigcup (a_r, b_r)\,, \qquad \sum_r (b_r - a_r) < \epsilon\,.$$

Si nota facilmente che un insieme che ha misura zero secondo Peano-Jordan è anche un insieme nullo secondo la definizione precedente, ma non viceversa. Si prova infatti che l'insieme dei razionali di $[0,1]$, non misurabile secondo Peano-Jordan, è però un insieme nullo secondo la definizione precedente, si veda l'Esempio 28.

Vale:

Teorema 2 (Di Riemann-Lebesgue) *Una funzione limitata $f(x)$ definita su un intervallo limitato (a,b) di $\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme nullo.*

Osservazione 3 Si noti che questo teorema implica che la funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann. Infatti essa è discontinua in ciascun punto di $[0,1]$ e $[0,1]$ non è un insieme nullo.

Ricordiamo inoltre che ogni unione di intervalli aperti può rappresentarsi come unione disgiunta di intervalli aperti. Nella definizione di insieme nullo è però più comodo, ed ovviamente non restrittivo, non richiedere che gli intervalli siano disgiunti. ∎

Passiamo ora ad introdurre la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Conviene premettere alcune nozioni di teoria degli insiemi.

2 Preliminari sulle misure di insiemi

In questo corso vogliamo studiare la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$. Conviene però premettere alcune nozioni più astratte sulla struttura di certe famiglie di insiemi e sulle misure definite su di esse.

2.1 Anelli ed algebre di insiemi

Sia $\mathcal{S}$ una famiglia non vuota di s.insiemi di un assegnato insieme Ω. In $\mathcal{S}$ consideriamo le due operazioni di intersezione e di differenza simmetrica. Diciamo che la famiglia di insiemi $\mathcal{S}$ è un $\boxed{\textit{anello}}$ *di insiemi* se è chiusa rispetto a tali operazioni:

$$A\,,\ B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \begin{cases} A \triangle B \in \mathcal{S}\,, \\ A \cap B \in \mathcal{S}\,. \end{cases}$$

Dato che

$$A - B = A \triangle (A \cap B)\,, \qquad A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)\,,$$

si vede che se $\mathcal{S}$ è un anello di insiemi allora esso è chiuso rispetto alle operazioni di unione e di differenza e inoltre

$$\emptyset = A - A \in \mathcal{S}\,.$$

Dato che $\emptyset$ è l'identità rispetto all'operazione $\triangle$, si vede che un anello di insiemi è un anello (secondo la definizione incontrata nel corso di Algebra) rispetto alle due operazioni $+ = \triangle$ e $\cdot = \cap$.

Si sa che un anello con identità moltiplicativa si chiama un'algebra; e l'identità rispetto all'operazione di intersezione è Ω. Dunque un'anello di s.insiemi di Ω che contiene anche Ω si chiama un' $\boxed{\textit{algebra}}$ *di insiemi.*

Si osservi ora che

$$A \cap B = (\widetilde{\tilde{A} \cup \tilde{B}})\,, \qquad A \triangle B = \left\{(\widetilde{A \cap B})\right\} \cap (A \cup B)\,,$$

dove la tilde (˜) indica il complementare. Dunque:

Teorema 4 *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di s.insiemi di Ω e valga:*

$$\Omega \in \mathcal{S}\,, \qquad A\,,\ B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{S} \\ \tilde{A} \in \mathcal{S}\,. \end{cases}$$

La famiglia $\mathcal{S}$ è un'algebra di insiemi.

Il teorema precedente dà una definizione alternativa di algebra di insiemi, che risulta più comoda per le applicazioni.

Un anello, rispettivamente un'algebra, di insiemi si dice $\boxed{\sigma\textit{-anello}}$, rispettivamente $\boxed{\sigma\textit{-algebra}}$ quando è chiusa rispetto alle unioni numerabili di suoi elementi.

Usando le proprietà delle operazioni tra insiemi si vede che un σ-anello è anche chiuso rispetto alle operazioni di intersezione, differenza, differenza simmetrica, di successioni di suoi elementi.

Ricordando la proprietà di additività dell'integrale di Riemann,

$$\int_{A\cup B} = \int_A + \int_B$$

che dovrà valere anche per l'integrale di Lebesgue, si capisce l'interesse che anelli ed algebre di insiemi hanno nella teoria dell'integrazione.

Osservazione 5 E' opportuno sottolineare la differenza tra la definizione di topologia e quella di σ-algebra. Una topologia in Ω contiene l'insieme vuoto ed Ω, e contiene l'unione degli elementi di ciascun suo s.insieme. Contiene inoltre le intersezioni degli elementi dei suoi s.insiemi finiti. Invece, una σ-algebra contiene, oltre ad Ω e $\emptyset$, sia le unioni che le intersezioni degli elementi dei suoi s.insiemi che sono finiti o numerabili. ∎

Si vede facilmente:

Teorema 6 *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia non vuota di s.insiemi di Ω. Esistono un* minimo *anello, algebra, σ-anello, σ-algebra contenenti $\mathcal{S}$.*

2.2 Un esempio: Insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$

L'esempio seguente è per noi particolarmente importante, perché è a partire da esso che introdurremo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. L'insieme Ω è

$$\Omega = [a, b) \subseteq \mathbb{R} \qquad -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

se $n = 1$ oppure, se $n > 1$,

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^n \,, \qquad -\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty \,.$$

Per chiarezza, consideriamo prima di tutto il caso $\Omega = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Un anello di s.insiemi di $[a, b)$ è la famiglia delle unioni finite di intervalli

$$[\alpha, \beta) \subseteq [a, b) \tag{1}$$

aperti a destra e chiusi a sinistra (per contrasto si noti che la famiglia delle unioni finite o meno di intervalli aperti non è un anello perchè non è chiusa rispetto alla differenza di insiemi). Vale:

Teorema 7 *Ogni aperto di* $\mathbb{R}$ *è unione* numerabile *di intervalli come in (1), due a due disgiunti.*

Un risultato analogo vale anche in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 8 *Ogni aperto di* $\mathbb{R}^n$ *è unione* numerabile *di insiemi, due a due disgiunti, della forma*

$$\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i)\,.$$

Questo teorema suggerisce di chiamare $\boxed{\textit{insieme elementare}}$ di $\mathbb{R}^n$ un insieme della forma

$$\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i)\,.$$

Chiameremo *insieme* $\boxed{\textit{semplice}}$ l'insieme vuoto oppure un insieme che è unione finita di insiemi elementari. Si noti che un insieme semplice può rappresentarsi in più modi come unione di insiemi elementari.

Si vede facilmente che la famiglia degli insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$ è un anello; e, se si decide di lavorare soltanto con quelli che sono contenuti in un dato insieme elementare, si ha un'algebra.

La minima σ-algebra che contiene tutti gli insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$, e che contiene $\mathbb{R}^n$ stesso, si chiama la σ-algebra di $\boxed{\textit{Borel}}$ di $\mathbb{R}^n$, e i suoi elementi si chiamano $\boxed{\textit{boreliani}}$.

Da ciò che abbiamo detto, non è difficile provare che sia gli insiemi aperti che gli insiemi chiusi sono boreliani.

2.3 Misure di insiemi

Sia Ω un insieme. Si chiama $\boxed{\textit{misura}}$ su Ω una funzione $A \to m(A)$ dai s.insiemi di Ω nei reali non negativi, tale che:

- Il dominio della funzione è un anello $\mathcal{S}$ di s.insiemi di Ω;
- se A, B sono elementi disgiunti di $\mathcal{S}$, ossia tali che $A \cap B = \emptyset$, allora

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,.$$

La misura si chiama $\boxed{\sigma\textit{-additiva}}$ se è una misura e inoltre per ogni successione (A_r) di elementi di $\mathcal{S}$, due a due disgiunti, ossia tali che $A_r \cap A_k = \emptyset$ per $r \neq k$, vale

$$\bigcup A_r \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad m\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r)\,.$$

Osservazione 9 In generale, l'unione degli A_r non è un elemento dell'anello. In tal caso niente si richiede alle misure degli A_r. ∎

Talvolta conviene permettere ad una misura di prendere valori in $[0, +\infty]$. Per contrasto, la misura si dice $\boxed{\textit{finita}}$ se essa prende valore in $[0, +\infty)$. La misura si chiama $\boxed{\textit{probabilità}}$ se prende valori in $[0, 1]$.

Proviamo ora:

Teorema 10 *Sia m una misura su un anello $\mathcal{S}$. Vale:*

1. *se A, B sono elementi di $\mathcal{S}$, $A \subseteq B$, allora $m(A) \leq m(B)$;*
2. *Se A, B sono elementi di $\mathcal{S}$ allora si ha $m(A) = m(A - B) + m(A \cap B)$;*
3. *se m è una misura finita allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$;*
4. *se m è una misura e se esiste A tale che $m(A) < +\infty$, allora $m(\emptyset) = 0$.*

Dim. Notiamo che

$$B = A \cup [B - A], \qquad B \cap [B - A] = \emptyset\,.$$

Dunque,

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \geq m(A)\,.$$

Ciò prova la proprietà 1.

La proprietà 2. segue dall'additività della misura, applicata all'uguaglianza

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

notando che l'unione è disgiunta.

La proprietà 3. segue notando che

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)\,.$$

L'unione è disgiunta e quindi

$$m(A \cup B) = m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B)\,.$$

Essendo finita la misura, dalla proprietà 2 si ha

$$m(A - B) = m(A) - m(A \cap B)\,, \qquad m(B - A) = m(B) - m(B \cap A)\,.$$

Sostituendo segue l'asserto (è appena il caso di notare che $m(A \cap B) = m(B \cap A)$).

La 4. discende da

$$A \cup \emptyset = A\,, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad \text{così che} \qquad m(A) = m(A) + m(\emptyset)\,.$$

Semplificando $m(A)$ segue $m(\emptyset) = 0$. ∎

La prima delle proprietà provate al Teorema 10 si chiama la *proprietà di* $\boxed{\textit{monotonia}}$ *della misura.*

Diamo ora un criterio comodo per provare la σ–additività di una misura.

Teorema 11 *Sia $\mathcal{S}$ un anello e sia m una misura* finita *su $\mathcal{S}$. Se* per ogni *successione (Y_r) di elementi di $\mathcal{S}$ "decrescente all'insieme vuoto", ossia tale che*

$$Y_{r+1} \subseteq Y_r\,, \qquad \bigcap_{r=1}^{+\infty} Y_r = \emptyset\,,$$

vale

$$\lim m(Y_r) = 0 = m(\emptyset)\,,$$

allora la misura è σ-additiva.

<u>**Dim.**</u>

Si sa già che $m(\emptyset) = 0$ perché la misura è finita.

Consideriamo una famiglia A_r insiemi disgiunti di $\mathcal{S}$ e si sappia che

$$A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r \in \mathcal{S}\,.$$

Dobbiamo provare che

$$m(A) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r)\,.$$

Introduciamo per questo gli insiemi

$$X_k = \bigcup_{r=1}^{k} A_r\,.$$

Vale

$$A = X_k \cup [A - X_k]\,, \qquad m(A) = m(X_k) + m(A - X_k)\,. \tag{2}$$

Per costruzione,

$$Y_{k+1} = A - X_{k+1} \subseteq A - X_k = Y_k\,, \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} Y_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [A - X_k] = \emptyset\,.$$

Dunque, per ipotesi,

$$\lim m(A - X_k) = m(\emptyset)$$

e quindi

$$\lim m(A - X_k) = 0$$

perché la misura è finita. La proprietà di additività della misura mostra che

$$m(X_k) = \sum_{r=1}^{k} m(A_r)$$

e la successione

$$k \to \sum_{r=1}^{k} m(A_r)$$

cresce e quindi ammette limite. Dunque, da (2),

$$m(A) = \lim_k \sum_{r=1}^{k} m(A_r) + \lim_k m\,(A - X_k) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r)$$

Ciò è quanto volevamo provare. ∎

Il risultato precedente può invertirsi, ottenendo una proprietà di "continuità" delle misure σ–additive.

Teorema 12 *Sia (A_r) una successione* crescente *e sia (B_r) una successione* decrescente *di elementi di $\mathcal{S}$. Sia rispettivamente*

$$A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r\,, \qquad B = \bigcap_{r=1}^{+\infty} B_r\,.$$

Sia m una misura σ-additiva su $\mathcal{S}$. Allora

$$m(A) = \lim_r m(A_r)\,.$$

Se inoltre la misura è finita *si ha:*

$$m(B) = \lim_r m(B_r)\,.$$

Dim. Proviamo prima di tutto l'asserto per il caso delle successioni crescenti di insiemi. Introduciamo gli insiemi

$$\hat{A}_{k+1} = \tilde{A}_k \cap A_{k+1}\,.$$

Gli insiemi $\hat{A}_k$ sono due a due disgiunti perché la successione (A_k) è crescente e

$$A_k = \bigcup_{r=1}^{k} \hat{A}_r \,, \qquad \Longrightarrow \qquad A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} \hat{A}_r \,.$$

Essendo gli $\hat{A}_r$ due a due disgiunti,

$$\begin{aligned} m(A_k) &= \sum_{r=1}^{k} m(\hat{A}_r) \,, \\ m(A) &= \sum_{r=1}^{+\infty} m(\hat{A}_r) = \lim_k \sum_{r=1}^{k} m(\hat{A}_r) = \lim_k m(A_k) \,. \end{aligned}$$

Ciò è quanto volevamo provare.

Si noti che non si esclude che la misura di A sia $+\infty$.

La dimostrazione della seconda parte del teorema discende dalla prima: si definisca

$$A_k = B_1 \cap \tilde{B}_k \qquad \Longrightarrow \qquad m(A_k) = m(B_1) - m(B_k) \,.$$

Si noti che l'ultima uguaglianza vale perché $B_k \subseteq B_1$ e perché B_1 e quindi anche B_k hanno misura finita. La successione di insiemi (A_k) è crescente e

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[B_1 \cap \tilde{B}_k \right] = B_1 \cap \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} \tilde{B}_k \right] = B_1 \cap \left[\widetilde{\bigcap_k B_k} \right] = B_1 \cap \tilde{B} = B_1 - B \,.$$

Dunque, per la parte già provata del teorema,

$$m(B_1) - m(B) = m(B_1 - B) = \lim m(A_k) = \lim_k \left[m(B_1) - m(B_k) \right] \,.$$

Ciò completa la dimostrazione. ∎

Osservazione 13 L'ipotesi che la misura sia finita non è richiesta nel caso delle successioni crescenti. Nel caso delle successioni decrescenti può sostituirsi con la condizione che, per un opportuno k, sia $m(B_k) < +\infty$. Una condizione di questo tipo è comunque essenziale e non può eliminarsi nel caso delle successioni di insiemi decrescenti. Infatti, se $\Omega = \mathbb{R}$ e se $A_r = [r, +\infty)$ allora $m(A_r) = +\infty$ per ogni r mentre $m(\cap A_r) = m(\emptyset) = 0$.

Vedremo che la misura che è $+\infty$ su Y_r e che è zero su $\emptyset$ è la valutazione su questi insiemi della misura di Lebesgue, che è σ–additiva. ∎

3 La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Introduciamo ora la misura di Lebesgue su una opportuna σ-algebra di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Procediamo in due passi. Prima di tutto introduciamo una misura, che vedremo essere σ-additiva, sull'anello degli insiemi semplici. Nel secondo passo estenderemo questa misura ad una σ-algebra che sarà la σ-algebra degli "insiemi misurabili secondo Lebesgue".

3.1 Una misura σ-additiva su $\mathbb{R}^n$

Consideriamo ora gli insiemi elementari contenuti in un dato insieme elementare $J \subseteq \mathbb{R}^n$, definiti al paragrafo 2.2. Definiamo

$$m(\emptyset) = 0\,, \qquad m\left(\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i)\,. \tag{3}$$

Estendiamo quindi questa misura all'algebra $\mathcal{S}$ delle unioni finite di insiemi elementari, ossia all'algebra degli insiemi semplici contenuti in J, imponendo

$$m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2) \qquad \text{se} \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset\,. \tag{4}$$

Osservazione 14 Si noti che uno stesso insieme semplice può rappresentarsi in più modi come unione di insiemi elementari disgiunti:

$$[0,1) = [0,1/2) \cup [1/2,1)\,.$$

Se $n = 1$ è facile provare che il valore che m associa ad un insieme non dipende dal modo con cui esso si rappresenta. Lo stesso vale in dimensione maggiore di 1, ma la dimostrazione è macchinosa. ∎

Vogliamo provare che la misura m che abbiamo introdotta è σ-additiva:

Teorema 15 *La misura definita da (3) e da (4) è σ-additiva.*

Dim. La misura è finita perché $m(J) < +\infty$. Possiamo quindi applicare il Lemma 11 e provare che per ogni successione di insiemi semplici decrescente a $\emptyset$, la successione delle misure converge a 0:

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \emptyset \Longrightarrow \lim m(A_k) = 0\,.$$

Si noti che la successione $\{m(A_k)\}$ decresce. Sia per assurdo

$$m(A_k) > \alpha > 0 \qquad \forall k\,.$$

Fissiamo $\epsilon \in (0, \alpha/4)$.

Sia $k = 1$ e consideriamo l'insieme semplice A_1. Possiamo rappresentarlo come unione finita di insiemi elementari disgiunti, ciascuno della forma $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$. Inoltre, esso contiene l'insieme semplice A_2. Sostituendo ciascuno insieme elementare $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ con un insieme elementare $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i - \sigma)$ si trova ancora un insieme elementare, diciamo J_1, e si può scegliere $\sigma > 0$ così piccolo che

$$m(J_1 \cap A_2) > \alpha - \epsilon\,.$$

Inoltre,

$$J_1 \subseteq \overline{J}_1 \subseteq A_1\,, \qquad m(\overline{J}_1) = m(J_1) > \alpha - \epsilon\,.$$

L'insieme $J_1 \cap A_2$ è ancora un insieme semplice. Indichiamolo col simbolo $\hat{A}_2$,

$$\hat{A}_2 = J_1 \cap A_2\,.$$

Ripetiamo la stessa costruzione, ma a partire dall'insieme $\hat{A}_2$ e con $\epsilon/2$ al posto di ϵ. Si costruisce un insieme J_2 tale che

$$\begin{aligned} &J_2 \subseteq \overline{J}_2 \subseteq \hat{A}_2 \subseteq A_2\,, \qquad m(J_2 \cap A_3) > (\alpha - \epsilon) - \epsilon/2\,, \\ &m(\overline{J}_2) = m(J_2) \geq \alpha - (\epsilon + \epsilon/2)\,. \end{aligned}$$

Si noti che $\overline{J}_2$, essendo contenuto in $\hat{A}_2$, è sia s.insieme di A_2 che di $\overline{J}_1$.

Iterando questa costruzione, si trova una successione (J_k) con queste proprietà:

i) $J_k \subseteq \overline{J}_k \subseteq A_k$;

ii) $J_k \subseteq A_1$ per ogni k, e quindi i J_k sono limitati;

iii) $\overline{J}_k \subseteq \overline{J}_{k-1}$;

iv) $m(\overline{J}_k) = m(J_k) \geq m(J_k - A_{k+1}) > \alpha - \left(\sum_{i=1}^k \epsilon/2^k\right) > \alpha - \epsilon > 0$ e quindi nessuno dei $\overline{J}_k$ è vuoto.

Grazie alle proprietà **ii**)–**iv**), segue dal teorema di Cantor che gli insiemi $\overline{J}_k$ hanno un punto comune x_0 che, per la proprietà **i**) appartiene a ciascuno degli A_k. Ciò contrasta con l'ipotesi. La contraddizione trovata mostra che deve aversi

$$\lim m(A_k) = 0\,.$$

Dunque, la misura è σ-additiva. ∎

Estendiamo ora la famiglia degli insiemi cui si può attribuire una misura. Consideriamo prima di tutto il caso degli insiemi limitati e quindi estenderemo la definizione ad insiemi illimitati.

3.2 Insiemi limitati e misurabili secondo Lebesgue

Fissiamo un insieme elementare Q e lavoriamo ora soltanto con suoi s.insiemi. A ciascun insieme $A \subseteq Q$ associamo un numero che si chiama la sua *misura* $\boxed{\textit{esterna}}$, in simboli $m^*(A)$, come segue:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum m(R_j),\ R_j \text{ elementare},\ \bigcup_{i \geq 1} R_j \supseteq A \right\}.$$

Nella definizione precedente, l'insieme degli R_j può essere finito o numerabile.

Si nota immediatamente che se S è un insieme elementare, e quindi anche se è un insieme semplice, allora

$$m^*(S) = m(S)\,.$$

Ovviamente:

Corollario 16 *Se $A \subseteq B$ allora $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

La funzione m^* è quindi una $\boxed{\textit{funzione monotona}}$ d'insieme, che però non è una misura perché non è additiva. Per essa vale solamente:

Teorema 17 *La funzione m^* è* $\boxed{\text{subadditiva}}$; *ossia per ogni famiglia $\{A_j\}$ finita o numerabile di s.insiemi di Q e per ogni insieme A tale che*

$$A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_j$$

vale

$$m^*(A) \leq \sum_{j \geq 1} m^*(A_j)\,. \tag{5}$$

<u>Dim</u>. Si fissi $\epsilon > 0$. Sia $\{R_i^{(j)}\}$ una famiglia finita o numerabile di insiemi elementari per cui

$$A_j \subseteq \bigcup_{i \geq 1} R_i^{(j)} \qquad \sum_{i \geq 1} m(R_i^{(j)}) \leq m^*(A_j) + \epsilon/2^j\,.$$

Essendo

$$A \subseteq \bigcup_{j>1} \bigcup_{i \geq 1} R_i^{(j)}\,,$$

segue

$$m^*(A) \leq \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} m(R_i^{(j)}) \leq \sum_{j \geq 1} \left[m^*(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right] \leq \epsilon + \sum_{j \geq 1} m^*(A_j)\,.$$

L'asserto segue perché questa diseguaglianza vale per ogni ϵ. ∎

Osservazione 18 In generale, la disuguaglianza in (5) è stretta, anche se gli A_j sono due a due disgiunti. ∎

Lemma 19 *Per ogni coppia di insiemi A e B si ha*

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A\Delta B)\,. \tag{6}$$

Dim. Vanno provate le due disuguaglianze

$$-m^*(A\Delta B) \leq m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A\Delta B)\,.$$

Queste sono ambedue conseguenza della subadditività di m^*. Infatti,

$$\begin{array}{l} A \subseteq B \cup (A\Delta B) \implies m^*(A) \leq m^*(B) + m^*(A\Delta B) \\ \text{ossia} \quad m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A\Delta B)\,; \\ B \subseteq A \cup (A\Delta B) \implies m^*(B) \leq m^*(A) + m^*(A\Delta B) \\ \text{ossia} \quad m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(A\Delta B)\,. \end{array}$$ ∎

Indichiamo ora col simbolo $\mathcal{L}$ la famiglia dei s.insiemi di Q con questa proprietà: $A \in \mathcal{L}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme semplice I_ϵ tale che

$$m^*(A \triangle I_\epsilon) < \epsilon\,.$$

Gli insiemi di $\mathcal{L}$ si dicono *misurabili secondo* $\boxed{\textit{Lebesgue}}$.

Si osservi il procedimento che abbiamo fatto: si è usato m^* per definire una "misura da sopra" che permetta di valutare quanto bene un dato insieme A si possa approssimare con insiemi semplici. Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono quelli che si approssimano tanto bene quanto si vuole con insiemi semplici.

Proveremo che $\mathcal{L}$ è una σ-algebra. Nel fare ciò introdurremo anche una misura σ-additiva λ su $\mathcal{L}$, che estende m, e che si chiama la *misura di* $\boxed{\textit{Lebesgue}}$.

Definitione 20 La misura λ è la restrizione di m^* alla famiglia di insiemi $\mathcal{L}$. La misura λ si chiama *misura di* $\boxed{\textit{Lebesgue}}$.

Ovviamente, dobbiamo ancora provare che $\mathcal{L}$ è una σ-algebra e che λ è effettivamente una misura e che inoltre è σ-additiva. Per ora sappiamo solamente che λ è subadditiva; ossia sappiamo che se (A_n) è una successione di elementi di $\mathcal{L}$ e se $A \in \mathcal{L}$ è contenuto nell'unione degli A_n allora si ha

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)\,. \tag{7}$$

Proveremo che $\mathcal{L}$ è una σ-algebra e che λ è una misura σ-additiva procedendo in vari passi. Proviamo prima di tutto che $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi. Ricordiamo che stiamo lavorando con sottoinsiemi di un fissato insieme elementare Q. Dunque, $\tilde{A} = Q - A$ per ogni $A \subseteq Q$.

Teorema 21 *Valgono le due proprietà seguenti:*

1. *Se $A \in \mathcal{L}$ allora $\tilde{A} = Q - A \in \mathcal{L}$;*
2. *siano A, B in $\mathcal{L}$. Allora, $A \cup B \in \mathcal{L}$.*

<u>Dim</u>. Proviamo la prima proprietà. Sia $\epsilon > 0$ e sia R un insieme semplice tale che

$$m^*(A \triangle R) < \epsilon \,.$$

Si noti che

$$(Q - A) \triangle (Q - R) = A \triangle R \,.$$

Dunque,

$$m^*((Q - A) \triangle (Q - R)) < \epsilon \,.$$

Ora, $\hat{R} = Q - R$ è ancora un insieme semplice e quindi per ogni $\epsilon > 0$ si trova un insieme semplice $\hat{R}$ per cui

$$m^* \left((Q - A) \Delta \hat{R} \right) < \epsilon \,;$$

ossia, $Q - A \in \mathcal{L}$. Proviamo ora la seconda proprietà. Sia $\epsilon > 0$ e siano R_A ed R_B insiemi semplici e tali che

$$m^*(A \triangle R_A) < \epsilon/2 \,, \qquad m^*(B \triangle R_B) < \epsilon/2 \,.$$

Notiamo che $R_A \cup R_B$ è ancora un insieme semplice e che

$$(A \cup B) \triangle (R_A \cup R_B) \subseteq (A \triangle R_A) \cup (B \triangle R_B) \,.$$

La subadditività della misura esterna mostra che

$$m^* \left((A \cup B) \triangle (R_A \cup R_B) \right) < \epsilon \,.$$

Dunque, $A \cup B \in \mathcal{L}$. ∎

Si è così provato che $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi. Come si è detto, su $\mathcal{L}$ definiamo la funzione

$$\lambda(A) = m^*(A)$$

che si chiama la *misura di* $\boxed{\textit{Lebesgue}}$. Mostreremo che questa è una misura σ-additiva. Mostriamo prima di tutto l'additività. Per questo abbiamo bisogno di un lemma:

Lemma 22 *Siano A e B due insiemi* disgiunti. *Siano R ed S insiemi* qualsiasi. *Si ha:*

$$R \cap S \subseteq (B \Delta S) \cup (A \Delta R). \tag{8}$$

Dim. Scriviamo

$$R \cap S = \Big[(R \cap A) \cup (R \cap \tilde{A})\Big] \cap S\,.$$

Essendo A e B disgiunti, si ha $A \subseteq \tilde{B}$ e quindi la precedente si completa come segue:

$$\begin{aligned}
&R \cap S = \Big[(R \cap A) \cup (R \cap \tilde{A})\Big] \cap S \subseteq \Big[(R \cap \tilde{B}) \cup (R \cap \tilde{A})\Big] \cap S \\
&\subseteq \Big[(S \cap \tilde{B}) \cap R\Big] \cup \Big[(R \cap \tilde{A}) \cap S\Big] \subseteq [(S\Delta B) \cap R] \cup [(R\Delta A) \cap S] \\
&\subseteq (S\Delta B) \cup (R\Delta A)\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proviamo ora:

Teorema 23 *La funzione d'insieme λ, definita su $\mathcal{L}$, è una misura.*

Dim. Sapendo già che λ è subadditiva, si veda la (7), basta provare che

$$\text{se } A \cap B = \emptyset \text{ allora si ha } \lambda(A \cup B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)\ \ .$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e due insiemi semplici, R ed S, taliche

$$m^*(A\Delta R) < \epsilon\,, \qquad m^*(B \cap S) < \epsilon\,.$$

La (6) implica che

$$m(R) = m^*(R) \geq m^*(A) - \epsilon\,, \qquad m(S) = m^*(S) \geq m^*(B) - \epsilon\,. \tag{9}$$

L'idea della dimostrazione è di provare che

$$m^*(A \cup B) \sim m^*(R \cup S)\,, \qquad m^*(R \cup S) = m(R \cup S) \sim m(R) + m(S)$$

stimando esplicitamente gli scarti.

Stimiamo prima di tutto lo scarto $|m^*(A \cup B) - m^*(R \cup S)|$. Notiamo che

$$(A \cup B)\Delta(R \cup S) \subseteq (A\Delta R) \cup (B\Delta S)\,.$$

Combiniamo questa con la (6). Si ha

$$|m^*(A\cup B) - m^*(R\cup S)| \leq m^*\left((A \cup B)\Delta(R \cup S)\right) \leq m^*(A\Delta R) + m^*(B\Delta S) \leq 2\epsilon\,.$$

Dunque,

$$m^*(A \cup B) \geq m(R \cup S) - 2\epsilon\,. \tag{10}$$

Stimiamo ora lo scarto $|m(R \cup S) - (m(R) + m(S))|$. Per questo usiamo il Lemma 22 e quindi il fatto che A e B sono disgiunti. Dalla (8) e per la subadditività di m^* si ha

$$m(R \cap S) \leq m^*(R \cap S) \leq m^*(A \Delta R) + m^*(B \Delta S) \leq 2\epsilon \,.$$

D'altra parte, m è additiva e quindi, dal Teorema 10,

$$m(R \cup S) = m(R) + m(S) - m(R \cap S) \geq m(R) + m(S) - 2\epsilon \,. \tag{11}$$

Cominando (10) e (11) si trova

$$m^*(A \cup B) \geq m(R \cup S) - 2\epsilon \geq m(R) + m(S) - 4\epsilon \geq m(A) + m(B) - 6\epsilon \,.$$

Questa è la disuguaglianza che volevamo provare. ∎

Proviamo ora:

Teorema 24 *L'algebra di insiemi $\mathcal{L}$ è una σ-algebra.*

Dim. Sia (A_n) una successione in $\mathcal{L}$. Dobbiamo provare che $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{L}$. Mostriamo prima di tutto che non è restrittivo assumere che gli A_n siano due a due disgiunti. Definiamo per questo

$$B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \,.$$

Ciascuno degli insiemi B_n è in $\mathcal{L}$, perché $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi; e i B_n sono due a due disgiunti. Inoltre,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \,.$$

Dunque, eventualmente sostituendo ciascun A_n col corrispondente B_n, si suppone da ora in poi che gli A_n siano due a due disgiunti.

Si è vistro che λ su $\mathcal{L}$ è una misura e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right) \leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \lambda(Q) \,.$$

Ciò prova che la serie $\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k)$ converge.

Fissiamo ora $\epsilon > 0$ e sia N_ϵ tale che

$$\sum_{k=N_\epsilon}^{+\infty} \lambda(A_k) < \epsilon/2 \,.$$

Essendo $\mathcal{L}$ un'algebra,
$$\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon-1} A_k \in \mathcal{L}$$
e quindi esiste un insieme semplice R per cui
$$m^*\left(\left[\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon-1} A_k\right] \triangle R\right) < \epsilon/2\,.$$
Ora,
$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle R \subseteq \left[\left(\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon-1} A_k\right) \triangle R\right] \bigcup \left[\bigcup_{k=N_\epsilon}^{+\infty} A_k\right]\,.$$
Dunque,
$$m^*\left(\left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right] \triangle R\right) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=N_\epsilon}^{+\infty} \lambda(A_k) < \epsilon\,.$$
Dunque,
$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{L}\,. \;\blacksquare$$
Sappiamo ora che $\mathcal{L}$ è una σ-algebra. Completiamo questi argomenti provando:

Teorema 25 *La misura di Lebesgue λ è σ-additiva.*

Dim. Sia A_n una successione di insiemi due a due disgiunti di $\mathcal{L}$. Si vuol provare
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)\,.$$
Si sa già che λ è additiva e quindi per ogni N vale
$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\,.$$
Dunque,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\,.$$
L'uguaglianza discende dalla subadditività di m^*, e quindi di λ. $\blacksquare$

Osservazione 26 Chiaramente, $\mathcal{L}$ è una σ-algebra che contiene tutti gli insiemi semplici, e quindi $\mathcal{L}$ contiene la σ-algebra dei boreliani. L'inclusione è propria. $\blacksquare$

3.3 Insiemi illimitati

Vogliamo ora estendere la definizione di misura di Lebesgue includendo anche insiemi illimitati. Per questo dovremo permettere alla misura di prendere il valore $+\infty$. Rappresentiamo $\mathbb{R}^n$ come unione disgiunta dei quadrati

$$Q_{n,k} = \{(x,y) \mid n \le x < n+1\,,\ k \le y < k+1\}$$

con n e k interi qualsiasi. Diciamo che A è *misurabile* se $A \cap Q_{n,k}$ è misurabile per ogni scelta di n e di k. In tal caso, definiremo

$$\lambda(A) = \sum_{n,k=-\infty}^{+\infty} \lambda\left(A \bigcap Q_{n,k}\right) .$$

4 Insiemi nulli e proprietà che valgono quasi ovunque

Sia A un insieme con questa proprietà: per ogni $\epsilon > 0$ esistono insiemi semplici R_n tali che

$$A \subseteq \bigcup_{n\ge 1} R_n\,, \qquad \sum_{n\ge 1} m(R_n) < \epsilon\,.$$

Un insieme con questa proprietà si è chiamato un *insieme* $\boxed{\textit{nullo}}$. Ovviamente:

- ogni insieme nullo è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura di Lebesgue è 0 e viceversa;
- ogni s.insieme di un insieme nullo è un insieme nullo.

Gli insiemi nulli sono quindi "invisibili" per la misura di Lebesgue. Questo suggerisce di dire che una proprietà che vale in tutti i punti di un insieme Ω, salvo che in quelli di un insieme nullo, vale $\boxed{\textit{quasi ovunque}}$ su Ω e si scrive brevemente che essa vale q.o. Ω. Per esempio diremo che una funzione è continua q.o. su Ω se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme nullo.

Osservazione 27 Naturalmente esistono anche dei boreliani che hanno misura nulla; ma un boreliano che ha misura nulla può contenere dei s.insiemi che non sono boreliani. Si chiama $\boxed{\textit{completa}}$ una misura per la quale ogni s.insieme di un insieme di misura zero è misurabile (e quindi ha misura zero). La misura di Lebesgue definita su $\mathcal{L}$ è completa mentre la sua restrizione ai boreliani non lo è. ∎

Si vede facilmente che ogni insieme costituito da un solo punto è nullo. La σ-additività della misura implica che ogni unione numerabile di insiemi nulli è un insieme nullo. In particolare, l'insieme dei razionali è nullo. E' interessante provare ciò direttamente:

Esempio 28 Sia (q_n) la successione dei razionali in $[0,1]$. Fissiamo $\epsilon > 0$ ed associamo a q_n l'intervallo

$$R_n = \left(q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n} \right) .$$

Chiaramente, l'unione degli R_n contiene i razionali di $[0,1]$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(R_n) < \epsilon$. Dunque, l'insieme dei razionali di $[0,1]$ è un insieme nullo. ∎

E' bene sapere che esistono anche insiemi non numerabili che sono nulli. Per esempio, è un insieme nullo l'insieme di Cantor. Ciò si vede facilmente notando che la somma degli intervalli che si tolgono, ossia la misura del complementare in $[0,1]$ dell'insieme di Cantor, vale 1.

Ricordiamo infine che il concetto di insieme nullo si è già incontrato nell'enunciato del teorema di Riemann-Lebesgue.

Enunciamo ora formalmente un'osservazione già fatta, ed una sua conseguenza:

Teorema 29 *Sia (A_n) una successione di s.insiemi di Ω:*

1. *se $\lambda(A_n) = 0$ per ogni n allora $\lambda(\cup A_n) = 0$;*
2. *se per ogni n vale $\lambda(A_n) = \lambda(\Omega) < +\infty$ allora $\lambda(\cap A_n) = \lambda(\Omega)$.*

Dim. La prima proprietà si è già notata, e discende dalla σ-additività della misura. La seconda immediatamente discende dalla prima, passando ai complementari. Infatti, essendo Ω di misura finita, $\lambda(\tilde{A}_n) = 0$ e quindi

$$\lambda\left(\bigcup \tilde{A}_n\right) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \lambda(\Omega) = \lambda\left(\widetilde{\bigcup \tilde{A}_n}\right) = \lambda\left(\bigcap A_n\right) . \ ∎$$

L'esempio $\Omega = [0, +\infty)$, $A_n = [n, +\infty)$ mostra che la condizione $\lambda(\Omega) < +\infty$ non si può rimuovere dall'ultimo enunciato.

5 Funzioni misurabili

Da ora in poi, con "misura" intenderemo sempre la misura di Lebesgue. Definita la misura di Lebesgue, si potrà introdurre l'integrale di Lebesgue.

Prima di tutto si definisce la classe delle *funzioni* $\boxed{\textit{misurabili}}$. Una funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile quando per ogni r è misurabile l'insieme

$$\{x \mid f(x) > r\}.$$

E' immediato mostrare che una funzione è misurabile se e solo se sono misurabili gli insiemi

$$\{x \mid f(x) \geq r\} \qquad \text{oppure} \qquad \{x \mid f(x) \leq r\} \qquad \text{oppure} \qquad \{x \mid f(x) < r\}\,.$$

E' facile mostrare che una funzione $f(x)$ è misurabile se e solo se antitrasforma *boreliani* in insiemi che sono misurabili secondo Lebesgue[1].

Dunque:

Teorema 30 *Sia f una funzione misurabile. Allora $|f|$ è misurabile.*

Dim. Infatti,

$$|f(x)| \geq c \qquad \text{quando} \qquad \begin{cases} f(x) \geq c \\ \text{oppure} \\ f(x) \leq -c \end{cases}$$

e quindi l'insieme degli x per cui $f(x) \geq c$ è l'unione di due insiemi misurabili e quindi è misurabile. ∎

Si prova inoltre:

Teorema 31 *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni misurabili e siano*

$$\phi(x) = \sup_n \{f_n(x)\}\,, \qquad \psi(x) = \inf_n \{f_n(x)\}\,.$$

Ambedue le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono misurabili.

Dim. Proviamo l'asserto per la funzione $\phi(x)$. Fissiamo $r \in \mathbb{R}$ e studiamo l'insieme

$$X_r = \{x \mid \phi(x) \geq r\}\,.$$

Si ha $x \in X_r$ quando per ogni k esiste un indice $n = n(k,x)$ tale che $f_n(x) > r - 1/k$.

Un indice $n = n(k,x)$ per cui $f_n(x) > r - 1/k$ esiste se e solo se x appartiene all'insieme

$$\bigcup_n \left\{x \mid f_n(x) \geq r - \frac{1}{k}\right\}\,.$$

[1] va detto esplicitamente che insiemi solamente misurabili secondo Lebesgue potrebbero venir antitrasformati in insiemi che misurabili non sono.

Dunque,

$$X_r = \bigcap_k \bigcup_n \left\{ x \mid f_n(x) \geq r - \frac{1}{k} \right\} .$$

Ciò mostra la misurabilità di X_r e quindi l'asserto.

L'asserto relativo alla funzione $\psi(x)$ si prova in modo analogo. ∎

E' ora immediato dedurre:

Teorema 32 *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni misurabili e siano*

$$f(x) = \limsup f_n(x) \,, \qquad g(x) = \liminf f_n(x) \,.$$

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono misurabili.

Dim. Proviamo che l'asserto vale per $f(x)$. L'asserto per $g(x)$ si prova in modo analogo. Sia quindi

$$f(x) = \limsup_n f_n(x) \,.$$

Per definizione, $f(x) = \limsup_n f_n(x)$ vuol dire

$$f(x) = \lim_k \phi_k(x) \,, \qquad \phi_k(x) = \sup_{n \geq k} \{f_n(x)\} \,.$$

Il Teorema 31 mostra che ciascuna delle $\phi_k(x)$ è misurabile.

Si osservi che la successione di funzioni $\{\phi_k(x)\}$ decresce e quindi ammette limite, uguale a

$$f(x) = \inf_k \phi_k(x) \,.$$

La misurabilità di $f(x)$ nuovamente discende dal Teorema 31. ∎

Osservazione 33 Usando il fatto che l'unione numerabile di insiemi nulli è un insieme nullo si vede facilmente che i risultati precedenti valgono anche se le funzioni che vi intervengono sono solamente definite q.o. ∎

Corollario 34 *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni misurabili. Se il limite*

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

esiste q.o., allora $f(x)$ è misurabile.

Dim. Infatti, se il limite esiste questo coincide sia con lim sup che con lim inf, due funzioni la cui misurabilità si è già provata. ∎

Osservazione 35 Si è già notato, e si prova facilmente, che se B è un boreliano di $\mathbb{R}$ ed f una funzione misurabile, allora $f^{-1}(B)$ è misurabile secondo Lebesgue. Invece, la contrimmagine di un insieme misurabile secondo Lebesgue può non essere misurabile secondo Lebesgue. Di conseguenza, la composizione di funzioni misurabili non è generalmente una funzione misurabile. Invece, $f(g(x))$ è misurabile se g è misurabile secondo Lebesgue ed f è "misurabile secondo Borel", ossia antitrasforma boreliani in boreliani. E' questa una delle ragioni per cui l'introduzione della classe $\mathcal{L}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue non permette di "dimenticare" i boreliani. ∎

Le funzioni misurabili hanno importanti relazioni con le funzioni continue, espresse dai due teoremi seguenti, che non proviamo:

Teorema 36 (di $\boxed{\textbf{Lusin}}$) *Sia f una funzione misurabile su un insieme limitato Ω. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme* chiuso F_ϵ *tale che*

- $\lambda(\Omega - F_\epsilon) < \epsilon$;
- *la* restrizione *di f ad F_ϵ è* uniformemente continua.

Osservazione 37 Una funzione misurabile può essere ovunque discontinua, come è il caso della funzione di Dirichlet. E' interessante vedere direttamente che la funione di Dirichlet su $[0,1]$ verifica la proprietà del teorema di Lusin. Per questo, introduciamo gli insiemi R_n costruiti all'esempio 28. Questi sono aperti e quindi aperta è la loro unione. Sia F_ϵ il complementare di $\cup_{n\geq 1} R_n$. Allora, $\lambda(\,(0,1) - F_\epsilon) < \epsilon$ e la restrizione di f ad F_ϵ è identicamente nulla perché F_ϵ non contiene razionali. Dunque, tale restrizione è uniformemente continua.

La funzione di Dirichlet stessa è invece ovunque discontinua. ∎

Un secondo teorema che lega le funzioni misurabili a concetti propri delle funzioni continui è:

Teorema 38 (di $\boxed{\textbf{Egorov-Severini}}$) *Sia Ω un insieme di misura finita e sia (f_n) una successione di funzioni misurabili su Ω, convergente q.o. ad una funzione f. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme F_ϵ misurabile e tale che:*

- $\lambda(\Omega - F_\epsilon) < \epsilon$,
- *la restrizione ad F_ϵ delle funzioni f_n è una successione di funzioni* uniformemente convergente *ad f.*

Le funzioni misurabili hanno anche una relazione importante con le funzioni a codominio finito.

Chiameremo *funzione* $\boxed{\textit{semplice}}$ una funzione della forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x) \tag{12}$$

dove gli A_j sono insiemi misurabili secondo Lebesgue e χ_{A_j} è la funzione caratteristica di A_j.

Si ricordi che la *funzione* $\boxed{\textit{caratteristica}}$ di un insieme A è

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \,. \end{cases}$$

Dunque, una funzione semplice è una funzione misurabile che ha codominio finito.

Vale:

Teorema 39 *Sia f una funzione misurabile. Esiste una successione di* funzioni semplici (s_n) *convergente ad f. Inoltre, si può imporre alla (s_n) di essere una successione monotona, crescente oppure decrescente.*

Se la funzione f è limitata allora la convergenza è uniforme.

Dim. Supponiamo prima di tutto che f sia limitata,

$$-M \le f(x) \le M \,.$$

Dividiamo $[-M, M]$ con i punti

$$-M + k\frac{2M}{n}\,, \qquad 0 \le k \le n \,.$$

Sia quindi

$$A_{n,k} = \left\{ x \mid f(x) \in \left[-M + k\frac{2M}{n}, -M + (k+1)\frac{2M}{n} \right) \right\} \,, \qquad 0 \le k < n-1 \,.$$

Ciascuno degli $A_{n,k}$ è misurabile. Definiamo s_n ponendo

$$s_n(x) = -M + k\frac{2M}{n} \qquad x \in A_{n,k}$$

così che

$$|s_n(x) - f(x)| \le \frac{2M}{n} \,.$$

Si trova in questo modo una successione crescente di funzioni semplici, (s_n) convergente uniformemente ad f.

In modo analogo si costruisce una successione decrescente.

Se f non è limitata, si costruisce prima la successione (f_N),

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad -N \le f(x) \le N \\ -N & \text{se} \quad f(x) < -N \\ +N & \text{se} \quad f(x) > N \,. \end{cases}$$

La (f_N) converge ad f, non uniformemente; si approssima ciascuna f_N con una successione di funzioni semplici $(s_{n,N})$, come si è fatto sopra. E' facile costruire ora una successione che converge ad f in ciascun punto.

La costruzione di una successione decrescente che approssima f è analoga. ∎

Segue:

Teorema 40 *le operazioni algebriche applicate a funzioni misurabili producono funzioni misurabili.*

Dim. Si nota prima di tutto che le operazioni algebriche trasformano funzioni semplici in funzioni semplici.

Si approssimino le funzioni misurabili mediante funzioni semplici, si eseguano le operazioni e si usi il teorema 32. ∎

Osservazione 41 Abbiamo visto che il valore assoluto di una funzione misurabile è misurabile. Il viceversa non vale perché esistono insiemi che non sono misurabili secondo Lebesgue. Se A è uno di tali insiemi, la funzione $f(x) = 1$ su A, $f(x) = -1$ su $\tilde{A}$ non è misurabile, mentre $|f(x)|$ è misurabile, essendo identicamente 1. ∎

6 Integrale di Lebesgue

Vogliamo ora definire l'integrale di Lebesgue. Il teorema 39 suggerisce di definire prima l'integrale delle funzioni semplici e quindi l'integrale di una funzione misurabile f come limite degli integrali delle funzioni semplici che la approssimano. Per evitare però di incontrare il simbolo $+\infty - \infty$, conviene seguire la via seguente: definito l'integrale delle funzioni semplici, prima si definisce l'integrale di funzioni positive e poi si estende la definizione al caso dell'integrale di generiche funzioni misurabili.

6.1 L'integrale delle funzioni semplici

Sia $s(x)$ una funzione semplice e positiva,

$$s(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x)\,, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j\,, \qquad a_j \geq 0\,. \tag{13}$$

Il suo $\boxed{\textit{integrale}}$ è definito da

$$\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{r} a_j \lambda(A_j)\,.$$

Osservazione 42 Una stessa funzione semplice può rappresentarsi in più modi. E' però vero che il valore dell'integrale non dipende dalla particolare rappresentazione usata per calcolarlo. ▮

L'integrale di una funzione semplice positiva può essere $+\infty$. Diciamo che la funzione semplice è $\boxed{\textit{integrabile}}$ quando l'integrale è finito.

Sia inoltre

$$s^+(x) = \max\{s(x), 0\}\,, \qquad s^-(x) = -\min\{s(x), 0\}\,.$$

Ambedue queste funzioni sono semplici. Se una delle due è integrabile, si definisce

$$\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega s^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega s^-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si noti una conseguenza immediata della definizione:

$$\int_\Omega |s(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega s^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega s^-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Anche in questo caso si dice che la funzione semplice $s(x)$ è $\boxed{\textit{integrabile}}$ quando il suo integrale esiste finito; ossia quando ambedue le funzioni $s^+(x)$ ed $s^-(x)$ sono integrabili.

E' del tutto ovvio che le usuali proprietà dell'integrale, linearità, monotonia ed additività, valgono per l'integrale delle funzioni semplici definito sopra; ed è ancora vero che il prodotto di funzioni semplici integrabili è integrabile. Se la funzione semplice non si annulla, anche il suo reciproco è integrabile.

Infine, sia $s(x)$ una funzione semplice. L'insieme

$$\{x \mid |s(x)| > t\}$$

è un insieme misurabile. Ha quindi senso definire la *funzione di* $\boxed{\textit{distribuzione}}$ di $s(x)$ ponendo

$$\lambda_s(t) = \lambda(\{x \mid |s(x)| > t\}) .$$

E' immediatamente evidente che la funzione di distribuzione è monotona decrescente (non in modo stretto) ed è quindi integrabile secondo Riemann. Inoltre, la funzione di distribuzione di una funzione semplice è costante a tratti. Le discontinuità cadono nei valori assunti dalla $s(x)$ e quindi sono un numero finito.

Vale:

Teorema 43 *Supponiamo che la funzione semplice s prenda valori non negativi. Allora,*

$$\int_0^{+\infty} \lambda_s(t)\, dt = \int_\Omega s(x)\, dx .$$

Dim. La $s(x)$ è definita in (13) e niente vieta di supporre $a_j < a_{j+1}$. Naturalmente, può essere $a_1 = 0$. Conviene però introdurre $a_0 = 0$, $A_0 = \emptyset$. In questo modo,

$$s(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j \chi_{A_j}(x)$$

e ora $a_0 \le a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

La funzione di distribuzione λ_s è costante a tratti e

$$\begin{array}{l} a_i < t \le a_{i+1} \Longrightarrow \lambda_s(t) = \lambda(A_{i+1}) + \lambda(A_{i+2}) + \cdots + \lambda(A_r) , \\ t > a_r \Longrightarrow \lambda_s(t) = 0 . \end{array}$$

Dunque,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \lambda_s(t)\,\mathrm{d}t = (a_1 - a_0)\sum_{i=1}^{r} \lambda(A_i) + (a_2 - a_1)\sum_{i=2}^{r}\lambda(A_i) \\
&+ \cdots + (a_{j+1} - a_j) \sum_{i=j+1}^{r} \lambda(A_i) + \ldots + (a_r - a_{r-1})\lambda(A_r) \\
&= \sum_{j=1}^{r}(a_j - a_{j-1})\sum_{i=j}^{r}\lambda(A_i) = \sum_{j=1}^{r} a_j \sum_{i=j}^{r}\lambda(A_i) - \sum_{j=1}^{r} a_{j-1}\sum_{i=j}^{r}\lambda(A_i) \\
&= \sum_{j=1}^{r} a_j \sum_{i=j}^{r}\lambda(A_i) - \sum_{j=0}^{r-1} a_j \sum_{i=j+1}^{r} \lambda(A_i) \\
&= -a_0\sum_{i=1}^{r}\lambda(A_i) + \sum_{j=1}^{r} a_j\lambda(A_j) = \int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.2 L'integrale delle funzioni positive

Sia $f(x)$ una funzione misurabile, non negativa. Sia (s_n) una qualsiasi successione di funzioni semplici crescente ad f. Definiamo

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Naturalmente, perché la definizione abbia senso dobbiamo provare che essa è indipendente dalla particolare successione di funzioni semplici scelta. Premettiamo un lemma che verrà utile anche in seguito:

Lemma 44 *Sia (s_n) una successione* crescente *di funzioni semplici* non negative *e sia $\tilde{s}(x)$ una funzione semplice. Se*

$$\lim s_n(x) \geq \tilde{s}(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

allora

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,dx \geq \int_\Omega \tilde{s}(x)\,dx\,.$$

Dim. Non è restrittivo assumere $\tilde{s}(x) \geq 0$. Se $\lambda(\Omega) = +\infty$, scegliamo una successione (B_r) di insiemi tutti di misura finita, crescente e tale che

$$\bigcup_{r=1}^{+\infty} B_r = \Omega\,.$$

Proviamo:

$$\lim_n \int_{B_r} s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_r} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

per ogni r. Ciò fatto, la diseguaglianza su Ω seguirà da

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \lim_n \int_{B_r} s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_r} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni r.

Ricapitolando, basta lavorare su un fissato insieme B di misura finita. Proviamo che su tale insieme vale

$$\lim_n \int_B s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{x \in B \mid s_n(x) \geq \tilde{s}(x) - \epsilon\}\,.$$

Chiaramente, la successione di insiemi (A_n) cresce,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B\,.$$

Posto $Y_n = B - A_n$, la successione di insiemi (Y_n) decresce e $\cap_n Y_n = \emptyset$. Inoltre, B ha misura finita. Dunque, dal Teorema 11, $\lim[\lambda(B - A_n)] = 0$. Inoltre,

$$s_n(x) \geq (\tilde{s}(x) - \epsilon)\chi_{A_n}(x)\,.$$

Dunque,

$$\begin{aligned}&\int_B s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B (\tilde{s}(x) - \epsilon)\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon\lambda(A_n)\\ &\geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x - \lambda(B)\epsilon\,.\end{aligned}$$

Si ricordi che $\tilde{s}(x)$ è una funzione semplice, e quindi è limitata, $|\tilde{s}(x)| < C$ e che B è limitato. Dunque,

$$\lim_n \left| \int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \lim_n\,[C\lambda(B - A_n)] = 0\,.$$

Quindi, per n abbastanza grande

$$\int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon$$

e

$$\int_B s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x - [\lambda(B) + 1]\epsilon\,.$$

La disuguaglianza richiesta segue dall'arbitrarietà di ϵ. ∎

Possiamo ora provare:

Lemma 45 *Due successioni (s_n) ed $(\tilde{s}_n)$ di funzioni semplici, ambedue crescenti e convergenti alla medesima funzione f non negativa, verificano*

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,dx = \lim_n \int_\Omega \tilde{s}_n(x)\,dx\,.$$

Dim. Basta provare

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \lim_k \int_\Omega \tilde{s}_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

L'uguaglianza segue invertendo il ruolo di (s_n) e di $(\tilde{s}_n)$.

Si noti che

$$\lim_n s_n(x) = f(x) \geq \tilde{s}_k(x)$$

per ogni k. Dunque, dal Lemma 44, si ha che

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \tilde{s}_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

per ogni k. Passando al limite rispetto a k si trova la disuguaglianza voluta. ▮

Osservazione 46 Ovviamente, vorremmo anche svincolarci dalla condizione che l'integrale è stato costruito a partire da successioni crescenti. Ciò è solo in parte possibile come conseguenza dei teoremi relativi allo scambio di limiti e integrali. Si veda l'osservazione 60. ▮

Dato che le usuali proprietà di monotonia, linearità e additività rispetto al dominio valgono per gli integrali delle funzioni semplici, queste si trasferiscono agli integrali delle funzioni positive.

Osservazione 47 Per il modo come abbiamo definito l'integrale delle funzioni misurabili positive,

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

e, può essere, $+\infty$. Diremo che $f(x)$ è $\boxed{\textit{integrabile}}$ se l'integrale è finito. ▮

6.3 Funzioni integrabili

Sia ora f una generica funzione misurabile. Associamole le due funzioni

$$f_+(x) = \max\{0, f(x)\}\,, \qquad f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$$

così che

$$f_+(x) \geq 0\,, \qquad f_-(x) \geq 0$$

e inoltre

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)\,.$$

Diciamo che la funzione f è $\boxed{\textit{integrabile}}$ se ambedue le funzioni f_+ ed f_- sono funzioni (positive) integrabili, e quindi con integrale finito, e in tal caso poniamo

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 48 Talvolta conviene estendere la definizione di funzione integrabile. Se accade che una sola delle due funzioni f_+ oppure f_- ha integrale $+\infty$, allora diremo che $f(x)$ ha integrale $+\infty$ oppure $-\infty$. Il termine "integrabile" si riserva però al caso di funzioni il cui integrale è finito. ∎

E' immediato dalla definizione di integrale:

Teorema 49 *Una funzione $f(x)$ misurabile è integrabile se e solo se $|f(x)|$ è integrabile.*

Si noti che niente di simile avviene per l'integrale di Riemann.

E' ancora vero che valgono le usuali proprietà dell'integrale:

Teorema 50 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni integrabili. Vale*

- $\int_\Omega [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_\Omega f(x)\, dx + \beta \int_\Omega g(x)\, dx$;
- *se* $f(x) \le g(x)$ *allora* $\int_\Omega f(x)\, dx \le \int_\Omega g(x)\, dx$;
- *vale* $|\int_\Omega f(x)\, dx| \le \int_\Omega |f(x)|\, dx$;
- *se* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *con* Ω_1 *e* Ω_2 *misurabili e disgiunti allora*

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} f(x)\, dx\,.$$

6.4 Integrale ed insiemi nulli

Chiaramente, una funzione semplice nulla q.o. ha integrale zero. Più in generale, sia $|f(x)| = 0$ q.o. Ogni funzione semplice maggiorata da f ha integrale nullo; e quindi, se (s_n) è una successione crescente di funzioni semplici che converge ad f,

$$\int_\Omega |f(x)|\, \mathrm{d}x = \lim \int_\Omega s_n(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Più ancora:

Teorema 51 *Una funzione $f(x) \ge 0$ q.o. ha integrale nullo se e solo se è nulla q.o.*

<u>**Dim.**</u> Si è già detto che se f è q.o. nulla su Ω allora il suo integrale è nullo. Mostriamo il viceversa. Sia dunque

$$f(x) \ge 0 \text{ q.o. } x \in \Omega\,, \qquad \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Introduciamo gli insiemi

$$A = \{x \mid f(x) \neq 0\} \qquad A_n = \{x \mid f(x) \geq 1/n\}\,.$$

La successione di insiemi (A_n) è crescente e $A = \cup_n A_n$. Dunque, dal Teorema 12, si ha che

$$\lambda(A) = \lim \lambda(A_n).$$

Ma,

$$0 \leq \frac{1}{n}\lambda(A_n) \leq \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dunque, $\lambda(A_n) = 0$ per ogni n, così che anche $\lambda(A) = 0$. ∎

Inoltre:

Teorema 52 *Sia*

$$A_n = \{x \mid |f(x)| > n\}\,.$$

Se $f(x)$ è integrabile allora

$$\lim_n \lambda(A_n) = 0\,.$$

Dim. Basta studiare il caso in cui $f(x) \geq 0$. In tal caso vale

$$0 \leq n\lambda(A_n) \leq \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$0 \leq \lim_n \lambda(A_n) \leq \lim_n \frac{1}{n}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$ ∎

Usa chiamare $\cap A_n$ l'insieme su cui "f è infinita"; e quindi dire che "una funzione integrabile è finita q.o.".

7 Integrale di Lebesgue ed integrale di Riemann

Ricordiamo che l'integrale di Riemann si definisce per funzioni limitate definite su insiemi limitati.

Sia l'integrale di Riemann che quello di Lebesgue si ottengono "approssimando" la funzione da integrare f con "funzioni semplici"; ma, nel caso dell'integrale di Riemann, le "funzioni semplici" si ottengono "affettando" il dominio, e quindi sono funzioni costanti a tratti. Nel caso dell'integrale di Lebesgue le funzioni semplici si ottengono “affettando” il codominio: sono ancora funzioni che prendono un numero finito di valori ma gli insiemi su cui esse sono costanti sono generici insiemi misurabili secondo Lebesgue. Esistono però relazioni tra i due integrali. Infatti, il teorema di Riemann-Lebesgue, Teorema 2, mostra che una funzione integrabile di Riemann è continua q.o., e quindi misurabile. Essendo anche limitata e definita su un insieme limitato, essa è anche integrabile secondo Lebesgue, e non è difficile vedere che i due integrali hanno lo stesso valore. La definizione di integrale improprio è invece sostanzialmente diversa dalla costruzione di Lebesgue, ed esistono funzioni che ammettono integrale improprio senza avere integrale di Lebesgue. Tra queste anche funzioni importanti per le applicazioni, come per esempio le funzioni

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad f(x) = \sin x^2\,.$$

Si sa che queste funzioni ammettono integrale improprio, senza essere assolutamente integrabili; e quindi non possono avere integrale di Lebesgue, per il Teorema 49.

Ciò nonostante, se l'integrale di Lebesgue di una funzione f esiste, questo ha sempre una relazione con un opportuno integrale di Riemann. Vale infatti il teorema seguente, che generalizza il teorema 43. Introduciamo la *funzione di* $\boxed{\textit{distribuzione}}$ della funzione misurabile f,

$$\lambda_f(t) = \lambda(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > t\})\,.$$

Chiaramente la funzione λ_f è definita su $[0, +\infty)$ e decrescente; e quindi integrabile nel senso dell'integrale improprio di Riemann, può essere con integrale uguale a $+\infty$. Vale

Teorema 53 *Sia $f(x)$ una funzione misurabile su Ω,* q.o. non negativa. *Allora,*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda_f(t)\,dt\,.$$

<u>Dim.</u> Limitiamoci a provare il teorema nel caso in cui la funzione $f(x)$ è limitata, $0 \le f(x) \le M$ e $\lambda(\Omega) < +\infty$. In questo caso $\lambda_f(t) = 0$ per $t > M$. Inoltre,

$$\int_0^{+\infty} \lambda_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^M \lambda_f(t)\,\mathrm{d}t$$

si approssima in questo modo: dato $\epsilon > 0$ si divida $[0, M]$, dominio di integrazione, in segmenti $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \le i \le n$, di lunghezza minore di ϵ/M. Essendo λ_f decrescente, vale

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i] \ge \int_0^M \lambda_f(t)\,\mathrm{d}t \ge \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_{i+1})[t_{i+1} - t_i]\,. \qquad (15)$$

Consideriamo la somma a sinistra. Notando che $t_0 = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i] = \lambda_f(t_0)(t_1 - t_0) + \lambda_f(t_1)(t_2 - t_1) \\
&+\lambda_f(t_2)(t_3 - t_2) + \cdots + \lambda_f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \\
&= t_1[\lambda_f(t_0) - \lambda_f(t_1)] + t_2[\lambda_f(t_1) - \lambda_f(t_2)] \\
&+ \cdots + t_n[\lambda_f(t_{n-2}) - \lambda_f(t_{n-1})] + t_n[\lambda_f(t_{n-1}) - \lambda_f(t_n)]\,.
\end{aligned}$$

Si ricordi infatti che $\lambda_f(t_n) = \lambda_f(M) = 0$. Ora,

$$\lambda_f(t_i) - \lambda_f(t_{i+1}) = \lambda(A_i)\,, \qquad A_i = \{x \mid t_i < f(x) \le t_{i+1}\}\,.$$

La somma di sinistra in (15) è

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda(A_i) = \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

con $s_n(x)$ funzione semplice minorante $f(x)$. In modo analogo si vede che la somma di destra è l'integrale di una funzione semplice $S_n(x)$ maggiorante $f(x)$. D'altra parte, ambedue gli integrali

$$\int_\Omega S_n(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

tendono a

$$\int_0^M \lambda_f(t)\,\mathrm{d}t$$

e

$$\int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega S_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Passando al limite su n si trova

$$\int_0^M \lambda_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\,. \quad \blacksquare$$

8 Limiti di successioni di funzioni e integrale

Abbiamo detto che la ragione per introdurre un integrale più generale di quello di Riemann è di trovare teoremi "migliori" per lo scambio del segno di limite e di integrale. Questi teoremi mostriamo ora.

Teorema 54 (di $\boxed{\textbf{Beppo Levi}}$ o della $\boxed{\textbf{Convergenza Monotona}}$) *Sia* (f_n) *una successione* crescente *di funzioni misurabili, che verifica*

$$f_n(x) \geq 0\,, \qquad \lim f_n(x) = f(x) \quad q.o.\ x \in \Omega\,.$$

Allora,

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx\,.$$

Non si esclude che l'integrale di $f(x)$ *possa essere* $+\infty$.

Dim. Escludendo da Ω l'insieme (di misura nulla) dei punti nei quali la successione (f_n) non converge ad f, si vede che basta studiare il caso in cui (f_n) converge ad f su Ω.

La funzione non negativa f, essendo limite di funzioni misurabili, è misurabile e quindi il suo integrale esiste, può essere uguale a $+\infty$.

Notiamo che la condizione $f_n(x) \leq f(x)$ implica

$$\int_\Omega f_n(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x$$

e quindi la proprietà da provare è:

$$\lim_n \int_\Omega f_n(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Ricordiamo che

$$\int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x = \sup \left\{ \int_\Omega \chi(x)\, \mathrm{d}x\,,\ \chi(x) \text{ semplice, } \chi(x) \leq f(x). \right\}$$

Dunque basta provare che se $\chi(x) \geq 0$ è una qualsiasi funzione semplice tale che $\chi(x) \leq f(x)$ allora vale

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Fissiamo quindi una qualsiasi funzione semplice $\chi(x)$ tale che $0 \leq \chi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Le funzioni $f_n(x)$ possono essere illimitate. Introduciamo le funzioni limitate $g_n(x)$ definite da

$$g_n(x) = \min\{f_n(x)\,,\ \chi(x)\}\,.$$

Si noti che

$$0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)\,, \qquad \lim g_n(x) = \min\{\lim f_n(x)\,,\ \chi(x)\} = \chi(x)$$

perché $\lim f_n(x) = f(x) \geq \chi(x)$ e che le funzioni $g_n(x)$ sono limitate perché maggiorate dalla funzione limitata $\chi(x)$.

Il teorema è provato se si può mostrare che

$$\lim \int_\Omega g_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Proviamo che la proprietà (16) vale costruendo una nuova successone $(\hat{\chi}_n(x))$ di funzioni semplici tali che

$$\hat{\chi}_n(x) \leq g_n(x)\,, \qquad \lim \int_\Omega \hat{\chi}_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La successione $(\hat{\chi}_n(x))$ si costruisce in due passi:

Passo 1)

Si ricordi che le funzioni misurabili e limitate si possono approssimare uniformemente da sotto con funzioni semplici. Quindi, ricordando la dimostrazione del Teorema 39, per ogni n si può trovare una funzione semplice $\chi_n(x)$ e tale che[2]

$$g_n(x) - \frac{1}{n} \leq \chi_n(x) \leq g_n(x)\,, \qquad \int_\Omega g_n(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega \chi_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega g_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{17}$$

Si ha quindi

$$\lim \chi_n(x) = \lim g_n(x) = \chi(x)\,, \qquad \lim \int_\Omega \chi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_\Omega g_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{18}$$

Passo 2)

La successione $(\chi_n(x))$ appena costruita non sarà in generale crescente. Modifichiamola come segue. Notiamo che se $k < n$ si ha

$$\chi_k(x) \leq g_k(x) \leq g_n(x)$$

e quindi anche la funzione

$$\hat{\chi}_n(x) = \max\{\chi_1(x)\,,\ \chi_2(x)\,, \ldots\ \chi_n(x)\}$$

[2] si noti che la disuguaglianza a sinistra tra gli integrali non discende dalla disuguaglianza tra le funzioni, perché Ω può avere misura infinita. Essa è conseguenza della definizione dell'integrale della funzione $g(x)$.

verifica le proprietà in (17) ed inoltre per ogni x si ha $\hat{\chi}_n(x) \leq \hat{\chi}_{n+1}(x)$. Basta quindi provare che

$$\lim \int_\Omega \hat{\chi}_n(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Questa proprietà discende dal Lemma 44 perchè la successione di funzioni non negative $(\hat{\chi}_n(x))$ è crescente e converge puntualmente a $\chi(x)$. ∎

Corollario 55 *Sia $f(x) \geq 0$ e sia (B_r) una successione di insiemi misurabili, tali che*

$$B_r \subseteq B_{r+1}\,, \qquad \cup_r B_r = \Omega\,.$$

Vale:

$$\lim_r \int_{B_r} f(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx\,.$$

<u>Dim</u>. Sia $\chi_r(x)$ la funzione caratteristica di B_r. Si applichi il teorema della convergenza monotona alla successione crescente di funzioni $(\chi_r(x)f(x))$. ∎

Osservazione 56 Il teorema della convergenza monotona può applicarsi anche se le funzioni non hanno segno costante, purché valga

$$g(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\,, \qquad \lim f_n(x) = f(x)$$

con $g(x)$ funzione integrabile. Infatti, basta applicare il teorema alla successione $(f_n - g)$ ed alla funzione $f - g$. Si può applicare anche se le funzioni f_n sono negative (o almeno maggiorate da una funzione g integrabile) e convergono, decrescendo ad f. Basta infatti applicare il teorema alla successione $(-f_n)$ ed alla funzione $-f$. Però, senza condizioni di questo tipo l'asserto del teorema non vale, come mostrano gli esempi seguenti:

Es. 1. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, $\lim f_n(x) = f(x) = 0$ q.o., ma gli integrali delle f_n valgono tutti 1.

Si noti che la successione (f_n) non è monotona.

Es. 2. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, $\lim f_n(x) = f(x) = 0$ per ogni x, ma gli integrali delle f_n valgono tutti 1.

Ancora, la successione (f_n) non è monotona.

Es. 3. Sia
$$f_n(x)=\frac{1}{n}$$
per ogni x. La successione (f_n) è ora una successione di funzioni positive con limite $f(x)=0$; ma la successione è decrescente. Ciascuna delle f_n ha integrale $+\infty$ mentre f ha integrale nullo. ∎

Il teoremadi della Convergenza Monotona talvolta si usa direttamente; più spesso se ne usano le conseguenze seguenti:

Teorema 57 (Lemma di $\boxed{\text{Fatou}}$) *Sia (f_n) una successione di funzioni integrabili su Ω e sia*
$$f_n(x)\geq 0 \quad q.o.\ x\in\Omega\,, \qquad f(x)=\lim f_n(x) \quad q.o.\ x\in\Omega\,.$$
Allora vale
$$\int_\Omega f(x)\,dx \leq \liminf \int_\Omega f_n(x)\,dx\,.$$

<u>Dim</u>. La funzione f è non negativa e quindi il suo integrale esiste, eventualmente $+\infty$. Inoltre,
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[\lim_n f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[\lim_n \inf_{m\geq n}\{f_m(x)\}\right]\,\mathrm{d}x\,. \tag{19}$$
Si noti che la successione
$$n\to\inf_{m\geq n}\{f_m(x)\}$$
è crescente. Si può quindi usare il teorema della convergenza monotona e si vede che l'ultimo integrale in (19) è uguale a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \inf_{m\geq n}\{f_m(x)\}\,\mathrm{d}x=\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega \inf_{m\geq n}\{f_m(x)\}\,\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \quad ∎$$

Proviamo infine il teorema che si usa più comunemente:

Teorema 58 (di $\boxed{\text{Lebesgue}}$ o della convergenza $\boxed{\text{dominata}}$) *Sia g una funzione non negativa tale che*
$$\int_\Omega g(x)\,dx<+\infty\,.$$
Siano $f_n(x)$, $f(x)$ misurabili su Ω e tali che q.o. $x\in\Omega$
$$|f_n(x)|\leq g(x)\,, \qquad \lim f_n(x)=f(x)\,.$$
Allora vale
$$\lim\int_\Omega f_n(x)\,dx=\int_\Omega f(x)\,dx\,.$$

In particolare, la funzione $f(x)$ è integrabile.

Dim. Notiamo che
$$\liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Mostreremo che vale
$$\limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Ciò fatto seguirà l'esistenza del limite
$$\lim \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
uguale all'integrale di $f(x)$.

Applichiamo il teorema di Fatou alle funzioni non negative $g - f_n$. Si trova
$$\begin{aligned}&\int_\Omega [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_\Omega [g(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x + \liminf \int_\Omega [-f_n(x)]\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x - \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
ossia
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \ge \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Procedendo in modo analogo con le funzioni
$$g + f_n$$
si trova
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
L'uguaglianza cercata segue combinando tali disuguaglianze.

In particolare ciò mostra che
$$\left|\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\right| < +\infty \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\,. \quad \blacksquare$$
Di conseguenza:

Corollario 59 *Sotto le ipotesi del Teorema 58 si ha:*
$$\lim \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0\,.$$

Dim. Dal Teorema 58 si sa che la funzione $f(x)$ ha integrale finito. Dunque,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq g(x) + |f(x)|$$

e inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{q.o. } x \in \Omega\,.$$

Essendo $g(x)+|f(x)|$ integrabile, si può applicare il teorema della Convergenza Dominata. Si trova

$$\lim \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \lim |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x = 0\,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 60 Il teorema della Convergenza Dominata permette di svincolare, in parte, la definizione di integrale dalle successioni crescenti di funzioni semplici. Se $(s_n(x))$ è una successione di funzioni semplici convergente q.o. ad $f(x)$ e se esiste $g(x)$ integrabile maggiorante le $s_n(x)$, allora vale

$$\lim \int_\Omega s_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x\,. \quad \blacksquare$$

9 Disuguaglianze

Proviamo ora alcune importanti disuguaglianze per gli integrali procedendo come segue: dimostriamo prima la disuguaglianza di Jensen e da questa deduciamo la disuguaglianza di Hölder. Dalla disuguaglianza di Hölder deduciamo la disuguaglianza di Minkowski.

Una dimostrazione della disuguaglianza di Hölder di tipo "geometrico" e che non fa uso della disuguaglianza di Jensen si vedrà al paragrafo 9.2 dove si potrà anche trovare una diversa dimostrazione della disuguaglianza di Jensen.

9.1 Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski

Ricordiamo che una funzione F definita su $\mathbb{R}$ è convessa quando

$$F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i F(x_i) \tag{20}$$

con n numero naturale qualsiasi e con

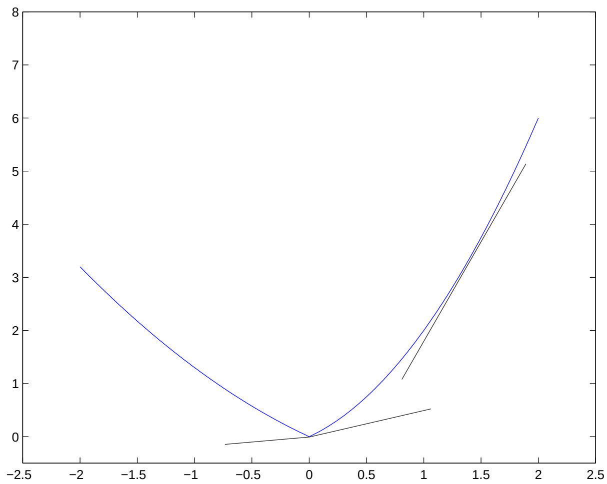
$$\alpha_i \geq 0\,, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\,.$$

Ricordiamo inoltre che ogni funzione convessa su $\mathbb{R}$ è continua e quindi misurabile.

Il grafico di una funzione convessa sta sopra a ciascuna delle sue tangenti. Però una funzione convessa non è necessariamente derivabile. Più in generale vale la proprietà seguente: se F è definita su $\mathbb{R}$ e se $(t_0, F(t_0))$ è un punto del grafico, si trova sempre almeno una retta (non verticale) per tale punto, che è sotto al grafico. Ossia, esiste un coefficiente angolare m tale che (si veda la figura 1)

$$F(t) \geq F(t_0) + m(t - t_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{21}$$

Figura 1:



Proviamo:

Teorema 61 *Siano $h(x)$, $k(x)$ due funzioni misurabili. Sia inoltre*

$$k(x) \geq 0\,, \qquad \int_\Omega k(x)\, dx = 1\,.$$

Sia F convessa su $\mathbb{R}$ e sia finito *l'integrale su Ω di $h(x)k(x)$.*

Sotto queste ipotesi vale

$$F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\, dx\right) \leq \int_\Omega F(h(x))k(x)\, dx\,. \tag{22}$$

Dim. Usiamo la disuguaglianza (21). Scegliendo

$$t = h(x)$$

si ha

$$F(h(x)) \geq F(t_0) + m(h(x) - t_0)\,.$$

In questa disuguaglianza t_0 è qualsiasi ed m è un numero opportuno, dipendente dalla scelta di t_0.

Moltiplicando i due membri per $k(x)$, che è non negativa, si trova

$$F(h(x))k(x) \geq F(t_0)k(x) + m(h(x) - t_0)k(x)\,. \tag{23}$$

Integriamo i due membri su Ω e ricordiamo che l'integrale di $k(x)$ vale 1. Si trova

$$\int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathrm{d}x \geq F(t_0) + m\left\{\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x - t_0\right\}\,. \tag{24}$$

Questa disuguaglianza è valida per ogni t_0, pur di scegliere un opportuno valore di m.

Ricordiamo ora che la funzione $h(x)k(x)$ ha integrale finito e scegliamolo come valore di t_0:

$$t_0 = \int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Scelto tale valore per t_0 esiste un valore del coefficiente angolare m per cui vale la disuguaglianza (24), ma il numero che lo moltiplica è nullo:

$$\left\{\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x - t_0\right\} = 0\,.$$

Dunque rimane

$$\int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathrm{d}x \geq F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x\right)\,,$$

ossia la (22). ∎

Osservazione 62 Si noti esplicitamente che la (22) NON VALE se l'integrale di $k(x)$ è diverso da 1. ∎

La (22) si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{Jensen}}$.

La disuguaglianza di Jensen talvolta si usa direttamente; più spesso si usa la sua conseguenza seguente. Per illustrarla, dobbiamo introdurre una ulteriore definizione.

Due numeri p, q in $(1, +\infty)$ si dicono *esponenti* $\boxed{\textit{coniugati}}$ se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,; \qquad \text{equivalentemente se} \quad q = \frac{p}{p-1}\,.$$

Se $p = 1$ il suo esponente coniugato è, per definizione, $+\infty$ mentre l'esponente coniugato di $+\infty$ è, per definizione, 1.

Si noti che $p = 2$ coincide col suo coniugato.

Si ha:

Teorema 63 *Sia $p > 1$ e q il suo esponente coniugato. Siano $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^q$ integrabili su Ω. Allora $f(x)g(x)$ è integrabile su Ω e vale:*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \le \left[\int_\Omega |f(x)|^p\right]^{1/p} \left[\int_\Omega |g(x)|^q\right]^{1/q} . \tag{25}$$

Dim. La disuguaglianza è ovvia se uno degli integrali a destra è nullo perché in tal caso la corrispondente funzione è nulla q.o. e quindi anche l'integrale a sinistra è nullo. Consideriamo quindi il caso in cui ambedue gli integrali a destra sono positivi.

Notiamo che basta provare la disuguaglianza su insiemi limitati. Sia infatti (B_r) una successione crescente di insiemi limitati, tale che $\Omega = \cup B_r$. Per il Corollario 55, un integrale calcolato su Ω è il limite degli integrali calcolati su ciascuno dei B_r. Dunque, se la disuguaglianza vale su ciascun B_r essa vale anche su Ω

Ci siamo così ricondotti a dover provare la disuguaglianza su un insieme Ω limitato. Come ulteriore passo, notiamo che basta provare la disuguaglianza nel caso di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non negative e limitate. Non negative è ovvio, perché le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ figurano sotto il segno di valore assoluto. Per vedere che possiamo ricondurci al caso delle funzioni limitate, introduciamo

$$f^{(N)}(x) = \min\{f(x)\,,\ N\}\ , \qquad g^{(N)}(x) = \min\{g(x)\,,\ N\}\ .$$

Le successioni di funzioni (non negative) $(f^{(N)}(x))$, $(g^{(N)}(x))$ e $(f^{(N)}(x)g^{(N)}(x))$ sono crescenti e convergono rispettivamente ad $f(x)$, $g(x)$ ed $f(x)g(x)$. Ad esse si può applicare il teorema di della Convergenza Dominata. Dunque, se la disuguaglianza vale per ogni N, essa vale anche per le funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Ricapitolando ci siamo ricondotti a provare che la disuguaglianza (25) vale per $f(x)$ e $g(x)$ non negative, limitate e definite su un insieme limitato.

Dividendo i due membri della (25) per[3]

$$\left[\int_\Omega f(x)^p\right]^{1/p} \left[\int_\Omega g(x)^q\right]^{1/q}$$

[3]non indichiamo più il valore assoluto perché siamo ormai ricondotti al caso delle funzioni non negative.

si vede che basta provare

$$\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \le 1\,,$$

ove

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{[\int_\Omega f(x)^p\,\mathrm{d}x]^{1/p}}\,, \qquad \tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{[\int_\Omega g(x)^q\,\mathrm{d}x]^{1/q}}\,.$$

Queste funzioni sono non negative e

$$\int_\Omega \tilde{f}^p(x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \qquad \int_\Omega \tilde{g}^q(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Vogliamo far intervenire la diseguaglianza di Jensen. Per ricondursi alla notazione usata nel Teorema 61, introduciamo

$$F(x) = |x|^p\,, \qquad k(x) = \tilde{g}(x)^q\,, \qquad h(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)^{1-q}\,.$$

Essendo $p > 1$, la funzione $F(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$; essendo Ω limitato e le funzioni limitate, l'integrale di $h(x)k(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ è finito; e $k(x)$ ha integrale 1. Vale quindi

$$F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ossia

$$\left(\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x\right)^p \le \int_\Omega \left\{\tilde{f}(x)[\tilde{g}(x)]^{1-q}\right\}^p \tilde{g}(x)^q\,\mathrm{d}x\,.$$

Notiamo ora che

$$p(1-q) + q = 0$$

così che

$$\left\{\tilde{f}(x)[\tilde{g}(x)]^{1-q}\right\}^p \tilde{g}(x)^q = \tilde{f}^p(x)[\tilde{g}(x)]^{p(1-q)+q} = \tilde{f}^p(x)\,.$$

Sia ha quindi

$$\left(\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x\right)^p \le \int_\Omega \tilde{f}^p(x)\,\mathrm{d}x = 1\,,$$

come richiesto. ∎

La diguaglianza (25) si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{Hölder}}$. Nel caso $p = 2$ la disuguaglianza si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{Schwarz}}$. Da essa si deduce:

Teorema 64 *Sia $p \ge 1$ e siano f, g funzioni misurabili. Vale*

$$\left[\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\right]^{1/p} \le \left[\int_\Omega |f(x)|^p\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |g(x)|^p\right]^{1/p}\,. \qquad (26)$$

Dim. Ci sono due casi nei quali la disuguaglianza è ovvia: il primo è il caso in cui uno dei due integrali a destra è $+\infty$ e l'altro è il caso $p = 1$. Dunque studiamo il caso in cui $p > 1$ e anche ciascuno dei due integrali a destra è finito. In tal caso, $|f(x) + g(x)|^p$ ha integrale finito, come si vede usando la disuguaglianza

$$(a + b)^p \leq 2^p \max\{a^p, b^p\} \leq 2^p(a^p + b^p)\,,$$

valida per ogni coppia di numeri positivi.

Scriviamo:

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} g(x) \, \mathrm{d}x\,.$$

Essendo $(p - 1)q = p$ si trova

$$\int_\Omega \left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right)^q \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Possiamo quindi usare la disuguaglianza di Hölder, ottenendo

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} f(x) \, \mathrm{d}x \leq \left\{\int_\Omega \left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right)^q\right\}^{1/q} \left\{\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} g(x) \, \mathrm{d}x \leq \left\{\int_\Omega \left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right)^q\right\}^{1/q} \left\{\int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right\}^{1/p}\,.$$

Sommando le due disuguaglianze (e usando ancora $(p - 1)q = p$) si trova

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leq \left[\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right]^{1/q} \left\{\left[\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right]^{1/p}\right\}\,.$$

Essendo $1 - 1/q = 1/p$, l'asserto segue dividendo i due membri per

$$\left[\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right]^{1/q}\,. \quad \blacksquare$$

La disuguaglianza (26) si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{Minkowski}}$. Essa ha la seguente importante conseguenza:

Teorema 65 *L'insieme delle funzioni a potenza p–ma integrabile, $p \geq 1$, è uno spazio lineare.*

Lo spazio lineare delle funzioni a potenza p–ma integrabile su Ω, $p \geq 1$, si indica col simbolo $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Conviene definire subito anche il simbolo $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Introduciamo per questo l'*estremo superiore* *essenziale* di una funzione f. Esso si indica col simbolo $\mathrm{ess\ sup}\, f$ ed è definito da

$$\mathrm{ess\ sup}\, f = \inf \{ r \mid \lambda(\{x \mid f(x) > r\}) = 0\} \,.$$

Si definisce quindi

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{ f \mid \mathrm{ess\ sup}\, |f| < +\infty \} \,.$$

La notazione $\mathcal{L}^\infty$ è giustificata dal risultato seguente, che non proviamo:

Teorema 66 *Vale*

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p} = \mathrm{ess\ sup}\, |f| \,.$$

E' immediato verificare che $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ è uno spazio lineare, e che

$$\mathrm{ess\ sup}\, |f + g| \leq \mathrm{ess\ sup}\, |f| + \mathrm{ess\ sup}\, |g| \,,$$

disuguaglianza che in questo caso sostituisce quella di Minkowski. Analogamente, se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, vale

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq (\mathrm{ess\ sup}\, |g|) \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x \,,$$

disuguaglianza che sostituisce quella di Hölder.

E' utile per il seguito sapere che la disuguaglianza di Hölder può invertirsi:

Teorema 67 *Sia g una funzione misurabile su Ω e supponiamo che esista un numero M che gode della seguente proprietà: per ogni funzione misurabile e limitata f si ha:*

$$\left| \int_\Omega f(x) g(x) \, dx \right| \leq M \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p} \,. \tag{27}$$

Allora $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ e, più precisamente,

$$\left[\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right]^{1/q} \leq M \,. \tag{28}$$

<u>Dim</u>. Si noti che la (27) vale sempre se

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = +\infty$$

e in tal caso non dà informazioni. Dunque consideriamo soltanto le funzione f per cui

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \, .$$

Sia $R > 0$ e sia

$$\Omega_R = \{x \in \Omega \mid |x| < R\} \, .$$

Introduciamo le funzioni

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| < n \text{ e se } x \in \Omega_R \\ 0 & \text{altrimenti} \, . \end{cases}$$

Scegliamo

$$f_n(x) = \left[\, |g_n(x)|^{q/p} \right] \operatorname{sgn} g_n(x) \, .$$

Si noti che

$$\int_\Omega |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x$$

e che

$$f_n(x) g_n(x) = |g_n(x)|^{1+q/p} = |g_n(x)|^q \le |g(x)|^q \qquad x \in \Omega_R \, .$$

Usando (27) si trova:

$$\int_\Omega f_n(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x \le \int_\Omega f_n(x) g(x) \, \mathrm{d}x \le M \left[\int_\Omega |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \right]^{1/p}$$
$$= M \left[\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/p} \, .$$

Dunque,

$$\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_n(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x \le M \left[\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/p} \, .$$

Dividendo si trova

$$\left[\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} < M \, .$$

Essendo $g(x) = \lim g_n(x)$ per ogni $x \in \Omega_R$, dal Lemma di Fatou si trova:

$$\left[\int_{\Omega_R} |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} \le \liminf_n \left[\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} \le M \, .$$

La (28) segue passando al limite per $R \to +\infty$. ∎

Osservazione 68 L'ipotesi di limitatezza sulle funzioni f è stata solo imposta perché così il teorema diventa di uso più facile. ∎

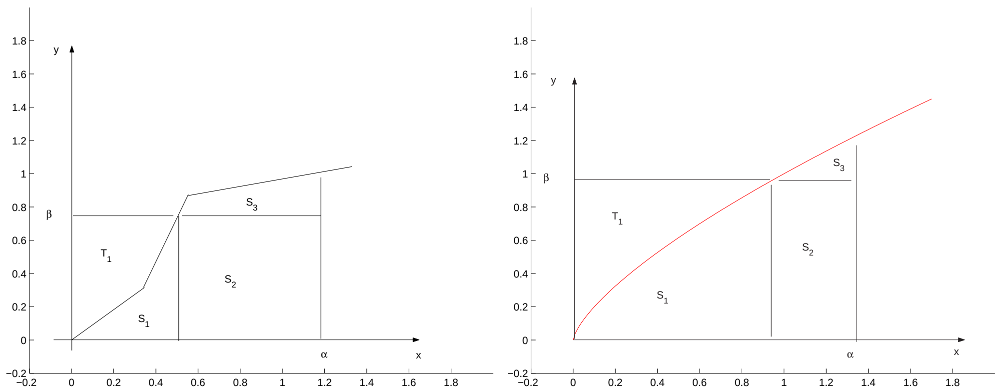
9.2 Una diversa dimostrazione delle disuguaglianze di Jensen e di Hölder

Mostriamo ora una diversa dimostrazione della disuguaglianza di Hölder e della disuguaglianza di Jensen. Si noti che la dimostrazione che qui presentiamo della disuguaglianza di Hölder è di tipo "geometrico" e non passa attraverso la preliminare dimostrazione della disuguaglianza di Jensen.

9.2.1 La disuguaglianza di Hölder

Consideriamo una funzione $\zeta(x)$ strettamente crescente per $x > 0$, nulla per $x = 0$ e i due punti $(\alpha, 0)$ e $(0, \beta)$. Si veda la figura 2 a sinistra. Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $\beta < f(\alpha)$, come in figura. Il caso opposto si tratta in modo analogo. Il prodotto $\alpha\beta$ è l'area dell'unione degli insiemi T_1, S_1

Figura 2:



ed S_2 mentre l'unione $T_1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ è l'unione del trapezoide della funzione $\zeta(x)$ che insiste su $[0, \alpha]$ e di quello della sua funzione inversa, ristretta a $[0, \beta]$. Dunque,

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha \zeta(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\beta \zeta^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{29}$$

Applichiamo questa disuguaglianza ad un caso speciale. Fissiamo $p > 1$ e sia $q = p/(p-1)$ il suo esponente coniugato. Notiamo che

$$\frac{1}{p-1} = \frac{p-(p-1)}{p-1} = q - 1\,.$$

Applichiamo le considerazioni precedenti scegliendo

$$\zeta(x) = x^{p-1}\,.$$

La funzione $\zeta(x)$, rappresentata nella figura 2 a destra, è crescente perché $p > 1$. La sua funzione inversa è

$$\zeta^{-1}(x) = x^{1/(p-1)} = x^{q-1}$$

e quindi gli integrali a destra della (29) si calcolano facilmente e si trova

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,. \tag{30}$$

Siano ora $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative, rispettivamente in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e in $\mathcal{L}^q(\Omega)$ e introduciamo le notazioni

$$||f||_p = \left[\int_\Omega f(x)^p\right]^{1/p} < \infty\,, \qquad ||g||_q = \left[\int_\Omega g(x)^q\right]^{1/q} < \infty\,.$$

Per ogni valore di x definiamo

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{||f||_p}\,, \qquad \beta = \frac{|g(x)|}{||g||_q}\,.$$

Di conseguenza, usando la (30) si trova che per ogni x vale

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p}\frac{|g(x)|}{||g||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{||g||_q^q}\,.$$

Integrando su Ω e notando che $p + q = 1$, si vede che il membro destro ha integrale uguale ad 1 e quindi, moltiplicando per il denominatore che figura a sinistra, si trova l'asserto del Teorema 63.

E' facile ora vedere per quali funzioni la disuguaglianza vale col segno di uguale. Ciò avviene se $\beta = \zeta(\alpha) = \alpha^{p-1}$ e quindi se e solo se per q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\frac{|g(x)|}{||g||_q} = \left\{\frac{|f(x)|}{||f||_p}\right\}^{p-1}$$

Elevando i due membri a potenza $q = p/(p-1)$ si vede che l'uguaglianza vale se e solo se esiste una costante C per cui

$$|f(x)|^p = C|g(x)|^q\,.$$

9.2.2 La disuguaglianza di Jensen

Ha interesse vedere una dimostrazione della disuguaglianza di Jensen, basata direttamente sulla (20). Limitiamoci a considerare il caso di funzioni limitate definite su insiemi di misura finita.

Notiamo che la composizione di una funzione convessa su una funzione semplice è ancora una funzione semplice. Premettiamo:

Lemma 69 *Siano s e ξ funzioni semplici su Ω e sia F una funzione convessa su $\mathbb{R}$. Supponiamo inoltre*

$$\xi(x) \geq 0\,, \qquad \int_\Omega \xi(s)\,ds = 1\,. \tag{31}$$

Vale:

$$F\left(\int_\Omega s(x)\xi(x)\,dx\right) \leq \int_\Omega F(s(x))\xi(x)\,dx\,. \tag{32}$$

<u>Dim</u>. Rappresentiamo

$$s(x) = \sum_{i=1}^n s_i\chi_{A_i}(x)\,, \qquad \xi(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i\chi_{A_i}(x)$$

con $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (e i medesimi insiemi A_i in ambedue le rappresentazioni, come sempre può farsi).

Si ha:

$$\int_\Omega s(x)\xi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n s_i\left[\xi_i\lambda(A_i)\right]\,.$$

I numeri $\alpha_i = \xi_i\lambda(A_i)$ verificano

$$\alpha_i \geq 0\,, \qquad \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \xi_i\lambda(A_i) = \int_\Omega \xi(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Dunque possiamo usare la disuguaglianza (20), ottenendo

$$\begin{aligned} F\left(\int_\Omega s(x)\xi(x)\,\mathrm{d}x\right) &= F\left(\sum_{i=1}^n s_i\left[\xi_i\lambda(A_i)\right]\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n F(s_i)[\xi_i\lambda(A_i)] = \int_\Omega F(s(x))\xi(x)\,\mathrm{d}x\,. \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 70 Si noti che la condizione (31) è quella che permette l'uso della (20). Ha quindi un ruolo cruciale nella dimostrazione del lemma precedente, e del teorema successivo. ∎

Proviamo ora il teorema, considerando il caso in cui le funzioni non sono semplici. Ricordiamo che stiamo solo studiando il caso in cui le due funzioni h e k sono limitate, su un insieme Ω di misura finita.

Si costruiscono successioni crescenti di funzioni semplici, $(s_n(x))$, $(\xi_n(x))$, convergenti uniformemente rispettivamente a $h(x)$ e $k(x)$.

Vorremmo usare il lemma precedente, ma la ξ_n potrebbe non avere integrale uguale ad 1. Per ovviare a ciò sostituiamo ξ_n con $\tilde{\xi}_n$,

$$\tilde{\xi}_n(x) = \frac{\xi_n(x)}{\int_\Omega \xi_n(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Essendo

$$\lim \int_\Omega \xi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega k(x)\,\mathrm{d}x = 1\,,$$

vale ancora

$$\lim \tilde{\xi}_n(x) = k(x)\,,$$

e il limite è ancora uniforme. Si può ora applicare la (32):

$$F\left(\int_\Omega s_n(x)\tilde{\xi}_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int_\Omega F(s_n(x))\tilde{\xi}_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La F è continua su $\mathbb{R}$ perché è convessa e $\left(\left[F(s_n(x))\tilde{\xi}_n(x)\right]\right)$ è una successione di funzioni limitata. Si ha quindi

$$\lim_n F(s_n(x)) = F(h(x))\,,$$
$$\lim F\left(\int_\Omega s_n(x)\tilde{\xi}_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathrm{d}x\right)\,,$$
$$\lim \int_\Omega F(s_n(x))\tilde{\xi}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Segue dunque la (22).

Osservazione 71 La dimostrazione che abbiamo presentato ora è più diretta, perché usa soltanto l'usuale definizione di funzione convessa. Però l'estensione al caso delle funzioni illimitate su insiemi illimitati richiederebbe delle considerazioni alquanto delicate. ∎

9.3 Le relazioni tra spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$

La disuguaglianza di Hölder permette di studiare quali relazioni intercorrano tra spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$, sul medesimo insieme Ω, ma con esponenti diversi. E' immediato costruire esempi di funzioni in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ che non sono in $\mathcal{L}^r(\mathbb{R})$ per ogni scelta degli esponenti p ed r. Però:

Teorema 72 *Se $\lambda(\Omega) < +\infty$ e se $p < q$ allora $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$.*

Dim. Vogliamo provare che se $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ allora si ha anche $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, purché sia $p < q$. Si noti che $|f|^p = (|f|^q)^{p/q}$ e che $(q/p) > 1$. Il suo esponente coniugato è

$$\frac{q}{q-p}\,.$$

Dunque, dalla disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^p \cdot 1 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \left[\int_\Omega (\,|f(x)|^p)^{q/p} \,\mathrm{d}x\right]^{p/q} \cdot \left[\int_\Omega (1)^{q/(q-p)} \,\mathrm{d}x\right]^{(q-p)/q} < +\infty\,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Se invece Ω ha misura infinita, nessuno dei due spazi include l'altro, come facilmente si vede nel caso $\Omega = \mathbb{R}$. Infatti, $f(x) = e^{-|x|}/[\sqrt{|x|}]$ è in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ma non in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Invece, $f(x) = 1/(1+|x|)$ è in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ma non in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vale però:

Teorema 73 *Sia $1 \leq p < r < +\infty$ e sia $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^r(\Omega)$. Allora, f appartiene anche a $\mathcal{L}^q(\Omega)$ per ogni q* intermedio *tra p ed r: $p < q < r$.*

Dim. Proviamo che nelle ipotesi del teorema vale la diseguaglianza seguente, da cui immediatamente segue l'asserto:

$$\int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^r \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{q-p}{r-p}} \left[\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{r-q}{r-p}}\,. \tag{33}$$

Si noti che un punto q del segmento (p, r) si rappresenta come

$$q = \alpha r + \beta p\,, \qquad \alpha = \frac{q-p}{r-p}\,, \quad \beta = \frac{r-q}{r-p}\,.$$

Inoltre,

$$\alpha + \beta = 1\,, \qquad \frac{1}{\alpha} > 1\,, \quad \frac{1}{\beta} > 1$$

e quindi possiamo usare la disuguaglianza di Hölder come segue:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^{\alpha r} |f(x)|^{\beta p} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \left[\int_\Omega (|f(x)|^{\alpha r})^{1/\alpha} \,\mathrm{d}x\right]^\alpha \left[\int_\Omega \left(|f(x)|^{\beta p}\right)^{1/\beta} \,\mathrm{d}x\right]^\beta < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Questa è la diseguaglianza cercata. $\blacksquare$

la (33) si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{interpolazione}}$.
Mostriamo infine:

Teorema 74 *Sia $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Allora, $f \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ per ogni $r > p$.*

<u>Dim</u>. Dividendo per ess sup $|f|$, e alterando il valore di f su un insieme di misura nulla, si può supporre $|f(x)| \le 1$ su Ω. In questo caso,

$$|f(x)|^r \le |f(x)|^p \quad \text{e quindi} \qquad \int_\Omega |f(x)|^r \le \int_\Omega |f(x)|^p < +\infty \,. \;\blacksquare$$

10 I teoremi di Fubini e Tonelli

Abbiamo definito l'integrale di Lebesgue su un insieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^n$. Estendendo $f(x) = 0$ per $x \notin \Omega$ si trova che ci si può sempre ricondurre a lavorare con funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n$, cosa che ora conviene fare.

Talvolta una funzione è data come "funzione di due variabili"

$$f(x, y)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, \quad y \in \mathbb{R}^k \qquad m + k = n\,.$$

Ci si può chiedere sotto quali condizioni l'integrale "doppio" di $f(x, y)$, ossia l'integrale su $\mathbb{R}^n$, si può scrivere come "integrale iterato". A questa domanda risponde il teorema seguente:

Teorema 75 (di $\boxed{\textbf{Fubini}}$) *Sia $f(x, y)$ integrabile su $\mathbb{R}^{m+k} = \mathbb{R}^n$. Definiamo*

$$f_x(y) = f(x, y)\,, \quad y \in \mathbb{R}^k\,, \qquad f_y(x) = f(x, y)\,, \quad x \in \mathbb{R}^m\,.$$

Allora:

- *q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f_x(y)$ è* misurabile *su $\mathbb{R}^k$ ed il suo integrale esteso ad $\mathbb{R}^k$ è* finito;
- *q.o. $y \in \mathbb{R}^k$, la funzione $f_y(x)$ è* misurabile *su $\mathbb{R}^m$ ed il suo integrale esteso ad $\mathbb{R}^m$ è* finito;
- *Posto*
$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x(y)\, dy\,, \qquad \Psi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y(x)\, dx\,,$$
le due funzioni Φ e Ψ sono integrabili, rispettivamente su $\mathbb{R}^m$ e su $\mathbb{R}^k$;
- *vale:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \Psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x)\, dx\,.$$

Ovviamente, in pratica si usano le notazioni

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad \Psi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

e l'enunciato del teorema si compendia scrivendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x\,.$$

Il teorema precedente richiede di saper che la funzione $f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$. Talvolta ciò non è noto. L'ipotesi che la funzione $f(x,y)$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n$ può venir rimossa a patto di assumere $f(x,y) \geq 0$ e che almeno uno dei due integrali iterati sia finito:

Teorema 76 (di $\boxed{\textbf{Tonelli}}$) *Sia* $f(x,y)$ *misurabile e* q.o. non negativa *su* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$. *Sia inoltre*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dy\right]\,dx < +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\right]\,dy < +\infty\,.$$

In tal caso la funzione $f(x,y)$ *è integrabile su* $\mathbb{R}^n$ *e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dy\right]\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx\right]\,dy\,.$$

La dimostrazione di questi teoremi è piuttosto complessa, e viene omessa. Mostriamone però un'applicazione importante.

10.1 Convoluzioni

In questa parte si usa una una proprietà importante della misura di Lebesgue, che è l'*invarianza per* $\boxed{\textit{traslazioni}}$. E' immediatamente evidente dalla definizione di misura che per ogni α reale e per ogni insieme misurabile A vale

$$\lambda(A) = \lambda(\alpha + A)$$

dove

$$\alpha + A = \{x \mid x = \alpha + a\,, \quad a \in A\}\,.$$

Conseguenza di questo è che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Siano f e g due funzioni definite su $\mathbb{R}^n$. Si chiama $\boxed{\textit{convoluzione}}$ delle due funzioni la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

definita per quei valori di x per i quali l'integrale esiste finito.

Per esempio, sia $n = 1$ e sia $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ per $x < 0$. In questo caso,

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

un integrale che si incontra, per esempio, nella soluzione delle equazioni differenziali ordinarie.

Vogliamo dare condizioni sotto le quali la convoluzione è definita q.o., ed è una funzione integrabile.

Vale:

Teorema 77 *Se f e g sono integrabili su $\mathbb{R}^n$ allora la loro convoluzione è definita q.o.; è una funzione integrabile e vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\,dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx\right]. \tag{34}$$

Dim. Applichiamo i teoremi di Fubini e Tonelli alla funzione

$$F(x,y) = |f(x-y)g(y)|\,.$$

La $F(x,y)$ è non negativa e uno dei suoi integrali iterati è finito. Infatti,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\right]|g(y)|\,\mathrm{d}y = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y\right] < +\infty\end{aligned}$$

(si noti che abbiamo usato l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue).

Per il teorema di Tonelli, esiste

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |F(x,y)| d(x,y)\,.$$

Ricordando che una funzione misurabile e assolutamente integrabile è anche integrabile, si vede che si può applicare il teorema di Fubini. Quindi per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ esiste

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (f * g)(x)\,.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x \right] |g(y)|\,\mathrm{d}y = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \right],
\end{aligned}$$

Vale quindi la (34). ∎

La disuguaglianza (34) si chiama *disuguaglianza di* $\boxed{\textit{Young}}$.

Osservazione 78 Si è provato che la convoluzione è definita q.o. Si osservi che in generale essa non è ovunque definita, come prova l'esempio seguente. Sia

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}} = g(x)\,.$$

Sia f che g sono integrabili, e quindi la loro convoluzione è definita q.o.; ma non è definita per $x = 0$ perché

$$(f*g)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{|y|}\,\mathrm{d}y = +\infty\,. \quad ∎$$

11 Considerazioni finali

Si noti il metodo che abbiamo seguito per introdurre l'integrale di Lebesgue: prima abbiamo definito una misura σ-additiva e quindi la classe delle funzioni misurabili rispetto a tale misura. Abbiamo visto che ogni funzione misurabile si approssima mediante funzioni semplici e abbiamo usato ciò per definire l'integrale.

Sia ora Ω un insieme qualsiasi e sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di s.insiemi di Ω. Sia μ una misura σ-additiva definita su $\mathcal{F}$. E' ancora possibile definire le funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ che sono misurabili, come quelle funzioni tali che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} \in \mathcal{F}\,.$$

E' facile vedere che ogni funzione misurabile si approssima mediante funzioni semplici e quindi definirne l'integrale. Tutte le proprietà delle funzioni misurabili e dei loro integrali si estendono a questo contesto "astratto". Si noti però che gli enunciati che contengono "q.o." sono leciti solo se la misura è $\boxed{\textit{completa}}$; ossia se ogni s.insieme di un insieme di misura zero è misurabile (e quindi ha misura zero). Altrimenti bisogna richiedere che la proprietà corrispondente valga ovunque su Ω.

11.1 La funzione integrale su $\mathbb{R}$

Vogliamo presentare i risultati che intercorrono tra l'integrazione e la derivazione per le funzioni di una variabile reale. Si tratta di risultati dalla dimostrazione alquanto complessa e quindi ci limitiamo a presentarli senza dimostrazione, a parte il seguente.

Supponiamo che f sia integrabile e non negativa. In questo caso

$$A \to \int_A f(s)\,\mathrm{d}s = \phi(A)$$

è una misura e l'additivitá dell'integrale mostra che si tratta di una misura σ-additiva. Se f prende anche valori negativi, si ottiene una *funzione d* $\boxed{\textit{insieme}}$ definita su $\mathcal{L}$; ossia una funzione che associa un numero ad ogni elemento di $\mathcal{L}$. Questa funzione ha l'ulteriore proprietà che se (A_i) è una successione di insiemi due a due disgiunti allora

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(A_i)$$

e questa uguaglianza vale anche se f non prende valori soltanto positivi. Anzi, dato che una funzione è integrabile se e solo se è assolutamente integrabile, la serie converge assolutamente.

Osserviamo però che per studiare la funzione $\phi(A)$ non è restrittivo assumere $f(x) \geq 0$ q.o. x. Infatti, se ciò non avviene, si studiano separatamente

$$\phi_+(A) = \int_A f_+(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \phi_-(A) = \int_A f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

con

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \qquad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}\,.$$

Vale:

Teorema 79 *Sia $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in sé una funzione q.o. non negativa e integrabile su (a, b). Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\lambda(A) < \delta$ allora $\phi(A) < \epsilon$.*

Dim. Limitiamoci a considerare il caso in cui $-\infty < a < b < +\infty$ (l'estensione al caso dell'intervallo illimitato non è difficile e si lascia al lettore).

Se $0 \leq f \leq M$ l'asserto è ovvio. Altrimenti, definiamo

$$f^N(x) = \min\{f(x), N\}\,.$$

Vale

$$\lim_N f^N(x) = f(x)\,, \qquad 0 \leq f^N(x) \leq f(x)$$

e per ipotesi $f(x)$ è integrabile. Dunque, per il teorema della Convergenza Dominata,

$$\lim_N \int_a^b [f(x) - f^N(x)] \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

Fissiamo N tale che

$$0 \le \int_a^b [f(x) - f^N(x)] \, \mathrm{d}x < \epsilon/2$$

e scriviamo

$$\int_A f(x) \, \mathrm{d}x = \int_A [f(x) - f^N(x)] \, \mathrm{d}x + \int_A f^N(x) \, \mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2} + N\lambda(A) \, .$$

La disuguaglianza richiesta vale se $\lambda(A) < \epsilon/(2N)$. ∎

Se f non è positiva il risultato precedente si può applicare sia alle funzioni f_+ ed f_- che alla funzione $|f|$, ottenendo un asserto analogo per la funzione d'insieme $\phi(A)$.

Al risultato precedente si può dare un'espressione più "esplicita" (valida anche se f non ha segno costante): per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli (x_i, x_{i+1}), $1 \le i \le n$, tra loro disgiunti e tali che

$$\sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) < \delta$$

vale

$$\sum_{i=1}^n |\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)| < \epsilon \, .$$

Una funzione con tale proprietà si dice *assolutamente* $\boxed{\textit{continua}}$. Dunque, ogni funzione integrale di una funzione che è integrabile secondo Lebesgue è assolutamente continua. In particolare, se f è integrabile secondo Lebesgue su un intervallo (a, b), la sua funzione integrale è continua. In questa definizione non si richiede che la funzione $f(x)$ abbia segno costante.

Viceversa, per funzioni di una variabile reale, vale:

Teorema 80 *Sia $\Phi(x)$ definita su $[a, b]$ ed assolutamente continua. Allora $\Phi'(x)$ esiste q.o. su (a, b) e inoltre*

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Phi'(s) \, ds \, . \tag{35}$$

Dunque,

Teorema 81 *Sia $\Phi(x)$ definita su $[a, b]$. L'uguaglianza (35) vale se e solo se $\Phi(x)$ è assolutamente continua.*

E' bene sapere che l'insieme delle funzioni q.o. derivabili e continue è assai più ampio di quello delle funzioni assolutamente continue: per esempio si prova che ogni funzione monotona e continua è q.o. derivabile. Però l'integrale della derivata in generale non restituisce la funzione. Esistono, infatti, esempi di funzioni $f(x)$ continue su $[0, 1]$, strettamente crescenti con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e con

$$f'(x) = 0 \quad \text{q.o. } x \in (0, 1)\,.$$

In tal caso,

$$f(1) - f(0) = 1 > \int_0^1 f'(s)\,\mathrm{d}s = 0\,.$$

11.1.1 Funzioni di più variabili

I risultati visti al paragrafo precedente per le funzioni di una variabile possono estendersi a funzioni di più variabili e al caso di una generica misura σ-additiva su un insieme Ω. Sia μ una misura σ-additiva definita su una σ-algebra $\mathcal{F}$ di s.insiemi di un'assegnato insieme Ω, come si è detto al paragrafo 11. Sia f (per semplicità non negativa) una funzione integrabile su Ω e sia

$$\phi(A) = \int_A f(x) d\mu\,. \tag{36}$$

Vale ancora l'analogo del teorema 79: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mu(A) < \delta$ allora $\phi(A) < \epsilon$. La dimostrazione è uguale a quella del teorema 79. Una funzione ϕ definita su $\mathcal{F}$ a valori non negativi e che ha questa proprietà si dice *assolutamente* $\boxed{\textit{continua}}$ rispetto a μ.

Viceversa, vale il risultato seguente, che ci limitiamo ad enunciare nel caso delle funzioni d'insieme non negative:

Teorema 82 (di $\boxed{\textbf{Radon-Nikodym}}$) *Sia μ una misura σ-additiva finita, definita su una σ-algebra $\mathcal{F}$ di s.insiemi di un assegnato insieme Ω. Sia ϕ una funzione di insieme non negativa definita su $\mathcal{F}$, assolutamente continua rispetto a μ. Esiste una funzione f, integrabile rispetto alla misura μ, per la quale vale la rappresentazione (36).*

Se g è una seconda funzione integrabile per cui

$$\phi(A) = \int_A g(x)\, dx$$

allora

$$\mu\,\{x \mid f(x) - g(x) \neq 0\} = 0\,.$$