BIANCHI, LUIGI.

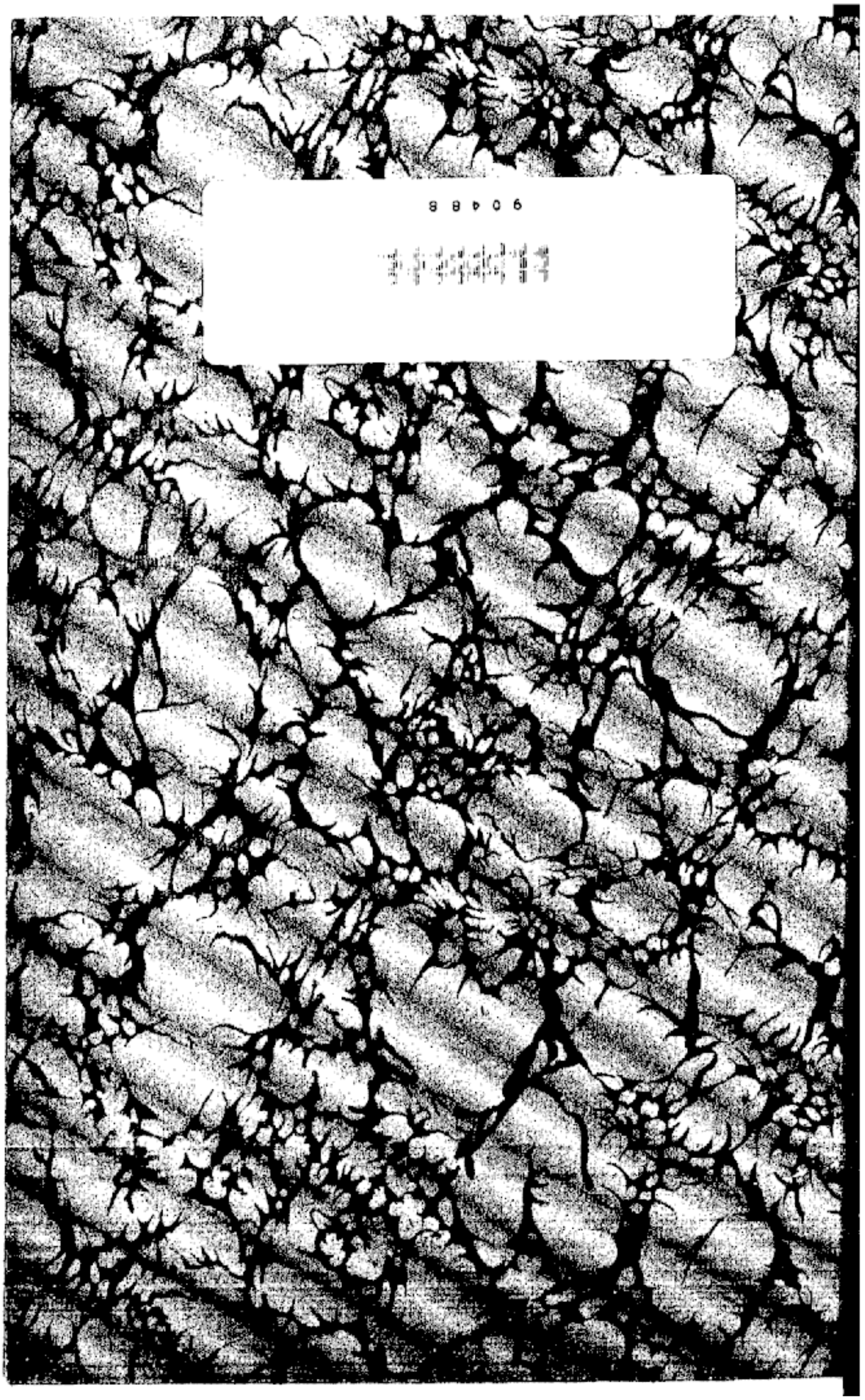
Lezioni di geometria differenziale

Tome 2

Enrico Spoerri

Pise **1903**

Source gallica.bnf.fr / Polytechnique



MAR 1964

a 4 e.
99

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Seconda edizione riveduta e considerevolmente aumentata

IN DUE VOLUMI

VOLUME II.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE Bibliothèque

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1903

Aumento 20 %

A e 99
12951

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

a 4 e. 99
(n 1)

LEZIONI

DI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Seconda edizione riveduta e considerevolmente aumentata

IN DUE VOLUMI

VOLUME II.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE Bibliothèque

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1903

PREFAZIONE

Questo secondo volume riproduce in parte teorie speciali già svolte nella prima edizione del libro, che in questa costituivano i Capitoli da XI a XX, ed altre nuove ne accoglie. Le prime trattano successivamente delle deformazioni infinitesime delle superficie, dei sistemi ciclici di Ribaucour, delle superficie d'area minima e del problema di Plateau, delle superficie pseudosferiche e delle trasformazioni reali di Bäcklund, dei sistemi tripli ortogonali dello spazio euclideo con applicazioni alle coordinate ellittiche ed alle geodetiche dell'ellissoide, in fine dei sistemi tripli ortogonali contenenti una famiglia di superficie a curvatura costante.

Per altro lo sviluppo che hanno ricevuto, nella nuova forma, queste diverse teorie è ora più ampio e completo. Fra le principali aggiunte rileverò nel Cap. XV le ricerche, tratte dal Darboux, relative al rotolamento di una superficie qualunque sopra un'altra applicabile, e nel seguente Cap. XVI quelle che riguardano l'applicazione successiva della trasformazione di Moutard ed il teorema generale di permutabilità per le congruenze W; così nel Cap. XVIII i maggiori sviluppi dati alla teoria dei sistemi ciclici ed alle sue relazioni col problema della deformazione. Citerò ancora nel Cap. XXIV le nuove considerazioni sulle reti di Tchebychef che conducono a nuove proprietà della trasformazione di Bäcklund, assegnando le formole effettive d'applicabilità per le due falde di una congruenza pseudosferica; in fine nel Cap. XXVII lo studio delle relazioni fra le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante ed il problema della deformazione di una particolare quadrica immaginaria, osculante il circolo all'infinito.

Argomenti del tutto nuovi sono svolti negli attuali Cap. XVII, XIX, XX, XXI, e XXV. Nel primo si studiano, da un punto di vista generale, le deformazioni delle congruenze rettilinee al modo di Beltrami, ossia le deformazioni del luogo dei centri in un inviluppo di ∞^2 sfere, coll'intento

principale di arrivare così alla dimostrazione dei notevolissimi teoremi di Guichard sulla deformazione delle quadriche di rotazione.

Al nuovo ed importante metodo di Weingarten per il secondo problema dell'applicabilità sono dedicati i Cap. XIX e XX.

Nel primo di questi stabilisco il metodo di Weingarten, coll'interpretazione geometrica di Darboux, e ne colgo l'occasione per far conoscere il metodo così detto del *triedro mobile* e le corrispondenti formole fondamentali della teoria delle superficie, sotto la forma preferita dai geometri della scuola Francese. Nel seguente Cap. XX il metodo di Weingarten viene collegato alla teoria dei sistemi ciclici e se ne espongono le principali applicazioni, fra le quali segnalerò *l'inversione* dei teoremi di Guichard e le conseguenti nuove trasformazioni delle superficie di curvatura costante.

In fine il Cap. XXV, insieme alle ultime parti del precedente XXIV, è dedicato a far conoscere tutti i recenti perfezionamenti apportati alla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante. Le nuove trasformazioni *reali* delle superficie pseudosferiche, come di quelle applicabili sulla sfera, vi si trovano sviluppate sia direttamente come le dedussi dall'inversione dei teoremi di Guichard, [1] sia risolute, secondo il teorema di permutabilità, nelle due trasformazioni elementari *immaginarie* di Bäcklund che le compongono. Nell'ultimo Cap. XXVII si estendono in fine queste ricerche alle trasformazioni delle famiglie di Lamé a curvatura costante.

Anche per questo secondo volume il collega prof. O. Niccoletti ha continuato cortesemente a coadiuvarmi nella revisione delle prove di stampa; ed io glie ne rinnovo qui sinceri ringraziamenti.

---

[1] Cf. le notizie storiche al §. 395, pag. 441 del presente volume.

Pisa, Maggio 1908.

Avvertenza per i richiami.

I richiami di pagina, senza indicazione del volume, si riferiscono al presente volume II.
Per quelli che riguardano il volume I, è adottata la notazione (I, pag....).

Capitolo XV.

Deformazioni infinitesime delle superficie e corrispondenza per ortogonalità d'elementi

Relazione del problema delle deformazioni infinitesime con quello delle coppie di superficie in corrispondenza d'ortogonalità d'elementi e delle coppie di superficie applicabili. — La funzione caratteristica φ e l'equazione fondamentale di Weingarten. — Superficie associate in una deformazione infinitesima. — Le forme normali dell'equazione di Weingarten. — Sistema coniugato permanente nella deformazione. — Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi. — Le congruenze di Ribaucour. — Secondo metodo per la ricerca delle deformazioni infinitesime. — Superficie a linee di curvatura isoterme e teoremi di Christoffel. — Condizioni dell'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile. — Rotolamento di una superficie sopra un'altra applicabile. — Direzioni cinematicamente coniugate. — Sistemi coniugati permanenti in deformazioni finite. — Teoremi di Peterson. — Superficie suscettibili di deformarsi conservando le linee di curvatura.

§. 223.

Osservazioni fondamentali.

Nel presente capitolo riprendiamo lo studio della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili per considerarne le deformazioni *infinitamente piccole*. Le molteplici relazioni di questa teoria colla teoria generale delle superficie e con quella dei sistemi di raggi, come d'altra parte il suo nesso intimo colle equazioni a derivate parziali della forma di Laplace, rendono questo studio sommamente interessante.

Noi stabiliremo qui le formole fondamentali, attenendoci alla Memoria di Weingarten nel T.° 100 del Giornale di Crelle, e ne svilupperemo poi le conseguenze geometriche.

Per la superficie S, di cui studiamo le deformazioni infinitesime, riteniamo le solite nostre notazioni. Il punto $P \equiv (x, y, z)$ di S riceva, nella deformazione infinitesima che si considera, uno spostamento le cui componenti secondo gli assi coordinati siano

$$\varepsilon\,\overline{x},\ \varepsilon\,\overline{y},\ \varepsilon\,\overline{z},$$

dove $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sono determinate funzioni di u, v ed ε indica una *costante infinitesima, le cui potenze superiori alla prima vengono trascurate*. Dopo

la deformazione il punto P si trasporta nel punto P′ che ha per coordinate

$$x' = x + \varepsilon \bar{x}\,, \quad y' = y + \varepsilon \bar{y}\,, \quad z' = z + \varepsilon \bar{z}\,,$$

e dovendo aversi per ipotesi

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

ne risulterà

$$dx\, d\bar{x} + dy\, d\bar{y} + dz\, d\bar{z} = 0. \tag{1}$$

Di questa relazione Moutard ha dato la semplice ed importante interpretazione geometrica seguente.

Si considerino $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ come coordinate di un punto $\bar{P}$ nello spazio; mentre P descrive S, il punto $\bar{P}$ descriverà una superficie $\bar{S}$ [1] corrispondente punto per punto alla S e per la (1) *due elementi lineari qualunque corrispondenti di* S, $\bar{S}$ *saranno sempre fra loro ortogonali.* Inversamente se $\bar{S}$ è una superficie corrispondente per ortogonalità d'elementi alla S, se ne dedurrà una deformazione infinitesima della S.

Si può dunque dare al problema delle deformazioni infinitesime l'aspetto finito: *Determinare le superficie* $\bar{S}$ *che corrispondono per ortogonalità d'elementi ad una superficie data* S.

Osserviamo subito che si ottiene una particolare deformazione infinitesima di una qualunque superficie S facendo subire ad S una rotazione infinitesima. Così p. e. una rotazione infinitesima attorno all'asse delle z è rappresentata dalle formole

$$x' = x + \varepsilon y\,, \quad y' = y - \varepsilon x\,, \quad z' = z\,,$$

onde la superficie $\bar{S}$ corrispondente ad S per ortogonalità d'elementi è il piano

$$\bar{x} = y\,, \quad \bar{y} = -x\,, \quad \bar{z} = 0\,,$$

cioè il piano xy sul quale si siano projettati ortogonalmente i punti

---

[1] Si osservi che se il punto $\bar{P}$ descrivesse una curva C e non una superficie, la S sarebbe sviluppabile poichè i suoi piani tangenti sarebbero normali alle tangenti di C. Questo caso ovvio trascureremo sempre in seguito. Potrebbe ulteriormente $\bar{P}$ essere immobile nello spazio, cioè $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ costanti; ma allora la S subirebbe una semplice traslazione.

di S, facendo poi subire all'immagine una rotazione d'un angolo retto attorno all'origine [1].

Il problema delle deformazioni infinitesime può porsi in un secondo modo sotto un aspetto finito. Essendo infatti S, $\overline{S}$ una coppia di superficie che si corrispondono per ortogonalità d'elementi, pongasi

$$\xi = x + t\overline{x}\ ,\quad \eta = y + t\overline{y}\ ,\quad \zeta = z + t\overline{z}\ ,$$

dando a t un valore costante qualunque. La superficie Σ luogo del punto (ξ, η, ζ) ha per quadrato dell'elemento lineare

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2 + d\overline{z}^2)\ ,$$

valore che non cangia mutando t in $-t$. Se consideriamo adunque la superficie Σ' luogo del punto (ξ', η', ζ') di coordinate

$$\xi' = x - t\overline{x}\ ,\quad \eta' = y - t\overline{y}\ ,\quad \zeta' = z - t\overline{z}$$

saranno Σ, Σ' applicabili, corrispondendosi i punti (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'); il punto medio del segmento che unisce due punti corrispondenti di Σ, Σ' è il punto $P \equiv (x, y, z)$ di S e la direzione di questo segmento segna la direzione secondo cui si muove P nella deformazione infinitesima considerata. Inversamente siano Σ, Σ' due superficie applicabili e (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') due punti corrispondenti. Ponendo

$$x = \frac{\xi + \xi'}{2}\ ,\quad y = \frac{\eta + \eta'}{2}\ ,\quad z = \frac{\zeta + \zeta'}{2}$$

$$\overline{x} = \frac{\xi - \xi'}{2}\ ,\quad \overline{y} = \frac{\eta - \eta'}{2}\ ,\quad \overline{z} = \frac{\zeta - \zeta'}{2}\ ,$$

si ha

$$dx\,d\overline{x} + dy\,d\overline{y} + dz\,d\overline{z} = 0\ ,$$

onde vediamo che: *Se due superficie Σ, Σ' sono applicabili, la superficie*

---

[1] Si osservi che questa costruzione, combinata con una traslazione nel piano ed un'omotetia, è la più generale possibile che faccia corrispondere alla S un piano per ortogonalità d'elementi.

Preso infatti questo piano per piano xy la (1) diventa

$$dx\,d\overline{x} + dy\,d\overline{y} = 0$$

ed $\overline{x}$, $\overline{y}$, considerate come funzioni di x, y, debbono quindi soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial\overline{y}}{\partial y} = 0\ ,\quad \frac{\partial\overline{x}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{y}}{\partial x} = 0\ ,$$

la cui soluzione più generale è data dalle formole

$$\overline{x} = ay + b\ ,\quad \overline{y} = -ax + c\ ,$$

indicando a, b, c costanti.

S luogo dei punti medii delle congiungenti i punti corrispondenti è suscettibile di una deformazione infinitesima, nella quale ciascun punto di S *si sposta nella direzione di quella congiungente.*

§. 224.

La funzione caratteristica e l'equazione di Weingarten.

Veniamo ora alla trattazione analitica del nostro problema, che consiste nel determinare le tre funzioni incognite $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di u, v in guisa da soddisfare la (1), ossia le tre equazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0\ , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0 \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0\ . \end{cases}$$

Per trattare simmetricamente questo sistema di equazioni, Weingarten introduce come funzione ausiliaria φ l'*invariante* [1] dell'espressione differenziale

$$\sum \bar{x}\, dx = \left(\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv$$

rispetto alla prima forma fondamentale

$$\mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

---

[1] Se una forma differenziale lineare

$$\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv$$

si trasforma mediante un cangiamento di variabili $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$ in

$$\mathrm{M}'\, du' + \mathrm{N}'\, dv'$$

si ha identicamente

$$\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial v'} - \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial u'} = \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)\frac{\partial (u, v)}{\partial (u', v')}$$

e però l'espressione

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)$$

è un invariante (irrazionale) del sistema delle due forme

$$\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv\ , \quad \mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2\ .$$

della superficie S; egli pone cioè

$$(2^*) \qquad \varphi = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

A questa funzione φ Weingarten dà il nome di *Verschiebungsfunction*; noi la chiameremo la funzione *caratteristica*. Essa ha un semplice significato cinematico osservato da Volterra [1], rappresentando la componente secondo la normale della rotazione che un elemento superficiale di S subisce nella deformazione.

L'ultima delle (2) si scinde nelle due equazioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\varphi\sqrt{EG-F^2} \\ \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \varphi\sqrt{EG-F^2}\,. \end{cases}$$

Formiamo dalla seconda di queste

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{EG-F^2})}{\partial u}$$

osservando che per la prima delle (2)

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v} = -\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},$$

e facendo uso delle formole fondamentali (I) § 55 (I pag. 116), col ricordare la formola

$$\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

troveremo

$$(4) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{D\sum X\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} - D'\sum X\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\,.$$

---

[1] *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili*, Rendiconti dei Lincei, aprile 1884.

Analogamente operando sulla prima delle (3), ne dedurremo:

$$(4^*)\qquad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{D' \sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} - D'' \sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{E G - F^2}}.$$

Escludendo, come già si disse da principio, il caso privo d'interesse di una S sviluppabile, le (4), (4*), essendo

$$D D'' - D'^2 \neq 0,$$

risolute rapporto a

$$\sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

danno:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\frac{D \frac{\partial p}{\partial v} - D' \frac{\partial p}{\partial u}}{K\sqrt{EG - F^2}} \\ \sum X \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{D'' \frac{\partial p}{\partial u} - D' \frac{\partial p}{\partial v}}{K\sqrt{EG - F^2}}, \end{cases}$$

indicando con K al solito la curvatura di S.

Le (2), (3), (5) possono ora risolversi rapporto alle derivate parziali di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ e danno le formole:

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\left(D \frac{\partial X}{\partial v} - D' \frac{\partial X}{\partial u}\right) p - \left(D \frac{\partial p}{\partial v} - D' \frac{\partial p}{\partial u}\right) X}{K\sqrt{EG - F^2}} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{-\left(D'' \frac{\partial X}{\partial u} - D' \frac{\partial X}{\partial v}\right) p + \left(D'' \frac{\partial p}{\partial u} - D' \frac{\partial p}{\partial v}\right) X}{K\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}$$

colle analoghe in $\bar{y}$, $\bar{z}$. Di qui si vede intanto che, appena nota la funzione caratteristica p, si avrà per quadrature la superficie $\bar{S}$ corrispondente per ortogonalità d'elementi alla S, cioè la corrispondente deformazione infinitesima.

Ora dalle (5), derivando la seconda rispetto a u, la prima rispetto

a v, e sottraendo, si ha dapprima:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)=\Sigma\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}-\Sigma\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}$$

e sostituendo per $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ i valori tratti dalle equazioni fondamentali (II) § 55 (I, pag. 117), troviamo il seguente risultato fondamentale:

La funzione caratteristica φ deve soddisfare alla equazione lineare a derivate parziali del secondo ordine:

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}\varphi;\ ^{(1)}$$

questa si dirà l'equazione caratteristica.

Ora è molto importante osservare che la (7) è la condizione *necessaria e sufficiente* cui deve soddisfare φ, e cioè ad ogni soluzione φ della equazione caratteristica (7) corrisponde una particolare deformazione infinitesima della superficie S. Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che facendo

$$\bar{x}=y\ ,\quad \bar{y}=-x\ ,\quad \bar{z}=0$$

si ha una particolare deformazione infinitesima di S (§ 223) ed il corrispondente valore di φ calcolato dalla (2*) è $\varphi=X$. Dunque: l'*equazione caratteristica ammette le tre soluzioni particolari* X, Y, Z. Dopo ciò si vedrà subito che, se φ è una soluzione della (7), per le (6) è identicamente soddisfatta la condizione d'integrabilità e ne risulta così definita per quadrature una deformazione infinitesima della S.

Dalle osservazioni superiori segue poi che le deformazioni infinitesime della S consistenti in un *puro movimento* corrispondono alla soluzione

$$\varphi=aX+bY+cZ$$

della equazione caratteristica, essendo a, b, c costanti.

---

(1) Si osserverà che il coefficiente di φ nel secondo membro è precisamente la curvatura media H di S.

§. 225.

Trasformazione della equazione caratteristica e superficie associate.

Alla equazione caratteristica (7) di Weingarten si può dare un'altra forma molto importante introducendo i coefficienti e, f, g, della rappresentazione sferica di S (della terza forma fondamentale). Ricordando che

$$K\sqrt{EG-F^2} = \pm\sqrt{eg-f^2}\ ,$$

la (7), moltiplicata per $\sqrt{EG-F^2}\,\sqrt{eg-f^2}$ si scrive:

$$\sqrt{eg-f^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right\}+(eD''+gD-2fD')\varphi=0\ .$$

Indicando cogli accenti i simboli di Christoffel relativi alla rappresentazione sferica e ricordando le formole di Codazzi (I, pag. 153) per la terza forma fondamentale, la precedente si scrive:

$$D''\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+e\varphi\right]-$$
$$-2D'\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+f\varphi\right]+$$
$$+D\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+g\varphi\right]=0\ ,$$

ovvero

(7*) $$D''(\varphi'_{11}+e\varphi)-2D'(\varphi'_{12}+f\varphi)+D(\varphi'_{22}+g\varphi)=0\ ,$$

i simboli φ'_{11}, φ'_{12}, φ'_{22} *indicando le derivate seconde covarianti della funzione caratteristica* φ, *calcolate rispetto all'elemento lineare sferico.*

È questa la richiesta trasformazione dell'equazione caratteristica. Ne risulta ora evidente la proprietà, già sopra notata, che X, Y, Z ne sono soluzioni particolari.

A questa forma (7*) della equazione caratteristica si legano le seguenti osservazioni geometriche. Se immaginiamo determinata la superficie S mediante le coordinate tangenziali

$$X\ ,\quad Y\ ,\quad Z\ ,\quad W$$

(I, pag. 172), cioè con W indichiamo la distanza (algebrica) del piano

tangente di S dall'origine, per le formole (35) del § 81 (I, pag. 173) la (7*) si può scrivere;

$$(8) \qquad (W'_{22} + g\,W)\,(\varphi'_{11} + e\,\varphi) - 2\,(W'_{12} + f\,W)\,(\varphi'_{12} + f\,\varphi) + \\ + (W'_{11} + e\,W)\,(\varphi'_{22} + g\,\varphi) = 0\,.$$

Essendo questa simmetrica nella coppia di funzioni $W\,\varphi$, vediamo che se si considera la superficie S_0 inviluppo del piano

$$x\,X + y\,Y + z\,Z = \varphi\,,$$

cioè la superficie S_0 determinata dalle coordinate tangenziali

$$X\,,\quad Y\,,\quad Z\,,\quad W_0 = \varphi\,,$$

come φ è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S, così W è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S_0.

Per riconoscere la relazione geometrica caratteristica fra S, S_0 osserviamo che queste due superficie si corrispondono per *parallelismo di normali* e se con

$$(a) \qquad \begin{cases} D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \\ D_0 du^2 + 2\,D'_0\,du\,dv + D''_0\,dv^2 \end{cases}$$

si indicano rispettivamente le due seconde forme fondamentali, la (7*), essendo

$$-D_0 = \varphi'_{11} + e\,\varphi\,,\quad -D'_0 = \varphi'_{12} + f\,\varphi\,,\quad -D''_0 = \varphi'_{22} + g\,\varphi\,,$$

si scrive

$$(8^*) \qquad D\,D''_0 - 2\,D'\,D'_0 + D''\,D_0 = 0\,,$$

ed esprime che l'*invariante simultaneo delle due seconde forme fondamentali (a) è nullo*. Il significato geometrico di tale relazione è il seguente: alle linee assintotiche dell'una superficie corrisponde un sistema coniugato sull'altra. E invero se si suppone $D = D'' = 0$, la (8*) dimostra che si ha $D'_0 = 0$.

Inversamente se due superficie S, S_0 si corrispondono per parallelismo di normali ed alle assintotiche dell'una corrisponde un sistema coniugato sull'altra, sussisterà la (8*), ovvero indicando con W, φ le rispettive distanze dei loro piani tangenti dall'origine, la (8), onde φ sarà funzione caratteristica di una deformazione infinitesima di S e analogamente W per S_0. Chiamando dunque *associate* due superficie S, S_0 quando corrispondendosi per parallelismo di normali, alle linee assintotiche dell'una corrisponde un sistema coniugato sull'altra, abbiamo: *In ogni coppia di*

superficie associate la distanza di un punto fisso dello spazio dal piano tangente di una delle due superficie è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima dell'altra.

Si osserverà subito che in ogni coppia di superficie associate *una almeno* delle due superficie è a curvatura negativa. E invero, se supponiamo p. e. S a curvatura positiva, e facciamo $D' = 0$, avranno D, D'' il medesimo segno e quindi, per la (8*), saranno necessariamente D_0, D''_0 di segno contrario, onde S_0 avrà curvatura negativa.

§. 226.

Le forme normali dell'equazione caratteristica.

Riferendo la superficie S, di cui studiamo le deformazioni infinitesime, a convenienti sistemi curvilinei $(u\,v)$, possiamo ridurre l'equazione caratteristica a semplici forme, che riguarderemo come *forme normali.*

1.° Se la superficie S è a curvature opposte, prendiamo a linee coordinate $(u\,v)$ le assintotiche [1]; avremo

$$D = 0\ , \quad D'' = 0$$

onde la (7*) diviene

$$\varphi'_{12} + f\varphi = 0\,,$$

ossia sviluppando colle formole del § 73 (I, pag. 155):

$$(9) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + f\varphi = 0\,.$$

Essendo φ una soluzione di questa equazione, le formole generali (6), che definiscono la superficie $\overline{S}$ corrispondente per ortogonalità d'elementi alla S, diventano:

$$(10) \qquad \frac{\partial\overline{x}}{\partial u} = \rho\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial X}{\partial u}\right),\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} = -\rho\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \varphi\frac{\partial X}{\partial v}\right).$$

Ora applichiamo la trasformazione stessa che abbiamo impiegato al § 77 (I, pag. 162) per ottenere le formole di Lelieuvre, cangiamo cioè la funzione incognita φ col porre

$$\varphi\sqrt{\rho} = \theta;$$

---

[1] La convenienza di riferirsi a queste linee risulta *a priori* da ciò che per l'equazione fondamentale (7) le linee assintotiche sono appunto le linee *caratteristiche* della equazione a derivate parziali stessa.

la (9) diventa allora

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\,\theta\,, \quad \mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\,\partial v} - f \tag{11}$$

e le (10) si scrivono corrispondentemente

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\theta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\theta}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{12}$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$, ottenute per permutazione circolare delle lettere ξ, η, ζ.

Ricordiamo che ξ, η, ζ sono esse stesse tre soluzioni particolari della (11). Ogni altra soluzione θ della (11), linearmente indipendente da ξ, η, ζ, dà un'effettiva deformazione infinitesima della superficie, che si riduce invece ad un puro movimento se θ è composta linearmente con ξ, η, ζ (Cfr. § 224).

2.° Se la S è curvatura positiva, la riferiremo, come al § 79 (I, pag. 167), ad un sistema (u, v) isotermo-coniugato; l'equazione caratteristica diventa

$$\varphi'_{uu} + \varphi'_{vv} + (e+g)\,\varphi = 0\,,$$

cioè (§ 80, I, pag. 180)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial\log\rho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + (e+g)\,\varphi = 0, \tag{13}$$

e le (6) ci danno:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \rho\left(\varphi\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{X}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = -\rho\left(\varphi\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial u} - \mathrm{X}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right). \tag{14}$$

Colla solita trasformazione

$$\varphi\sqrt{\rho} = \theta\,,$$

l'equazione caratteristica (13) diventa

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \mathrm{M}\,\theta \tag{15}$$

con

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial v^2}\right) - (e+g)\,,$$

e la superficie S risulta definita per quadrature delle formole

$$(16)\qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \theta & \xi \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \theta & \xi \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$.

Possiamo dunque enunciare il risultato: *L'equazione da cui dipende la ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie* S *si riduce alla forma normale*:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta\,;$$

o all'altra

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = M\theta\,,$$

secondo che la S *è a curvatura negativa o positiva.*

Così p. e. per tutte le superficie che corrispondono alla equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0$$

sapremo completamente integrare il problema delle deformazioni infinitesime; ciò vale in particolare per le superficie conoidali rette (§ 77, I, pag. 165).

§. 227.

Sistema coniugato permanente nella deformazione infinitesima.

Consideriamo due superficie associate S, S_0 e supposto che la S_0 abbia linee assintotiche reali, prendiamole a linee coordinate (u, v). Le linee corrispondenti formeranno un sistema coniugato e la funzione caratteristica φ, essendo $D_0 = 0$, $D''_0 = 0$, soddisferà alle due equazioni simultanee (§ 225):

$$(b)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - e\varphi \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - g\varphi\,. \end{cases}$$

Sia ora $\bar{S}$ la superficie corrispondente alla S per ortogonalità d'ele-

menti nella detta deformazione infinitesima; avremo per le (6):

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\left(\varphi \dfrac{\partial X}{\partial v} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\left(X\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi \dfrac{\partial X}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Avendo riguardo alle (16) ed alle formole di Codazzi (I, pag. 154)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\right) = -\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\right) = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}, \end{cases}$$

se si forma dall'una o dall'altra delle (c) la derivata $\dfrac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v}$, si trova:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\frac{D''}{D}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\frac{D}{D''}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v};$$

ma per le formole (I, pag. 167)

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\frac{D''}{D}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\frac{D}{D''},$$

questa si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Dunque: *il sistema (u, v) è coniugato anche sulla* $\bar{S}$ *corrispondente ad* S *per ortogonalità d' elementi e l' equazione di Laplace relativa ai due sistemi coniugati è la medesima.*

Si noterà poi che alla medesima equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial v}$$

soddisfa anche l'espressione

$$x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z},$$

come risulta dall'identità:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0.$$

Se ritorniamo ora alla seconda interpretazione finita data nel § 223 al problema delle deformazioni infinitesime e consideriamo le due superficie applicabili Σ, Σ' luogo dei rispettivi punti (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ')

$$\xi = x + t\bar{x}\ , \quad \eta = y + t\bar{y}\ , \quad \zeta = z + t\bar{z}$$

$$\xi' = x - t\bar{x}\ , \quad \eta' = y - t\bar{y}\ , \quad \zeta' = z - t\bar{z}\ ,$$

con t costante, vediamo che anche sopra Σ, Σ' il sistema (u, v) è coniugato e l'equazione di Laplace relativa è la stessa come sopra S, $\bar{S}$. Di essa, oltre che ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' è altresì una soluzione

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 4t(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})\ .\ ^{(1)}$$

In particolare, dando a t un valore infinitamente piccolo ϵ, vediamo che sulla deformata infinitesima S' di S il sistema (u, v) si è conservato coniugato, onde risulta il teorema:

Il sistema coniugato di una superficie S, *che corrisponde alle assintotiche di una superficie* S_0 *associata ad* S *in una deformazione infinitesima, si conserva coniugato in questa deformazione. Sulla superficie* $\bar{S}$ *corrispondente ad* S *per ortogonalità d'elementi vi corrisponde alla sua volta il sistema coniugato omologo.*

Viceversa se consideriamo in una deformazione infinitesima di una superficie S quel sistema coniugato che si conserva coniugato nella deformazione, ^(2) sulla superficie associata S_0 dovrà corrispondervi il sistema delle assintotiche. Possiamo dunque enunciare il teorema:

---

(1) Cf. KOENIGS. Comptes Rendus de l'Académie des sciences t. 116, pag. 569.

Questo teorema di Koenigs risulta del resto subito dall'osservare che su due superficie applicabili, riferite al sistema coniugato comune, l'equazione relativa di Laplace è la stessa e ponendo

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\ , \quad \rho' = \tfrac{1}{2}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)$$

si ha (I, pag. 147)

$$\rho_{12} = \rho'_{12} = F\ .$$

Di qui si possono trarre inversamente i risultati del presente § del testo.

(2) Questo sistema coniugato permanente è unico salvo nei puri movimenti ove ogni sistema coniugato si conserva. Indicando con δD, $\delta D'$, $\delta D''$ le variazioni di D, D', D'' nella deformazione infinitesima, il sistema coniugato permanente è definito dall'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \\ \delta D\,du + \delta D'\,dv & \delta D'\,du + \delta D''\,dv \end{vmatrix} = 0$$

Affinchè un sistema coniugato sopra S *si conservi coniugato in una deformazione infinitesima di* S *è necessario e sufficiente che la sua immagine sferica di Gauss sia anche l'immagine delle assintotiche di una superficie* S_0. *Le superficie* S, S_0 *sono allora associate in quella deformazione infinitesima.*

In particolare affinchè una superficie ammetta una deformazione infinitesima nella quale le linee di curvatura si conservino è necessario e sufficiente che la rappresentazione sferica delle linee di curvatura sia isoterma; [1] in tal caso la superficie associata S_0 è ad area minima.

§. 228.

Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi.

Diamo ora alcune proprietà delle coppie (S $\overline{S}$) di superficie che si corrispondono per ortogonalità d'elementi.

1.° Supponiamo dapprima che la S sia a curvatura positiva e, come al § 226, scegliamo a sistema coordinato (u, v) un sistema isotermo-coniugato sopra S. Le formole (16) possono scriversi

$$\frac{1}{\overline{\theta}^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right), \quad \frac{1}{\overline{\theta}^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right)$$

onde segue

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\overline{\theta}^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\overline{\theta}^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial v^2} = \frac{2}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} + \frac{2}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v},$$

---

e risulta indeterminato nel solo caso in cui

$$\delta D : \delta D' : \delta D'' = D : D' : D''$$

Ma, essendo

$$\delta(DD'' - D'^2) = D\,\delta D'' + D''\delta D - 2D'\delta D' = 0$$

e $DD'' - D'^2 \neq 0$, risulta di qui

$$\delta D = \delta D' = \delta D'' = 0 .$$

[1] Questo risultato è dovuto a Weingarten. Sitzungsberichte der K. Akademie zu Berlin — Januar 1886.

colle formole analoghe in $\bar{y}$ $\bar{z}$. Ora se indichiamo con $\left\{\begin{matrix}\bar{r}\,\bar{s}\\ \bar{t}\end{matrix}\right\}$ i simboli di Christoffel per la $\bar{S}$ e con

$$\bar{D}\ ,\quad \bar{D}'\ ,\quad \bar{D}''$$

$$\bar{X}\ ,\quad \bar{Y}\ ,\quad \bar{Z}$$

i coefficienti della seconda forma fondamentale ed i coseni di direzione della normale, abbiamo

$$\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial v^2}=\left[\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 1\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+\left[\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 2\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}+$$
$$+(\bar{D}+\bar{D}'')\,\bar{X}\ ,$$

onde, confrontando colla precedente, si trae

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\theta^2}{\partial u}\ ,\quad \left\{\begin{matrix}1\,1\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\,2\\ 2\end{matrix}\right\}=\frac{\partial\log\theta^2}{\partial v}$$

$$\bar{D}+\bar{D}''=0\ .$$

Quest'ultima ci dice che $\bar{D}$, $\bar{D}''$ hanno segno contrario e quindi: *Ad una superficie a curvatura positiva* S *corrispondono per ortogonalità d'elementi soltanto superficie* S *a curvatura negativa* [1].

Così, come per le coppie di superficie associate (§ 225), anche nelle coppie (S, $\bar{S}$) di superficie che si corrispondono per ortogonalità d'elementi una almeno delle due superficie è a curvatura negativa.

2.° Sia ora la S a curvature opposte. Prese a linee coordinate le assintotiche (u, v) sopra S, le (12) si scrivono

$$\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right),\quad \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right),$$

da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\right)=0,$$

cioè

$$\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\theta}{\partial v}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}+\frac{\partial\log\theta}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\ ,$$

---

[1] L'unico caso d'eccezione è quando

$$\bar{D}=\bar{D}'=\bar{D}''=0\ :$$

ma allora la $\bar{S}$ è un piano.

che è un'equazione di Laplace ad invarianti eguali. Dunque: *Alle linee assintotiche di una superficie* S *corrisponde sopra ogni superficie* $\overline{S}$, *in relazione d'ortogonalità d'elementi con* S, *un sistema coniugato ad invarianti eguali.*

Viceversa di una superficie $\overline{S}$ sia noto un sistema coniugato (u, v) ad invarianti eguali; si potrà porre

$$\begin{Bmatrix} \overline{12} \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \theta}{\partial v} \quad , \quad \begin{Bmatrix} \overline{12} \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \theta}{\partial u} \quad ,$$

essendo θ una conveniente funzione di u, v. Determinando ξ, η, ζ per quadrature dalle formole

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}$$

e dalle analoghe per η, ζ, saranno ξ, η, ζ tre soluzioni dell'equazione in Θ:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = \left[\frac{\partial^2 \log \theta}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right]\Theta .$$

Conseguentemente le formole di Lelieuvre (I, pag. 162)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

definiscono una superficie S sulla quale le linee (u, v) sono le assintotiche e che corrisponde per ortogonalità d'elementi alla $\overline{S}$. Si vede adunque che:

La ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie equivale a quella dei suoi sistemi coniugati ad invarianti eguali.

§. 229.

Congruenze di Ribaucour.

Alle coppie di superficie che si corrispondono per ortogonalità di elementi si lega un'importante classe di congruenze, considerata da Ribaucour, che si ottengono nel modo seguente: Essendo $\overline{S}$, S una tale coppia di superficie, conduciamo pei punti di $\overline{S}$ i raggi paralleli alle normali nei punti corrispondenti di S; la congruenza di rette così ottenuta si dirà una *congruenza di Ribaucour* e la superficie S prenderà il nome *di superficie generatrice* della congruenza.

Per determinare gli elementi di una tale congruenza, applichiamo le formole generali del cap. X. Dalle (6) pag. 6, ponendo colle notazioni di Kummer:

$$\bar{e} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}\ ,\ \bar{f} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\ ,\ \bar{f}' = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\ ,\ \bar{g} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\ ,$$

otteniamo:

$$\bar{e} = \frac{f\,\mathrm{D} - e\,\mathrm{D}'}{\sqrt{eg-f^2}}\varphi,\ \bar{f} = \frac{f\,\mathrm{D}' - e\,\mathrm{D}''}{\sqrt{eg-f^2}}\varphi,\ \bar{f}' = \frac{g\,\mathrm{D} - f\,\mathrm{D}'}{\sqrt{eg-f^2}}\varphi,\ \bar{g} = \frac{g\,\mathrm{D}' - f\,\mathrm{D}''}{\sqrt{eg-f^2}}\varphi\,.$$

Le equazioni (B) (D) (I, pag. 305, 306), che determinano rispettivamente le ascisse dei punti limiti e quelle dei fuochi, diventano

$$(17)\qquad \begin{cases} \rho^2 = \dfrac{(r_1 - r_2)^2}{4}\varphi^2, \\ \rho^2 = -\,r_1 r_2 \varphi^2, \end{cases}$$

indicando r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della superficie generatrice S. [1] L'equazione (C) (I, pag. 305) che determina le sviluppabili della congruenza diventa poi

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = 0;$$

abbiamo dunque il teorema:

In ogni congruenza di Ribaucour la superficie $\bar{\mathrm{S}}$ *di partenza, corrispondente per ortogonalità d'elementi alla superficie generatrice* S, *è la superficie media della congruenza. Le sviluppabili della congruenza corrispondono alle linee assintotiche della superficie generatrice* S *e tagliano conseguentemente* (§ 228) *la superficie media* S *secondo un sistema coniugato ad invarianti eguali.*

Dimostriamo che quest'ultima proprietà è caratteristica delle congruenze di Ribaucour, anzi di più: *Ogni congruenza le cui sviluppabili*

---

[1] Nella sostituzione nelle citate formole (B), (D), le quantità in queste indicate con E, F, G; e f, f', g debbono rispettivamente sostituirsi con

$$e,\ f,\ g;\ \bar{e},\ \bar{f},\ \bar{f}',\ \bar{g};$$

conviene inoltre tener presenti le formole

$$r_1 + r_2 = \frac{2\,f\,\mathrm{D}' - e\,\mathrm{D}'' - g\,\mathrm{D}}{eg - f^2}$$

$$r_1 r_2 = \frac{\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2}{eg - f^2}\,.$$

tagliano la superficie media secondo un sistema coniugato è una congruenza di Ribaucour ed il sistema coniugato è quindi ad invarianti eguali.

Per dimostrarlo procediamo con Guichard nel modo seguente. Riprendiamo le formole del Cap. X, § 147 (I, pag. 317), che danno le coordinate x, y, z del punto medio:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\rho\right]X - \rho\dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\rho\right]X + \rho\dfrac{\partial X}{\partial v}\,, \end{cases}$$

ove ρ indica una soluzione dell'equazione di Laplace

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + f\right]\rho = 0\,.$$

Esprimiamo ora che sulla superficie media S le traccie (u, v) delle sviluppabili della congruenza formano un sistema coniugato. Per ciò è necessario e sufficiente che x, y, z siano soluzioni di una medesima equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial\theta}{\partial u} + Q\frac{\partial\theta}{\partial v}\,,$$

essendo P, Q convenienti funzioni di u, v.

Ora formando effettivamente $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ da una delle (18), coll'osservare la (19) e la formola

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v} - fX\,,$$

troviamo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\left[\frac{\partial\rho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\rho\right]\frac{\partial X}{\partial u} + \left[\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\rho\right]\frac{\partial X}{\partial v} +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\rho + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right]X\,,$$

che deve sussistere colle analoghe per y, z. Le funzioni supposte P, Q saranno quindi date da

$$(20)\qquad P = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\,,\quad Q = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\,,$$

e dovrà aversi inoltre:

$$P\left[\frac{\partial\rho}{\partial u}+2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right]-Q\left[\frac{\partial\rho}{\partial v}+2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right]=$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\rho+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial v}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial u},$$

che pei valori (20) di P, Q si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}.$$

Questa esprime che le immagini sferiche delle sviluppabili della congruenza sono le immagini delle assintotiche di una superficie (I, pag. 156). In questo modo appunto Guichard ha stabilito il teorema:

Perchè le sviluppabili di una congruenza taglino la superficie media S *secondo un sistema coniugato è necessario e sufficiente che le loro immagini sferiche coincidano colle immagini delle assintotiche di una superficie* $\overline{S}$.

Si osservi poi che, essendo $\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial Q}{\partial u}$, il sistema coniugato (u, v) di S ha necessariamente gli invarianti eguali.

Ora è facile constatare ulteriormente che questa superficie $\overline{S}$ corrisponde per ortogonalità d'elementi alla superficie media S della congruenza, la quale è adunque una congruenza di Ribaucour. E infatti, se con $K=-\frac{1}{R^2}$ indichiamo la curvatura di $\overline{S}$, sussistono le formole (I, pag. 155)

$$\frac{\partial\log R}{\partial u}=-2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},\quad\frac{\partial\log R}{\partial v}=-2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$$

e per le coordinate $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ di un punto di $\overline{S}$ si ha

$$\begin{cases}\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=\frac{R}{\sqrt{eg-f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial u}-e\frac{\partial X}{\partial v}\right)\\ \frac{\partial\overline{x}}{\partial v}=\frac{R}{\sqrt{eg-f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial v}-g\frac{\partial X}{\partial u}\right),\end{cases}$$

che combinate colle (18) danno

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=0,\quad\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}=0,\quad\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}\right)=0$$

e dimostrano appunto che S, $\overline{S}$ si corrispondono per ortogonalità d'elementi.

§. 230.

Esempi di congruenze di Ribaucour.

Consideriamo ora alcune classi speciali notevoli di congruenze di Ribaucour.

1.° Una prima classe è data dalle congruenze isotrope (I, pag. 308). Da quanto ivi fu osservato risulta infatti: *Le congruenze isotrope sono quelle speciali congruenze di Ribaucour che hanno una sfera per superficie generatrice.* Del resto dalla prima delle (17) risulta subito, come conferma, che si ha $r = 0$ se $r_1 = r_2$.

La rappresentazione analitica delle congruenze isotrope si ottiene subito osservando che alle assintotiche della superficie media, necessariamente reali (§ 225), corrisponde sulla sfera un sistema coniugato ad invarianti eguali, cioè un sistema *ortogonale isotermo*. Viceversa, partendo da un sistema ortogonale isotermo arbitrario sulla sfera, colle formole alla fine del § 228, si troverà per quadrature la più generale congruenza isotropa, ossia la più generale deformazione infinitesima della sfera.

2.° Le congruenze di Guichard (Cap. X, § 151), le cui sviluppabili tagliano le superficie focali secondo le linee di curvatura, sono caratterizzate da questo che le immagini sferiche delle loro sviluppabili coincidono colle immagini delle assintotiche di una superficie pseudosferica; esse possono dunque ora definirsi come *quelle congruenze di Ribaucour che hanno una superficie pseudosferica per superficie generatrice.*

3.° Ad una superficie qualunque S può farsi corrispondere, per ortogonalità d'elementi, un piano $\bar{S}$ (§ 224) e la corrispondente congruenza di Ribaucour ha per superficie media il piano $\bar{S}$. Viceversa dai teoremi al § precedente risulta: *Ogni congruenza che ha per superficie media un piano è una congruenza di Ribaucour.* E infatti siccome sul piano qualunque sistema è un sistema coniugato, si può dire che le sviluppabili della congruenza tagliano la superficie media secondo un sistema coniugato. [1]

---

[1] Direttamente si vede la cosa dalle formole (18), poichè prendendo il piano medio per piano $x\,y$, sarà $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ cioè:

$$\frac{\partial \log Z}{\partial u} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \log Z}{\partial v} = \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Ne concludiamo: *Per costruire la più generale congruenza che ha per superficie media un piano, si projettino ortogonalmente i punti di una superficie arbitraria* S *sul piano e, rotata nel piano l'immagine d'un angolo retto attorno ad un punto, si conducano pei nuovi punti i raggi paralleli alle normali di* S *nei punti corrispondenti.*

Segue da queste osservazioni che projettando ortogonalmente sopra un piano le linee assintotiche di qualsiasi superficie si ottiene un sistema piano ad invarianti eguali; e viceversa ogni tale sistema piano è la projezione ortogonale delle assintotiche di una superficie.

4.° Fra le congruenze di Ribaucour sono ancora notevoli quelle *normali*. L'immagine sferica delle sviluppabili essendo in tal caso un sistema ortogonale, la superficie generatrice della congruenza avrà le linee assintotiche ortogonali e sarà quindi una superficie d'area minima. Di qui si conclude: *Le congruenze di Ribaucour normali sono tutte e sole quelle formate dalle normali delle superficie con rappresentazione isoterma delle linee di curvatura.*

Ma supponiamo di più che la superficie media della congruenza sia un piano; le superficie ortogonali ai raggi saranno le *superficie di Bonnet* per le quali i punti medii fra i due centri di curvatura giacciono in un piano. Queste superficie si ottengono dalle superficie S d'area minima applicando la costruzione sopra indicata (3.°), che dà la congruenza delle normali di una superficie di Bonnet quando la S è ad area minima.

§. 231.

Secondo metodo per la risoluzione del problema delle deformazioni infinitesime.

Vogliamo ora descrivere un secondo metodo per la ricerca delle deformazioni infinitesime, che discende molto spontaneamente dalla teoria generale delle superficie (Cap. IV) e si collega d'altronde col primo per mezzo delle superficie associate.

Riteniamo la superficie S, di cui vogliamo studiare le deformazioni infinitesime, come definita (Cap. IV) dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$
$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 .$$

In ogni deformazione infinitesima della S la prima forma rimane

invariata e i coefficienti della seconda subiscono variazioni infinitesime, che indichiamo con

$$\delta D = \varepsilon \Gamma, \quad \delta D' = \varepsilon \Gamma', \quad \delta D'' = \varepsilon \Gamma'',$$

dove ε indica una costante infinitesima e Γ, Γ', Γ'' sono tre funzioni di u, v da determinarsi. Note Γ, Γ', Γ'', la deformazione infinitesima risulta individuata a meno di un movimento e, come ora dimostreremo, la deformazione stessa si avrà con quadrature. Intanto formiamo le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare Γ, Γ', Γ'' variando l'equazione di Gauss e le equazioni di Codazzi (equazioni (III) e (IV) § 56 I, pag. 119); si ottengono così immediatamente queste condizioni sotto la forma:

$$D\Gamma'' - 2D'\Gamma' + D''\Gamma = 0 \tag{20}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Gamma + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \Gamma' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Gamma'' = 0 \\ \dfrac{\partial \Gamma''}{\partial u} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Gamma + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \Gamma' - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Gamma'' = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Queste ultime possono anche scriversi sotto la seconda forma equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} - \\ \qquad - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} - \\ \qquad - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}} = 0. \end{cases} \tag{21*}$$

Di qui risulta che le espressioni

$$\left(\frac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du + \left(\frac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv$$

e le due analoghe per y, z sono tre differenziali esatti; indicando con

x_0, y_0, z_0 gli integrali, avremo

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}.$$

Riguardando ora x_0, y_0, z_0 come coordinate di un punto nello spazio, questo punto (x_0, y_0, z_0) descriverà una superficie S_0 che diciamo essere precisamente *associata* ad S nella deformazione infinitesima considerata. E infatti dalle (22) risulta in primo luogo che S, S_0 si corrispondono per parallelismo delle normali; in secondo luogo dalle (22) si trae

$$(22^*)\qquad \begin{cases} D_0 = \dfrac{D\Gamma' - D'\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad D'_0 = \dfrac{D'\Gamma' - D''\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{D\Gamma'' - D'\Gamma}{\sqrt{EG-F^2}} \\ D''_0 = \dfrac{D'\Gamma'' - D''\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} \end{cases}$$

e quindi

$$D\,D''_0 + D''\,D_0 - 2\,D'\,D'_0 = 0\,,$$

ciò che dimostra essere S, S_0 superficie associate in una deformazione infinitesima. Che infine questa deformazione di S sia precisamente quella cui corrispondono le variazioni $\varepsilon\,\Gamma$, $\varepsilon\,\Gamma'$, $\varepsilon\,\Gamma''$ di D, D′, D″ si rileva dall'osservare che assumendo sopra S a sistema coordinato (u, v) il sistema coniugato permanente (§ 227), si avrà

$$D' = 0\,, \quad \Gamma' = 0\,,$$

indi

$$D_0 = D''_0 = 0\,,$$

cioè le (u, v) sulla S_0 saranno le assintotiche.

Così adunque, note Γ, Γ′, Γ″, si otterrà dalle (22) la superficie associata S_0 con quadrature, e calcolata quindi la funzione caratteristica

$$\varphi = \sum X x_0\,,$$

dalle (6) pag. 6 calcoleremo con quadrature la corrispondente deformazione infinitesima.

§. 232.

Applicazioni varie del secondo metodo.

Applichiamo le formole del § precedente alla risoluzione di alcune questioni particolari.

1.° Se trattiamo nuovamente, col nuovo metodo, il problema delle deformazioni infinitesime di una sfera, vediamo che, essendo in tal caso D, D′, D″ proporzionali, per un fattore costante, ad E, F, G, le (20), (21) esprimono che

$$(\alpha) \qquad \Gamma\, du^2 + 2\,\Gamma'\, du\, dv + \Gamma''\, dv^2$$

appartiene, come seconda forma fondamentale, ad una superficie d'area minima, di cui

$$(\beta) \qquad E\, du^2 + 2\,F\, du\, dv + G\, dv^2$$

sia la *terza forma fondamentale*.

Viceversa, presa una superficie d'area minima arbitraria della quale (α), (β) siano la seconda e terza forma fondamentale, le formole (22) ci danno per quadrature la più generale superficie associata alla sfera, che è alla sua volta una seconda superficie ad area minima, corrispondente inoltre per ortogonalità d'elementi alla primitiva.

2.° Riprendiamo ancora il problema già risoluto al § 227. *È possibile dare ad una superficie* S *una deformazione infinitesima che conservi coniugato un sistema* (u, v) *attualmente coniugato?* Preso (u, v) per sistema coordinato, avremo per ipotesi

$$D' = 0 \quad \Gamma' = 0\,,$$

indi dalla (20)

$$\Gamma = \lambda D, \quad \Gamma'' = -\lambda D''\,,$$

essendo λ un conveniente fattore di proporzionalità. Le (21), osservando che D, D″ soddisfano alle equazioni di Codazzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} D - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} D'' \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} D'' - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} D\,, \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE Bibliothèque

diventano

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = 2\frac{D}{D''}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}, \quad \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = 2\,\frac{D''}{D}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\},$$

ovvero per le (25) § 78 (I, pag. 167)

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = -2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}', \quad \frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = -2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}',$$

gli accenti indicando che i relativi simboli di Christoffel sono costruiti per l'elemento lineare sferico di S. Dunque la deformazione supposta

è possibile solo quando sia soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}',$$

ciò che da nuovamente il teorema del § 227.

3.° Ricerchiamo le deformazioni infinitesime di una superficie rigata, della quale supponiamo dapprima siano note le assintotiche curvilinee. Prendendo per linee coordinate $v =$ costante le generatrici e per linee $u =$ costante le altre assintotiche, avremo

$$D = 0\ ,\quad D'' = 0\ ,\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0\ .$$

La (20) dà $\Gamma'' = 0$ e le (21) diventano

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Gamma = 0$$

$$\frac{\partial \Gamma''}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\Gamma - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Gamma'' = 0;$$

con una quadratura rispetto a v si integrerà la prima e con due altre quadrature rispetto ad u la seconda. Dunque: *Per una superficie rigata, di cui siano note le linee assintotiche, si determina con quadrature la più generale deformazione infinitesima.*

Ciò vale in particolare per ogni quadrica, essendo una superficie doppiamente rigata.

Osserviamo poi che quando di una rigata non siano note le linee assintotiche esse si determinano integrando un'equazione di Riccati (I, pag. 258) e quindi la soluzione del problema delle deformazioni infinitesime per la più generale rigata si ottiene integrando un'equazione di Riccati e con successive quadrature.

§. 233.

Le superficie a linee di curvatura isoterme.

Facciamo ancora un'applicazione del secondo metodo, che conduce ad una bella proposizione di Christoffel relativa alle superficie con linee di curvatura isoterme. Proponiamoci per ciò la questione seguente: *Può una superficie* S *ricevere una deformazione infinitesima nella quale non varino singolarmente i due raggi principali di curvatura?* Poichè, in qualsiasi deformazione, la curvatura totale non varia basterà aggiungere

la condizione che non varii nemmeno la curvatura media. Prendendo a linee coordinate sopra S le linee u, v di curvatura, la condizione ora accennata diventa

$$E\,\Gamma'' + G\,\Gamma = 0\,,$$

che combinata colla (20)

$$\frac{E}{r_2}\,\Gamma'' + \frac{G}{r_1}\,\Gamma = 0\,,$$

escludendo il caso della sfera, dà

$$\Gamma = \Gamma'' = 0\,.$$

Ma allora le (21*) diventano

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\log\left(\dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG}}\right) = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\dfrac{\partial \log G}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\log\left(\dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG}}\right) = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\dfrac{\partial \log E}{\partial v}\,, \end{cases}$$

dalle quali si trae la condizione necessaria e sufficiente richiesta sotto la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\left(\frac{E}{G}\right) = 0\,;$$

questa esprime che le linee di curvatura (u, v) formano un sistema isotermo.

Supposto che la superficie S soddisfi a questa condizione, potremo scriverne il ds^2, riferito alle linee di curvatura, sotto la forma

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2)\,.$$

Esaminiamo ora, secondo le formole (22), quale sarà la superficie S_0 associata ad S nella deformazione infinitesima considerata. Dalle (23) si ha subito $\Gamma' =$ costante e sostituendo a S_0 una superficie omotetica, potremo fare $\Gamma' = 1$, dopo di che le (22) (essendo $\Gamma = \Gamma'' = 0$) danno

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\,;$$

queste dimostrano in primo luogo che le linee di curvatura si corrispondono sopra S, S_0 ed i raggi di curvatura della S_0 sono dati da

$$\rho_1 = -\frac{r_1}{\lambda}\,,\quad \rho_2 = \frac{r_2}{\lambda}\,.$$

Poichè inoltre

$$ds_0^2 = \frac{1}{\lambda}(du^2 + dv^2)$$

la rappresentazione di S sopra S_0 è conforme. Abbiamo dunque il teorema di Christoffel: *Ad ogni superficie* S *a linee di curvatura isoterme se ne coordina una seconda (associata)* S_0, *determinabile con quadrature, che corrisponde in rappresentazione conforme alla* S *per parallelismo di normali.* Christoffel è arrivato al risultato precedente, proponendosi di risolvere in generale il problema: *Per quali coppie di superficie, che si corrispondono per parallelismo di normali, ha luogo rappresentazione conforme?* Egli ha dimostrato che, prescindendo dalla soluzione ovvia di una coppia di superficie omotetiche e dall'altra che le due superficie siano ambedue ad area minima, nel qual caso la rappresentazione è sempre conforme (I, pag. 149), le due superficie sono necessariamente a linee di curvatura isoterme e nella relazione sopra studiata.

§. 234.

Teorema di Christoffel e criterio di Weingarten.

Stabiliamo rapidamente questo teorema di Christoffel nel modo seguente. Sia S, S_0 una coppia di superficie soddisfacente al problema e siano

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$
$$ds_0^2 = E_0\,du_0^2 + G_0\,dv_0^2$$

i loro elementi lineari riferiti alle rispettive linee di curvatura. Dimostriamo dapprima che *necessariamente le linee di curvatura si corrisponderanno sopra* S, S_0. Indicando infatti con

$$r_1, r_2\,;\quad \rho_1, \rho_2$$

i rispettivi raggi principali di curvatura di S, S_0, saranno

$$ds'^2 = \frac{E}{r_2^2}du^2 + \frac{G}{r_1^2}dv^2$$
$$ds_0'^2 = \frac{E_0}{\rho_2^2}du_0^2 + \frac{G_0}{\rho_1^2}dv_0^2$$

i rispettivi elementi lineari sferici. Per ipotesi le formole di rappresentazione conforme di S_0 sopra S:

$$u_0 = u_0(u, v)\ ,\quad v_0 = v_0(u, v)$$

trasformano ds'_0 in ds', e ds_0 in un elemento proporzionale a ds; deve

dunque aversi simultaneamente

$$\begin{cases} \frac{E_0}{\rho_1^2}\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial v} + \frac{G_0}{\rho_1^2}\frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} = 0 \\ E_0\frac{\partial u_0}{\partial v}\frac{\partial u_0}{\partial v} + G_0\frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} = 0 . \end{cases}$$

Se supponiamo $\rho_1^2 \neq \rho_2^2$, si ha quindi necessariamente

$$\frac{\partial u_0}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial v} = 0 , \quad \frac{\partial v_0}{\partial u}\frac{\partial v_0}{\partial v} = 0 ,$$

cioè: *le linee di curvatura si corrispondono sopra* S, S_0. Nel caso escluso $\rho_1^2 = \rho_2^2$ la superficie S_0 è una sfera, ovvero una superficie ad area minima. Il primo caso non fa veramente eccezione al risultato ultimamente conseguito, poichè sulla sfera qualunque sistema ortogonale può considerarsi come di linee di curvatura. Resta dunque unicamente escluso il caso in cui S, S_0 siano ambedue ad area minima; allora effettivamente la rappresentazione di S sopra S_0 è conforme, senza che si corrispondano le linee di curvatura.

Intendiamo escluso questo caso e riferiamo S, S_0 alle linee di curvatura corrispondenti u, v; avremo relazioni della forma

$$\begin{cases} \frac{\partial x_0}{\partial u} = \lambda\frac{\partial x}{\partial u} , \quad \frac{\partial y_0}{\partial u} = \lambda\frac{\partial y}{\partial u} , \quad \frac{\partial z_0}{\partial u} = \lambda\frac{\partial z}{\partial u} , \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} = \mu\frac{\partial x}{\partial v} , \quad \frac{\partial y_0}{\partial v} = \mu\frac{\partial y}{\partial v} , \quad \frac{\partial z_0}{\partial v} = \mu\frac{\partial z}{\partial v} , \end{cases}$$

essendo λ, μ funzioni di u, v. Ma, poichè, per ipotesi, $E_0 : G_0 = E : G$, avremo $\mu^2 = \lambda^2$ e quindi $\mu = \pm\lambda$. Se vale il segno superiore, dalla condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

segue

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0 , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 0 , \quad \lambda = \text{costante}$$

e le due superficie S, S_0 sono *omotetiche*. Nel secondo caso $\mu = -\lambda$, si ha

$$D_0 = \lambda D , \quad D'_0 = 0, , \quad D''_0 = -\lambda D''$$

e quindi

$$D D''_0 + D'' D_0 - 2 D' D'_0 = 0 ,$$

cioè S, S_0 sono associate e dalle (22), essendo qui evidentemente $\Gamma = \Gamma^{(v)} = 0$,

risulta che S, S_0 formano una coppia di superficie *isotermiche* [1] associate. Le considerazioni del § 233 conducono anche facilmente a stabilire un criterio per riconoscere se una superficie *data* S appartiene alla classe delle superficie isotermiche e ad altri risultati dovuti a Weingarten [2]. Definita ad esempio la superficie S dalle sue due forme fondamentali

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

la superficie sarà isotermica se potremo determinare Γ, Γ', Γ'' in guisa da soddisfare le (20), (21) ed inoltre l'altra

$$EF'' - 2F\Gamma' + G\Gamma = 0\ .$$

Ma da questa, associata alla (20), si trae

$$F = \mu(ED' - FD),\ 2\Gamma' = \mu(ED'' - GD),\ \Gamma'' = \mu(FD'' - GD'),$$

indicando con μ un fattore di proporzionalità. Introducendo questi valori di Γ, Γ', Γ'' nelle (21), ne dedurremo

$$\frac{\partial \log\mu}{\partial u} = \alpha\ ,\quad \frac{\partial \log\mu}{\partial v} = \beta,$$

essendo α, β funzioni note di u, v, onde la richiesta condizione d'isotermìa sarà

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{\partial\beta}{\partial u}\ . \tag{23}$$

Di qui segue subito il risultato di Weingarten: *La classe delle superficie isotermiche è definita da un'equazione alle derivate parziali quarte.* E infatti, se indichiamo con $z = z(x, y)$ l'ordinaria equazione della nostra superficie S, abbiamo colle solite notazioni di Monge

$$E = 1 + p^2\ ,\quad F = pq\ ,\quad G = 1 + q^2$$

$$D = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad D' = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,$$

onde la (23) si traduce appunto in una equazione alle derivate parziali quarte per z, che è inoltre lineare rispetto alle derivate del più alto ordine.

---

[1] Per brevità si indica col nome di isotermica una superficie a linee di curvatura isoterme.

[2] Sitzungsberichte der Berliner Akademie, t. II, 1883, pag. 1163.

Ora osserviamo che, quando la S è isotermica, la forma quadratica

$$\Gamma' du^2 + 2\,\Gamma' du\,dv + \Gamma'' dv^2 ,$$

i cui coefficienti si calcolano, come si è visto, con quadrature, è a curvatura nulla. Se si calcola infatti la detta forma quadratica nei parametri isometrici α, β delle linee di curvatura, si ha pel § 233

$$\Gamma du^2 + 2\,\Gamma' du\,dv + \Gamma'' dv^2 = \sigma\, d\alpha\, d\beta ,$$

essendo σ costante. Basta ora rammentare il risultato del Cap. II § 37 (I, pag. 79) per dedurne il teorema di Weingarten:

Sopra una superficie isotermica nota le linee di curvatura si determinano con quadrature.

§. 235.

Cenno sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.

Il secondo metodo, descritto nei §§ precedenti, per la ricerca delle deformazioni infinitesime sta in una notevole relazione col problema dell'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, come fu trattato particolarmente da Lecornu [1] e Beltrami [2] in due memorie fondamentali. Vogliamo qui indicare brevemente queste relazioni, supponendo note le equazioni fondamentali dell'equilibrio sotto la forma stabilita da Beltrami.

Se riprendiamo le equazioni (20), (21) per la ricerca delle deformazioni infinitesime, vediamo che esse coincidono precisamente, mutate le notazioni, colle equazioni *indefinite* per l'equilibrio al § 4 della citata memoria, allorquando si suppongano nulle le forze esterne sollecitanti i punti dell'interno della superficie ed il pezzo considerato di superficie si mantenga quindi in equilibrio sotto l'azione di sole tensioni (tangenziali) al contorno. Basta porre infatti

$$\Gamma = \nu\sqrt{EG - F^2} , \quad \Gamma' = -\mu\sqrt{EG - F^2} , \quad \Gamma'' = \lambda\sqrt{EG - F^2}$$

per cangiare le (20), (21) nelle indicate equazioni di Beltrami, ove si faccia $U = V = W = 0$.

Si ha così il singolare teorema osservato da Lecornu (l. c. pag. 24):

---

[1] *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextendibles.* — Journal de l'École Polytechnique t. XXIX, 1880.

[2] *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.* — Memorie dell'Accademia di Bologna. — Serie IV, t. III (1882).

Uno stato d'equilibrio di un pezzo di superficie flessibile ed inestendibile soggetto a sole forze (esterne) tangenziali al contorno, individua una particolare deformazione infinitesima della superficie stessa. Lo studio della distribuzione delle tensioni sulla superficie equilibrata (Beltrami § 7) rende ragione di questo risultato. L'elemento lineare ds della superficie, spiccato dal punto (u, v) al punto $(u+du, v+dv)$, è soggetto ad una tensione diretta secondo l'elemento lineare δs, che va dal punto (u, v) al punto $(u+\delta u, v+\delta v)$, la posizione scambievole dei due elementi essendo individuata dalla relazione

$$\Gamma\, du\, \delta u + \Gamma'\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \Gamma''\, dv\, \delta v = 0. \tag{24}$$

Tale relazione è evidentemente simmetrica, e i due elementi lineari si dicono *coniugati rispetto alle tensioni*. Si osserverà che due elementi coniugati nel senso di Dupin non lo sono in generale *staticamente* (nel senso delle tensioni); perchè questa coincidenza avesse costantemente luogo si richiederebbe invero la proporzionalità

$$\Gamma : \Gamma' : \Gamma'' = D : D' : D''$$

e per la (20) la superficie sarebbe sviluppabile. Però vi ha un doppio sistema di linee (reale od immaginario) che è coniugato insieme staticamente e nel senso di Dupin; sono queste le linee integrali dell'equazione (I, pag. 83):

$$\begin{vmatrix} D\, du + D'\, dv & D'\, du + D''\, dv \\ \Gamma\, du + \Gamma'\, dv & \Gamma'\, du + \Gamma''\, dv \end{vmatrix} = 0.$$

Se queste linee sono reali, assumendole a linee coordinate (u, v) si ha insieme

$$D' = 0\ , \quad \Gamma' = 0$$

e nella deformazione infinitesima di S corrispondente, secondo il teorema superiore, al supposto stato di equilibrio questo sistema coniugato si conserva coniugato. Dunque: *La deformazione infinitesima, individuata dal supposto stato d'equilibrio della superficie flessibile ed inestendibile, è quella nella quale il sistema coniugato ad un tempo staticamente e nel senso di Dupin si conserva coniugato.*

Quando due elementi lineari, staticamente coniugati, sono coincidenti si deve avere per la (24)

$$\Gamma\, du^2 + 2\,\Gamma'\, du\, dv + \Gamma''\, dv^2 = 0\,.$$

Le linee integrali di questa equazione differenziale sono quindi sog-

gette in ogni loro punto a sola tensione tangenziale. Se si suppongono reali e distinte, cioè $\Gamma'^2 - \Gamma\,\Gamma'' > 0$, assumendole a linee coordinate si avrà

$$\Gamma = \Gamma'' = 0$$

e quindi, per la (20) pag. 23: $D' = 0$. Ma allora le (21*) diventano

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\Gamma'}{\sqrt{EG-F^2}} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$$

e dimostrano che nel sistema coniugato (u, v) risulta

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}.$$

Di qui vediamo che: *Sopra un pezzo di superficie flessibile ed inestendibile equilibrata, sotto l'azione di forze tangenziali al contorno, le linee soggette a sola tensione tangenziale tracciano un sistema coniugato ad invarianti eguali.*

In particolare se il doppio sistema di linee soggetto a sole tensioni tangenziali è ortogonale, esso coincide colle linee di curvatura e la superficie è isotermica.

Le linee soggette a sola tensione tangenziale sono definite, rispetto alla deformazione infinitesima, da questo che esse formano il sistema coniugato comune alla superficie S ed alla sua associata S_0. Poichè infatti, essendo $\Gamma = \Gamma'' = 0$, $D' = 0$, dalla media delle (22*) segue $D'_0 = 0$; e viceversa se si ha $D' = 0$, $D'_0 = 0$ ne segue $\Gamma = \Gamma'' = 0$.

Ora osserviamo che, preso questo sistema (u, v) a sistema coordinato, le (22) si scrivono

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = r\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -r\frac{\partial x}{\partial v};$$

queste possono porsi sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_0 - r\,x}{1-r}\right) = \lambda(x_0 - x),\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_0 - r\,y}{1-r}\right) = \lambda(y_0 - y),\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_0 - r\,z}{1-r}\right) = \lambda(z_0 - z)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_0 + r\,x}{1+r}\right) = \mu(x_0 - x),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{y_0 + r\,y}{1+r}\right) = \mu(y_0 - y),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{z_0 + r\,z}{1+r}\right) = \mu(z_0 - z),$$

indicando λ, μ fattori di proporzionalità. Esse ci dimostrano che la congruenza formata dalle congiungenti le coppie di punti corrispondenti

$P \equiv (x, y, z)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di due superficie S, S_0 associate ha per sviluppabili le u, v, e sopra ogni raggio i fuochi, avendo le coordinate

$$\frac{x_0 - rx}{1-r}, \frac{y_0 - ry}{1-r}, \frac{z_0 - rz}{1-r}$$

$$\frac{x_0 + rx}{1+r}, \frac{y_0 + ry}{1+r}, \frac{z_0 + rz}{1+r},$$

dividono armonicamente il segmento PP_0 Dunque: *Le sviluppabili della congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti* P, P_0 *di due superficie associate* S, S_0 *tagliano ciascuna di queste superficie secondo un sistema coniugato ad invarianti eguali; sopra ogni raggio i fuochi dividono armonicamente il segmento* PP_0.

§. 236.

Coppie di rigate applicabili dedotte da una coppia nota di superficie applicabili.

Già al principio del presente capitolo abbiamo notato che il problema delle deformazioni infinitesime si può presentare sotto l'aspetto finito della *determinazione delle coppie di superficie applicabili*. Ora riprendiamo questo studio, limitandoci per altro alla deduzione di alcune proprietà fondamentali e rimandando il lettore, che voglia approfondire l'argomento, al Cap. VI del Libro VIII delle *Leçons* di Darboux (IV, pag. 111).

Abbiasi una coppia qualunque Σ, Σ_1 di superficie applicabili, che riterremo definite dalla loro prima forma fondamentale comune

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e dalle due rispettive seconde forme fondamentali, che indicheremo con

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

$$D_1\,du^2 + 2D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2. \text{ (1)}$$

Immaginiamo di tener fissa nello spazio una delle due superficie, p. e. Σ, e di muovere l'altra Σ_1 sì da porla in contatto con Σ, per una coppia qualsiasi P, P_1 di punti corrispondenti, e per tal modo che le

(1) Si osservi che la relazione d'applicabilità stabilisce anche la corrispondenza delle faccie delle due superficie, e le due pagine positive di Σ, Σ_1 si assumeranno come corrispondenti. In conseguenza, fissati i segni di D, D', D'', lo sono anche quelli di D_1, D'_1, D''_1.

direzioni di Σ_1 uscenti da P_1 coincidano colle omologhe di Σ uscenti da P. La superficie Σ_1 acquisterà così una doppia infinità di posizioni, e noi diremo allora che *la superficie* Σ_1 *rotola sulla superficie applicabile* Σ.

Per studiare le proprietà fondamentali di siffatto rotolamento, cominciamo dal risolvere la questione preliminare seguente:

Consideriamo una coppia qualunque C, C_1 di curve corrispondenti sopra Σ, Σ_1 e tirando per ciascun punto di C una conveniente tangente di Σ, formiamo una superficie rigata R circoscritta a Σ lungo C. Per la legge di corrispondenza dei punti di Σ, Σ_1 verrà fissata una corrispondente rigata R_1 circoscritta a Σ_1 lungo C_1 e noi domandiamo: *Come deve essere scelta la rigata* R *affinchè risulti applicabile sulla corrispondente* R_1, *in guisa che* C, C_1 *si sovrappongano per punti corrispondenti?*

Conviene innanzi tutto calcolare l'elemento lineare della rigata R, per il che assumiamo sopra R le coordinate curvilinee α, β definite nel modo seguente (Cf. Cap. VIII, § 116). Prendiamo per α l'arco di C, contato da un suo punto fisso, per β il tratto di generatrice della R a partire dal corrispondente punto d'incontro con C; se indichiamo col simbolo δ gli accrescimenti nel senso della generatrice, per i coseni di direzione l, m, n della generatrice avremo

$$l = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s}$$

e analogamente per m, n. Lungo C saranno x, y, z, l, m, n, funzioni di α e per l'elemento lineare di R si avrà (I, pag. 254):

$$ds^2 = d\beta^2 + 2\cos\theta\, d\alpha\, d\beta + (M^2\beta^2 + 2N\beta + 1)\, d\alpha^2$$

essendo M, N, $\cos\theta$ funzioni di α definite dalle formole:

$$M^2 = \left(\frac{dl}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dn}{d\alpha}\right)^2$$

$$N = \frac{dx}{d\alpha}\frac{dl}{d\alpha} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dm}{d\alpha} + \frac{dz}{d\alpha}\frac{dn}{d\alpha}$$

$$\cos\theta = l\frac{dx}{d\alpha} + m\frac{dy}{d\alpha} + n\frac{dz}{d\alpha}.$$

Ora si ha

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{d\alpha} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{d\alpha}$$

e dalle formole fondamentali della teoria delle superficie (I pag. 116)

risulta

$$\frac{dl}{d\alpha} = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} +$$

$$+ \left[D\frac{du}{d\alpha}\frac{\delta u}{\delta s} + D'\left(\frac{du}{d\alpha}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + D''\frac{dv}{d\alpha}\frac{\delta v}{\delta s}\right] X$$

e le analoghe per m, n cangiando x, X in y, Y, indi in s, Z, *dove* A, B *sono indipendenti da* D, D′, D″, e rimangono quindi le stesse comunque flettendo la superficie Σ. Risulta di qui che N e cos θ dipendono unicamente dall'elemento lineare di Σ, mentre in M^2 la parte dipendente dalla seconda forma fondamentale è data da

$$\left\{D\frac{du}{d\alpha}\frac{\delta u}{\delta s} + D'\left(\frac{du}{d\alpha}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + D''\frac{dv}{d\alpha}\frac{\delta v}{\delta s}\right\}^2 .$$

Adunque perchè la R_1 sia applicabile sulla R è necessario e sufficiente che si abbia

$$(\alpha)\quad (D_1 \mp D)\,du\,\delta u + (D'_1 \mp D')\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + (D''_1 \mp D'')\,dv\,\delta v = 0 .$$

Il significato del doppio segno facilmente si rileva da considerazioni di continuità. Colla scelta del segno superiore le due faccie corrispondenti per le applicabilità sopra R, R_1 sono le omologhe delle corrispondenti sopra Σ, Σ_1; colla scelta dei segni inferiori viene invertita una delle faccie. Per convincersene basta osservare il caso limite

$$D_1 = D\ ,\quad D'_1 = D'\ ,\quad D''_1 = D''\ ,$$

ove Σ, Σ_1 sono direttamente congruenti e la scelta dei segni superiori rende identica la precedente equazione (α), mentre evidentemente due rigate qualunque corrispondenti R, R_1 sono pure direttamente congruenti. La scelta dei segni inferiori equivale a cangiare D_1, D'_1, D''_1 in $-D_1$, $-D'_1$, $-D''_1$ ossia a sostituire allà Σ_1 la simmetrica, p. e. rispetto alla origine.

§. 237.

Direzioni cinematicamente coniugate.

Scelti i segni superiori nella (α), la relazione

$$(25)\quad (D_1 - D)\,du\,\delta u + (D'_1 - D')\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + (D''_1 - D'')\,du\,\delta v = 0$$

coordina ad ogni elemento lineare *ds* di Σ un secondo elemento δs, in

relazione involutoria col primo, che diremo (per una ragione che apparirà subito) *cinematicamente* coniugato al primo. [1]

La questione proposta risulta così risoluta dalla costruzione seguente: *Tracciata una curva arbitraria* C *sopra* Σ, *si circoscriva a* Σ *lungo* C *la rigata* R, *le cui generatrici hanno le direzioni cinematicamente coniugate alle tangenti di* C; *la rigata* R *sarà applicabile sulla corrispondente rigata* R_1, *con conservazione delle facce omologhe rispetto a* Σ, Σ_1.

Così la conoscenza di una coppia di superficie applicabili trae seco, senza alcuna integrazione, la conoscenza di infinite coppie di superficie *rigate* applicabili.

Se il rotolamento di Σ_1 sopra Σ si eseguisce facendo rotolare C_1 sopra C, per l'applicabilità diretta di R_1 sopra R, è chiaro che la prima rigata rotolerà sulla seconda e ad ogni momento l'asse istantaneo di rotazione coinciderà colla generatrice comune di R, R_1. Così adunque: *Quando una superficie* Σ_1 *rotola sopra una superficie applicabile* Σ, *l'asse istantaneo di rotazione è diretto nel piano tangente comune a* Σ, Σ_1 *ed ha la direzione cinematicamente coniugata a quella dello spostamento del centro istantaneo.*

Confrontiamo ora le direzioni cinematicamente coniugate: 1.° colle direzioni coniugate nel senso di Dupin, 2.° colle direzioni ortogonali, ciò che dà luogo ai risultati seguenti:

1.° Se due direzioni sono cinematicamente coniugate, e coniugate inoltre nel senso di Dupin rispetto ad una delle due superficie, sia Σ, tali sono anche rispetto alla seconda Σ_1. E invero sussistendo la (25) insieme con

$$D\,du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''\,dv\,\delta v = 0\,,$$

si ha anche:

$$D_1\,du\,\delta u + D'_1(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D''_1\,dv\,\delta v = 0\,.$$

Vi ha un doppio sistema (reale od immaginario) coniugato comune a Σ, Σ_1 nel senso di Dupin e quindi anche cinematicamente coniugato. Indeterminazione di questo sistema ha luogo soltanto quando

$$D_1 : D'_1 : D''_1 = D : D' : D''$$

cioè (essendo $D_1 D''_1 - D'^2_1 = D D'' - D'^2$) quando

$$D_1 = \pm D\,, \quad D'_1 = \pm D'\,, \quad D''_1 = \pm D''$$

---

[1] L'opportuna denominazione è tolta da una nota del BELTRAMI: *Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido*. Giornale di Battaglini 1872.

Se si suppone Σ_1 deformata infinitesima di Σ, le direzioni cinematicamente coniugate coincidono con quelle, che al § 235 abbiamo chiamate staticamente coniugate.

e allora le due superficie sono direttamente od inversamente congruenti.

2.° Attorno ad ogni punto vi è una ed *in generale* una sola coppia, sempre reale, di direzioni ortogonali e cinematicamente coniugate; esiste cioè un solo doppio sistema ortogonale e cinematicamente coniugato. Le linee corrispondenti sono (Cap. II, § 39) le linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} (D_1 - D)\,du + (D'_1 - D')\,dv\ , & (D'_1 - D')\,du + (D''_1 - D'')\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0\ .$$

Ma vi ha un caso molto notevole di coppie di superficie applicabili, nelle quali a qualsiasi direzione è cinematicamente coniugata la direzione ortogonale. Perchè ciò accada è necessario e sufficiente che sussista la proporzione

$$D_1 - D : D'_1 - D' : D''_1 - D'' = E : F : G\ ,$$

ossia che si abbia

$$D_1 = D + \lambda E\ ,\quad D'_1 = D' + \lambda F\ ,\quad D''_1 = D'' + \lambda G\ , \tag{26}$$

essendo λ un fattore di proporzionalità.

Ma se sostituiamo questi valori di D_1, D'_1, D''_1 nelle equazioni di Codazzi, rammentando che a queste equazioni soddisfa tanto la terna D, D', D'' come E, F, G, ne deduciamo subito le equazioni

$$E\frac{\partial\lambda}{\partial v} - F\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0$$

$$F\frac{\partial\lambda}{\partial v} - G\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0\ ,$$

onde λ deve essere una costante. Di più dobbiamo avere per l'equazione di Gauss

$$D_1 D''_1 - D'^2_1 = D D'' - D'^2\ ,$$

e quindi

$$\lambda = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}\ .$$

Il secondo membro è la curvatura media H della superficie Σ, che deve dunque essere *costante*. Viceversa, essendo Σ una superficie a curvatura media costante H, le formole $D_1 = D + HE$, $D'_1 = D' + HF$, $D'_1 = D'' + HG$ danno valori di D, D', D'' che soddisfano alle equazioni di Gauss e di Codazzi ed appartengono quindi come coefficienti della seconda forma

fondamentale, ad una seconda superficie Σ_1 applicabile sulla Σ; questa è alla sua volta a curvatura media costante $-H$. Si vede subito che sulle due superficie si corrispondono, nell'applicabilità, le linee di curvatura e i raggi di curvatura dell'una, cangiati di segno, sono eguali a quelli dell'altra permutati. Abbiamo così stabilito il teorema:

Ogni superficie a curvatura media costante (non nulla) ne determina una seconda, applicabile sulla prima con conservazione delle linee di curvatura ed inversione dei raggi principali di curvatura. Queste coppie di superficie applicabili offrono la proprietà caratteristica che sopra di esse tutte le coppie di direzioni ortogonali sono altresì cinematicamente coniugate.

§. 238.

Doppio sistema di linee cinematicamente autoconiugate.

Ritornando al caso generale di due superficie applicabili, osserviamo che una direzione sarà cinematicamente coniugata a sè stessa quando si abbia

$$(27) \qquad (D_1 - D)\,du^2 + 2\,(D'_1 - D')\,du\,dv + (D''_1 - D'')\,dv^2 = 0\,.$$

Le linee integrali di questa equazione differenziale formeranno dunque un doppio sistema, reale od immaginario, di linee cinematicamente autoconiugate. Se si rammenta il significato fondamentale del quoziente

$$\frac{D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

delle due forme fondamentali (Cap. IV, § 61), si può dire che le linee definite dalla equazione differenziale (27) hanno la proprietà caratteristica di avere sopra Σ e Σ_1 le loro curvature normali *eguali e dello stesso segno*, e conseguentemente eguali anche le curvature assolute. Che se, prescindendo dal segno, domandiamo solo le linee che sopra Σ, Σ_1 abbiano eguali in valore assoluto le prime curvature, vediamo che, oltre le linee integrali della (27), soddisfano a tale condizione tutte e sole le linee integrali dell'altra

$$(27^*) \qquad (D_1 + D)\,du^2 + 2\,(D'_1 + D')\,du\,dv + (D''_1 + D'')\,dv^2 = 0\,.$$

Le linee integrali della (27) possono essere reali od immaginarie, ma nel secondo caso saranno certamente reali, secondo un'osservazione di Voss,[1] le linee integrali della (27*), ciò che Voss dimostra nel modo

[1] *Ueber isometrische Flächen*, Math. Annalen Bd. 46.

seguente. Indicando con Δ, Δ_1 i discriminanti delle (27) (27*);

$$\Delta = (D'_1 - D')^2 - (D''_1 - D'')(D_1 - D)$$
$$\Delta' = (D'_1 + D')^2 - (D''_1 + D'')(D_1 + D),$$

abbiamo

$$\Delta = (D D''_1 + D'' D_1 - 2 D'_1 D') - 2 K (E G - F^2)$$
$$\Delta' = -(D D''_1 + D'' D_1 - 2 D'_1 D') - 2 K (E G - F^2),$$

essendo K la curvatura comune di Σ, Σ'; di qui si trae

$$\Delta + \Delta' = -2 K (E G - F^2).$$

Dunque se la curvatura K è *negativa*, uno almeno dei due discriminanti Δ, Δ_1 è positivo (non nullo), e quindi: *le linee integrali di una almeno delle due equazioni* (27), (27*) *sono reali e distinte.*

Quando sia K positiva, cioè ambedue le seconde forme di Σ, Σ_1 siano definite, l'equazione

$$\begin{vmatrix} D - \rho D_1 & D' - \rho D'_1 \\ D' - \rho D'_1 & D'' - \rho D''_1 \end{vmatrix} = 0$$

ha le radici reali, e per ciò il suo discriminante

$$(D D''_1 + D'' D_1 - 2 D'_1 D')^2 - 4 K^2 (E G - F^2)^2 = -\Delta \Delta'$$

è certamente positivo o nullo. Nel primo caso Δ, Δ' hanno segno contrario, onde le linee integrali di una delle due equazioni (27), (27*) sono reali e distinte, quelle dell'altra immaginarie. Il secondo caso si esclude subito perchè, se supponiamo p. e. $\Delta = 0$, le linee integrali della (27) sarebbero reali e coincidenti, ed assumendole per linee coordinate $v =$ costante avremo

$$D_1 = D$$

e quindi, a causa di $\Delta = 0$, anche $D'_1 = D'$, dopo di che da

$$D_1 D''_1 - D'^2_1 = D D'' - D'^2,$$

essendo necessariamente $D \neq 0$ perchè $K > 0$, segue infine $D''_1 = D''$ e le due superficie Σ, Σ_1 sono allora direttamente congruenti. [1]

Assumendo a linee coordinate (u, v) le linee integrali della (27) o (27*), ridurremo le due seconde forme fondamentali di Σ, Σ_1 ad offrire l'uno

---

[1] Rimandiamo pel caso $K = 0$ alla citata memoria di Voss.

o l'altro dei due casi seguenti

$$(a)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \\ \mathrm{D}\,du^2 - 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,dv\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 \\ -\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv - \mathrm{D}''\,dv^2 \end{cases}$$

§. 239.

Sistema coniugato che si conserva coniugato in una deformazione finita.

Termineremo il presente capitolo col trattare per le deformazioni *finite* il problema che già al § 227 abbiamo risoluto per le deformazioni infinitesime e cioè la questione seguente:

Data una superficie Σ, *e sopra di essa un sistema coniugato* (u, v), *riconoscere se esiste una superficie* Σ_1 *applicabile sopra* Σ, *nella quale il sistema* (u, v) *si conservi coniugato.*

Dobbiamo qui avere

$$\mathrm{D}' = 0\ ,\quad \mathrm{D}'_1 = 0$$

$$\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' = \mathrm{D}_1\,\mathrm{D}''_1$$

e per ciò

$$\mathrm{D}_1 = \lambda\,\mathrm{D}\ ,\quad \mathrm{D}''_1 = \frac{\mathrm{D}''}{\lambda}\ ,$$

essendo λ una conveniente funzione di u, v. Ora D, D'' soddisfano alle equazioni di Codazzi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{D}}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{D}'' - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{D} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{D} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{D}'' = 0\,, \end{cases}$$

e alle medesime equazioni dovranno soddisfare $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}''_1$, ciò che dà per λ il sistema simultaneo

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\,,\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\,.$$

Queste, ricordando le relazioni (I pag. 167)

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''} = -\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\,,\qquad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}} = -\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\,,$$

dove gli accenti si riferiscono ai simboli di Christoffel calcolati per l'elemento lineare sferico di Σ, possono scriversi:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'\left(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right) \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left(\dfrac{1}{\lambda} - \lambda\right), \end{cases}$$

e nella compatibilità di queste equazioni è contenuta la condizione necessaria e sufficiente per la esistenza della cercata deformazione. Ora il sistema (28), col cangiamento di funzione incognita

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu},$$

si riduce al sistema lineare

$$(29)\qquad \frac{\partial \nu}{\partial u} = 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'(\nu+1), \quad \frac{\partial \nu}{\partial v} = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\nu.$$

La condizione d'integrabilità ci dà

$$(29^*)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\right]\nu = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}',$$

e se supponiamo dapprima

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' \neq 0,$$

avremo un unico valore di ν, il quale dovra inoltre soddisfare alle (29) perchè la superficie Σ sia deformabile nel modo voluto. Se poi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}',$$

il problema sarà possibile quando sia nullo anche il secondo membro della (29*), cioè quando si abbia

$$(30)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'.$$

Ma allora il sistema (29) è illimitatamente integrabile e la superficie Σ ammetterà una serie continua, con un parametro, di deformazioni nelle quali il sistema (u, v) si conserva coniugato. Studieremo più da vicino, nel prossimo capitolo, questo caso molto interessante. Per ora

limitiamoci all'osservazione seguente, che riesce di immediata evidenza se si bada che nelle (29) figurano solo i simboli di Christoffel per l'elemento lineare sferico: *La possibilità, o meno, di flettere una superficie* Σ *in guisa da conservare coniugato un sistema attualmente coniugato dipende unicamente dall'immagine sferica di questo sistema.* [1] In altre parole, se la superficie Σ ammette una tale deformazione, qualunque altra superficie $\overline{\Sigma}$ avente la medesima immagine sferica del sistema coniugato (u, v) ammetterà una deformazione analoga.

Risulta inoltre dalla discussione precedente: *Se una superficie* S *ammette più di una deformazione che conservi coniugato un sistema attualmente coniugato, ammette una serie continua ad un parametro di tali deformazioni.*

§. 240.

I teoremi di Peterson.

All'osservazione ora fatta si collegano importanti risultati dovuti al geometra russo Peterson, che li scoperse nel 1866, e sui quali soltanto recentemente P. Stäckel [2] ha, molto giustamente, richiamata l'attenzione dei geometri.

Siano Σ, Σ_1 una coppia di superficie applicabili, riferite al sistema coniugato comune (u, v); sia $\overline{\Sigma}$ una superficie qualunque avente a comune con Σ l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v). Per l'osservazione fatta sopra, esiste una nuova superficie $\overline{\Sigma}_1$ applicabile sopra $\overline{\Sigma}$ con conservazione del sistema coniugato comune (u, v). Ora è ben notevole (ed in questo consiste il risultato di Peterson) che note Σ, Σ_1 e $\overline{\Sigma}$ si ottiene $\overline{\Sigma}_1$ solo con quadrature e le due superficie Σ_1, $\overline{\Sigma}_1$ hanno a loro volta a comune l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v).

Per dimostrarlo indichiamo con (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tre punti corrispondenti di Σ, Σ_1, $\overline{\Sigma}$. Avendo le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ a comune l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v), le formole del § 78 (I, pag. 166)

---

[1] Per le deformazioni infinitesime il teorema fu già stabilito al § 227, dove si espresse sotto forma semplice la condizione cui deve soddisfare l'immagine sferica del sistema coniugato.

[2] *Sur la déformation des surfaces.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Novembre 1896).

Biegungen und conjugirte Systeme. Math. Annalen, t. 49.°

dimostrano subito che sussisteranno relazioni della forma

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial u} = P\dfrac{\partial x}{\partial u}\,,\ \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial u} = P\dfrac{\partial y}{\partial u}\,,\ \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial u} = P\dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial x}{\partial v}\,,\ \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial y}{\partial v}\,,\ \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial z}{\partial v}\,, \end{cases}$$

essendo P, Q convenienti funzioni di u, v. Si ottengono immediatamente le condizioni d'integrabilità sotto la forma delle due equazioni simultanee per P, Q:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}(P - Q) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}(Q - P) = 0\,. \end{cases}$$

Ma poichè queste dipendono solo dai simboli $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$ relativi al ds^2 della Σ, riferita al sistemo coniugato (u, v), e la Σ_1 è applicabile sulla Σ, il sistema (u, v) essendo ancora coniugato, saranno pure tre differenziali esatti le tre espressioni:

$$P\frac{\partial x_1}{\partial u}du + Q\frac{\partial x_1}{\partial v}dv\,,\quad P\frac{\partial y_1}{\partial u} + Q\frac{\partial y_1}{\partial v}dv\,,\quad P\frac{\partial z_1}{\partial u}du + Q\frac{\partial z_1}{\partial v}dv\,,$$

onde potremo determinare tre funzioni $\overline{x}_1$, $\overline{y}_1$, $\overline{z}_1$ in guisa che si abbia

$$(31^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x_1}}{\partial u} = P\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\,,\quad \dfrac{\partial \overline{y_1}}{\partial u} = P\dfrac{\partial y_1}{\partial u}\,,\quad \dfrac{\partial \overline{z_1}}{\partial u} = P\dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \overline{x_1}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial y_1}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial \overline{z_1}}{\partial v} = Q\dfrac{\partial z_1}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Riguardando $\overline{x}_1$, $\overline{y}_1$, $\overline{z}_1$ come coordinate di un punto dello spazio, questo punto descrive una superficie $\overline{\Sigma}_1$, per la quale hanno luogo, come subito si vede, le proprietà seguenti:

1.° Essa è applicabile sulla $\overline{\Sigma}$ avendo il medesimo $\overline{ds^2}$

$$\overline{ds^2} = P^2 E\,du^2 + 2\,P\,Q\,F\,du\,dv + Q^2 G\,dv^2$$

2.° La $\overline{\Sigma}_1$ ha a comune con Σ_1 l'immagine sferica del sistema coniugato (u, v), il che dimostra le nostre osservazioni superiori.

Applichiamo questi risultati alla risoluzione del seguente problema:

Può una superficie Σ ricevere una deformazione finita nella quale si conservino le linee di curvatura?

Qui conviene distinguere due casi secondo che la superficie Σ ammette una deformazione *continua* della natura richiesta, ovvero un'unica tale deformazione (§ 239). Nel primo caso, prese per linee coordinate sopra Σ le linee di curvatura (u, v), l'elemento lineare sferico (u, v), che è ortogonale, dovrà soddisfare alle condizioni (30). Essendo

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}',$$

il sistema sferico (u, v) è anzi tutto isotermo e scrivendo

$$ds'^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

si dovrà avere inoltre per la (30)

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}.$$

Ma di più, appartenendo l'elemento lineare precedente alla sfera di raggio = 1, dovremo avere altresì:

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} = -2\lambda$$

Le due equazioni (β), (γ), come facilmente si dimostra,[1] non possono soddisfarsi contemporaneamente in altro modo che assumendo λ funzione della sola u o della sola v. Dunque il sistema sferico (u, v) è formato dai meridiani e paralleli e le superficie domandate sono tutte e sole le superficie modanate del Monge a sviluppabile direttrice cilindrica. *Queste superficie sono dunque le uniche suscettibili di deformazione continua che conserva le linee di curvatura.* Questo risultato fu stabilito dal Codazzi fin dal 1856 [2].

Nel secondo caso sia

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

l'elemento lineare della rappresentazione sferica per la superficie Σ, che supponiamo applicabile sopra una seconda superficie Σ_1 con conservazione delle linee di curvatura. Perchè ciò abbia luogo è necessario e sufficiente

---

[1] L'integrale generale $\lambda = \frac{1}{U+V}$ della (β) non può soddisfare la (γ) che essendo costante U o V.

[2] Annali di Tortolini (1856) pag. 410.

che siano compatibili le equazioni (28) in λ del § precedente, cioè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right).$$

Ponendo

$$r_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad r_2 = \lambda,$$

vengono soddisfatte le equazioni caratteristiche (I, pag. 167)

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1)\,\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2)\,\frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v},$$

le quali dimostrano che esiste una superficie a curvatura costante positiva (non sferica) avente a comune colla Σ l'immagine sferica delle linee di curvatura; viceversa se una tale superficie esiste, la Σ è deformabile nel modo voluto. Ne concludiamo: *Tutte e sole le superficie, che hanno a comune con una superficie a curvatura costante positiva l'immagine sferica delle linee di curvatura, possono ricevere una deformazione finita che conserva le linee di curvatura.*

Propriamente non fa eccezione nemmeno il caso delle superficie modanate; soltanto allora il sistema sferico (u, v) di meridiani essendo immagine di *infinite* superficie (di rotazione) a curvatura costante, la corrispondente deformazione di Σ può farsi in infiniti modi.

Capitolo XVI.

Le Congruenze W

Il teorema di Moutard relativo alle equazioni di Laplace della forma $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta$. — Le congruenze W sulle cui falde della superficie focale si corrispondono le linee assintotiche. — Loro derivazione dalle deformazioni infinitesime della superficie focale. — Teorema di Halphen generalizzato. — Le congruenze normali W corrispondenti alle equazioni $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0$. — Teoremi di Darboux sulle superficie W, che hanno i raggi di curvatura legati dalla relazione $r_2 - r_1 = \frac{1}{k}\operatorname{sen} k[r_2 + r_1]$. — Determinazione di tutte le superficie applicabili sul paraboloide di rotazione. — Applicazione successiva delle trasformazioni di Moutard ed interpretazione geometrica per le congruenze W. — Congruenze W le cui falde della superficie focale hanno uguale curvatura nei punti corrispondenti. — Teorema di permutabilità per queste congruenze W. — Teoremi di Cosserat relativi alle superficie associate di queste superficie focali.

§. 241.

Il teorema di Moutard e la sua interpretazione geometrica.

In questo secondo capitolo, dedicato alle deformazioni infinitesime, studieremo specialmente una nuova classe di congruenze intimamente legate a queste deformazioni; tali congruenze derivano nel modo più semplice dall'interpretazione geometrica del teorema di Moutard relativo alle equazioni della forma

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = M\theta\,,$$

dalle quali abbiamo visto (§ 226) dipendere appunto il problema delle deformazioni infinitesime.

Rammentiamo per ciò prima brevemente il bel risultato di Moutard.

Se θ è una soluzione qualsiasi della equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta \tag{1}$$

ed R ne è una soluzione particolare fissa, talchè

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} = M R \,, \tag{2}$$

risulterà, in forza delle (1), (2)

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \,,$$

onde, indicando ψ una conveniente funzione di u, v, potremo porre

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} , \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} . \tag{3}$$

Se scriviamo queste equazioni sotto la forma

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right) , \quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right) ,$$

vediamo che ψ soddisfa alla sua volta alla equazione di Laplace

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = 0 \,.$$

Questa, cangiando la funzione incognita ψ col porre

$$\psi = R\,\theta_1 \,,$$

prende nuovamente la forma (1) di Moutard

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u \partial v} = M_1\,\theta_1 \,, \tag{1*}$$

dove

$$M_1 = R\,\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{R}\right) . \tag{4}$$

Diremo che *la equazione* (1*) *è la trasformata di Moutard della equazione* (1) *mediante la solusione particolare* R. È evidente che l'inversa di R è, per la (4), una soluzione particolare della (1*), talchè la (1) è alla sua volta la trasformata di Moutard della (1*) mediante la soluzione particolare $\frac{1}{R}$. I due problemi d'integrazione delle equazioni (1) o (1*) sono equivalenti giacchè, per quanto precede, fra le loro soluzioni gene-

rali θ, θ_1 passano le relazioni espresse dalle formole

$$(5)\qquad \frac{\partial(R\theta_1)}{\partial u} = -R^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right),\quad \frac{\partial(R\theta_1)}{\partial v} = R^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right),$$

dalle quali, nota θ, si deduce θ_1 con quadrature ed inversamente.

Scriviamo esplicitamente anche le formole corrispondenti relative alla equazione

$$(6)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = M\theta\,,$$

che si riduce del resto alla (1) prendendo per variabili $u+iv$, $u-iv$. Se R è una soluzione particolare della (6) e poniamo

$$(7)\qquad M_1 = R\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right],$$

l'integrazione della (6) equivale a quella della seguente trasformata

$$(6^*)\qquad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial v^2} = M_1\theta_1,$$

mediante le formole

$$(8)\qquad \frac{\partial(R\theta_1)}{\partial u} = R^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right),\quad \frac{\partial(R\theta_1)}{\partial v} = -R^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right).$$

Mediante le formole di Lelieuvre e quelle relative alle deformazioni infinitesime, possiamo dare una notevole interpretazione geometrica del teorema di Moutard. Essendo ξ, η, ζ tre soluzioni particolari della (1) ed R una quarta soluzione, consideriamo la superficie S definita dalle formole di Lelieuvre

$$(9)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix}$$

e quella sua deformazione infinitesima che corrisponde alla nuova soluzione R ed è definita dalle formole (12) § 226 (pag. 11):

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix}\xi & R\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix}\xi & R\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix},$$

che danno le coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ di un punto della superficie $\overline{S}$ corri-

spondente per ortogonalità d'elementi. Se si pone

$$\bar{x} = R\,\xi_1 \quad , \quad \bar{y} = R\,\eta_1 \quad , \quad \bar{z} = R\,\zeta_1 \quad , \tag{10}$$

saranno per la (5) ξ_1, η_1, ζ_1 tre soluzioni particolari della (1*), trasformate di ξ, η, ζ col metodo di Moutard. Costruiamo ora nuovamente, colle formole di Lelieuvre, una superficie S_1 riferita alle sue linee assintotiche (u, v) definita, a meno di una traslazione, dalle equazioni

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} , \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{11}$$

e dalle analoghe in y_1, z_1.

Disponendo convenientemente delle costanti additive in x_1, y_1, z_1, dimostriamo che S_1 può collocarsi in tale posizione nello spazio da formare insieme con S le due falde della superficie focale di una congruenza.

E infatti dalle (9), (11) deduciamo

$$\frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$\frac{\partial (x_1 - x)}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} . \tag{12*}$$

Ora le (5) danno

$$\begin{cases} R\frac{\partial(\xi_1+\xi)}{\partial u} = (\xi-\xi_1)\frac{\partial R}{\partial u}, & R\frac{\partial(\eta_1+\eta)}{\partial u} = (\eta-\eta_1)\frac{\partial R}{\partial u}, & R\frac{\partial(\zeta_1+\zeta)}{\partial u} = (\zeta-\zeta_1)\frac{\partial R}{\partial u} \\ R\frac{\partial(\xi_1-\xi)}{\partial v} = -(\xi+\xi_1)\frac{\partial R}{\partial v}, & R\frac{\partial(\eta_1-\eta)}{\partial v} = -(\eta+\eta_1)\frac{\partial R}{\partial v}, & R\frac{\partial(\zeta_1-\zeta)}{\partial v} = -(\zeta+\zeta_1)\frac{\partial R}{\partial v}, \end{cases} \tag{13}$$

onde risulta

$$\begin{vmatrix} \eta - \eta_1 & \zeta - \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \eta_1}{\partial u} , & \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \eta + \eta_1 & \zeta + \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} , & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 ,$$

colle analoghe dedotte con permutazione circolare. Sottraendo queste ultime rispettivamente dalle (12), (12*), otteniamo

$$\frac{\partial(x_1-x)}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}\ ,\quad \frac{\partial(x_1-x)}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}\ .$$

Disponendo adunque convenientemente delle costanti additive in x_1, y_1, z_1, possiamo porre senz'altro

$$(14)\quad x_1=x+\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}\ ,\quad y_1=y+\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \zeta & \xi\end{vmatrix}\ ,\quad z_1=z+\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi & \eta\end{vmatrix}\ .$$

Se consideriamo la superficie S_1 definita da queste formole in relazione colla S, le formole

$$\xi(x_1-x)+\eta(y_1-y)+\zeta(z_1-z)=0\ ,$$
$$\xi_1(x_1-x)+\eta_1(y_1-y)+\zeta_1(z_1-z)=0\ ,$$

essendo ξ, η, ζ proporzionali ai coseni di direzione della normale a S, ξ_1, η_1, ζ_1 a quelli della normale a S_1, ci dimostrano che il segmento che unisce due punti corrispondenti

$$F\equiv(x, y, z)\ ,\quad F_1\equiv(x_1, y_1, z_1)$$

di S, S_1 tocca in F la superficie S e in F_1 la superficie S_1. Dunque S, S_1 sono le due falde della superficie focale della congruenza generata dai raggi FF_1. Di più sussiste la importante proprietà: *Sulle due falde* S, S_1 *della superficie focale di questa congruenza si corrispondono le linee assintotiche o, ciò che torna lo stesso, i sistemi coniugati.*

§. 242.

Le congruenze W.

Le congruenze, sulle cui falde focali si corrispondono le linee assintotiche (o i sistemi coniugati), si diranno *congruenze* W per analogia col caso delle congruenze *normali* di questa specie, ove le superficie normali ai raggi sono appunto le superficie indicate con W al cap. IX.

Per una superficie S a curvatura positiva possiamo ottenere formole del tutto analoghe alle precedenti, senza introdurre immaginarii, col riferire la superficie ad un sistema isotermo coniugato (c. V, §§. 79-80)

Essendo ξ, η, ζ tre soluzioni della equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = M\theta \,, \tag{15}$$

la superficie S è definita dalle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \,, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \tag{16}$$

e dalle analoghe in y, z. Se R indica una quarta soluzione della (15), le formole (§ 226)

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial v} \end{vmatrix} \,, \quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

definiscono una deformazione infinitesima della S; ponendo nuovamente

$$\bar{x} = R\xi_1 \,, \quad \bar{y} = R\eta_1 \,, \quad \bar{z} = R\zeta_1 \,,$$

si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(R\xi_1) = R\frac{\partial\xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial R}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v}(R\xi_1) = -R\frac{\partial\xi}{\partial u} + \xi\frac{\partial R}{\partial u} \,, \end{cases} \tag{17}$$

e si verificherà subito che le formole (14) danno ancora una congruenza W, poichè avendosi conseguentemente

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\eta_1}{\partial v} \end{vmatrix} \,, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} \,,$$

sopra le due superficie focali S, S_1 si corrispondono i sistemi coniugati.

Ora, se si osserva che per le (10) ξ, η, ζ sono proporzionali alle componenti $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dello spostamento che riceve il punto $F \equiv (x, y, z)$ nella deformazione infinitesima considerata di S, possiamo enunciare il nostro risultato col teorema: *Si consideri una deformazione infinitesima qualunque di una superficie* S *e per ogni punto di* S, *nel piano tangente, si conduca il raggio normale alla direzione dello spostamento subìto dal punto; la congruenza così costruita è una congruenza* W.

Questo teorema presenta naturalmente un caso di eccezione, quando

cioè la costruzione in esso indicata, anzichè ad un sistema ∞^2 di raggi dia luogo soltanto ad un sistema ∞^1. Ciò accade soltanto quando la superficie S sia una superficie rigata e la direzione dello spostamento di ciascun punto nella deformazione supposta sia normale alla generatrice che vi passa. Sarebbe facile dimostrare che ogni superficie rigata ammette deformazioni infinitesime di questa specie.

Guichard, al quale sono dovute le formole precedenti per le congruenze W, ha osservato altresì che esse danno le più generali congruenze W. Andiamo a dimostrare questo importante risultato che, pel teorema precedente, possiamo anche enunciare così:

Ciascuna falda di una congruenza W *è suscettibile di una deformazione infinitesima, nella quale lo spostamento di ogni punto avviene parallelamente alla normale nel punto corrispondente dell'altra falda.*

Consideriamo nella dimostrazione il caso in cui sulle due falde S, S_1 le linee assintotiche (u, v) siano reali, l'altro caso potendosi trattare affatto analogamente. Essendo $(x, y, z), (x_1 y_1 z_1)$ due punti corrispondenti di S, S_1 riteniamo le due superficie definite dalle formole di Lelieuvre

$$(18)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = +\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$(19)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = +\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dove ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 sono rispettivamente proporzionali ai coseni di direzione delle normali a S, S_1 nei due punti corrispondenti.

Ponendo

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho\ , \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \rho_1\ ,$$

saranno

$$(20)\qquad K = -\frac{1}{\rho^2}\ , \qquad K_1 = -\frac{1}{\rho_1^2}$$

le curvature di S, S_1.

Si ha per ipotesi

$$\xi\,(x_1 - x) + \eta\,(y_1 - y) + \zeta\,(z_1 - z) = 0$$
$$\xi_1\,(x_1 - x) + \eta_1\,(y_1 - y) + \zeta_1\,(z_1 - z) = 0\ ,$$

e potremo quindi porre, indicando con m un conveniente fattore di pro-

porzionalità

$$(21)\quad x_1 - x = m\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix},\quad y_1 - y = m\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \zeta & \xi\end{vmatrix},\quad z_1 - z = m\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi & \eta\end{vmatrix}.$$

Derivando queste ultime rispetto ad u e moltiplicando le equazioni ottenute ordinatamente per ξ, η, ζ, indi per ξ_1, η_1, ζ_1 e sommando, si ottiene:

$$(a)\quad -\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad -\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Similmente operando rispetto a v, segue

$$(b)\quad \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial v} & \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial v}\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial v} & \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Ora non possono essere simultaneamente nulli i due determinanti

$$\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix},$$

chè altrimenti si avrebbe

$$\begin{cases}\xi_1\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_1\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta_1\frac{\partial z}{\partial u} = 0\\ \xi_1\frac{\partial x}{\partial v} + \eta_1\frac{\partial y}{\partial v} + \zeta_1\frac{\partial z}{\partial v} = 0\end{cases},$$

indi la proporzione:

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta,$$

e, le normali in punti corrispondenti a S, S_1 essendo parallele, queste

due superficie coinciderebbero, ciò che escludiamo. Le (a), (b) danno conseguentemente

$$m^2 = 1$$

e possiamo fare senz'altro

$$m = 1 ,$$

cangiando nel caso contrario i segni di ξ_1, η_1, ζ_1.

Così avremo le formole

$$(22)\quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} , \; y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \zeta \end{vmatrix} , \; z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \zeta \end{vmatrix} ,$$

le quali derivate rapporto ad u, v, osservando le (18), (19), danno le proporzioni

$$\frac{\partial(\xi+\xi_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\eta+\eta_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\zeta+\zeta_1)}{\partial u} = \xi - \xi_1 : \eta - \eta_1 : \zeta - \zeta_1$$

$$\frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\eta-\eta_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\zeta-\zeta_1)}{\partial v} = \xi + \xi_1 : \eta + \eta_1 : \zeta + \zeta_1 .$$

Possiamo quindi porre, indicando con α, β due convenienti funzioni di u, v:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi+\xi_1)}{\partial u} = \alpha(\xi-\xi_1) , \; \dfrac{\partial(\eta+\eta_1)}{\partial u} = \alpha(\eta-\eta_1) , \; \dfrac{\partial(\zeta+\zeta_1)}{\partial u} = \alpha(\zeta-\zeta_1) \\ \dfrac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial v} = \beta(\xi+\xi_1) , \; \dfrac{\partial(\eta-\eta_1)}{\partial v} = \beta(\eta+\eta_1) , \; \dfrac{\partial(\zeta-\zeta_1)}{\partial v} = \beta(\zeta+\zeta_1) . \end{cases}$$

Derivando le tre prime rispetto a v e sommandole colle corrispondenti della seconda linea derivate rapporto a u, ricordando che ξ, η, ζ sono soluzioni di una medesima equazione di Laplace

$$(24)\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta ,$$

otteniamo

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\xi = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\xi_1$$

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\eta = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\eta_1$$

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\zeta = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\xi_1 ,$$

e quindi, non sussistendo la proporzione $\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta$, si avrà

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$$

$$2\,M = 2\,\alpha\,\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u}\,.$$

Indicando con R una nuova funzione di u, v, possiamo dunque porre

$$\alpha = \frac{\partial \log R}{\partial u}\,, \quad \beta = \frac{\partial \log R}{\partial v}$$

e la seconda delle precedenti diventando

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = M\,R\,,$$

dimostra che R è soluzione della (24). Ed ora le (23) si riducono alle (13) del numero precedente, e il teorema risulta così dimostrato.

Coi risultati ora ottenuti si viene a dare una elegante interpretazione geometrica del teorema di Moutard. Presa infatti un'equazione di Moutard (1), sia R una sua soluzione particolare mediante la quale la (1) si trasformi, coll'indicato processo, nella nuova equazione (1*). Prese tre soluzioni particolari ξ, η, ζ della (1) e costruita colle formole di Lelieuvre (9) la corrispondente superficie S riferita alle sue assintotiche u, v, l'equazione per le deformazioni infinitesime della S è precisamente la (1). Corrispondentemente alla soluzione scelta R per passare dalla (1) alla (1*), abbiamo una deformazione infinitesima della S, per la quale costruiamo la corrispondente congruenza W. *L'equazione delle deformazioni infinitesime per la seconda falda* S_1 *è precisamente la trasformata* (1*) *di Moutard.* Di qui risulta in particolare: per le due falde di una congruenza di W si equivalgono i due relativi problemi delle deformazioni infinitesime.

§. 243.

Nuova dimostrazione della proprietà fondamentale delle congruenze W.

Si è visto nei §§ precedenti che proprietà caratteristica delle congruenze W è la seguente. *Ciascuna falda della congruenza è suscettibile di una deformazione infinitesima, nella quale lo spostamento di ogni punto avviene parallelamente alla normale nel punto corrispondente dell'altra falda.* Diamo una nuova dimostrazione di questa proprietà fondamentale

appoggiandoci sulle formole generali date al Cap. X, relative alle due falde focali di una congruenza qualunque. Riprendendo le formole e notazioni del § 149 (I, pag. 321), cerchiamo la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una deformazione infinitesima della prima falda focale S_1 nella quale ogni punto (x_1, y_1, z_1) di S_1 si sposti parallelamente alla normale (ξ_2, η_2, ζ_2) della seconda S_2. Le componenti di questo spostamento saranno

$$\varepsilon n \xi_2 , \quad \varepsilon n \eta_2 , \quad \varepsilon n \zeta_2$$

dove ε è una costante infinitesima ad n una funzione di u, v da determinarsi dalle condizioni (§ 224):

$$(25)\quad \sum \frac{\partial (n\xi_2)}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ \sum \frac{\partial (n\xi_2)}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \sum \frac{\partial (n\xi_2)}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ \sum \frac{\partial (n\xi_2)}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$$

Ora dalle citate formole del Cap. X si traggono subito le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u} = -\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\left(A + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial u}\right)X_1 - \cos\dfrac{\Omega}{2}\left(A + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial u}\right)X_2 \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v} = \operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\left(B - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial v}\right)X_1 + \cos\dfrac{\Omega}{2}\left(B - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial v}\right)X_2 + \sqrt{G}\operatorname{sen}\Omega X, \end{cases}$$

indi le altre

$$\sum \xi_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ \sum \xi_2 \frac{\partial x}{\partial v} = -2\sqrt{G}\operatorname{sen}\Omega\rho , \ \sum \frac{\partial \xi_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0 ,$$

$$\sum \frac{\partial \xi_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\sqrt{G}\,\rho\cos\Omega\left(A + \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u}\right),$$

$$\sum \frac{\partial \xi_2}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 2\sqrt{G}\operatorname{sen}\Omega\left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\rho\right],$$

$$\sum \frac{\partial \xi_2}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\sqrt{G}\,\rho\operatorname{sen}\Omega\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2\sqrt{G}\,\rho\cos\Omega\left(B - \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right).$$

Dopo di ciò le (25) si riducono alle due seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log n}{\partial u} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \operatorname{sen}\Omega}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \cot\Omega A \\ \dfrac{\partial \log n}{\partial v} = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \operatorname{sen}\Omega}{\partial v} + \cot\Omega B . \end{cases}$$

Se formiamo la condizione d'integrabilità, osservando l'equazione di

Laplace cui soddisfa ρ (I, pag 317) e l'identità:

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{EG}\,\operatorname{sen}\Omega\ , \tag{26}$$

che segue dalla formola di Liouville per la curvatura (I, pag. 185), troviamo per la richiesta condizione

$$\frac{1}{\rho}\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right] = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Omega}\left(A\frac{\partial\Omega}{\partial v} + B\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right).$$

A causa dei valori (I, pag. 322) dei coefficienti D_1, $D'_1 = 0$, D''_1; D_2, $D'_2 = 0$, D''_2 delle seconde forme fondamentali di S_1, S_2, la condizione superiore equivale alla proporzione

$$D_1 : D'_1 : D''_1 = D_1 : D'_2 : D''_2,$$

onde risulta dimostrato il teorema in discorso: *Affinchè una falda della superficie focale ammetta una deformazione infinitesima, nella quale ciascun punto si sposti parallelamente alla normale corrispondente dall' altra falda, è necessario e sufficiente che sulle due falde si corrispondano le linee assintotiche.*

Dimostrato così nuovamente il teorema fondamentale, osserviamo che ogni congruenza W si trasforma per una projettività, o reciprocità, egualmente in una congruenza W, onde risulta: *Per due superficie trasformate projettive o reciproche l'una dell' altra i problemi della ricerca delle deformazioni infinitesime sono problemi equivalenti.*

Dalle formole generali del Cap. X, già sopra utilizzate, possiamo dedurre una notevole proprietà delle congruenze W, osservata da Ribaucour, che generalizza la proposizione di Halphen relativa alle congruenze W normali (I, pag. 282). Se dalle formole (35) del § 149 (I, pag. 323) calcoliamo il prodotto delle due curvature delle falde focali, troviamo per le (34) ibid.

$$K_1 K_2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\Omega}{2\rho}\right)^4 \frac{D_2 D''_1}{D_1 D''_2} \quad (1) \tag{27}$$

(1) La formola (27) si applica altresì ad un' altra classe di congruenze, caratterizzata dalla proprietà che alle assintotiche dell'una falda focale corrisponda sull' altra falda un sistema coniugato. Questa proprietà si traduce nella relazione

$$D_2 D''_1 + D_1 D''_2 = 0$$

Ora $\frac{\operatorname{sen}\Omega}{2\rho}$ è la distanza dei due punti limiti, e poichè le congruenze W sono caratterizzate dalla proprietà

$$D_2 D''_1 = D_1 D''_2,$$

ne deduciamo il teorema: *Nelle congruenze* W, *ed in queste soltanto, il prodotto delle curvature delle due falde focali in punti corrispondenti eguaglia l'inversa della quarta potenza della distanza dei punti limiti.*

§. 244.

Le superficie con deformazione infinitesima in sè medesime.

Per le applicazioni che dovremo farne fra breve importa ora che risolviamo la questione seguente: *Quali superficie* S *ammettono una deformazione infinitesima in sè medesime?* Se volessimo utilizzare i primi principii della teoria di Lie dei gruppi continui di trasformazioni, basterebbe osservare che l'esistenza di una trasformazione infinitesima del corrispondente ds^2 in sè medesimo porta all'esistenza di un gruppo continuo ad un parametro di applicabilità delle superficie sopra sè medesima per dedurne (I, pag. 230) che la superficie S deve essere applicabile sopra una superficie di rotazione.

Ma conduciamo la ricerca direttamente, ciò che ci fornirà il valore della funzione caratteristica di Weingarten per la corrispondente deformazione. La direzione dello spostamento di ciascun punto di S avvenendo per ipotesi tangenzialmente alla superficie, prendiamo a linee u quelle inviluppate sopra S da queste direzioni e a linee v le loro traiettorie ortogonali, talchè l'elemento lineare di S sarà dato da

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Indicando, come al § 223, con

$$\varepsilon\bar{x}\,,\quad \varepsilon\bar{y}\,,\quad \varepsilon\bar{z}$$

le componenti dello spostamento, avremo per ipotesi

$$\bar{x} = \lambda \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \bar{y} = \lambda \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}\,,\ \bar{z} = \lambda \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}\,,$$

---

e quindi le congruenze in discorso godono della proprietà caratteristica

$$K_1 K_2 = -\frac{1}{D^4}\,,$$

indicando D la distanza dei punti limiti. Il teorema ora dedotto dalla (27) è dovuto a Waelsch *(Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* t. 118 pag. 736).

essendo λ un conveniente fattore di proporzionalità. Ora le condizioni

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0 , \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0$$

danno

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0 , \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} .$$

Di qui risulta che si può fare

$$E = 1 , \quad \lambda = \sqrt{G} = r ,$$

essendo r una funzione della sola u e per ciò: *la superficie* S *è necessariamente applicabile sopra una superficie di rotazione,* come già sopra avevamo detto.

Di più se si calcola ora il valore della funzione caratteristica φ di Weingarten:

$$\varphi = \frac{1}{2r}\left(\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

si trova subito $\varphi = -r'$. Dunque:

Per ogni superficie S *applicabile sopra una superficie di rotazione, di elemento lineare*

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 ,$$

il valore della funzione caratteristica φ*, che dà lo strisciamento della superficie in sè medesima, è proporzionale a* $\frac{dr}{du}$.

Dopo questi risultati possiamo facilmente dedurre nuovamente dalle proprietà generali delle congruenze W il teorema di Weingarten sulle evolute delle superficie W ed il suo inverso.

E infatti, se una congruenza W è una congruenza normale, ciascuna sua falda ammette una deformazione infinitesima in cui ogni punto si sposta parallelamente alla normale dell'altra falda, cioè tangenzialmente alla superficie; dunque questa falda è applicabile sopra una superficie di rotazione (teorema diretto di Weingarten). Inversamente se una superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione, le tangenti alle deformate dei meridiani formano una congruenza normale W, onde segue il teorema inverso di Weingarten.

§. 245.

Congruenze W corrispondenti a $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$.

Diamo ora alcuni notevoli esempi di congruenze W, che ci faranno conoscere importanti risultati dovuti a Darboux [1].

Prendiamo per equazione fondamentale di Moutard la equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0\,, \tag{28}$$

di cui assumiamo tre soluzioni particolari

$$\xi=f_1(u)+\varphi_1(v)\,,\ \eta=f_2(u)+\varphi_2(v)\,,\ \zeta=f_3(u)+\varphi_3(v)\,, \tag{29}$$

e mediante queste costruiamo colle formole di Lelieuvre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=-\begin{vmatrix} f_2(u)+\varphi_2(v)\,, & f_3(u)+\varphi_3(v) \\ f'_2(u) & f'_3(u) \end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\begin{vmatrix} f_2(u)+\varphi_2(v)\,, & f_3(u)+\varphi_3(v) \\ \varphi'_2(v) & \varphi'_3(v) \end{vmatrix} \end{cases}$$

la corrispondente superficie S, di cui le u, v sono le linee assintotiche. Applichiamo alla (28) la trasformazione di Moutard, adoperando la soluzione particolare $R=1$, sicchè la trasformata coincide colla (28) stessa. Se colle formole del § 241 costruiamo la corrispondente congruenza W di cui la S è una falda della superficie focale, per la seconda falda S_1 le (13) (pag. 50) danno

$$\xi_1=\varphi_1(v)-f_1(u)\,,\ \eta_1=\varphi_2(v)-f_2(u)\,,\ \zeta_1=\varphi_3(v)-f_3(u) \tag{29*}$$

e conseguentemente si ha

$$\begin{aligned} x_1&=x+\begin{vmatrix} \varphi_2(v)-f_2(u)\,, & \varphi_3(v)-f_3(u) \\ \varphi_2(v)+f_2(u)\,, & \varphi_3(v)+f_3(u) \end{vmatrix} \\ y_1&=y+\begin{vmatrix} \varphi_3(v)-f_3(u)\,, & \varphi_1(v)-f_1(u) \\ \varphi_3(v)+f_3(u)\,, & \varphi_1(v)+f_1(u) \end{vmatrix} \\ z_1&=z+\begin{vmatrix} \varphi_1(v)-f_1(u)\,, & \varphi_2(v)-f_2(u) \\ \varphi_1(v)+f_1(u)\,, & \varphi_2(v)+f_2(u) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

---

[1] *Leçons etc.* t. III, pag. 372 ss.

Indichiamo ora con S_0 la superficie media di questa congruenza W, con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto medio sopra ogni raggio. Dalle formole

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x)\ ,\quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y)\ ,\quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z)$$

e dalle precedenti risulta

$$(30)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = -\begin{vmatrix} f_2(u)\ ,\ f_3(u) \\ f'_2(u)\ ,\ f'_3(u) \end{vmatrix}\ ,\quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \begin{vmatrix} \varphi_2(v)\ ,\ \varphi_3(v) \\ \varphi'_2(v)\ ,\ \varphi'_3(v) \end{vmatrix}\ ,$$

colle formole analoghe per y_0, z_0. Come si vede, la superficie media S_0 di questa congruenza W è una superficie di traslazione, di cui le linee u, v sono le curve generatrici (I, pag. 142). Inoltre si vede subito che f_1, f_2, f_3 sono proporzionali ai coseni di direzione della binormale alla curva v sopra S_0 e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ a quelli della binormale alla curva u, onde risulta che ciascun raggio della congruenza W, uscente da un punto P di S_0, è l'intersezione dei due piani osculatori delle linee u, v che passano per P.

Inversamente prendiamo una superficie S_0 di traslazione arbitraria, definita dalle formole

$$(31)\quad x_0 = F_1(u) + \Psi_1(v)\ ,\ y_0 = F_2(u) + \Psi_2(v)\ ,\ z_0 = F_3(u) + \Psi_3(v)\ ,$$

e dimostriamo che, assumendo convenientemente le funzioni

$$f_1, f_2, f_3\ ;\quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ ,$$

si può fare coincidere la (30) colla (31). Per semplicità prendiamo a parametri u, v sopra S_0 gli archi delle linee coordinate, cioè supponiamo

$$F'^2_1(u) + F'^2_2(u) + F'^2_3(u) = 1$$
$$\Phi'^2_1(v) + \Psi'^2_2(v) + \Phi'^2_3(v) = 1\ .$$

Per le linee u, v sopra S_0 tenendo le solite notazioni della teoria delle curve, apponendo alle quantità relative l'indice u, o v secondo che si riferiscono alle curve $u =$ costante o $v =$ costante, basterà porre infatti

$$(32)\qquad \begin{cases} f_1 = \sqrt{T_v}\,\lambda_v\ ,\ f_2 = \sqrt{T_v}\,\mu_v\ ,\ f_3 = \sqrt{T_v}\,\nu_v \\ \varphi_1 = \sqrt{-T_u}\,\lambda_u\ ,\ \varphi_2 = \sqrt{-T_u}\,\mu_u\ ,\ \varphi_3 = \sqrt{-T_u}\,\nu_u \end{cases}$$

per far coincidere le (31) colle (30).

Abbiamo dunque il teorema di Darboux: *Se per ogni punto di una superficie* S_0 *di traslazione si conduce il raggio intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano, si forma una congruenza* W, *sulle cui falde della superficie focale le assintotiche corrispondono alle curve generatrici di* S_0.

Si osserverà per altro che le torsioni delle due curve generatrici dovranno essere, per dar luogo ad una costruzione reale, di segno contrario.

Ricerchiamo ora se fra le congruenze W, costruite secondo il teorema precedente, vi sono delle congruenze normali. È per ciò necessario e sufficiente che si abbia

$$\xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1 = 0\,,$$

ossia

$$f_1^2(u) + f_2^2(u) + f_3^2(u) = \varphi_1^2(v) + \varphi_2^2(v) + \varphi_3^2(v)\,,$$

il che dà, per le (82)

$$T_v = -T_u$$

e siccome T_v è funzione della sola u e T_u della sola v, abbiamo il risultato: *Le superficie di traslazione richieste sono quelle, le cui curve generatrici hanno le torsioni costanti eguali e di segno contrario.*

Dimostriamo ora che le superficie ortogonali ai raggi della congruenza sono quelle di Weingarten (c. IX, § 135), i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione.

$$k\,(r_2 - r_1) = \operatorname{sen}\,[k\,(r_2 + r_1)]\,, \quad (k \text{ costante}).$$

Per ciò osserviamo che le due falde della superficie focale corrispondono alla equazione di Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = 0$$

e la soluzione di questa, che dà lo strisciamento della superficie in sè medesima, è $R = 1$, quindi il corrispondente valore della funzione caratteristica φ di Weingarten è dato, per le formole al § 226 da

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,,$$

essendo $K = -\frac{1}{\rho^2}$ la curvatura della falda S considerata. D'altra parte, se con

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2\,d\beta^2$$

indichiamo l'elemento lineare di S riferito alle deformate dei meridiani e dei paralleli, si ha per il teorema al § precedente

$$\varphi = k\,\frac{dr}{d\alpha}\,,$$

e siccome

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{d\alpha^2}\,,$$

ne risulta, per determinare r in funzione di α, l'equazione

$$\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = k^4 r \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^4$$

ovvero

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\right) = -k^4 2 r \frac{dr}{d\alpha} ,$$

da cui

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = \frac{1}{a^2 - k^4 r^2} \quad (a \text{ costante}).$$

Abbiamo dunque

$$ds^2 = (a^2 - k^4 r^2)\, dr^2 + r^2 d\beta^2$$

e ponendo

$$k^2 r = a \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} ,$$

ne risulta

$$ds^2 = \frac{a^4}{4 k^4}\left(\cos^4 \frac{\omega}{2}\, d\omega^2 + \frac{4}{a^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}\, d\beta^2\right)^{(1)} ,$$

che è appunto la forma dell'elemento lineare trovata al § 135 (I, pag. 292) per l'una falda dell'evoluta delle indicate superficie W.

Inversamente ogni superficie coll'elemento lineare precedente ammette per funzione caratteristica φ dello strisciamento in sè medesima

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

e quindi R = 1 per soluzione dell'equazione corrispondente di Moutard, la quale è adunque

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0 .$$

Ne risulta che la costruzione precedente dà tutte le superficie W, le cui immagini sferiche delle linee di curvatura sono ellissi ed iperbole confocali. Abbiamo così stabilito il bel teorema di Darboux:

Per costruire tutte le superficie W *i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione*

$$k\,(r_2 - r_1) = \operatorname{sen} k\,(r_2 + r_1) ,$$

---

(1) Il calcolo diretto di questa formola non offre difficoltà, ma qui rimandiamo per tale verifica diretta al luogo citato nel Darboux.

si consideri una superficie S_0 *di traslazione, le cui curve generatrici abbiano torsioni costanti, eguali e di segno contrario. Per ogni punto* P *di* S_0 *si conduca il raggio intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici uscenti da* P; *questo sistema di raggi è un sistema normale e le sue superficie ortogonali sono le più generali superficie* W *richieste.*

§. 246.

Superficie applicabili sul paraboloide di rotazione.

Prendiamo in secondo luogo l'equazione

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 ,$$

e siano ξ, η, ζ tre sue soluzioni particolari, colle quali costruiamo, mediante le formole

$$\text{(33)} \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

e le analoghe in y, z, una superficie S su cui il sistema (u, v) è isotermo coniugato. Consideriamo di questa superficie S la deformazione infinitesima corrispondente alla soluzione R=1 della (A), e costruiamo la corrispondente congruenza W. La seconda superficie focale S_1 è definita dalle formole

$$\text{(34)} \quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} , \; y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} , \; z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix} ,$$

dove ξ_1, η_1, ζ_1 sono le soluzioni coniugate di ξ, η, ζ della (A), che soddisfano alle equazioni (17) §. 242 (pag. 52)

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial v} , \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = - \frac{\partial \xi}{\partial u} \text{ etc.}$$

Le coordinate del punto medio x_0, y_0, z_0 sopra un raggio di questa congruenza W soddisfano alla loro volta alla equazione stessa (A).

Per ottenere congruenze W di questa specie *normali*, basterà porre la condizione

$$\xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1 = 0 ,$$

cioè *La congruenza* W *definita dalle* (33), (34) *sarà una congruenza nor-*

male, se le tre funzioni

$$\xi_1 + i\,\xi\,, \quad \eta_1 + i\,\eta\,, \quad \zeta_1 + i\,\zeta$$

della variabile complessa $u+iv$ *hanno la somma dei loro quadrati eguale ad una costante reale*:

$$(\xi_1 + i\,\xi)^2 + (\eta_1 + i\,\eta)^2 + (\zeta_1 + i\,\zeta)^2 = a\,. \tag{35}$$

In particolare, se $a = 0$, riuscirà

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,,$$

cioè

$$K_1 = K\ ^{(1)}\,,$$

essendo K, K_1 le curvature delle due falde focali S, S_1. Questa ultima osservazione, combinata con quella della nota al § 130 (I pag. 283), basta già per dimostrare che, nel caso $a = 0$, la congruenza W è formata dalle normali ad una superficie ad area minima, che è la superficie media S_0 del sistema e le superficie S, S_1 non sono altro che le due falde dell'evoluta della superficie minima S_0 [2].

Per ricercare, per qualsiasi valore della costante a nel secondo membro della (35), su quale superficie di rotazione sarà applicabile la S e analogamente per la S_1, basterà procedere come al precedente numero, osservando che per la nostra superficie S il valore della funzione caratteristica, che dà lo strisciamento della superficie in sè medesima è

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,,$$

essendo

$$K = \frac{1}{\rho^2}\,.$$

la curvatura. Per determinare r in funzione di α (§ 244), abbiamo qui

---

(1) Si osserverà che, se invece di prendere la costante a del secondo membro della (35) nulla, si assumesse a puramente immaginaria, nella corrispondente congruenza W le falde della superficie focale avrebbero ancora eguale curvatura.

(2) A questo proposito non sarà inutile osservare che ad ogni sistema ortogonale sopra l'evolvente S_0 corrisponde sopra le falde S, S_1 dell'evoluta un sistema coniugato, in particolare ad ogni sistema isotermo ortogonale di S_0 un sistema isotermo coniugato sopra S, S_1. Questa proprietà, come facilmente si vede dalle formole del Cap. IX § 129, appartiene a tutte le superficie a curvatura media costante.

adunque l'equazione

$$\frac{d^2r}{d\alpha^2} = -\,k^4\,r\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^4 \ (k \text{ costante}) ,$$

onde

$$\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} = b + k^4\,r^2 ,$$

con b costante, e quindi per l'elemento lineare di S

$$ds^2 = (b + k^4\,r^2)\,dr^2 + r^2\,d\beta^2 . \tag{36}$$

Inversamente per ogni superficie S con questo elemento lineare è $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ il valore corrispondente della funzione caratteristica, e quindi la corrispondente equazione di Moutard, avendo per soluzione R = 1, è

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0 .$$

Si vede adunque che le nostre congruenze W ci danno nelle loro superficie focali tutte le superficie coll'elemento lineare (36).

Ora per riconoscere la forma della superficie di rotazione, su cui la S è applicabile, conviene distinguere a seconda del segno di b nella (36) che corrisponde, come ora si vedrà, al segno di $-a$ nella (35).

1.° Se $b = 0$, l'elemento lineare (36) diviene

$$ds^2 = du^2 + u\,d\beta^2$$

e appartiene alle evolute delle superficie d'area minima (I pag. 292 *nota*). È il caso che superiormente abbiamo già visto contraddistinto dal valore $a = 0$ della costante nella (35).

2.° Sia $b > 0$; allora possiamo fare, senza alterare la generalità, $b = 1$

$$ds^2 = (1 + k^4\,r^2)\,dr^2 + r^2\,d\beta^2$$

e la superficie di rotazione corrispondente è il *paraboloide di rotazione*

$$z = \psi(r) = \frac{k^2\,r^2}{2} .$$

Se d'altronde poniamo, introducendo una funzione ausiliaria ω:

$$k^2\,r = \operatorname{senh}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

risulta

$$(37) \qquad ds^2 = c^2 \left\{ \cosh^4 \frac{\omega}{2}\, d\omega^2 + \operatorname{senh}^2 \frac{\omega}{2}\, dv^2 \right\}, \quad c = \frac{1}{k^2}.$$

Ora, esprimendo i raggi principali di curvatura r_1, r_2 della evolvente, troviamo facilmente colle formole del § 134 (I, pag. 289)

$$(38) \qquad r_2 = c\,\frac{\omega - \operatorname{senh}\omega}{2}, \quad r_1 = c\,\frac{\omega + \operatorname{senh}\omega}{2},$$

onde per la seconda falda S_1

$$(37^*) \qquad ds_1^2 = c^2 \left(\operatorname{senh}^4 \frac{\omega}{2}\, d\omega^2 + \cosh^2 \frac{\omega}{2}\, dv^2 \right),$$

che corrisponde, come subito si vede, alla forma (36) dell'elemento lineare con b negativo.

D'altronde, calcolando le curvature K, K_1 degli elementi lineari (37), (37*), risulta

$$K = \frac{1}{4\,c^2 \cosh^4 \frac{\omega}{2}}, \quad K_1 = \frac{1}{4\,c^2 \operatorname{senh}^4 \frac{\omega}{2}}$$

$$\rho = 2\,c \cosh^2 \frac{\omega}{2}, \quad \rho_1 = 2\,c \operatorname{senh}^2 \frac{\omega}{2}$$

$$\rho - \rho_1 = 2\,c > 0,$$

onde la costante della (35)

$$a = (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \rho_1 - \rho$$

avrà un valore negativo.

Di qui si vede che è inutile considerare il caso $b < 0$, il quale corrisponde ad assumere a nella (35) positivo, e possiamo enunciare sotto la forma seguente il risultato conseguito da Darboux:

Se $\xi_1 + i\xi$, $\eta_1 + i\eta$, $\zeta_1 + i\zeta$ *sono tre funzioni qualunque della variabile complessa* $u + iv$ *legate dalla relazione*

$$(B) \qquad (\xi_1 + i\,\xi)^2 + (\eta_1 + i\,\eta)^2 + (\zeta_1 + i\,\zeta)^2 = \text{costante},$$

le formole (33) *danno per quadrature la più generale superficie applicabile sul paraboloide di rotazione, se la costante nel secondo membro della* (B) *è negativa, e le loro superficie complementari nel caso opposto. Se poi la detta costante è nulla, si ottengono dalle* (33) *tutte le evolute delle superficie d'area minima.*

In fine osserviamo che l'elemento lineare sferico, riferito alle immagini sferiche delle linee di curvatura della superficie evolvente, prende la forma caratteristica (I, pag. 290)

$$ds'^2 = \frac{du^2}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \frac{dv^2}{\cosh^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \tag{89}$$

Vediamo dunque che si può risolvere per quadrature il problema di ridurre l'elemento lineare sferico a questa forma.

§. 247.

Applicazione successiva delle trasformazioni di Moutard. [1]

Abbiamo già osservato, al § 242, che i problemi delle deformazioni infinitesime per le due falde di una congruenza W sono problemi equivalenti (a meno di quadrature). Vogliamo ora dare a questo risultato una forma più geometrica addentrandoci maggiormente nello studio, iniziato ai §§ 242, 243, delle relazioni che intercedono fra la teoria delle congruenze W e la trasformazione di Moutard.

Cominciamo dal dimostrare il seguente teorema, relativo alla applicazione successivà delle trasformazioni di Moutard:

Se le due equazioni di Laplace

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_1\theta, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_2\theta$$

ammettono una trasformata comune di Moutard $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\theta$, *esse ne ammettono una semplice infinità, dipendente da una costante arbitraria.*

Indichino R_1, R_2 le rispettive soluzioni della equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\theta, \tag{40}$$

mediante le quali, applicando la trasformazione di Moutard, si passa alle rispettive equazioni

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_1\theta, \tag{41}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_2\theta, \tag{41*}$$

---

[1] I risultati di questo § e del seguente furono dati la prima volta in una mia nota *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard.* (Rendiconti della R.ª Accademia dei Lincei 1890).

talchè si abbia

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial u\,\partial v} = M\,R_1\,,\quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial u\,\partial v} = M\,R_2\,,$$

$$M_1 = R_1 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R_1}\right),\quad M_2 = R_2 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R_2}\right).$$

Indichi ora R'_1 quella soluzione della (41), *contenente una costante arbitraria*, che è dedotta dalla soluzione R_2 della (40) mediante la trasformazione di Moutard e può ritenersi definita (a meno appunto di una costante) dalle equazioni simultanee (5) § 241:

$$(42)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(R_1\,R'_1) = R_1^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_2}{R_1}\right),\ \frac{\partial}{\partial v}(R_1\,R'_1) = -\,R_1^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Se scriviamo queste ultime sotto la forma

$$(42^*)\ \frac{\partial}{\partial u}\left(R_2\,.\,\frac{R_1\,R'_1}{R_2}\right) = -\,R_2^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_1}{R_2}\right),\ \frac{\partial}{\partial v}\left(R_2\,.\,\frac{R_1\,R'_1}{R_2}\right) = R_2^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_1}{R_2}\right),$$

vediamo che ponendo

$$R'_2 = \frac{R_1\,R'_1}{R_2}$$

possiamo riguardare R'_2 come soluzione della (41*), trasformata della soluzione R_1 della (40) mediante la R_2. Ora diciamo che *costruendo la trasformata di Moutard della* (41) *mediante la soluzione particolare* R'_1, *ovvero la trasformata di* (41*) *mediante la sua soluzione particolare* R'_2, *si ottiene una sola e medesima equazione di Laplace*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M'\,\theta\,,$$

con che appunto verrà dimostrato il nostro teorema.

Ora l'asserzione superiore equivale alla identità

$$R'_1 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R'_1}\right) = R'_2 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R'_2}\right),$$

che è facile verificare. Ed infatti essa si scrive dapprima

$$R'_1 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R'_1}\right) = R'_1 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{R_2}{R_1}\,\frac{1}{R'_1}\right)$$

ed equivale quindi all'altra

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{R'_1}\frac{\partial R'_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{R'_1}\frac{\partial R'_1}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Questa, essendo

$$R_1 \frac{\partial^2 R_2}{\partial u \partial v} = R_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial v},$$

può scriversi per le (42)

$$2\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{R'_1}\frac{\partial R'_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}(R_1 R'_1) - \frac{1}{R'_1}\frac{\partial R'_1}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}(R_1 R'_1), = \frac{\partial R'_1}{\partial v}\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial R'_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v},$$

e la sua verifica è immediata, ove si osservino le (42).

Dimostrato così il nostro teorema, resta che ne diamo l'interpretazione geometrica per mezzo delle congruenze W. Ricordiamo che, secondo i risultati del § 242, da ogni deformazione infinitesima nota di una data superficie S si deduce una congruenza W, che ha per una delle falde focali la superficie S, colla costruzione seguente: per ogni punto P di S si conduce quel raggio che giace nel piano tangente ed è normale alla direzione dello spostamento di P. La seconda falda focale S_1 della congruenza W così costruita si dirà, per abbreviare, la *trasformata* di S mediante la deformazione infinitesima considerata.

§. 248.

Interpretazione geometrica per le congruenze W.

Il significato geometrico dei risultati del § precedente per la teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie è dato dal teorema seguente: *Se di una superficie* S *qualunque si considerano due diverse deformazioni infinitesime e si determinano, colla costruzione ora ricordata, le due rispettive superficie trasformate* S_1, S_2, *esisterà una semplice infinità di superficie* S', *deducibili con una quadratura, ciascuna delle quali ammette, come la* S, *la medesima coppia fissa* S_1, S_2 *di superficie trasformate* [1].

Dimostreremo il nostro teorema supponendo che la S', e quindi tutte le sue trasformate, abbiano le assintotiche $(u\ v)$ reali, la dimostrazione per l'altro caso essendo del tutto simile, quando ci si riferisca ad un sistema isotermo-coniugato.

---

[1] Il lettore osserverà che il risultato analitico ottenuto al § precedente segue bensì da questo teorema, ma non equivale interamente alle proprietà geometriche più complete in esso contenute.

Riteniamo la superficie S definita dalle formole di Lelieuvre e cioè, indicando con ξ, η, ζ tre soluzioni particolari della equazione (40) di Laplace, che è altresì l'equazione delle deformazioni infinitesime per la S, definiamo le coordinate x, y, z di un punto P di S colle formole (di Lelieuvre):

$$(43)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e le analoghe per y, z, dedotte con permutazione circolare delle lettere. Essendo poi R_1 una soluzione della (40) si determinino, secondo le (13) (pag. 50), ξ_1, η_1, ζ_1 per quadrature dalle formole

$$(44)\qquad \frac{\partial(\xi_1+\xi)}{\partial u} = (\xi-\xi_1)\frac{\partial \log R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\xi_1-\xi)}{\partial v} = -(\xi+\xi_1)\frac{\partial \log R_1}{\partial v}$$

e dalle analoghe per η_1, ζ_1; allora le formole (16) pag. 52

$$(45)\qquad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \; y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \; z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$$

definiranno una superficie S_1 trasformata della S mediante una deformazione infinitesima appartenente a R_1. Similmente, considerando una seconda soluzione R_2 della (40), si determinino ξ_2, η_2, ζ_2 dalle equazioni

$$(44^*)\qquad \frac{\partial(\xi_2+\xi)}{\partial u} = (\xi-\xi_2)\frac{\partial \log R_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\xi_2-\xi)}{\partial v} = -(\xi+\xi_2)\frac{\partial \log R_2}{\partial v}$$

e le analoghe per η_2, ξ_2; le formole

$$(45^*)\qquad x_2 = x + \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \; y_2 = y + \begin{vmatrix} \zeta_2 & \xi_2 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \; z_2 = z + \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

definiranno una seconda superficie S_2, trasformata di S per una deformazione infinitesima appartenente a R_2.

Ricerchiamo ora, per verificare il teorema, se esistono altre superficie S' le quali abbiano come S, la medesima coppia fissa S_1, S_2 di superficie trasformate. Indicando coll'accento le quantità relative ad una tale superficie S', dovremo determinare ξ', η', ζ' in modo che sussistano simulta-

neamente le formole:

$$(46)\quad x' = x_1 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix},\ y' = y_1 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_1 & \xi_1 \end{vmatrix},\ z' = z_1 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix}$$

$$(46^*)\quad x' = x_2 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},\ y' = y_2 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix},\ z' = z_2 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

ed abbiano luogo le formole di Lelieuvre:

$$(47)\qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial u} & \frac{\partial \zeta'}{\partial u} \end{vmatrix},\quad \frac{\partial x'}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial v} & \frac{\partial \zeta'}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Intanto dalle (46), (46*), sottraendo, e confrontando colle (45), (45*) deduciamo

$$\begin{vmatrix} \eta' - \eta & \zeta' - \zeta \\ \eta_1 - \eta_2 & \zeta_1 - \zeta_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \zeta' - \zeta & \xi' - \xi \\ \zeta_1 - \zeta_2 & \xi_1 - \xi_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \xi' - \xi & \eta' - \eta \\ \xi_1 - \xi_2 & \eta_1 - \eta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

onde, indicando con λ un fattore di proporzionalità, dovremo avere

$$(48)\qquad \xi' = \xi + \frac{1}{\lambda}(\xi_1 - \xi_2),\ \eta' = \eta + \frac{1}{\lambda}(\eta_1 - \eta_2),\ \zeta' = \zeta + \frac{1}{\lambda}(\zeta_1 - \zeta_2).$$

Sostituendo nelle (46) o (46*) risulta

$$(49)\quad x = x + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},\ y' = y + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix},\ z' = z + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}.$$

Ora le due equazioni

$$\sum \xi' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0,\quad \sum \xi' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

tenuto conto delle (43), (44), (44*), si traducono per λ nelle due equazioni lineari

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial}{\partial u} \log (R_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial}{\partial v} \log (R_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{R_1}{R_2}\right), \end{cases}$$

le quali, posto

$$(50)\qquad R'_1 = R_2 \lambda$$

coincidono precisamente colle (42) del § precedente. Esse sono dunque

compatibili e danno λ (o R'_1) con una quadratura. D'altronde con questo valore di λ, sostituito nelle (48), (49), si verifica subito che le equazioni (47) di Lelieuvre risultano soddisfatte, come pure evidentemente le (46), (46*), ed il teorema enunciato risulta così stabilito.

Non lascieremo di osservare che se si considerano quattro punti corrispondenti P, P_1, P_2, P' delle quattro superficie S, S_1, S_2, S', la doppia infinità di quadrilateri sghembi $P P_1 P_2 P'$ è così costituita che ciascun lato genera una congruenza W, i due vertici sul lato essendo i fuochi, e i due piani condotti per questo lato e per ciascuno dei due consecutivi ne sono i piani focali.

In fine notiamo che se si tengono fisse due superficie contigue, p. e. S, S_1, e si fa variare S_2, varierà pure S' e farà conoscere tutte le deformazioni infinitesime di S_1, supposte note quelle di S. Così ci rendiamo geometricamente ragione dell'equivalenza dei due problemi delle deformazioni infinitesime per le due falde S, S_1 di una congruenza W.

§. 249. [1]

Le congruenze W a falde focali di egual curvatura.

Passiamo ora a studiare un'altra notevole classe di congruenze W, di cui le congruenze pseudosferiche (Cap. X, § 150) sono un caso particolare. Proponiamoci per ciò la ricerca di quelle congruenze W, le cui falde della superficie focale hanno in punti corrispondenti eguale curvatura. Ci limiteremo per altro a trattare esplicitamente il caso in cui *le linee assintotiche sulla superficie focale siano reali*, sebbene anche nel caso opposto si possano stabilire risultati simili, usando convenientemente dell'immaginario. [2]

Assumendo a linee coordinate le assintotiche u, v, utilizziamo per la ricerca le formole di Guichard al § 149 (I, pag. 321). Essendo per ipotesi

$$K = K_1,$$

si ha

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \tag{50}$$

---

[1] I risultati di questi ultimi §§ del Capitolo furono stabiliti dall'autore nella memoria del 1890. *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.* — Annali di matematica S.ª 2.ª t. XVIII.

[2] La questione a cui qui si accenna verrà poi ripresa particolarmente nel caso più importante delle superficie a curvatura costante *positiva* (V.ª Cap. XXV).

e inoltre, indicando con σ l'angolo dei piani focali:

$$\xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1 = \rho\cos\sigma\,. \tag{51}$$

Ora prendiamo le tre prime equazioni (13) § 241 (pag. 50), moltiplichiamole ordinatamente prima per ξ, η, ζ; poi per ξ_1, η_1, ζ_1, ed ogni volta sommiamo, avendo riguardo alle (50), (51), con che otteniamo

$$\rho(1-\cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \sum\xi\,\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\right\}$$

$$-\rho(1-\cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \sum\xi_1\,\frac{\partial\xi}{\partial u}\right\}.$$

Di qui sommando deduciamo

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\frac{\partial\log\rho}{\partial u} \tag{52}$$

e similmente operando colle tre ultime (13) pag. 50

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = (1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\,. \tag{52*}$$

Da queste risulta

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{(1+\cos\sigma)\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\right\} + \frac{\partial}{\partial u}\left\{(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right\} = 0\,,$$

ossia per le (52), (52*) stesse

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = 0\,,$$

e perciò

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}\,, \tag{53}$$

indicando con $\varphi(u)$ una funzione della sola u, con $\psi(v)$ una funzione della sola v. Dunque: *Se in una congruenza* W *le due falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura, la curvatura* K, *espressa pei parametri u, v delle linee assintotiche assumerà la forma caratteristica* (53).

Per le formole di Lelieuvre si vede che: *la ricerca delle superficie della classe* (53) *si traduce analiticamente nella ricerca di quelle equazioni di Laplace*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta\,,$$

per le quali esistono tre particolari soluzioni ξ, η, ζ *tali che*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi(u) + \psi(v).$$

Dimostreremo nel prossimo § che la condizione (53) è pur sufficiente per l'esistenza di congruenze W della specie richiesta, aventi S per una delle falde focali.

Qui osserveremo due classi speciali importanti di queste superficie, e cioè:

1.° Le superficie pseudosferiche corrispondenti all'ipotesi $\varphi(u)$, $\psi(v)$ costanti.

2.° Le superficie su cui le linee di egual curvatura ($K =$ costante) sono linee assintotiche e quindi; pel teorema di Enneper, a torsione costante per ciascuna, ma variabile dall'una all'altra assintotica. Esse corrispondono nella (53) a supporre costante una sola delle funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$. Viceversa ogni superficie sulla quale ciascuna linea assintotica di un sistema è una curva a torsione costante appartiene a questa classe. Una superficie semplice di questa classe è evidentemente l'elicoide rigata ad area minima, sulla quale le assintotiche curvilinee sono le eliche. In fine, come superficie appartenenti alla classe *generale* (53), citiamo le superficie conoidali rette Cap. V, § 77 (I, pag. 165), date dalle formole

$$x = -u\psi(v) \quad , \quad y = uv \quad z = \int [v\psi'(v) - \psi(v)]\, dv \, ,$$

nelle quali la curvatura K ha per espressione

$$K = -\frac{1}{[u^2 + v^2 + \psi^2(v)]^2} \, .$$

§. 250.

Costruzione delle particolari congruenze W da una falda della superficie focale.

Andiamo ora a dimostrare il seguente teorema: *Ogni superficie* S, *la cui curvatura* K, *espressa pei parametri* u, v *delle assintotiche, abbia la forma* (53), *appartiene come prima falda focale ad una doppia infinità di congruenze* W *della specie richiesta; data la* S, *la ricerca di queste* ∞^2 *congruenze dipende dall'integrazione di un'equazione di Riccati* [1].

---

[1] Analiticamente ciò significa che da ogni equazione di Laplace $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta$ per la quale esistono tre soluzioni particolari ξ, η, ξ tali che $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varphi(u) + \psi(v)$ si deducono, per trasformazione di Moutard, ∞^2 equazioni della stessa specie; inoltre per queste trasformate rimane la stessa la somma $\varphi(u) + \psi(v)$.

Supposta data la superficie S, della classe (53), per costruire le congruenze cercate dovremo in primo luogo calcolare l'angolo σ dalle (52), (52*), che integrate danno

$$(54) \qquad tg\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\varphi(u)+k}{\psi(v)-k}},$$

indicando k una costante arbitraria.

Ora dimostreremo che fissato comunque k si può costruire, corrispondentemente al valore (54) di σ, una semplice infinità di congruenze W della specie richiesta, aventi S per prima falda focale.

Intanto dalla formola di Ribaucour (§ 243)

$$K K_1 = \frac{1}{D^4},$$

essendo D la distanza dei punti limiti e dall'ipotesi $K = K_1 = -\frac{1}{\rho^2}$, deduciamo $D = \rho$, onde la distanza focale δ sarà

$$\delta = \rho \operatorname{sen}\sigma.$$

Consideriamo ora in ogni punto di S le direzioni delle linee di curvatura, i cui coseni di direzione indichiamo con X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2. Sulla sfera rappresentativa queste due direzioni sono le bisettrici delle linee coordinate (u, v) e valgono quindi le formole stabilite al § 148 (I, pag. 320) che qui, per maggiore chiarezza, riportiamo: [1]

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{e}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}.X_1 + \cos\dfrac{\Omega}{2}.X_2\right), \quad \dfrac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{g}\left(-\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}.X_1 + \cos\dfrac{\Omega}{2}.X_2\right) \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -A X_2 - \sqrt{e}\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2} X, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = B X_2 + \sqrt{g}\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}.X \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = A X_1 - \sqrt{e}\cos\dfrac{\Omega}{2} X, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -B X_1 - \sqrt{g}\cos\dfrac{\Omega}{2}.X \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\dfrac{e}{g}}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' \operatorname{sen}\Omega = -\dfrac{\sqrt{e}}{\rho_v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} \\ B = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\dfrac{g}{e}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' \operatorname{sen}\Omega = -\dfrac{\sqrt{g}}{\rho_u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}. \end{cases}$$

---

[1] Le formole del testo si riferiscono all'elemento lineare sferico

$$ds^2 = e\,du^2 + 2\cos\Omega\sqrt{eg}\,du\,dv + g\,dv^2$$

e con $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}$ si indicano le curvature geodetiche delle linee sferiche u, v.

Per le coordinate x, y, z di un punto F di S le formole del Cap. V (I, pag. 156) danno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \rho\sqrt{e}\left(\cos\dfrac{\Omega}{2}\ X_1 - \operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\ X_2\right) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\rho\sqrt{g}\left(\cos\dfrac{\Omega}{2}\ X_1 + \operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\ X_2\right). \end{cases}$$

Ora se indichiamo con φ l'angolo incognito d'inclinazione del raggio F F′ della congruenza richiesta sulla direzione (X_1, Y_1, Z_1) uscente da F sopra S, per le coordinate x', y', z' del secondo fuoco F′ avremo evidentemente:

$$(55)\qquad \begin{cases} x' = x + \rho \operatorname{sen}\sigma\,(X_1\cos\varphi + X_2\operatorname{sen}\varphi) \\ y' = y + \rho \operatorname{sen}\sigma\,(Y_1\cos\varphi + Y_2\operatorname{sen}\varphi) \\ z' = z + \rho \operatorname{sen}\sigma\,(Z_1\cos\varphi + Z_2\operatorname{sen}\varphi), \end{cases}$$

ed ora dobbiamo assoggettare φ alle condizioni richieste dal nostro problema. In primo luogo la normale in F′ alla S′, luogo del punto F′, deve essere normale al segmento FF′; secondariamente essa deve essere inclinata dell'angolo σ sulla normale (X, Y, Z) di S in F. Indicando adunque con X′, Y′, Z′ i coseni di direzione di questa normale in F′ alla S′, dovremo avere

$$(56)\qquad X' = X\cos\sigma + \operatorname{sen}\sigma\,(X_2\cos\varphi - X_1\operatorname{sen}\varphi)$$

e analogamente per Y′, Z′. D'altra parte X′, Y′, Z′ debbono soddisfare alle due equazioni

$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0\,,\quad \sum X'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0\,,$$

che, calcolate per mezzo delle (55), (56) e delle formole precedenti, si traducono nelle due equazioni simultanee per l'angolo incognito φ:

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = A + \sqrt{e}\ \dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\left(\varphi + \dfrac{\Omega}{2}\right) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = -B - \sqrt{g}\ \dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\left(\varphi - \dfrac{\Omega}{2}\right). \end{cases}$$

Ora diciamo che questo sistema (57) è *illimitatamente integrabile*. Per verificare questa proprietà basta tener conto dell'identità (26) già segnalata al § 243 (pag. 58)

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{eg}\operatorname{sen}\Omega$$

ed inoltre delle formole

$$(58)\qquad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 2(1+\cos\sigma)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = -2(1-\cos\sigma)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}',$$

che seguono dalle (52), (52*) e dai valori

$$\frac{\partial \log\rho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \quad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'.$$

Colle (58) si verificano poi facilmente le due identità:

$$(\gamma)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right) = \sqrt{e}\cos\Omega\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' - \sqrt{g}\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{e}\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right) = \sqrt{g}\cos\Omega\,\dfrac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' - \sqrt{e}\,\dfrac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \end{cases}$$

dopo di che la condizione d'integrabilità per le (57) risulta identicamente soddisfatta.

Dopo di ciò risulta assicurata l'esistenza di una soluzione φ delle (57), di cui sia dato ad arbitrio il valore iniziale φ_0 in un punto (u_0, v_0) di S. Si osservi poi che alle (57) si può dare la forma di un'equazione a differenziali totali del tipo di Riccati, assumendo come funzione incognita $tg\,\frac{\varphi}{2}$.

Resta a dimostrarsi che, presa per φ una qualunque soluzione delle (57), la congruenza costruita sarà una congruenza W e la curvatura K' della seconda falda S' in F' eguaglierà quella K di S in F. Ora, la prima proprietà si verifica facilmente, verificando che hanno luogo le due equazioni

$$\sum \frac{\partial X'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial X'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

esprimenti che le u, v sono assintotiche sulla S'. Queste due equazioni infatti, calcolate per mezzo delle formole precedenti, si traducono nelle (58). Dopo di ciò anche la seconda proprietà $K' = K$ risulta subito dal teorema di Ribaucour $K K' = \frac{1}{\rho^4}$.

Così dunque è pienamente dimostrata l'esistenza di ∞^2 congruenze speciali W, a falde focali d'egual curvatura, delle quali sia assegnata la prima falda focale S. Nello stesso tempo abbiamo un processo per dedurre da una superficie nota S della classe (53) una doppia infinità di

tali nuove superficie integrando un'equazione di Riccati. Per le proprietà delle equazioni di Riccati, basterà fissato nella (54) il valore della costante k, conoscere *una* delle superficie trasformate S′ per dedurre tutte le altre ∞^1 con quadrature. Se si applica poi nuovamente la medesima trasformazione ad una delle superficie trasformate S′, per essa conosciamo già una particolare trasformata, la superficie primitiva S, e per ciò con sole quadrature troveremo tutte le trasformate di S′ (fermo rimanendo il valore della costante k).

§. 251.

Il teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie S della classe (53).

Studieremo in altro capitolo più da vicino le trasformazioni sopra segnalate pel caso singolarmente importante delle superficie pseudosferiche. Ma già per le superficie generali S della classe (53), appoggiandoci sui risultati ottenuti al § 248, dimostriamo come il metodo di trasformazione sia suscettibile di un notevole perfezionamento che permette, sotto certe condizioni, di evitare le quadrature. Precisamente dimostreremo che: *Se di una superficie* S *della classe* (53) *si conoscono tutte le* ∞^2 *superficie trasformate* S′, *per ciascuna di queste l'applicazione successiva del metodo di trasformazione richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazione.*

Consideriamo della superficie data S della classe (53) due particolari trasformate S_1, S_2 corrispondenti ai rispettivi valori k_1, k_2 della costante k nella (54). Diremo, per abbreviare, che S_1 è dedotta da S con una trasformazione T_{k_1} ed S_2 con una trasformazione T_{k_2}.

Secondo il teorema generale al § 248, esisterà una semplice infinità di superficie S′, deducibile con una quadratura, ciascuna delle quali tanto con S_1 quanto con S_2 forma la superficie focale di una congruenza W. Ora nel caso nostro particolare dimostriamo il teorema:

A) *Fra le* ∞^1 *superficie* S′ *ve ne ha, oltre* S, *una ed una soltanto* S_3 *che ha in ogni punto la curvatura comune di* S, S_1, S_2 *ed è ottenuta da* S_1 *per mezzo di una delle nostre trasformazioni* T'_{k_2} *a costante* k_2 *e insieme da* S_2 *con una trasformazione* T'_{k_1}. Siccome, secondo l'enunciato, si perviene da S a S_3 sia colla trasformazione composta $T_{k_1}\ T'_{k_2}$ sia coll'altra $T_{k_2}\ T'_{k_1}$ potremo scrivere simbolicamente

$$(S)\ T_{k_1}\ T'_{k_2} = (S)\ T_{k_2}\ T'_{k_1}$$

e daremo per ciò a questo teorema il nome di *teorema di permutabilità*. Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che se nella serie ∞^1 di superficie S' esiste la superficie supposta S_3, essa sarà unica e determinata. E infatti, riprendendo le notazioni del § 248, dalle formole

$$(59)\qquad \xi_3 = \xi + \frac{1}{\lambda}(\xi_1 - \xi_2),\ \eta_3 = \eta + \frac{1}{\lambda}(\eta_1 - \eta_2),\ \zeta_3 = \zeta + \frac{1}{\lambda}(\zeta_1 - \zeta_2)$$

quadrando e sommando, tenendo conto della ipotesi

$$\sum \xi^2 = \sum \xi_1^2 = \sum \xi_2^2 = \sum \xi_3^2 = \rho,$$

deduciamo per λ il valore unico

$$(60)\qquad \lambda = \frac{\rho - \sum \xi_1 \xi_2}{\sum \xi \xi_2 - \sum \xi \xi_1}.$$

La nostra superficie S sarà poi definita dalle formole del § 248

$$(61)\quad x_3 = x + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},\ y_3 = y + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix},\ z_3 = z + \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

e, secondo i risultati del § ora citato, basterà provare che sussistono le relazioni

$$\sum \xi_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0,\ \sum \xi_3 \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0$$

per avere verificate le asserzioni del teorema. Ora indichiamo con σ_1, φ_1 i valori delle funzioni σ, φ del § precedente relative alla superficie S_1, e con σ_2, φ_2 quelli relativi a S_2.

Per le (56) abbiamo

$$\xi_1 = \sqrt{\rho}\left\{\cos\sigma_1 X - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\varphi_1 X_1 + \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\varphi_1 X_2\right\}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\rho}\left\{\cos\sigma_2 X - \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\varphi_2 X_1 + \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\varphi_2 X_2\right\},$$

per cui la (60) dà intanto per λ il valore

$$(60^*)\qquad \lambda = \frac{1 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}$$

e successivamente, ponendo

$$\xi_3 = \sqrt{\rho}\, X_3,\ \eta_3 = \sqrt{\rho}\, Y_3,\ \zeta_3 = \sqrt{\rho}\, Z_3,$$

le (59), (61) diventano

$$(59^*)\quad X_3 = X + \frac{1}{\lambda}\Big\{(\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2)\,X + (\operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\varphi_1)\,X_1 + (\operatorname{sen}\sigma_1\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\sigma_2\cos\varphi_2)\,X_2\Big\}$$

$$(61^*)\quad x_3 = x + \frac{\rho}{\lambda}\Big\{\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)\,X + (\operatorname{sen}\sigma_1\cos\sigma_2\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\sigma_2\cos\sigma_1\cos\varphi_2)\,X_1 + (\operatorname{sen}\sigma_1\cos\sigma_2\operatorname{sen}\varphi_1 - \operatorname{sen}\sigma_2\cos\sigma_1\operatorname{sen}\varphi_2)\,X_2\Big\}.$$

Dopo di ciò, calcolando le somme

$$\sum X_3\frac{\partial x_3}{\partial u} \quad , \quad \sum X_3\frac{\partial x_3}{\partial v},$$

col tener presenti le (57), (58), si trova appunto che esse sono identicamente nulle. D'altra parte dalle (59), (60) si ha subito

$$\sum \xi_1\xi_3 = \sum \xi\xi_2$$

$$\sum \xi_2\xi_3 = \sum \xi\xi_1,$$

onde segue che la normale alla S_3 fa colle normali a S_1, S_2 i rispettivi angoli σ_2, σ_1 che la normale alla S forma colle normali a S_2, S_1. Dunque S_3 è legata a S_1 da una T'_{k_2}, e a S_2 da una T'_{k_1}.

Dal teorema A) di permutabilità così dimostrato segue poi la dimostrazione delle proprietà enunciate al principio del §, osservando che note S, S_1, S_2, la quarta superficie S_3 si ottiene senza alcuna integrazione. Suppongasi invero che della S si conoscano tutte le ∞^2 trasformate. Sceltane una S_1, si tengano fisse S, S_1 e si faccia variare S_2 nella doppia infinità nota di trasformate di S; ogni volta si avrà la corrispondente S_3 senza calcoli d'integrazione. Ora questa S_3 percorre appunto le ∞^2 trasformate di S_1, le quali sono adunque senza altro note.

Così p. e. il lettore verificherà facilmente che se si prende per S 1.° la pseudosfera, 2.° l'elicoide rigata ad area minima, 3.° il paraboloide iperbolico equilatero, le ∞^2 trasformate della S si avranno per quadrature, dopo di che l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione alle nuove superficie della classe (53) via via ottenute non richiederà più alcun calcolo d'integrazione.

§. 252.

Superficie deformabili in modo continuo con conservazione di un sistema coniugato [1].

Le superficie S della classe (53) che abbiamo studiate negli ultimi tre paragrafi stanno in una notevole relazione col problema generale già accennato alla fine del § 239, e cioè colla ricerca delle superficie suscettibili di una deformazione continua nella quale un sistema coniugato si conserva coniugato. Si è visto già, al § 239, che l'immagine sferica di un tale sistema coniugato (u, v) è caratterizzata dalle relazioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' . \tag{62}$$

Ora il sistema sferico (u, v), essendo

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' ,$$

è altresì l'immagine delle assintotiche di una superficie S, per la quale posto come al solito

$$K = -\frac{1}{\rho^2} ,$$

si ha

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' , \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' ,$$

e la seconda delle (62) si traduce nella equivalente

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \rho}{\partial u}\frac{\partial \log \rho}{\partial v} = 0 ,$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = 0 .$$

Di qui si conclude: *Le superficie Σ deformabili in modo continuo con conservazione di un sistema coniugato sono tutte e sole le superficie asso-*

---

[1] Delle superficie studiate nel presente § si era già occupato PETERSON (Cf. STÄCKEL: *Biegungen und conjugirte Systeme* § 4). Più completamente furono trattate nel 1891 da COSSERAT (Comptes Rendus de l'Académie de Paris 12 e 19 octobre 1891).

ciate nelle deformazioni infinitesime alle superficie S *la cui curvatura* K, *espressa pei parametri* u, v *delle assintotiche, ha la forma* (53)

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2};$$

alle assintotiche di S *corrisponde sopra* Σ *il sistema coniugato* u, v *permanente nella deformazione.*

I risultati ottenuti nei §§ precedenti sulle superficie della classe (53) ci pongono ora in grado di trovare *con sole quadrature* quante si vogliano classi di superficie Σ deformabili con conservazione di un sistema coniugato. Basta infatti conoscere una superficie S ed una sua deformazione infinitesima e se ne dedurrà in termini finiti una superficie Σ associata ad S in quella deformazione infinitesima. Ora si parta da una superficie S della classe (53) della quale: 1.° si conoscano tutte le deformazioni infinitesime, 2.° si conoscano tutte le ∞^2 trasformate colle trasformazioni del § 250; questo è ad esempio il caso se per S si prende una pseudosfera, o un'elicoide rigata ad area minima, o un paraboloide iperbolico equilatero. Per i risultati al § 251 l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione si farà in termini finiti; nello stesso tempo, per le proprietà delle congruenze W (Cf. particolarmente § 243), si avranno *con quadrature* tutte le deformazioni infinitesime delle superficie trasformate. Dunque *con sole quadrature* si determineranno tutte le superficie associate Σ, come sopra abbiamo asserito.

Ora è da osservarsi che, nota una superficie S della classe (53) ed una sua superficie associata Σ, per trovare le ∞^1 superficie deformate della Σ con conservazione del sistema coniugato (u, v), occorrerà l'integrazione di un'equazione di Riccati, che permette di risalire dalle espressioni note dei coefficienti delle due forme fondamentali delle superficie deformate Σ' alla conoscenza delle superficie stesse in termini finiti. Per altro i teoremi di Peterson (§ 250) ci dimostrano che: *Integrata l'equazione di Riccati per la superficie* Σ, *per tutte le superficie della medesima classe aventi a comune con* Σ *l'immagine del sistema coniugato* (u, v), *cioè per tutte le altre associate di* S, *basteranno quadrature per determinare le corrispondenti* ∞^1 *deformate.*

Alle ∞^1 superficie Σ applicabili con conservazione del sistema coniugato (u, v) corrisponde una serie ∞^1 di superficie S della classe (53), serie che è perfettamente determinata da una delle sue superficie. *Così ab-*

biamo in sostanza un nuovo metodo di trasformazione per le superficie S *della classe* (53), *l'integrazione di un'equazione di Riccati permettendo di dedurre una serie* ∞^1 *di superficie* S *da una nota*. Queste nuove trasformazioni sono di natura affatto differente da quelle studiate ai §§ 250, 251; [1] in particolare per le superficie a curvatura costante esse sono le così dette trasformazioni di Lie-Bonnet, sulle quali ritorneremo in altro capitolo.

Terminiamo coll'addurre alcuni esempi di classi di superficie Σ.

1.° Come primo esempio adduciamo quello, già ritrovato al § 240, delle superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica deformabili con conservazione delle linee di curvatura. La superficie S associata, avendo per immagine delle assintotiche il sistema ortogonale ed isotermo dei meridiani e paralleli, non è altro che l'elicoide rigata ad area minima [2].

2.° Si prenda ora come superficie della classe S il paraboloide iperbolico equilatero. Le immagini sferiche delle assintotiche (generatrici) essendo qui circoli massimi, cioè geodetiche della sfera, si ha

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0,$$

quindi pel sistema coniugato (u, v) sulla superficie

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Le superficie Σ associate al paraboloide equilatero sono dunque superficie di traslazione, che di più hanno le curve generatrici piane e precisamente in piani perpendicolari (paralleli ai piani direttori del paraboloide). Viceversa ogni superficie di traslazione di questa specie è associata al paraboloide equilatero ed è quindi applicabile sopra una serie ∞^1 di superficie della medesima classe.

---

[1] Per accertarsene basta osservare che mentre le trasformazioni antiche conducono da una superficie S a nuove superficie della stessa classe dipendenti da quante si vogliano costanti arbitrarie, le nuove considerate ora nel testo introducono una sola costante arbitraria.

[2] Nella prima edizione di questo libro è indicata invece, per errore, come superficie associata il catenoide.

3.° Da ultimo prendiamo per S una superficie pseudosferica qualunque. Le sue superficie associate sono superficie di Voss (vedi § 151 I, pag. 326) sulle quali le linee u, v corrispondenti alle assintotiche di S, formano un sistema coniugato di linee geodetiche.

Ne deduciamo: *Ogni superficie di Voss è suscettibile di una deformazione continua, nella quale il sistema geodetico coniugato si conserva coniugato.*

Capitolo XVII.

Deformazione delle congruenze rettilinee ed inviluppi di sfere [1]

Deformazione di una congruenza rettilinea al modo di Beltrami. — Inviluppi di una doppia infinità di sfere e deformazione della superficie dei centri. — Formole fondamentali per la deformazione delle congruenze o degli inviluppi di sfere e calcolo degli elementi relativi alle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo. — Ricerca di tutti gli inviluppi di sfere nei quali, in qualsiasi deformazione, le due falde si mantengono a curvatura media H costante. — Caso di $H=0$; la superficie dei centri S_0 è applicabile sul paraboloide di rotazione. — Primo teorema di Guichard. — Caso di $H \neq 0$; la superficie dei centri applicabile sull'ellissoide allungato o iperboloide di rotazione a due falde e secondo teorema di Guichard. — Caso in cui le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ si mantengono a curvatura costante negativa; i tre tipi di superficie di rotazione S_0 corrispondenti. — Caso in cui Σ, $\overline{\Sigma}$ si riducono a curve od a superficie sviluppabili. — Esame di un problema generale e sua riduzione ai casi di Weingarten e Guichard. — Inviluppi di sfere tali: 1.° che sulle due falde si corrispondano le linee di curvatura, 2.° che ai sistemi ortogonali sulle due falde corrispondano i sistemi coniugati sulla superficie dei centri, 3.° ai sistemi coniugati di Σ, $\overline{\Sigma}$ i sistemi coniugati di S_0. — Inviluppi di sfere nei quali le due falde sono contigue per trasformazioni di Moutard ad una medesima superficie. — Le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ hanno la stessa curvatura costante ed hanno ∞^1 trasformate contigue di Moutard fra le quali due (reali od immaginarie) colla medesima curvatura costante.

§. 253.

Deformazione delle congruenze e dei sistemi ∞^1 di sfere.

Nel presente capitolo riprendiamo lo studio delle generali congruenze rettilinee per considerarne le deformazioni nel senso del teorema di Beltrami, dimostrato al § 144 (I, pag. 311).

---

[1] Le teorie esposte nel presente Capitolo sono tratte dai primi paragrafi della memoria dell'Autore: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante*. (Annali di matematiche, serie 3.ª t. III, 1899).

Avendo in mira soltanto le applicazioni alla teoria delle superficie a curvatura costante, tralasciamo di occuparci delle deformazioni più generali delle congruenze. Fra queste le più interessanti, dopo le deformazioni al modo di Beltrami considerate nel testo, sono le deformazioni *al modo di Ribaucour*, nelle quali i raggi giacciono individualmente nei piani tangenti di una superficie Σ che si deforma seco trasportando i piani tangenti ed i raggi ivi invariabilmente fissati. Per queste deformazioni il lettore può consultare la memoria di Ribaucour (Journal de Mathém. 1891) e l'altra mia memoria: *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili*. (Annali di matematica, serie 3.ª T. VI, 1901).

Immaginiamo i raggi di una congruenza *normale* C uscenti dai punti M_0 di una superficie iniziale S_0; se la superficie S_0, supposta flessibile ed inestendibile, si deforma seco trascinando i raggi di C, invariabilmente connessi agli elementi del piano tangente di S_0, diremo che la congruenza C si deforma *al modo di Beltrami*. Colla deformazione delle congruenze rettilinee normali si collega la considerazione dell'inviluppo di una doppia infinità di sfere aventi i loro centri sopra la superficie iniziale S_0. Ed anzi la considerazione degli inviluppi di sfere porta insieme a stabilire il teorema già ricordato di Beltrami ed il teorema di Dupin relativo alla riflessione delle congruenze normali (§ 144), come andiamo ora rapidamente a stabilire.

Riferiamo la superficie S_0 ad un doppio sistema ortogonale (u, v) e sia

$$ds^2 = E_0\,du^2 + G_0\,dv^2$$

l'elemento lineare di S_0.

Definiamo poi una doppia infinità di sfere aventi i loro centri nei punti $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di S_0, dando il raggio R della sfera in funzione di (u, v). L'equazione della sfera mobile sarà

$$(a) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

e i punti ove essa tocca l'inviluppo saranno dati dall'associare alla precedente equazione le due che se ne ottengono per derivazione rapporto ad u, v, cioè

$$(b)\quad \begin{cases} (x-x_0)\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + (y-y_0)\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + (z-z_0)\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial z_0}{\partial u} = -R\,\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial R}{\partial u} \\ (x-x_0)\dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + (y-y_0)\dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + (z-z_0)\dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial z_0}{\partial v} = -R\,\dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial R}{\partial v}. \end{cases}$$

I due piani (*b*) si tagliano secondo una retta normale al piano tangente di S_0 e i due punti M, $\overline{M}$ (reali od immaginarii) ove questa retta incontra la sfera (*a*), simmetrici rispetto al detto piano tangente, sono i punti cercati ove la sfera tocca il suo inviluppo. Questo inviluppo consta adunque di due falde Σ, $\overline{\Sigma}$, che sono i rispettivi luoghi di M, $\overline{M}$. Le normali di Σ sono evidentemente i raggi $M_0 M$, quelle di $\overline{\Sigma}$ i raggi riflessi $M_0 \overline{M}$. Ora l'osservazione semplicissima, ma fondamentale, che le equazioni (*a*), (*b*) suggeriscono è la seguente: *Se la superficie* S_0 *luogo*

dei centri si deforma, seco trascinando le sfere, i punti M, $\overline{M}$ *di contatto di ogni sfera col suo inviluppo serbano sulla sfera una posizione invariabile rispetto agli elementi del piano tangente di* S_0.

Di qui segue nuovamente il teorema di Beltrami, insieme a quello testè ricordato di Dupin.

Le due falde dell'inviluppo possono essere reali od immaginarie, come sopra si è detto. Dalle (*a*) e (*b*) si vede subito che ha luogo il primo od il secondo caso secondo che l'espressione

$$\frac{1}{E_0}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G_0}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2,$$

che non è altro che il parametro differenziale primo $\Delta_1 R$, calcolato rispetto a ds_0, è minore o maggiore dell'unità. Il caso $\Delta_1 R = 1$ merita speciale considerazione perchè allora soltanto le due falde dell'inviluppo coincidono. I punti M, $\overline{M}$ coincidendo, si vede subito geometricamente che i raggi M, M sono le tangenti ad un sistema di geodetiche di S_0, la quale è una delle falde dell'evoluta di Σ.

Alla deformazione della superficie dei centri di questi speciali inviluppi di sfere si lega uno dei più importanti teoremi della teoria delle superficie, il teorema di Weingarten (Cap. IX. § 132) sulle evolute delle superficie W. È chiaro infatti che possiamo enunciare il risultato di Weingarten così: quando la superficie S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione, ed il raggio della sfera mobile eguaglia l'arco di meridiano contato da un parallelo fisso, la superficie Σ, nella quale coincidono le due falde dell'inviluppo di sfere, ha i raggi principali di curvatura legati da una relazione fissa al deformarsi di S_0. Una semplicissima considerazione geometrica dimostra d'altronde l'esistenza di circostanze analoghe in altri inviluppi di sfere *a falde non coincidenti*. Se si considerano infatti le sfere di raggio costante aventi i centri distribuiti sopra una superficie a curvatura costante S_0, deformando comunque S_0 le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo (parallele ad S_0) avranno evidentemente i raggi principali di curvatura legati da una relazione fissa. Oggetto principale delle nostre ricerche nel presente capitolo sarà di trovare tutti gli altri casi pei quali, deformando comunque la superficie dei centri di un inviluppo di sfere, si presenta una circostanza analoga per l'una o per l'altra falda dell'inviluppo. Perverremo per questa via ai recenti, eleganti risultati che Guichard ha ottenuto nello studio del problema della deformazione delle quadriche di rotazione.

§. 254.

Formole fondamentali per la deformazione delle congruenze.

Consideriamo una congruenza C che si deforma al modo di Beltrami. Sulla superficie di partenza S_0 pei raggi della congruenza prendiamo a linee coordinate u quelle che sono normali ai raggi della congruenza, [1] a linee v le loro traiettorie ortogonali. La S_0, in ogni sua speciale configurazione, sarà perfettamente definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$ds_0^2 = E_0\,du^2 + G_0\,dv^2$$

$$D_0\,du^2 + 2\,D'_0\,du\,dv + D''_0\,dv^2.$$

Ricordiamo che questi coefficienti sono legati fra loro *unicamente* dalla equazione di Gauss

$$\text{(I)}\qquad \frac{D_0 D''_0 - D'^2_0}{E_0 G_0} = K_0,$$

dove K_0 indica la curvatura di S_0, e dalle due equazioni di Codazzi

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0 + \dfrac{1}{G_0}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{E_0 G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D'_0 + \dfrac{1}{E_0}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0 = 0. \end{cases}$$

Per le ricerche seguenti è fondamentale l'osservazione che: *qualunque altra relazione in termini finiti fra* D_0, D'_0, D''_0 *e gli elementi indeformabili della superficie non può sussistere in tutte le flessioni di* S_0, *se non diventa un'identità in forza dell'equazione* (I) *di Gauss.*

In caso contrario infatti la (I), insieme alla nuova equazione in termini finiti fra D_0, D'_0, D''_0, u, v, servirebbe ad esprimere p. e. D'_0, D''_0 in funzione di D_0, u, v, e sostituendo nelle (II) avremo due equazioni simultanee del primo ordine per D_0 la cui risoluzione (supposta possibile) darebbe *tutte* le flessioni di S_0. Ora ciò è assurdo, il problema della deformazione generale di una superficie dipendendo invece da un'unica

---

[1] Nel solo caso che la congruenza C sia quella delle normali a S_0, queste linee restano indeterminate; potranno allora scegliersi in modo affatto arbitrario.

equazione del 2.° ordine, l'equazione dell'applicabilità (I, pag. 289). Dalla osservazione superiore segue in particolare: *Una relazione lineare fra* D_0, D'_0, D''_0

$$\alpha D_0 + \beta D'_0 + \gamma D''_0 + \delta = 0 ,$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sono funzioni fisse di* u, v, *non può aver luogo per tutte le flessioni di* S_0 *se non è un'identità, cioè* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Indichino ora x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto $M_0 \equiv (u, v)$ mobile sopra S_0 e

$$\begin{matrix} X_1 , & Y_1 , & Z_1 \\ X_2 , & Y_2 , & Z_2 \\ X_3 , & Y_3 , & Z_3 \end{matrix}$$

rispettivamente i coseni di direzione della terna ortogonale uscente da M_0 e formata: 1.° dalla tangente alla linea v, 2.° dalla tangente alla linea u, 3.° dalla normale alla superficie. Le formule della teoria generale delle superficie ci danno allora le formole fondamentali seguenti:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \sqrt{E_0}\, X_1 \quad , \quad \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \sqrt{G_0}\, X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G_0}} \dfrac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} X_2 + \dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}} X_3 , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E_0}} \dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} X_2 + \dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}} X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G_0}} \dfrac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} X_1 + \dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}} X_3 , \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E_0}} \dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} X_1 + \dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}} X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}} X_1 - \dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}} X_2 , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}} X_1 - \dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}} X_2 , \end{cases}$$

colle analoghe che si deducono per permutazione circolare delle lettere.

Indichiamo ora con $\sigma = \sigma(u, v)$ l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza C, emanante dal punto (u, v) di S_0, sulla superficie, cioè sulla linea v. I coseni di direzione X, Y, Z del raggio della congruenza si potranno assumere dalla formola

$$(2)\qquad X = X_1 \cos\sigma + X_3 \operatorname{sen}\sigma$$

e dalle analoghe.

Derivando la (2), con riguardo alle (1), troviamo

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\operatorname{sen}\sigma\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_1-\left(\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)X_2+ \\ \qquad\qquad +\cos\sigma\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)X_3 \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\operatorname{sen}\sigma\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_1+\left(\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)X_2+ \\ \qquad\qquad +\cos\sigma\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right)X_3\,. \end{cases}$$

Se ora introduciamo per gli elementi della nostra congruenza C le notazioni di Kummer (§ 137, I, pag. 298), ponendo:

$$E'=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2,\quad F'=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\quad G'=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

$$e=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u},\quad f=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v},\quad f'=\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u},\quad g=\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v},$$

troveremo subito dalle (1), (3) le espressioni seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} E'=\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\sigma\,D'_0}{\sqrt{G_0}}+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)^2, \\ G'=\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)^2 \\ F'=\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right)-\left(\dfrac{\operatorname{sen}\sigma\,D'_0}{\sqrt{G_0}}+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) \end{cases}$$

$$(5^*)\quad \begin{cases} e=-\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right),\quad f=-\sqrt{G_0}\left(\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}}+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right) \\ f'=-\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right),\quad g=\sqrt{G_0}\left(\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+\operatorname{sen}\sigma\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right). \end{cases}$$

Calcolando di qui i valori delle tre quantità fondamentali:

$$E'G' - F'^2,\ gE' - (f+f')F' + eG',\ eg - ff',$$

troviamo:

$$(8)\quad \begin{cases} E'G' - F'^2 = M^2,\ gE' - (f+f')F' + eG' = \\ \left\{\sqrt{G_0}\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) - \operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\right\} M \\ eg - ff' = -\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0 G_0}\,M\ , \end{cases}$$

dove si è posto per abbreviare

$$M = \left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right).$$

Tenendo conto della equazione (I) di Gauss, si vede subito che questo fattore M si esprime linearmente per D_0, D'_0, D''_0 colla formola:

$$(6^*)\qquad M = \frac{\cos\sigma}{E_0}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0 + \left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)D'_0 -$$

$$- \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}D''_0 + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma K_0\sqrt{E_0 G_0}\ .$$

Queste formole valgono per qualunque congruenza C, normale o no. Ma, poichè la nostra congruenza C è supposta normale, dovremo avere (I, pag. 310) $f = f'$, cioè per le (5^*)

$$(7)\qquad \frac{\partial(\sqrt{E_0}\cos\sigma)}{\partial v} = 0\ .$$

§. 255.

Elementi relativi alle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo di sfere.

Indicando con Σ una delle superficie ortogonali alla congruenza C, sia $M \equiv (x, y, z)$ il punto ove il raggio di C uscente da M_0 incontra Σ; ponendo $\overline{M_0 M} = T$, avremo

$$x = x_0 + T X, \quad y = y_0 + T Y, \quad z = z_0 + T Z, \tag{8}$$

dove T sarà da calcolarsi in funzione di u, v dalle due condizioni

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

che danno (I, pag. 311):

$$\frac{\partial T}{\partial u} = -\sqrt{E}\cos\sigma, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = 0.$$

Dunque T è funzione della sola u, definita (a meno di una costante additiva) dall'equazione

$$\frac{dT}{du} = -\sqrt{E}\cos\sigma. \tag{9}$$

Dalle (8), che definiscono la superficie Σ, derivando abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_0}{\partial u} + T\frac{\partial X}{\partial u} - \sqrt{E}\cos\sigma X, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v} + T\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Se indichiamo dunque con

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

le due forme fondamentali di Σ, ne dedurremo subito:

$$\begin{cases} E = T^2 E' + 2Te + E_0 \operatorname{sen}^2\sigma, \; F = T^2 F' + 2Tf, \; G = T^2 G' + 2Tg + G_0 \\ -D = TE' + e, \; -D' = TF' + f, \; -D'' = TG' + g. \end{cases} \tag{10}$$

Indicando con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura di Σ, dalle formole (I, pag. 154) [1]

$$r_1 + r_2 = \frac{2F'D' - E'D'' - G'D}{E'G' - F'^2}$$

$$r_1 r_2 = \frac{DD'' - D'^2}{E'G' - F'^2},$$

---

[1] Siccome adoperiamo qui le formole di rappresentazione sferica per la Σ, escludiamo naturalmente il caso che Σ sia sviluppabile, cioè che si abbia $E'G' - F'^2 = 0$, ossia $M = 0$.

pei valori precedenti di D, D', D'', si trae

$$r_1 + r_2 = \frac{2T(E'G' - F'^2) + eG' - 2fF' + gE'}{E'G' - F'^2},$$

$$r_1 r_2 = \frac{T^2(E'G' - F'^2) + T(eG' - 2fF' + gE') + eg - f^2}{E'G' - F'^2}.$$

Sostituendo i valori (6), col porre inoltre per brevità

$$(11)\quad N = \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}} D_0 + \operatorname{sen}^2\sigma \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}} D''_0 + \sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u},$$

ne dedurremo le formole definitive

$$(12)\quad \begin{cases} r_1 + r_2 = 2T + \dfrac{N}{M} \\ r_1 r_2 = T^2 + T\dfrac{N}{M} - \dfrac{\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0 G_0}}{M}. \end{cases}$$

Osserviamo ora che se in tutte le formole precedenti si cangia σ in $-\sigma$, la (7) è sempre soddisfatta, ed X, Y, Z si cangiano in

$$\overline{X} = \cos\sigma X_1 - \operatorname{sen}\sigma X_2,\ \overline{Y} = \cos\sigma Y_1 - \operatorname{sen}\sigma Y_2,\ \overline{Z} = \cos\sigma Z_1 - \operatorname{sen}\sigma Z_2$$

cioè la congruenza C si cangia nella sua riflessa sulla superficie S_0. Se manteniamo a T il medesimo valore, ciò che è lecito per la (9), la superficie Σ verrà a cangiarsi nella superficie $\overline{\Sigma}$ definita dalle formole

$$\overline{x} = x_0 + T\overline{X},\ \overline{y} = y_0 + T\overline{Y},\ \overline{z} = z_0 + T\overline{z}$$

e siccome

$$\overline{x} - x = -2T\operatorname{sen}\sigma X_2,\ \overline{y} - y = -2T\operatorname{sen}\sigma Y_2$$

$$\overline{z} - z = -2T\operatorname{sen}\sigma Z_2$$

$$\frac{1}{2}(\overline{x} + x) = x_0 + T\cos\sigma X_1,\ \frac{1}{2}(\overline{y} + y) = y_0 + T\cos\sigma Y_1,$$

$$\frac{1}{2}(\overline{z} + z) = z_0 + T\cos\sigma Z_1,$$

vediamo che due punti corrispondenti M, $\overline{M}$ di Σ, $\overline{\Sigma}$ sono simmetrici rispetto al piano tangente di S_0 in M_0. Dunque: *Le due superficie* Σ, $\overline{\Sigma}$ *sono le due falde dell'inviluppo di sfere di raggio* $= T(u, v)$, *aventi i loro centri sopra* S_0. Tutti gli elementi relativi alla superficie $\overline{\Sigma}$ si calcoleranno dalle stesse formole precedenti, ove si cangi semplicemente σ in $-\sigma$.

§. 256.

Caso in cui la superficie Σ rimane a curvatura media costante.

Cominciamo nel presente § la ricerca che ci condurrà ai teoremi già accennati di Guichard, proponendoci il problema seguente: *Per quali inviluppi di sfere accade che, deformando comunque la superficie* S_0 *luogo dei centri, la falda* Σ *dell'inviluppo rimanga sempre a curvatura media costante?*

Indichi H il valore costante della curvatura media di Σ. Le formole (12) ci danno subito

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2\,T\,M+N}{T^2\,M+T\,N-\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0\,G_0}},$$

indi

$$(c)\qquad (H\,T^2-2\,T)\,M+(H\,T-1)\,N-H\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0\,G_0}=0\,.$$

A causa dei valori (6*), (11) di M, N, questa è una relazione lineare intera fra D_0, D'_0, D''_0, che dovendo aver luogo per ipotesi in tutte le flessioni di S_0 deve ridursi, per le osservazioni fondamentali del § 254, ad un'identità. Eguagliando a zero i singoli coefficienti di D_0, D'_0, D''_0 ed il termine costante nella (*c*), si ottengono le quattro relazioni seguenti:

$$(\alpha)\qquad (H\,T^2-2\,T)\,\frac{\cos\sigma}{E_0}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}+(H\,T-1)\,\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}=0$$

$$(\beta)\qquad (H\,T^2-2\,T)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0\,G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}+\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)=0$$

$$(\gamma)\qquad -(H\,T^2-2\,T)\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sigma}{\partial u}+(H\,T-1)\operatorname{sen}^2\sigma\,\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}=0$$

$$(\delta)\quad (H\,T^2-2\,T)\left\{\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\,\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\operatorname{sen}\sigma\,K_0\sqrt{E_0\,G_0}\right\}+$$

$$+(H\,T-1)\left(\sqrt{G_0}\,\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)-H\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0\,G_0}=0\,,$$

le quali, insieme colla (9)

$$\frac{dT}{du} = -\sqrt{E_0}\cos\sigma\,, \tag{9}$$

contengono tutte le condizioni del problema.

La (β) dimostra che deve essere:

$$\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0\,, \tag{β^*}$$

perchè in caso contrario si dovrebbe annullare $HT^2 - 2T$ e la (α) non potrebbe soddisfarsi. Insieme alla (β*) dovendo sempre verificarsi la (7)

$$\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} - \sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0\,,$$

ne risulta che dovrà aversi simultaneamente

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0\,, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0\,, \tag{13}$$

ovvero $\sigma = \frac{\pi}{2}$.

Trattiamo subito il secondo caso, che è il più semplice. Allora le (α), (β), (γ), (δ) si riducono alle due sole

$$HT - 1 = 0\,, \quad (HT^2 - 2T)\,K_0 = -H\,,$$

cioè

$$T = \frac{1}{H}\,, \quad K_0 = H^2.$$

La superficie S_0 è dunque a curvatura costante positiva $K_0 = \frac{1}{R^2}$ e le sfere hanno il raggio costante = R. Perveniamo così al teorema di Bonnet: *Le due superficie parallele ad una superficie* S_0 *di curvatura costante positiva* $K_0 = \frac{1}{R^2}$ *e distanti da questa di* R *hanno la curvatura media costante* $H = \pm\frac{1}{R}$. È questa, come si vede, l'unica soluzione del problema proposto quando il raggio delle sfere è costante.

Dobbiamo ora, servendoci delle (13), cercare le altre eventuali soluzioni con T variabile. La prima delle (13) ci dice che le linee v = costante sono geodetiche di S_0 e prendendo per parametro u l'arco di queste

geodetiche, contato da una traiettoria ortogonale fissa, faremo

$$E_0 = 1 \ .$$

Inoltre, per la seconda delle (13), sarà σ una funzione della sola u

$$\sigma = \sigma(u) \ ,$$

le cui derivate indicheremo con accenti. Paragonando le (α), (γ) e ricordando che necessariamente $HT^2 - 2T \neq 0$, si ottiene

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{sen}\sigma \left(\operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \sqrt{G} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right) = 0 \ .$$

Ora l'annullarsi del primo fattore sen σ corrisponde evidentemente al caso di Weingarten ($\sigma = 0$) quando i raggi della congruenza C sono tangenti, lungo le geodetiche v, alla S_0 e questa è l'evoluta di una superficie a curvatura media costante. Lasciando da parte questo caso ben noto, [1] la (14) può scriversi

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \cot\sigma}{\partial u} \ ,$$

e integrando abbiamo

$$\sqrt{G} = V \cot\sigma \ .$$

Disponendo del parametro v, possiamo fare $V = 1$ e l'elemento lineare di S_0 diventa

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2\sigma \, dv^2 \ ,$$

che, essendo σ funzione di u soltanto, ha la forma tipica di una superficie di rotazione. Rimane a vedersi se potremo determinare σ in funzione di u in guisa da soddisfare a tutte le condizioni del problema. Ora per i valori

$$\sqrt{E_0} = 1 \quad , \quad \sqrt{G_0} = \cot\sigma$$

si ha

$$K_0 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G_0}}{\partial u^2} = \frac{\sigma''}{\operatorname{sen}\sigma \cos\sigma} - \frac{2\sigma'^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} \ .$$

---

[1] Il lettore potrà del resto trattarlo direttamente dalle equazioni del testo, che si riducono alle due

$$(HT^2 - 2T)\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + (HT - 1)\sqrt{G} = 0$$

$$\frac{dT}{du} = -1 \ .$$

Delle nostre equazioni (α), (β), (γ), (δ) la (β) è identicamente soddisfatta, le due (α), (γ) coincidono nell'unica

$$(H T^2 - 2 T)\, \sigma' = (H T - 1) \operatorname{sen} \sigma \tag{15}$$

e la (δ), tenendo conto di questa, diventa [1]

$$(H T - 1)(3 \sigma'^2 \cot \sigma - \sigma'') = H \sigma' \cos \sigma \ . \tag{16}$$

Tutto si riduce adunque a determinare σ, T in funzione di u in guisa da soddisfare alle (15), (16) ed alla (9)

$$T' = - \cos \sigma \ . \tag{17}$$

Facciamo intanto l'osservazione che le nostre tre equazioni fondamentali (15), (16), (17) non mutano cangiando σ in $- \sigma$ e lasciando T immutata, onde si vede intanto che, supposto il problema solubile, *anche la seconda falda* $\overline{\Sigma}$ *dell'inviluppo di sfere conserverà la (medesima) curvatura media costante.*

§. 257.

Caso di una superficie Σ d'area minima. — Primo teorema di Guichard.

Per la discussione ulteriore ci conviene separare il caso $H = 0$ dal caso $H \neq 0$. Cominciamo dal primo, nel quale adunque la prima falda Σ dell'inviluppo di sfere (e conseguentemente anche la seconda $\overline{\Sigma}$) deve rimanere costantemente ad area minima. Essendo $H = 0$, le (15), (16) diventano

$$2 T \sigma' = \operatorname{sen} \sigma$$
$$\sigma'' = 3 \sigma'^2 \cot \sigma \ .$$

Quest'ultima, integrata, porge

$$\sigma' = k \operatorname{sen}^3 \sigma \ , \tag{18}$$

denotando k una costante arbitraria, dopo di che la prima ci dà per T la formola

$$2 T = \frac{1}{k \operatorname{sen}^2 \sigma} \ . \tag{19}$$

D'altronde, con questo valore di T, la (17) risulta identicamente soddisfatta, a causa della (18). Così adunque il nostro problema ammette

---

[1] Per trasformare la (δ) nella (16) conviene moltiplicare la (δ) per σ', ciò che è lecito essendo nel caso attuale certamente $\sigma' \neq 0$, come risulta dalla (15) stessa.

un'effettiva soluzione, assumendo per superficie S_0 luogo dei centri delle sfere una superficie d'elemento lineare

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2\sigma\, dv^2 ,$$

cioè per la (18)

$$ds_0^2 = \frac{d\sigma^2}{k^2 \operatorname{sen}^6\sigma} + \cot^2\sigma\, dv^2 \tag{20}$$

e dando al raggio (variabile) T delle sfere il valore (19): $T = \frac{1}{2k\operatorname{sen}^2\sigma}$.

La nostra superficie S_0 è applicabile sopra una e quindi sopra ω^1 superficie di rotazione; resta solo che caratterizziamo una fra queste, dandone la curva meridiana. Cangiamo nella (20) v in $\frac{v}{k}$ e ponendo poi

$$r = \frac{1}{k}\cot\sigma ,$$

avremo

$$ds_0^2 = (1+k^2 r^2)\, dr^2 + r^2\, dv^2 .$$

Questo elemento lineare appartiene al paraboloide di rotazione, la cui parabola meridiana (assumendo per asse delle z l'asse di rotazione) ha l'equazione

$$z = \frac{k r^2}{2} .$$

Di più si osservi che la (19) dà pel raggio della sfera il valore

$$T = \frac{1}{2k}(1+k^2 r^2) ,$$

che rappresenta appunto la distanza di un punto della parabola dal fuoco.

Siamo così arrivati al risultato seguente:

Se un inviluppo di sfere gode della proprietà che, comunque deformando la superficie S_0 *luogo dei centri, la prima (e quindi anche la seconda) falda dell'inviluppo si conserva sempre una superficie d'area minima, due casi soltanto possono darsi, e cioè: 1.° — la* S_0 *è applicabile sopra l'evoluta di una superficie minima e le due falde dell'inviluppo si riducono alla superficie minima evolvente (caso di Weingarten); 2.° — la superficie* S_0 *è applicabile sul paraboloide di rotazione e, ridotta* S_0 *a quest'ultima forma, tutte le sfere passano per il fuoco.*

La singolare proprietà del paraboloide di rotazione, contenuta in questo teorema, costituisce il *primo teorema di Guichard*, che converrà porre sotto altra forma corrispondente all'enunciato dell'autore. Per ciò osserviamo che per una deformata qualunque S_0 del paraboloide di rotazione i segmenti $M_0 M$ sono terminati nei punti M alla superficie mi-

nima ed assumendo S_0 la forma di paraboloide di rotazione, mentre S_0 trascina seco i segmenti $M_0 M$, i punti M si riuniscono nel fuoco F del paraboloide. Ne segue che la proprietà trovata del paraboloide si può enunciare sotto la forma seguente: *Se un paraboloide di rotazione rotola sopra una sua qualunque superficie deformata* S_0, *il fuoco* F *descrive una superficie d'area minima.*

Siccome poi il paraboloide (come qualunque superficie di rotazione) è applicabile sopra sè medesimo con inversione delle faccie, così il rotolamento del paraboloide sopra S_0 può avvenire indifferentemente sull'una o sull'altra faccia di S_0 e le due superficie d'area minima Σ, $\overline{\Sigma}$, che formano le due falde del nostro inviluppo di sfere, sono i due rispettivi luoghi del fuoco F nell'uno e nell'altro rotolamento.

Aggiungiamo in fine le osservazioni seguenti, che servono ad illustrare in un caso particolare, il bel teorema di Guichard. Fra le superficie applicabili sul paraboloide ve ne ha (I, pag. 232) una serie ∞^1 di superficie di rotazione e prendendo per superficie S_0 sulla quale rotola il paraboloide una tale superficie di rotazione, anche la superficie Σ luogo del fuoco sarà di rotazione ed avrà per meridiano la curva generata dal fuoco della parabola che rotola sul meridiano di S_0; ma poichè Σ è una superficie d'area minima e di rotazione, essa è necessariamente un catenoide. Dunque: *Se si fa rotolare una parabola sulla curva meridiana di una superficie di rotazione applicabile sul corrispondente paraboloide, il fuoco della parabola genera una catenaria.* [1]

In particolare la superficie di rotazione S_0 può restringersi indefinitamente attorno all'asse fino a ridursi all'asse stesso, onde il ben noto teorema: *La curva generata dal fuoco di una parabola che rotola sopra una retta è una catenaria, avente la retta fissa per direttrice.*

§. 258.

Caso di una Σ a curvatura media costante. Secondo teorema di Guichard.

Riprendiamo ora le equazioni (15), (16), (17), per discutere il caso in cui la curvatura media H non è nulla.

---

[1] Si osservi che in questo rotolamento è perfettamente fissata la legge di corrispondenza dei punti della parabola e del meridiano deformato, dovendo le curvature delle due superficie di rotazione essere eguali in punti corrispondenti.

Dalla (16) si trae

$$\mathrm{H\,T} - 1 = \frac{\mathrm{H}\,\sigma' \cos\sigma}{3\,\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''}$$

e derivandola rispetto ad u, coll'osservare la (17), avremo sopprimendo il fattore H (non nullo):

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma' \cos\sigma}{3\,\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''}\right) + \cos\sigma = 0\ .$$

Questa, come facilmente si vede, può scriversi sotto la forma

$$\frac{d}{du}\log\left(3\,\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''\right) = \frac{d}{du}\log\left(\mathrm{sen}^3\sigma \cos\sigma\right)\ ,$$

onde integrando abbiamo

$$3\,\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma'' = c\,\mathrm{sen}^3\sigma \cos\sigma\ , \tag{21}$$

indicando c una costante arbitraria.

Dopo di ciò la (16) diventa

$$\mathrm{H\,T} - 1 = \frac{\mathrm{H}\,\sigma'}{c\,\mathrm{sen}^3\sigma} \tag{22}$$

e la (17) è naturalmente soddisfatta.

Resta per altro da soddisfarsi la (15), la quale, pel precedente valore di T, si riduce alla seguente

$$\frac{\sigma'^2}{c^2\,\mathrm{sen}^6\sigma} - \frac{1}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma} = \frac{1}{\mathrm{H}^2}\ , \tag{23}$$

dove ora possiamo trascurare l'equazione del secondo ordine (21) per σ, provenendo questa per derivazione dalla (23) stessa.

Si noti poi che alla (22) si può dare, per la (23), la forma equivalente

$$\mathrm{H\,T} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{H}^2}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma}}\ . \tag{22*}$$

Così adunque, determinando σ (u) dalla (23) e prendendo per T il valore dato dalla (22*), soddisfacciamo a tutte le condizioni del nostro problema.

La costante c rimane arbitraria; però limitandoci noi a considerare le soluzioni *reali* del problema, la (23), scritta sotto la forma

$$\frac{\sigma'^2}{\mathrm{sen}^4\sigma} = c\left(\frac{c}{\mathrm{H}^2} + 1\right) - \frac{c^2}{\mathrm{H}^2}\cos^2\sigma\ ,$$

ci dimostra che dobbiamo assoggettare c alla diseguaglianza

$$c\left(\frac{c}{H^2}+1\right)>0\,. \tag{24}$$

Resta ora soltanto che esaminiamo la forma della curva meridiana per la superficie di rotazione S_0 che risolve la questione proposta. Il suo elemento lineare è dato da

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2\sigma\, dv^2\,,$$

che per la (23) può scriversi, cangiandovi v in kv (k costante)

$$ds_0^2 = \frac{d\sigma^2}{c\,\mathrm{sen}^4\sigma\left(1+\frac{c}{H^2}\,\mathrm{sen}^2\sigma\right)} + k^2\cot^2\sigma\, dv^2\,.$$

Indicando con $z=\psi(r)$ l'equazione della curva meridiana, confrontiamo questo elemento lineare coll'ordinario

$$ds_0^2 = [1+\psi'^2(r)]\,dr^2 + r^2\,dv^2\,,$$

ponendo $r=k\cot\sigma$; ne risulterà per determinare $\psi'(r)$ l'equazione

$$\left\{1+\psi'^2(r)\right\}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{c\,\mathrm{sen}^4\sigma\left(1+\frac{c}{H^2}\,\mathrm{sen}^2\sigma\right)}\,.$$

Di qui si trae

$$1+\psi'^2(r) = \frac{1}{k^2 c}\,\frac{1+\frac{r^2}{k^2}}{1+\frac{c}{H^2}+\frac{r^2}{k^2}}$$

cioè

$$\psi'^2(r) = \frac{(1-k^2c)\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right)-\frac{k^2c^2}{H^2}}{k^2c\left(1+\frac{c}{H^2}+\frac{r^2}{k^2}\right)}\,. \tag{25}$$

Della costante k possiamo disporre a nostro arbitrio, ciò equivalendo a scegliere convenientemente la forma di S_0 fra le superficie di rotazione applicabili. Prendiamo k in guisa da annullare nel numeratore della (25) il termine costante, cioè determiniamo k dalla equazione

$$\frac{1}{k^2} = c\left(1+\frac{c}{H^2}\right)\,,$$

che per la (24) dà un valore reale per k. La (25) diventa allora

$$\psi'(r) = \frac{1}{H}\frac{cr}{\sqrt{cr^2+1}},$$

e integrata porge

$$z = \psi(r) = \frac{1}{H}\sqrt{cr^2+1},$$

cioè

$$H^2z^2 - cr^2 = 1,$$

La curva meridiana è un'ellisse od un'iperbola, secondo che $c<0$ o $c>0$. Poniamo

$$H = \frac{1}{a}, \quad c = \mp\frac{1}{b^2},$$

e l'equazione della conica sarà

$$\frac{z^2}{a^2} \pm \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

mentre nel caso del segno superiore la diseguaglianza (24) si traduce in $a^2>b^2$. Dunque la superficie di rotazione S_0 è un ellissoide allungato, ovvero un iperboloide a due falde, l'asse principale nell'uno e nell'altro caso avendo la lunghezza $2a = \frac{2}{H}$; invece l'asse secondario (minore o coniugato) resta arbitrario. La formola (22*), che ci definisce il raggio T della sfera, diventa infine

$$HT - 1 = \sqrt{1 + \frac{H^2}{c} + (H^2+c)r^2},$$

ed il valore che ne risulta per T combina, come subito si vede, colla lunghezza del raggio focale. Dalla nostra discussione raccogliamo adunque che tutte le soluzioni del problema enunciato al § 256 si ottengono

1.° prendendo per S_0 una superficie applicabile sull'evoluta di una superficie a curvatura media costante, nella quale evolvente coincidono le due falde dell'inviluppo di sfere (caso di Weingarten).

2.° prendendo per S_0 un ellissoide allungato di rotazione, ovvero un iperboloide a due falde, e considerando le sfere che hanno i centri nei punti della superficie e passano per l'uno o per l'altro fuoco.

Il terzo caso che abbiamo trovato al principio del § 256 (teorema di Bonnet) non è che un caso particolare del secondo, quando l'ellissoide si riduca ad una sfera.

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel § 257, possiamo enunciare le proprietà dell'ellissoide ed iperboloide di rotazione così trovate col *secondo teorema di Guichard*:

Se un ellissoide allungato di rotazione, ovvero un iperboloide di rotazione ad una falda, la lunghezza del cui asse principale (maggiore o trasverso) sia $= 2a$, *rotola sopra una sua qualunque superficie applicabile, ciascun fuoco descrive una superficie a curvatura media costante* $H = \frac{1}{a}$.

Al teorema generale di Guichard facciamo ora seguire alcune osservazioni importanti.

1.° Il rotolamento della quadrica di rotazione può avvenire indifferentemente sull'una o sull'altra faccia della superficie applicabile S_0, cosicchè, nota S_0, si ottengono propriamente *quattro* superficie a curvatura media costante e cioè le quattro falde dei due inviluppi di sfere. Queste quattro superficie sono due a due parallele e distanti di $2a$; ogni volta la superficie media fra le due è, pel teorema di Bonnet (§ 256), una superficie a curvatura costante positiva $= \frac{1}{a^2}$.

2.° Se si fa crescere all'infinito l'asse principale della quadrica, tenendo fisso un vertice ed il prossimo fuoco, la quadrica tende verso il paraboloide di rotazione e si ottiene, al limite, il primo teorema di Guichard (§ 253).

3.° Se si prende per S_0 una delle deformate di rotazione della quadrica, ne deduciamo il teorema: *Se si fa rotolare un'ellisse od un'iperbola sul meridiano di una superficie di rotazione applicabile sulla quadrica generata dal rotare della conica attorno al suo asse principale, la traiettoria descritta dal fuoco è il meridiano di una superficie a curvatura media costante.* [1]

In particolare se, restringendo indefinitamente S_0 attorno all'asse, si riduce S_0 all'asse stesso si ritrova la proposizione di Delaunay:

La curva descritta dal fuoco di un'ellisse o di un'iperbola che rotola sopra una retta è il meridiano di una superficie di rotazione a curvatura media costante, l'asse di rotazione essendo la retta fissa.

---

[1] Cf. la nota a piè di pagina 101.

§. 259.

Caso in cui la falda Σ dell'inviluppo di sfere rimane a curvatura costante.

Colla trattazione del problema enunciato al § 256, data negli ultimi §§, abbiamo esaurita l'esposizione dei risultati di Guichard in quanto si riferiscono a quadriche di rotazione reali. Ora ricordiamo che la congruenza C associata alla quadrica di rotazione nel secondo teorema di Guichard, e la sua riflessa C′, rimangono, in tutte le deformazioni, normali a due superficie a curvatura costante *positiva*, sicchè queste due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ sono le due falde di un inviluppo di sfere aventi i centri distribuiti sopra una superficie S_0 applicabile sulla quadrica di Guichard. Proponiamoci ora il problema: *Trovare gli inviluppi di sfere pei quali, deformando comunque la superficie* S_0 *dei centri, una falda* Σ *dell'inviluppo rimane a curvatura assoluta* K *costante positiva, o negativa.*

Se K è positiva, il teorema di Bonnet ci dimostra che non esistono altre soluzioni del problema all'infuori di quelle già trovate per le superficie a curvatura media costante. Resta ora a trattare il caso di K negativa, ciò che ci condurrà a nuovi risultati dal punto di vista reale; però nella discussione che segue lascieremo da principio indeterminato il segno di K.

Ricorrendo alla seconda delle (12) e ponendo $K = \frac{1}{A}$ (A costante), le condizioni del problema si traducono nella relazione:

$$T'' M + T N - \operatorname{sen}\sigma \sqrt{E_0 G_0} = A M. \tag{26}$$

Procedendo precisamente come al § 256, ed escludendo al solito il caso $\sigma = 0$, già noto come corrispondente al teorema di Weingarten, ed il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$ che non dà attualmente alcuna soluzione del problema, si trova subito che si deve avere

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0 , \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,$$

$$\operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \sqrt{G_0} \frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0,$$

onde si può fare nuovamente

$$\sqrt{E_0} = 1 , \quad \sqrt{G_0} = \cot\sigma .$$

Dopo ciò la (26) si riduce alle due seguenti

$$(T^2 - A)\,\sigma' = T \operatorname{sen} \sigma \tag{27}$$

$$T\,(3\,\sigma'^2 \cot \sigma - \sigma'') = \sigma' \cos \sigma\,, \tag{28}$$

alle quali è da aggiungersi l'altra

$$T' + \cos \sigma = 0\,. \tag{29}$$

Ricavando T dalla (28) e derivando, coll'osservare la (29), ne segue come al § 258:

$$3\,\sigma'^2 \cot \sigma - \sigma'' = c \operatorname{sen}^3 \sigma \cos \sigma \ (c \text{ costante}), \tag{30}$$

dopo di che la (28) diviene

$$T = \frac{\sigma'}{c \operatorname{sen}^3 \sigma}\,, \tag{31}$$

e, sostituendo nella (27), si ha

$$\frac{\sigma'^2}{c^2 \operatorname{sen}^6 \sigma} - \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma} = A\,, \tag{32}$$

la quale formola trae seco per derivazione la (30).

Determinando σ (u) dalla (32) e prendendo per T il valore (31), si ha quindi la soluzione più generale cercata del problema. E si osserverà anche qui che non solo la prima falda Σ ma anche la seconda falda $\bar{\Sigma}$ dell'inviluppo di sfere ha la curvatura costante $\frac{1}{A}$. Secondo la (32), la nostra superficie di rotazione S_c ha l'elemento lineare

$$ds_c^2 = \frac{d\sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma\,(1 + c\,A \operatorname{sen}^2 \sigma)} + k^2 \cot^2 \sigma\, dv^2\,.$$

Per determinare la curva meridiana poniamo, come al § 258

$$r = k \cot \sigma\,,$$

indi

$$\psi'^2(r) = \frac{(1 - k^2 c)\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) - k^2 c^2 A}{k^2 c\left(1 + c\,A + \frac{r^2}{k^2}\right)}\,. \tag{33}$$

Il caso di A positivo $= \frac{1}{H^2}$ riporta naturalmente ai risultati del § 258. Considerando ora il caso di A negativo poniamo $A = -R^2$, cioè supponiamo la Σ pseudosferica di raggio R. La (32) ci dimostra che in

questo caso, per avere soluzioni reali, conviene dare alla costante c un valore positivo e porremo per ciò

$$c = \frac{1}{a^2} .$$

Attualmente, se disponessimo di k in guisa da annullare nel numeratore della (33) il termine indipendente da r^2, non avremmo più una soluzione reale del problema. Annulleremo invece il coefficiente di r^2, ponendo

$$k^2 c = 1 , \text{ ossia } k = a .$$

Dopo di ciò la (33) diventa

$$\psi'^2 (r) = \frac{R^2}{a^2 - R^2 + r^2} ,$$

e la curva meridiana ha per equazione

$$(34) \qquad z = \psi (r) = R \int \frac{dr}{\sqrt{a^2 - R^2 + r^2}} .$$

La formola (31) che definisce il raggio T della sfera diventa per la (32)

$$T^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} - R^2 ,$$

ossia

$$(35) \qquad T^2 = a^2 - R^2 + r^2 .$$

La forma della curva meridiana è diversa secondo che 1.° $a = R$, 2.° $a < R$, 3.° $a > R$.

1.° caso $a = R$. La curva meridiana (34) è la curva logaritmica

$$z = R \log r$$

e il raggio T della sfera eguaglia il raggio del parallelo. Quando S_0 affetta la forma di questa superficie logaritmica di rotazione, una delle falde Σ dell'inviluppo di sfere si riduce evidentemente all'asse di rotazione; l'altra falda $\overline{\Sigma}$ è la pseudosfera.

2.° caso $a < R$. La curva meridiana ha per equazione

$$r = \sqrt{R^2 - a^2} \cosh \left(\frac{z}{R}\right)$$

e si dirà la *catenaria accorciata* perchè proviene dalla catenaria comune

$$r = R \cosh \left(\frac{z}{R}\right)$$

accorciando le ordinate r nel rapporto $\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}$. Il raggio T delle sfere è dato da

$$T = \sqrt{R^2 - a^2}\ \operatorname{senh}\left(\frac{s}{R}\right).$$

Si osserverà che nel caso limite $a = 0$ il catenoide accorciato diventa l'ordinario catenoide e le due falde dell'inviluppo di sfere coincidono nell'evolvente pseudosferica.

3.° caso $a > R$. La curva meridiana ha per equazione

$$r = \sqrt{a^2 - R^2}\ \operatorname{senh}\left(\frac{z}{R}\right)$$

e la corrispondente superficie di rotazione si dirà il *sinusoide iperbolico*. Il raggio T delle sfere è definito da

$$T = \sqrt{a^2 - R^2}\ \cosh\left(\frac{s}{R}\right).$$

In tutti tre i casi: *deformando comunque la superficie di rotazione trovata, che seco trascini le sfere coi centri distribuiti sulla superficie, le due falde dell'inviluppo di sfere rimangono sempre superficie pseudosferiche di raggio* $= R$.

§. 260.

Casi in cui la superficie Σ degenera in una curva od in una sviluppabile.

Per rendere complete le ricerche del § precedente conviene considerare anche il caso in cui la costante A sia nulla. Quale ne è il significato geometrico? Siccome allora $r_1 r_2 = 0$, la falda Σ (e quindi anche la seconda $\bar{\Sigma}$) dell'inviluppo di sfere si riduce ad una curva Γ, le cui normali costituiscono la congruenza C associata alla S_0. Le formole precedenti si applicano ancora a questo caso, in particolare la (32) diventa

$$\frac{\sigma'}{\operatorname{sen}^2 \sigma} = \text{costante},$$

onde segue

$$u = a \cot \sigma, \quad (a \text{ costante}).$$

L'elemento lineare di S_0 ha la forma

$$ds_0^2 = du^2 + u^2\, dv^2,$$

che è quello del piano in coordinate polari, e quando la S_0 ha la con-

figurazione piana π, la formula $u = a \cot \sigma$ dimostra che le sfere aventi i centri distribuiti su π passano per due punti simmetrici rispetto a π, situati alla distanza $\pm a$ dall'origine 0 sulla normale a π in 0.

La congruenza C è dunque formata dai segmenti M P che dai punti M di π vanno ad un punto P fisso nello spazio. È facile vedere geometricamente che comunque si deformi π, che seco trasporti i segmenti M P, il luogo degli estremi P sarà in effetto una curva Γ di cui i segmenti M P saranno tutte le normali. E infatti segniamo sul piano π le ∞^1 rette g che si cangiano nelle generatrici della sviluppabile deformata S. I termini P dei segmenti M P uscenti dai punti di una generatrice g di S saranno sempre riuniti in un solo punto e per ciò intanto il luogo degli estremi degli ∞^2 segmenti M P per la sviluppabile S sarà una curva Γ. Che poi questi segmenti siano tutti normali alla curva Γ si vede facilmente considerando sulla sviluppabile uno qualunque dei circoli geodetici aventi il centro nel punto 0: i segmenti M P che partono dai punti di un tale circolo sono normali al circolo ed hanno tutti eguale lunghezza; per ciò la curva Γ luogo degli estremi P è pure normale ai segmenti stessi c. d. d.

Dalla nostra analisi risulta poi: *Affinchè deformando comunque la superficie* S_0 *di partenza dei raggi di una congruenza normale* C, *questi si appoggino costantemente ad una curva è necessario e sufficiente che* S_0 *sia sviluppabile e quando* S_0 *ha la configurazione piana, i raggi di* C *concorrano in un punto fisso dello spazio.*

Un altro caso limite della ricerca del § precedente conviene considerare a parte; il caso in cui la costante A sia infinita, cioè le superficie normali ai raggi della congruenza C che si deforma siano sviluppabili (a curvatura nulla). Allora dobbiamo avere in tutte le deformazioni di S_0:

$$M = 0 .$$

A causa del valore (6*) di M, escludendo il caso ovvio $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ne deduciamo

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0 , \quad \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0 .$$

Si può dunque fare

$$E_0 = 1 \qquad G_0 = 1$$

con σ costante qualunque, dove attualmente non occorre più nemmeno

escludere il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Dunque: *Se i raggi di una congruenza* C, *in qualunque deformazione della superficie* S_0 *di partenza, rimangono normali ad una sviluppabile, la* S_0 *deve essere sviluppabile e quando* S_0 *si distende sul piano i raggi della congruenza* C *debbono cangiarsi in raggi paralleli.*

Come si vede, possiamo considerare questo come un caso limite del precedente quando il punto P in cui concorrono i raggi, mentre S_0 ha la configurazione piana, si allontana all'infinito.

§. 261.

Esame di un problema generale.

In tutti i risultati conseguiti nei §§ precedenti (256-260) abbiamo inviluppi di sfere nei quali, deformando comunque la superficie dei centri, una falda (e quindi anche la seconda) dell'inviluppo ha i raggi principali di curvatura r_1, r_2 legati da una relazione fissa. Domandiamo di: *trovare tutti i casi possibili, nei quali una falda dell'inviluppo di sfere conserva i raggi di curvatura* r_1, r_2 *legati da una relazione fissa*

$$f(r_1, r_2) = 0,$$

comunque deformando la superficie dei centri.

Le soluzioni del problema che ci sono note fin qui sono: 1.° la soluzione corrispondente al teorema di Weingarten quando l'inviluppo di sfere è a falde coincidenti e la superficie S_0 luogo dei centri è applicabile sopra una superficie di rotazione.

2.° la soluzione evidente che si ha negli inviluppi di sfere di raggio costante coi centri distribuiti sopra una qualunque superficie a curvatura costante.

3.° i varii inviluppi di sfere trovati nei §§ precedenti, nell'esame delle proposizioni di Guichard e delle loro complementari.

Dimostreremo che il problema proposto non ammette altre soluzioni, all'infuori di queste già note; per tal modo risulterà meglio provata la singolare importanza dei teoremi di Guichard.

Supponiamo che la prima falda Σ del nostro inviluppo di sfere abbia i raggi di curvatura r_1, r_2 legati da una relazione fissa. Se questa relazione avesse la forma

$$r_1 r_2 = \text{costante}, \quad \text{o} \quad r_1 + r_2 = \text{costante},$$

saremmo ricondotti ai casi già esaminati, poichè nell'ultimo caso po-

tremmo sostituire alla Σ una superficie parallela ad area minima. Esclusi questi casi, come già noti, potremo dare alla relazione supposta la forma

$$r_1 r_2 = F(r_1 + r_2),$$

ossia, ricorrendo alle (12) pag. 95:

$$(A) \qquad T^2 + T\frac{N}{M} - \frac{\operatorname{sen}\sigma\sqrt{E_0 G_0}}{M} = F\left(2T + \frac{N}{M}\right).$$

Questa dovrà, per ipotesi, sussistere in tutte le flessioni di S_0, e siccome N è per la (11) lineare in D_0, D''_0, se nella espressione (6*) di M sostituiamo a D'_0 il suo valore

$$D'_0 = \sqrt{D_0 D''_0 - K_0 E_0 G_0},$$

la (A) dovrà ridursi ad un'identità in D_0, D''_0. Ora, *se escludiamo il caso* $\sigma = 0$ *di Weingarten*, dalla (A) si trae $\frac{1}{M}$ in funzione nota di $\frac{N}{M}$, u, v e per ciò $\frac{1}{M}$, $\frac{N}{M}$, considerate come funzioni di D_0, D''_0; dovranno essere fra loro *dipendenti*. Dunque il determinante funzionale di M, N *rapporto a* D_0, D''_0 dovrà annullarsi:

$$(35) \qquad \frac{\partial(M, N)}{\partial(D_0, D''_0)} = 0.$$

Ma avendosi

$$\frac{\partial D'_0}{\partial D_0} = \frac{D''_0}{2D'_0}, \quad \frac{\partial D'_0}{\partial D''_0} = \frac{D_0}{2D'_0},$$

dalle espressioni (6*), (11) di M, N si rileva che la (35), moltiplicata per D'_0, si scrive:

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)D''_0, & \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}} \\ -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}D'_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0 G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)D_0, & \operatorname{sen}^2\sigma\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}} \end{vmatrix} = 0;$$

questa si decompone (§ 254) nelle due:

$$\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$$

$$\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} + \sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0.$$

Possiamo lasciare da parte il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ove è geometricamente evidente (e si può subito confermare coll'analisi) che la soluzione corrisponde a quella già sopra osservata in cui le sfere hanno raggio costante e la S_0 luogo dei centri è a curvatura costante. Per $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ le due precedenti, unendovi la (7) $\frac{\partial(\sqrt{E_0}\cos\sigma)}{\partial v} = 0$, danno

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} = 0\ , \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{G_0}}{\partial u} = \frac{\partial \log\cot\sigma}{\partial u}\ ,$$

onde si conclude al solito che si può porre

$$\sqrt{E_0} = 1\ , \quad \sqrt{G_0} = \cot\sigma\ .$$

Dopo ciò le espressioni di M, N diventano:

$$(36)\qquad \begin{cases} M = -\frac{\sigma'\cos\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma} D_0 - \frac{\sigma'\operatorname{sen}^2\sigma}{\cos\sigma} D''_0 + \frac{\sigma'^2\cos\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \frac{\sigma''}{\operatorname{sen}\sigma} \\ N = \cot\sigma\ D_0 + \frac{\operatorname{sen}^3\sigma}{\cos\sigma} D''_0 + 2\sigma'\cot\sigma\ . \end{cases}$$

Ora se fosse $\sigma' = 0$, ne risulterebbe che la S_0 sarebbe sviluppabile e le linee (u, v) costituirebbero un sistema doppio ortogonale di geodetiche, onde, se S_0 assume la configurazione piana, i raggi della congruenza C risulterebbero paralleli. Questo caso, ove le superficie normali ai raggi sono a curvatura nulla, è già stato esaminato alla fine del § 260.

Lasciandolo ora da parte, potremo scrivere la seconda delle (36) così:

$$N = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sigma'} M + \frac{1}{\sigma'}(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'')$$

e la relazione (A) diventa

$$(A^*)\qquad T^2 - T\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sigma'} + \frac{T(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'') - \sigma'\cos\sigma}{\sigma' M} =$$

$$= F\left(2T - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\sigma'} + \frac{3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma''}{\sigma' M}\right).$$

Ma poichè questa deve essere un'identità nelle tre quantità M, u, v, riguardate come indipendenti, nè può M sparire contemporaneamente

dal primo e secondo membro della (A*), dovrà manifestamente la F essere una funzione lineare intera nel suo argomento e la relazione supposta fra r_1, r_2 ha dunque la forma

$$r_1 r_2 = a (r_1 + r_2) + b$$

con a, b costanti. Sostituendo alla superficie Σ una sua parallela (alla distanza a), possiamo ridurre questa relazione alla forma

$$r_1 r_2 = \text{costante} ,$$

e le soluzioni corrispondenti del problema sono unicamente quelle esaminate ai §§ 259, 260, c. d. d.

§. 262.

Inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura.

Fra i punti delle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ di un inviluppo di sfere viene stabilita una corrispondenza, ove si riguardino come corrispondenti i due punti di contatto di una medesima sfera con Σ, $\overline{\Sigma}$ rispettivamente; così pure ad ogni punto M di Σ (o $\overline{M}$ di $\overline{\Sigma}$) riguarderemo come corrispondente sulla superficie S_0 il centro M_0 della sfera. Per gli inviluppi di sfere nei teoremi di Guichard queste corrispondenze godono di proprietà speciali, che importa di esaminare in vista di future applicazioni. Nello studio di queste proprietà noi procederemo in guisa da determinare nello stesso tempo tutti i casi nei quali la relativa proprietà sussiste, *comunque deformando la superficie* S_0 *dei centri delle sfere.*

Cominceremo dal dimostrare che sulle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ di un inviluppo di sfere nei teoremi di Guichard si corrispondono sempre le linee di curvatura. Per ciò proponiamoci il seguente problema generale:

Determinare tutti gli inviluppi di sfere sulle cui falde Σ, $\overline{\Sigma}$ *si corrispondono sempre le linee di curvatura, comunque deformando la superficie* S_0 *dei centri.*

Dobbiamo in primo luogo scrivere l'equazione differenziale delle linee di curvatura per la prima falda Σ dell'inviluppo, ossia l'equazione differenziale delle sviluppabili della congruenza normale C (formata dai raggi $M_0 M$). Secondo il § 140 (I, pag. 305 equazione (C)) questa equazione si scrive

$$(f E' - e F') du^2 + (g E' - e G') du dv + (g F' - f G') dv^2 = 0 .$$

Ora, formando effettivamente le espressioni dei tre binomii coefficienti,

dalle (5) (5*) pag. 92 (ricordando che qui $f' = f$), si trova

$$f\,\mathrm{E}' - e\,\mathrm{F}' = -\sqrt{\mathrm{E}_0}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{D}'_0}{\sqrt{\mathrm{G}_0}} + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\partial v}\right).\,\mathrm{M}$$

$$g\,\mathrm{E}' - e\,\mathrm{G}' = \left\{\sqrt{\mathrm{G}_0}\left(\frac{\mathrm{D}_0}{\sqrt{\mathrm{E}_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \sqrt{\mathrm{E}_0}\,\mathrm{sen}\,\sigma\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\partial u} - \mathrm{sen}\,\sigma\,\frac{\mathrm{D}''_0}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\right)\right\}.\,\mathrm{M}$$

$$g\,\mathrm{F}' - f\,\mathrm{G}' = \sqrt{\mathrm{G}_0}\left(\frac{\mathrm{D}'_0}{\sqrt{\mathrm{E}_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right).\,\mathrm{M},$$

e quindi per l'equazione cercata la forma:

$$(37)\qquad -\left\{\frac{\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\mathrm{sen}^2\sigma\,\mathrm{D}'_0 + \frac{\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cos\sigma\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\partial v}\right\}du^2 +$$

$$+\left\{\frac{\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\,\mathrm{D}_0 - \frac{\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\mathrm{sen}\,\sigma^2\,\mathrm{D}''_0 + \sqrt{\mathrm{G}_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\cos\sigma}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\partial u}\right)\right\}du\,dv +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\,\mathrm{D}'_0 + \sqrt{\mathrm{G}_0}\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)dv^2 = 0\,.$$

Questa è dunque l'equazione differenziale delle linee di curvatura sopra Σ; l'analoga per la seconda falda $\overline{\Sigma}$ se ne dedurrà, secondo le osservazioni al § 255, semplicemente cangiando σ in $-\sigma$. Scrivendo che queste due equazioni differenziali coincidono, si ha

$$\mathrm{D}'_0 = \rho\cot\sigma\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\partial v} = \rho\sqrt{\mathrm{E}_0}\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\,\mathrm{D}_0 - \frac{\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\mathrm{sen}^2\sigma\,\mathrm{D}''_0 = \rho\sqrt{\mathrm{G}_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\cos\sigma}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\partial u}\right),$$

indicando con ρ un fattore di proporzionalità. La condizione richiesta si scrive quindi

$$(38)\qquad \sqrt{\mathrm{G}_0}\,\frac{\partial\sigma}{\partial v}\,.\,\mathrm{D}_0 - \sqrt{\mathrm{G}_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\mathrm{sen}\,\sigma\cos\sigma}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}_0}}{\partial u}\right)\mathrm{D}'_0 -$$

$$-\frac{\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cos\sigma\,\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}_0}}{\partial v}\,\mathrm{D}''_0 = 0\,.$$

Per interpretarla geometricamente è bene osservare che essa può scriversi, introducendo i coefficienti della (37)

$$\left(\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}D'_0+\sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)D_0-\left\{\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}D_0-\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\operatorname{sen}^2\sigma D''_0+\right.$$

$$\left.\sqrt{G_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)\right\}D'_0-$$

$$-\left(\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\operatorname{sen}^2\sigma D'_0+\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)D''_0=0;$$

sotto questa forma essa esprime che le linee integrali della (37) tracciano sulla superficie S_0 dei centri un sistema coniugato.[1] Prescindendo dalla condizione, speciale al nostro problema, che la (38) deve verificarsi in tutte le flessioni di S_0, possiamo enunciare questo risultato sotto la forma seguente, che dà un teorema di Dupin:

Affinchè le sviluppabili di una congruenza normale C *si conservino per riflessione sopra una superficie* S_0 *è necessario e sufficiente che esse taglino* S_0 *secondo un sistema coniugato.*[2]

Ma veniamo ora alla nostra ipotesi speciale ove la (38) deve aver luogo, comunque si deformi S_0. Per ciò è necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}=0\ ,\ \frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}=0\ ,\ \frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}=0\ .$$

---

[1] Per vederlo basta applicare la condizione

$$D_0\,du\,\delta u+D'_0\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''_0\,dv\,\delta v=0\ ,$$

che esprime essere due elementi lineari di S_0 coniugati, ai due elementi uscenti da un punto (u, v) delle linee integrali di un'equazione differenziale

$$A\,du^2+B\,du\,dv+C\,dv^2=0\ ,$$

ciò che dà:

$$C\,D_0-B\,D'_0+A\,D''_0=0\ .$$

[2] Non ci tratteniamo qui a spiegare la ragione geometrica di questo risultato, che il lettore troverà sviluppata in Darboux, t. II, pag. 281 e seguenti.

Ne segue che possiamo porre

$$\sigma = \sigma(u), \quad E_0 = 1, \quad \sqrt{G_0} = \cot\sigma;$$

e poichè in tutti gli inviluppi di sfere che si presentano nei teoremi di Guichard (§§ 256-259) le condizioni superiori sono soddisfatte, ne concludiamo che sulle due falde dell'inviluppo si corrispondono appunto le linee di curvatura. La nostra analisi ci fornisce di più la soluzione del problema generale proposto col teorema:

Per ottenere tutti gli inviluppi di sfere, sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura, comunque deformando la superficie S_0 *luogo dei centri, prendasi per* S_0 *una qualunque superficie applicabile sopra una superficie di rotazione, il cui elemento lineare si scriva*

$$ds^2 = du^2 + \cot^2\sigma\, dv^2, \quad \sigma = \sigma(u)$$

e prendasi il raggio T *della sfera variabile da parallelo a parallelo secondo la formola* $T = C - \int \cos\sigma\, du$.

§. 263.

Caso in cui ai sistemi ortogonali di Σ corrispondono i sistemi coniugati sopra S_0.

Proponiamoci ora il problema seguente:

Trovare tutti gli inviluppi di sfere pei quali, comunque deformando la superficie S_0 *dei centri, accade che ai sistemi ortogonali sulla prima falda* Σ *dell'inviluppo corrispondono sopra* S_0 *i sistemi coniugati.*

Esprimeremo le condizioni del problema col sussistere delle proporzioni

$$\frac{E}{D_0} = \frac{F}{D'_0} = \frac{G}{D''_0},$$

ossia colle due equazioni

$$E D'_0 - F D_0 = 0, \quad G D'_0 - F D''_0 = 0,$$

che pei valori (10) di E, F, G (pag. 94) si scrivono

$$T^2(E' D'_0 - F' D_0) + 2T(e D'_0 - f D_0) + E_0 \operatorname{sen}^2\sigma D'_0 = 0$$
$$T^2(G' D'_0 - F' D''_0) + 2T(g D'_0 - f D''_0) + G_0 D'_0 = 0.$$

Sostituendo i valori effettivi (5), pag. 92, di E', F', G', si trova subito

che esse diventano

$$(39)\qquad T^2\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)\left(D'_0\frac{\partial\sigma}{\partial u}-D_0\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D'_0}{\sqrt{G_0}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D'_0+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D_0-\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{sen}\sigma\,K_0\,E_0\sqrt{G_0}\right)\right\}+$$

$$+2\,T\sqrt{E_0}\operatorname{sen}\tau\left(D_0\frac{\partial\sigma}{\partial v}-D'_0\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+E_0\operatorname{sen}^2\sigma\,D'_0=0$$

$$(39^*)\qquad T^2\left\{\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)\left(D'_0\frac{\partial\tau}{\partial v}-D''_0\frac{\partial\tau}{\partial u}-K_0\,G_0\,\sqrt{E_0}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma\,D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0\right)\right\}+$$

$$+2\,T\sqrt{G_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0\right)+G_0\,D'_0=0\,.$$

Osserviamo che per $\tau=\frac{\pi}{2}$ (e quindi T costante) queste due si riducono all'unica $K_0=\frac{1}{T^2}$; la superficie S_0 è a curvatura costante positiva e Σ, $\overline{\Sigma}$ sono le due parallele a curvatura media costante di Bonnet (§ 256). Questa è una prima soluzione del problema, ai sistemi ortogonali sopra Σ, $\overline{\Sigma}$ corrispondendo i sistemi coniugati sopra S_0.

Per discutere il caso generale $\tau\neq\frac{\pi}{2}$ prendiamo la prima (39), che è una relazione fra D_0, D'_0 sussistente per ipotesi in tutte le flessioni; essa deve dunque ridursi ad un'identità. In particolare, eguagliando a zero i coefficienti di

$$D_0^2,\ D_0'^2,\ D_0\,D'_0\,,$$

troviamo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0\,,\quad \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0\,,\quad \sqrt{G_0}\,\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\,\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} = 0\,,$$

dalle quali, disponendo al solito dei parametri u, v, risulta

$$\sqrt{E_0} = 1\,,\quad \sqrt{G_0} = \cot\sigma\,,\quad \sigma = \sigma(u)\,.$$

Dopo di ciò la (39) si riduce alla seguente:

$$T^2(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'') - 2T\sigma'\cos\sigma + \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma = 0\,, \tag{40}$$

ed alla medesima equazione si riduce anche la (39*). Ora se si prende l'espressione della curvatura media di Σ, che, secondo i calcoli eseguiti al § 261, è data da

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{(2T\sigma' - \operatorname{sen}\sigma)M + 3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma''}{(T^2\sigma' - T\operatorname{sen}\sigma)M + T(3\sigma'^2\cot\sigma - \sigma'') - \sigma'\cos\sigma}$$

si vede che la (40) esprime essere la frazione del secondo membro indipendente da M. D'altronde il suo valore

$$\frac{2T\sigma' - \operatorname{sen}\sigma}{T^2\sigma' - T\operatorname{sen}\sigma}$$

è una costante perchè la sua derivata rapporto ad u, a causa della (40) e della

$$T' = -\cos\sigma\,,$$

è identicamente nulla. Viceversa se la curvatura media H è costante, comunque flettendo S_0, la (40) è soddisfatta. Per i teoremi dimostrati ai §§ 257, 258 ne concludiamo:

Gli inviluppi di sfere pei quali, in qualunque flessione della superficie S_0 dei centri, ai sistemi ortogonali di una falda dell'inviluppo corrispondono i sistemi coniugati sopra S_0 sono tutti e soli quelli che si presentano nei teoremi di Guichard quando la superficie dei centri è applicabile sopra una quadrica di rotazione e le due falde dell'inviluppo sono a curvatura media costante.

Ora si osservi che la proprietà vale tanto per la seconda falda $\overline{\Sigma}$ come per la prima Σ e quindi sopra Σ, $\overline{\Sigma}$ si corrispondono i sistemi ortogonali, ossia: *La corrispondenza fra i punti delle due falde a curvatura media costante degli inviluppi di sfere nei teoremi di Guichard è una corrispondenza conforme.*

Aggiungiamo, omettendo per brevità la dimostrazione, che anche questa proprietà della corrispondenza conforme fra le due falde dell'inviluppo *è caratteristica* per gli inviluppi di sfere dei teoremi di Guichard, quando si esiga che la proprietà sussista comunque flettendo la superficie dei centri.

§. 264.

Corrispondenza dei sistemi coniugati di Σ ai sistemi coniugati di S_0.

Un terzo problema che possiamo facilmente risolvere col medesimo metodo è il seguente:

Trovare gli inviluppi di sfere nei quali ai sistemi coniugati sulla prima falda Σ dell'inviluppo corrispondono i sistemi coniugati sulla superficie S_0 luogo dei centri, in qualunque flessione di questa.

La corrispondenza dei sistemi coniugati sopra Σ, S_0 si esprime colle proporzioni

$$D : D' : D'' = D_0 : D'_0 : D''_0 ,$$

che pei valori (10) di D, D', D'' si traducono nelle due equazioni

$$\begin{cases} T(E' D'_0 - F' D_0) + e D'_0 - f D_0 = 0 \\ T(G' D'_0 - F' D''_0) + g D'_0 - f D''_0 = 0 . \end{cases}$$

Gli effettivi valori dei binomii che qui compariscono sono gli stessi che al § precedente e le due equazioni calcolate sono dunque:

$$(41) \qquad T\left\{\left(\frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\left(D'_0 \frac{\partial\sigma}{\partial u} - D_0 \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma\, D'_0}{\sqrt{G_0}} + \frac{\cos\sigma\, \partial\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}\,\partial v}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} D'_0 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u} D_0 - \operatorname{sen}\sigma\, K_0\, E_0 \sqrt{G_0}\right)\right\} +$$

$$+ \sqrt{E_0}\operatorname{sen}\sigma\left(D_0 \frac{\partial\sigma}{\partial v} - D'_0 \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) = 0$$

$$(41^*)\qquad T\left\{\left(\frac{D'_0}{\sqrt{E_0}}+\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)\left(D'_0\frac{\partial\tau}{\partial v}-D''_0\frac{\partial\sigma}{\partial u}-K_0G_0\sqrt{E_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\sigma D''_0}{\sqrt{G_0}}\right)\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0\right)\right\}+$$

$$+\sqrt{G_0}\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}D'_0+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}D''_0\right)=0\,;$$

esse debbono sussistere, per ipotesi, comunque flettendo S_0. Eguagliando a zero nella (41) i coefficienti di D_0^2, $D_0D'_0$, D'^2_0, se ne trae, come al § 263, che si può porre

$$\sqrt{E_0}=1\quad,\quad \sqrt{G_0}=\cot\sigma\,,\quad \sigma=\sigma(u)$$

e le (41), (41*) si riducono all'unica

$$T(3\sigma'^2\cot\sigma-\sigma'')-\sigma'\cos\sigma=0\,.$$

Una prima soluzione corrisponde a $\sigma'=0$; allora la S_0 è sviluppabile e si ha precisamente il caso considerato alla fine del § 260. Quando $\sigma'\neq0$ la precedente equazione, che coincide precisamente colla (28) § 259, dà luogo alle medesime conseguenze e cioè alle equazioni ivi segnate (30) (31), (32), onde segue: *la prima e la seconda falda dell'inviluppo sono superficie a curvatura costante.* Dunque le uniche soluzioni del problema ora proposto si hanno in quegli inviluppi di sfere del § 259 nei quali le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ dell'inviluppo hanno la (medesima) curvatura costante, comunque deformando la superficie S_0 luogo dei centri.

In particolare segue di qui: *Sulle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ di questi inviluppi di sfere si corrispondono i sistemi coniugati, cioè le linee assintotiche.*

Questa proprietà della corrispondenza dei sistemi coniugati sopra le due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ vale non soltanto per questi inviluppi di sfere, ma anche per le due superficie ad area minima associate nel primo teorema di Guichard ad ogni deformata del paraboloide di rotazione. E infatti allora Σ, $\overline{\Sigma}$ sono in rappresentazione conforme, cioè si corrispondono le linee di lunghezza nulla. Ora queste sopra una superficie minima formano un sistema coniugato e i due sistemi coniugati delle linee di lunghezza nulla si corrispondono sopra Σ, $\overline{\Sigma}$. Di più si corrispondono ancora sopra Σ, $\overline{\Sigma}$ i sistemi coniugati formati dalle linee di curvatura e per ciò tutti gli altri sistemi coniugati.

Ritornando al caso delle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ a curvatura costante, aggiungiamo che: *gli archi di assintotiche corrispondenti sopra le due falde* Σ, $\overline{\Sigma}$ *a curvatura costante sono eguali.*

E infatti pei valori (10) di E, F, G D, D′, D″, il ds^2 della Σ si può scrivere

$$ds^2 = (-\mathrm{TD}+\mathrm{T}e+\mathrm{E}_0\,\mathrm{sen}^2\sigma)\,du^2 + 2\,(-\mathrm{TD}'+\mathrm{T}f)\,du\,dv + \\ + (-\mathrm{TD}''+\mathrm{T}g+\mathrm{G}_0)\,dv^2$$

e lungo un'assintotica è adunque

$$ds^2 = (\mathrm{T}e+\mathrm{E}_0\,\mathrm{sen}^2\sigma)\,du^2 + 2\,\mathrm{T}f\,du\,dv + (\mathrm{T}g+\mathrm{G}_0)\,dv^2.$$

Per la corrispondente assintotica sopra $\overline{\Sigma}$ avremo (cangiando σ in $-\sigma$)

$$\overline{ds^2} = (\mathrm{T}\,\overline{e} + \mathrm{E}_0\,\mathrm{sen}^2\sigma)\,du^2 + 2\,\mathrm{T}\,\overline{f}\,du\,dv + (\mathrm{T}\,\overline{g} + \mathrm{G}_0)\,dv^2,$$

onde

$$ds^2 - \overline{ds^2} = \mathrm{T}\left\{(e-\overline{e})\,du^2 + 2\,(f-\overline{f})\,du\,dv + (g-\overline{g})\,dv^2\right\},$$

e quindi per le (5*), pag. 92

$$ds^2 - \overline{ds^2} = 2\,\mathrm{T}\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(\mathrm{D}_0\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'_0\,du\,dv + \mathrm{D}''_0\,dv^2),$$

espressione che è nulla lungo l'assintotica essendo $\mathrm{D}:\mathrm{D}':\mathrm{D}'' :=\mathrm{D}_0:\mathrm{D}'_0:\mathrm{D}''_0$.

§. 265.

Ricerca degli inviluppi di sfere nei quali le due falde sono contigue per trasformazione di Moutard ad una medesima superficie.

Terminiamo il presente Capitolo col far conoscere un'importante proprietà delle due falde Σ, $\overline{\Sigma}$ *a curvatura costante* di uno qualunque dei nostri inviluppi di sfere, proprietà che ci servirà poi in seguito (Cap. XXV) a collegare i teoremi di Guichard colle trasformazioni (di Bäcklund) *reali od immaginarie* delle superficie a curvatura costante.

Per ciò riprenderemo i risultati dei §§ 247, 248, relativi alla applicazione successiva delle trasformazioni di Moutard, e dimostreremo:

A) *Se le due falde* Σ, $\overline{\Sigma}$ *di un inviluppo di sfere sono contigue, per trasformazione di Moutard, ad una superficie, e quindi* (§ 248) *ad una semplice infinità di superficie, le superficie* Σ, $\overline{\Sigma}$ *hanno la stessa curvatura*

costante e l'inviluppo coincide con uno di quelli trovati col secondo teorema di Guichard (§ 258) *e colle proposizioni complementari* (§ 259).

In altre parole (§ 248) ciascuna superficie S_1 di questa semplice infinità forma tanto con Σ quanto con $\overline{\Sigma}$ la superficie focale completa di una congruenza W.

Seguendo il metodo dei §§ precedenti, dimostreremo la proprietà in questione facendo al tempo stesso una ricerca più generale e prescindendo dapprima dalla condizione che le congruenze le cui falde focali sono (Σ, S_1), $(\overline{\Sigma}, S_1)$ debbano essere congruenze W, domandiamo di:

B) *trovare gli inviluppi di sfere, pei quali alle due falde* Σ, $\overline{\Sigma}$ *si può associare una terza superficie* S_1, *che formi sì con* Σ *che con* $\overline{\Sigma}$ *la superficie focale completa di una congruenza rettilinea.*

Siano $M \equiv (x, y, z)$, $\overline{M} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ due punti corrispondenti di Σ, $\overline{\Sigma}$ e sia $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ il punto corrispondente della superficie supposta S_1. Questo punto M_1 dovrà trovarsi sulla retta r d'intersezione dei due piani tangenti in M, $\overline{M}$ a Σ, $\overline{\Sigma}$ rispettivamente; i coseni di direzione della retta r sono, nelle nostre notazioni fondamentali (§§. 254-255)

$$X_2 , \quad Y_2 , \quad Z_2 .$$

Ora il piede P della retta r sul piano $M M_0 \overline{M}$ delle due normali a Σ, $\overline{\Sigma}$ ha le coordinate

$$x_0 + \frac{T}{\cos\sigma} X_1 , \quad y_0 + \frac{T}{\cos\sigma} Y_1 , \quad z_0 + \frac{T}{\cos\sigma} Z_1$$

e se poniamo

$$\overline{P\,\overline{M}_1} = \Lambda \operatorname{tg}\sigma ,$$

dove Λ sarà una funzione incognita di u, v, avremo

$$x_1 = x_0 + \frac{T}{\cos\sigma} X_1 + \Lambda \operatorname{tg}\sigma X_2 , \tag{42}$$

colle formole analoghe per y_1, z_1.

Resterà da determinare Λ in guisa che la superficie S_1 luogo di M_1 abbia in M_1 il piano $M M_1 \overline{M}$ per piano tangente. Ma la normale a questo piano, essendo normale alla retta $M \overline{M}$ (coi coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3) ed alla retta $M M_1$, avrà i coseni di direzione proporzionali ai binomii

$$\xi = \Lambda X_1 - T \operatorname{sen}\sigma X_2 , \quad \eta = \Lambda Y_1 - T \operatorname{sen}\sigma Y_2 , \quad \zeta = \Lambda Z_1 - T \operatorname{sen}\sigma Z_2 . \tag{43}$$

La nostra funzione incognita \ deve dunque determinarsi dalle due condizioni

$$\sum \xi \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0 , \qquad \sum \xi \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 \tag{44}$$

Ora dalle (42) e dalle formole fondamentali (§§ 254-255) si traggono le seguenti:

$$(45)\quad \begin{cases} \sum X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{T \operatorname{sen} \sigma}{\cos^2 \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \Lambda \operatorname{tg} \tau \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \\ \sum X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{T \operatorname{sen} \sigma}{\cos^2 \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \Lambda \operatorname{tg} \sigma \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ \sum X_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{T}{\cos \sigma} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} + \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial u} + \frac{\Lambda}{\cos^2 \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \\ \sum X_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{G_0} + \frac{T}{\cos \sigma} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial v} + \frac{\Lambda}{\cos^2 \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial v} \\ \sum X_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{T}{\cos \sigma} \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \Lambda \operatorname{tg} \sigma \frac{D'_0}{\sqrt{G_0}} \\ \sum X_3 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{T}{\cos \sigma} \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \Lambda \operatorname{tg} \sigma \frac{D''_0}{\sqrt{G_0}} . \end{cases}$$

Dopo ciò le (44) danno per determinare Λ le due equazioni simultanee

$$(46)\quad \begin{cases} T \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} (T^2 + \Lambda^2) \\ T \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} (T^2 + \Lambda^2) - T \sqrt{G_0} \cos \sigma . \end{cases}$$

Intanto, siccome in queste ultime equazioni non figurano i coefficienti D_0, D'_0, D''_0 della seconda forma fondamentale della superficie S_0 luogo dei centri delle sfere, vediamo che se la proprietà voluta sussiste per una particolare configurazione di S_0, sussisterà anche comunque deformando questa superficie ed i punti M_1 della superficie S_1 rimarranno invariabilmente collegati alla S_0 nelle sue deformazioni.

Dobbiamo ora esaminare se le (46) ammettono o no soluzioni in Λ

Costruendo la condizione d'integrabilità, si trova subito l'equazione seguente:

$$(47)\qquad (\Lambda^2+T^2)\left\{\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\log(T\operatorname{sen}\sigma)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\log(T\operatorname{sen}\sigma)+K_0\sqrt{E_0G_0}\right\}+$$

$$+2\cot\sigma\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}\Lambda+\frac{T}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right)=0\,.$$

Poichè questa è di secondo grado in Λ, si vede che esisterà o una semplice infinità di superficie S_1, o altrimenti al massimo due tali superficie isolate [1].

Il primo caso è quello che a noi interessa; allora la (47), risolvendosi in un'identità, dà le condizioni

$$\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v}=0\quad,\qquad\sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\frac{d}{du}\log(T\operatorname{sen}\sigma)=\frac{\partial^2\sqrt{G_0}}{\partial u^2}\,.$$

Ne risulta che si può porre

$$\sqrt{E_0}=1\quad,\qquad\sqrt{G_0}=\cot\sigma\,,\quad\sigma=\sigma(u)$$

e l'ultima integrata porge

$$(48)\qquad T\operatorname{sen}\sigma=\frac{\sigma'}{c\operatorname{sen}^2\sigma}\quad(c\text{ costante})\,.$$

Questa combina precisamente colla (31) pag. 107 e ci dimostra che le due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ hanno la stessa curvatura costante; viceversa per gli inviluppi di sfere al § 259, le cui falde conservano curvatura costante in qualunque deformazione della superficie dei centri, il nostro problema B) ammette ∞^1 soluzioni.

---

[1] Per l'esistenza di una o due di tali superficie isolate S_1 è evidentemente necessario che una o tutte due le radici in Λ della (47) soddisfino poi le (46). Come esempio, abbastanza generale, citiamo il seguente. Prendasi per S_0 una superficie di rotazione d'elemento lineare $ds^2_0=du^2+r^2\,dv^2$ e pongasi $T=\sqrt{a^2r^2-b^2}$, essendo a, b due costanti. Ponendo allora nelle (46) $\sqrt{E_0}=1$, $\sqrt{G_0}=r$, indi $\cos\sigma=-T'=\dfrac{-a^2rr'}{T}$, si soddisfano contemporaneamente le (46) con $\Lambda=\pm b$.

§. 266.

Corrispondenza delle assintotiche sopra Σ, S_1.

Per dimostrare completamente la nostra proposizione A) resta ora soltanto a provare che sopra Σ, S_1 (o $\bar{\Sigma}$, S_1) si corrispondono i sistemi coniugati. Ora intanto nel nostro caso la prima delle (46) diventa $\frac{\partial \Lambda}{\partial u} = 0$, onde Λ deve essere una funzione della sola v; la seconda (46) diventa per la (48)

$$\frac{d\Lambda}{dv} = c\,\Lambda^2 + \frac{\sigma'^2}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma} - \frac{\cos^2\sigma}{\mathrm{sen}^2\sigma}\,.$$

Ma indicando con $\frac{1}{A}$ il valore costante della curvatura per le due falde Σ, $\bar{\Sigma}$ dell'inviluppo, la equazione (32) pag. 107 ci dà

$$\frac{\sigma'^2}{c\,\mathrm{sen}^2\sigma} - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\sigma} = c\,A\,,$$

e quindi l'equazione differenziale per Λ resta definitivamente

$$\frac{d\Lambda}{dv} = c\,A + 1 + c\,\Lambda^2. \tag{49}$$

Pongasi ora

$$\Delta = \sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}\,,\quad \Delta' = \sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}\,,$$

$$\Delta'' = \sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}\,,$$

e saranno Δ, Δ', Δ'' proporzionali ai coefficienti della seconda forma fondamentale di S_1, sicchè la nostra proposizione equivale alla proporzione:

$$\Delta : \Delta' : \Delta'' = D_0 : D'_0 : D''_0\,. \tag{50}$$

Ma dai valori (43) di ξ, η, ζ, derivando risulta

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \cos\sigma\,(\mathrm{sen}\,\sigma - T\,\sigma')\,X_2 + \left(\Lambda\,D_0 - \frac{T\,\mathrm{sen}^2\sigma}{\cos\sigma}\,D'\right)X_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \left(c\,\Lambda^2 + c\,A + 1 - \frac{T\,\sigma'}{\mathrm{sen}\,\sigma}\right)X_1 - \frac{\Lambda\,\sigma'}{\mathrm{sen}^2\sigma}\,X_2 + \left(\Lambda\,D'_0 - \frac{T\,\mathrm{sen}^2\sigma}{\cos\sigma}\,D''_0\right)X_3$$

e conseguentemente:

$$\begin{cases} \Delta = (\operatorname{sen}\sigma - T\sigma')\dfrac{A\sigma'}{\cos\sigma} + \left(A D_0 - \dfrac{T\operatorname{sen}^2\sigma}{\cos\sigma}D'_0\right)\left(\dfrac{T}{\cos\sigma}D_0 + A\,tg^2\sigma D'_0\right) \\ \Delta' = (\operatorname{sen}\sigma - T\sigma')\left(\dfrac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} - \dfrac{T\sigma'}{\operatorname{sen}^2\sigma} + (cA^2 + \sigma A + 1)\operatorname{sen}\sigma\right) + \\ \quad + \left(A D_0 - \dfrac{T\operatorname{sen}^2\sigma}{\cos\sigma}D'_0\right)\left(\dfrac{TD'_0}{\cos\sigma} + A\,tg^2\sigma D''_0\right) \\ \Delta'' = (T\sigma' - \operatorname{sen}\sigma)\dfrac{A\sigma'\cos\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma} + \left(A D'_0 - \dfrac{T\operatorname{sen}^2\sigma}{\cos\sigma}D''_0\right)\left(\dfrac{T}{\cos\sigma}D'_0 + A\,tg^2\sigma D''_0\right). \end{cases}$$

Da queste formole e dalle precedenti risulta facilmente la verifica dalla proporzione (50).

Veniamo in fine alla osservazione, per noi più importante, che collega, come già si è detto, i teoremi di Guichard colla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante. L'osservazione è questa che: *la* (49) *ammette le due soluzioni particolari costanti, reali od immaginarie.*

$$A^2 = -\frac{cA+1}{c}. \tag{51}$$

Dimostriamo facilmente che le due corrispondenti superficie S_1 (reali od immaginarie) hanno la medesima curvatura costante $\frac{1}{A}$ di Σ, o $\overline{\Sigma}$, con ciascuna delle quali formano le due falde focali di una congruenza pseudosferica. Proveremo per ciò che è costante il segmento focale $M M_1$ ed inoltre l'angolo θ delle due normali alle due falde Σ, S_1 della congruenza in due punti corrispondenti M, M_1. Intanto pel quadrato

$$\rho^2 = \overline{M M_1}^2 = \sum (x_1 - x)^2$$

del segmento focale si ha subito

$$\rho^2 = (A^2 + T^2)\,tg^2\sigma.$$

Ma, per le (31), (32) pag. 107 è:

$$T^2 = A + \frac{1}{c\operatorname{sen}^2\sigma},$$

e quindi, per le (51)

$$\rho^2 = \frac{1}{c}. \tag{52}$$

I coseni di direzione delle rispettive normali a Σ, S_1 in M, M_1 sono

$$X_1 \cos\sigma + X_2 \operatorname{sen}\sigma\,,\quad Y_1 \cos\sigma + Y_2 \operatorname{sen}\sigma\,,\quad Z_1 \cos\sigma + Z_2 \operatorname{sen}\sigma$$

$$\frac{\Lambda X_1 - T \operatorname{sen}\sigma X_2}{\sqrt{\Lambda^2 + T^2 \operatorname{sen}^2\sigma}}\,,\quad \frac{\Lambda Y_1 - T \operatorname{sen}\sigma Y_2}{\sqrt{\Lambda^2 + T^2 \operatorname{sen}^2\sigma}}\,,\quad \frac{\Lambda Z_1 - T \operatorname{sen}\sigma Z_2}{\sqrt{\Lambda^2 + T^2 \operatorname{sen}^2\sigma}}$$

e si ha quindi

$$\cos\theta = \frac{\Lambda \cos\sigma}{\sqrt{\Lambda^2 + T^2 \operatorname{sen}^2\sigma}} =$$

$$= \frac{\Lambda \cos\sigma}{\sqrt{\Lambda^2 \cos^2\sigma + \rho^2 \cos^2\sigma}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + \rho^2}}\,,$$

o infine

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{c\,\mathrm{A} + 1}{c\,\mathrm{A}}}\,. \tag{53}$$

Secondo i risultati dei §§. 258-259, suddistinguiamo ora a seconda che la curvatura $\frac{1}{\mathrm{A}}$ è positiva o negativa per esaminare ogni volta colle (51), (52), (53), se i corrispondenti valori di Λ, ρ, θ sono reali ovvero immaginarii.

1.° caso A positiva

Sia $\mathrm{A} = a^2$; allora avremo (§ 258)

$$c = \mp \frac{1}{b^2}\,,$$

secondo che la superficie S_0 luogo dei centri delle sfere è applicabile sull'ellissoide o sull'iperboloide di Guichard. Le (51), (52), (53) diventano

$$\Lambda^2 = -(a^2 \mp b^2),\ \rho^2 = \mp b^2,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = e\,.$$

In ogni caso Λ è (puramente) immaginario ed immaginarie (coniugate) sono quindi le due superficie S_1. Se la superficie S_0 dei centri è applicabile sull'ellissoide di Guichard la lunghezza ρ del segmento focale è puramente immaginaria e l'angolo θ dei piani focali è reale; l'opposto accade quando S_0 è applicabile sull'iperboloide.

2.° caso A negativa.

Poniamo, come al § 259, $A = -R^2$; allora c è necessariamente positiva (ibid.) e, posto $c = \frac{1}{a^2}$, ne risulta

$$\Lambda^2 = R^2 - a^2, \quad \rho = a, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}.$$

Suddistinguendo i tre casi

$$\alpha)\ a = R, \quad \beta)\ a < R, \quad \gamma)\ a > R,$$

abbiamo:

$\alpha)$ $a = R$ — La superficie S_0 luogo dei centri è applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione. Le due superficie S_1 coincidono in una sola, che è complementare comune di Σ, $\bar{\Sigma}$.

$\beta)$ $a < R$ — La superficie S_0 è applicabile sul catenoide accorciato. Le due superficie pseudosferiche S_1 sono reali e distinte ed insieme con Σ, $\bar{\Sigma}$ costituiscono le quattro superficie pseudosferiche del teorema di permutabilità (§ 251).

$\gamma)$ $a > R$ — La S_0 è applicabile sul sinusoide iperbolico; Λ e $\frac{\pi}{2} - \theta$ sono puramente immaginarii, mentre ρ è sempre reale. Le due superficie pseudosferiche S_1 sono immaginarie coniugate.

Capitolo XVIII.

I sistemi ciclici

Congruenze normali di curve. — Congruenze normali di curve piane e teorema di Ribaucour. — Formole generali per le congruenze normali di circoli (sistemi ciclici). — Sistemi ciclici tracciati nei piani tangenti di una superficie Σ. — Relazione col problema della deformazione (Teorema di Darboux). — Sistemi ciclici normali ad una data superficie. — Sistemi di raggio costante. — Relazione col problema della rappresentazione sferica. — Sistemi ciclici normali ad una sfera o ad un piano. — Sistema triplo ortogonale collegato ad un sistema ciclico. — Le congruenze rettilinee cicliche. — Congruenze infinite volte cicliche. — Congruenze cicliche normali. — Determinazione delle immagini sferiche delle congruenze cicliche. — Inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura.

§. 267.

Congruenze normali di curve.

Intimamente legata colla teoria delle congruenze rettilinee e della deformazione delle superficie è la teoria, di cui andiamo a trattare nel presente Capitolo, relativa *ai sistemi* ∞^2 *di circoli che ammettono una serie di superficie ortogonali.*

Un tale sistema di circoli si dirà brevemente un *sistema normale di circoli*, od anche con una denominazione di Ribaucour, fondatore di questa teoria: *un sistema ciclico.*

Al nostro studio dobbiamo premettere alcune ricerche più generali relative ai sistemi ∞^2 di curve (congruenze) che riempiono lo spazio od una porzione di spazio in guisa che per ogni punto dello spazio passi una curva del sistema. Diremo che una tale congruenza è *normale* quando ammette una serie di superficie ortogonali, e per prima cosa dovremo ricercare la condizione che deve verificarsi in questa ipotesi [1].

Scriviamo le equazioni delle curve della congruenza sotto la forma

$$(1) \qquad \xi = \xi(u, v, t), \quad \eta = \eta(u, v, t), \quad \zeta = \zeta(u, v, t),$$

---

[1] Cf. Beltrami. — *Ricerche di analisi applicata alla geometria.* — Giornale di matematiche, vol. II.

essendo u, v due parametri i cui singoli valori u_0, v_0 individuano una curva C_0 del sistema, la variabile t definendo poi i punti della curva.

Supponiamo che esista una superficie Σ ortogonale alle curve (1) e sia

$$t = t(u, v) \tag{2}$$

la funzione di u, v che occorre sostituire in (1) per ottenere la Σ. Per un punto (u, v) di Σ passa la curva

$$\xi = \xi(u, v, t), \quad \eta = \eta(u, v, t), \quad \zeta = \zeta(u, v, t),$$

ove u, v s'intendono fissi e t variabile. La tangente alla curva avendo i coseni di direzione proporzionali alle tre derivate

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

dovremo avere per ipotesi

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t} d\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\zeta = 0,$$

quando si calcolino $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ dalle (1), sostituitovi per t il valore (2).

Se poniamo

$$\mathrm{T} = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2, \quad \mathrm{U} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \mathrm{V} = \sum \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \tag{3}$$

la precedente prende la forma

$$\mathrm{T}\, dt + \mathrm{U}\, du + \mathrm{V}\, dv = 0. \tag{4}$$

Il valore cercato di t in funzione di u, v deve dunque soddisfare a questa equazione ai differenziali totali. Perchè esista una serie continua di superficie Σ ortogonali alla congruenza è quindi necessario e sufficiente che la (4) sia illimitatamente integrabile, cioè risulti identicamente soddisfatta, in t, u, v, la condizione d'integrabilità

$$\mathrm{T}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right) + \mathrm{U}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) + \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}\right) = 0. \tag{5}$$

Se tale condizione non è verificata, potranno al più esistere superficie isolate ortogonali alla congruenza, e ciò avverrà quando la (5) dia per t uno o più valori che verifichino l'equazione differenziale (4).

Osserviamo che qualche volta, in luogo di esser date le equazioni (1) in termini finiti della congruenza, potranno esser definite le curve di

questa come curve integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

dove X, Y, Z sono funzioni assegnate di x, y, z. In tal caso ogni superficie ortogonale alle congruenze dovrà essere un integrale dell'equazione a differenziali totali

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

e la congruenza sarà normale se sarà identicamente soddisfatta la condizione d'integrabilità

$$(5^*) \qquad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

§. 268.

Congruenze di curve piane. — Teorema di Ribaucour.

Consideriamo il caso particolare in cui le curve della congruenza sono piane, e supponiamo che i loro piani formino una *doppia infinità*. Essi inviluppperanno una superficie S_0, che potrà in particolare ridursi ad una curva, ovvero ad un punto. Esaminiamo dapprima il caso (generale) di un'effettiva superficie inviluppo S_0, che riferiamo ad un sistema coordinato curvilineo (u, v) ortogonale; e riteniamo le consuete notazioni del § 254 (pag. 90), utilizzando le formole corrispondenti. In ogni piano tangente ad S_0 in un punto M_0 avremo una curva C_0 della congruenza che riferiamo, nel suo piano, a coordinate polari aventi il polo in M_0 e per asse polare la direzione (X_1, Y_1, Z_1); indichiamo poi inoltre con t l'angolo polare e con R il raggio vettore onde sarà

$$R = R(u, v, t),$$

e la specie di questa funzione determinerà la natura delle curve della congruenza. Le coordinate ξ, η, ζ di un punto qualunque della curva C saranno date da

$$\xi = x_0 + R\cos t\, X_1 + R\,\mathrm{sen}\, t\, X_2$$

e dalle analoghe per η, ζ. Derivando rapporto a t, u, v, coll'aver riguardo

alle formole del § 254 e precisamente alle (1) pag. 91, troviamo

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(\frac{\partial R}{\partial t}\cos t - R \operatorname{sen} t\right) X_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial t}\operatorname{sen} t + R\cos t\right) X_2$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \left\{\sqrt{E_0} + \frac{\partial R}{\partial u}\cos t + R \operatorname{sen} t \frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right\} X_1 +$$

$$+ \left\{\frac{\partial R}{\partial u}\operatorname{sen} t - R\cos t \frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right\} X_2$$

$$+ R\left(\cos t \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} + \operatorname{sen} t \frac{D'_0}{\sqrt{G_0}}\right) X_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \left\{\frac{\partial R}{\partial v}\cos t - R \operatorname{sen} t \frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right\} X_1 +$$

$$+ \left\{\sqrt{G_0} + \frac{\partial R}{\partial v}\operatorname{sen} t + R\cos t \frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right\} X_2$$

$$+ R\left(\cos t \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + \operatorname{sen} t \frac{D''_0}{\sqrt{G_0}}\right) X_3 .$$

Calcolando ora, secondo le formole (3), i valori di T, U, V, abbiamo

$$(6)\quad \begin{cases} T = R^2 + \left(\dfrac{\partial R}{\partial t}\right)^2 \\ U = \dfrac{\partial R}{\partial t}\dfrac{\partial R}{\partial u} + \sqrt{E_0}\cos t \dfrac{\partial R}{\partial t} - R^2 \dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\dfrac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} - R\sqrt{E_0}\operatorname{sen} t \\ V = \dfrac{\partial R}{\partial t}\dfrac{\partial R}{\partial v} + \sqrt{G_0}\operatorname{sen} t \dfrac{\partial R}{\partial t} + R^2 \dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + R\sqrt{G_0}\cos t . \end{cases}$$

Se con questi valori di T, U, V formiamo la condizione (5) d'integrabilità, avremo evidentemente per la funzione incognita R delle tre variabili u, v, t un'equazione a derivate parziali del 2.° ordine; ogni soluzione di questa ci darà una congruenza normale di curve giacenti nei rispettivi piani tangenti di S_0.

Ora, se osserviamo che i valori (6) di T, U, V dipendono soltanto dai coefficienti E_0, G_0 della prima forma fondamentale di S_0 e nulla

affatto da quelli D_0, D'_0, D''_0 della seconda forma, siamo condotti all'elegante proposizione di Ribaucour [1]. *Se si ha una congruenza* (C) *normale di curve piane* C *e si deforma comunque la superficie* S_0 *inviluppo dei loro piani, in guisa che la superficie* S_0 *trasporti seco i suoi piani tangenti e le curve* C *ivi invariabilmente fissate, la congruenza* (C) *rimarrà sempre, in tutte le sue configurazioni, una congruenza normale.*

Di più si osservi che, l'equazione stessa (4) delle superficie traiettorie ortogonali essendo indipendente da D_0, D'_0, D''_0, si può enunciare il teorema: *Se si segnano i punti* P *ove le curve* C *segano una superficie ortogonale* Σ, *il luogo dei medesimi punti* P, *trasportati invariabilmente da* S_0 *in qualunque sua flessione, darà sempre una superficie* Σ *ortogonale alla congruenza* C *nella sua nuova configurazione.*

Ciò vale evidentemente tanto nel caso di congruenze normali come nel caso di congruenze (C) ortogonali soltanto a superficie isolate.

Abbiamo supposto fin qui che la doppia infinità di piani delle curve C inviluppasse un'effettiva superficie S_0. Non è senza interesse esaminare il caso in cui questa superficie S_0 si riduca ad una curva Γ ed i piani delle curve C siano quindi i piani dei fasci aventi per assi le tangenti di Γ. Prendiamo allora per variabile u l'arco della curva Γ, contato da un suo punto fisso, e riteniamo del resto per Γ le consuete notazioni del Cap. I.

Assumiamo poi per variabile v l'angolo d'inclinazione del piano di una curva C sul piano osculatore di Γ. Allora si vedrà subito che le formole fondamentali del § 254 rimarranno ancora applicabili alla superficie S_0, ridotta alla curva Γ, quando si facciano le posizioni seguenti:

$$\sqrt{E_0} = 1 \ , \quad \sqrt{G_0} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = -\frac{\cos v}{\rho}$$

$$D_0 = -\frac{\operatorname{sen} v}{\rho} \ , \ D'_0 = 0 \ , \ \frac{D'_0}{\sqrt{G_0}} = -\frac{1}{T} \ , \ \frac{D''_0}{\sqrt{G_0}} = 1 \ .$$

e si assuma

$$\begin{cases} X_1 = \alpha \ , \quad Y_1 = \beta \ , \quad Z_1 = \gamma \\ X_2 = \xi \cos v + \lambda \operatorname{sen} v \ , \ Y_2 = \eta \cos v + \mu \operatorname{sen} v \ , \ Z_2 = \zeta \cos v + \nu \operatorname{sen} v \\ X_3 = \lambda \cos v - \xi \operatorname{sen} v \ , \ Y_3 = \mu \cos v - \eta \operatorname{sen} v \ , \ Z_3 = \nu \cos v - \zeta \operatorname{sen} v \ . \end{cases}$$

---

[1] *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (§ 119 e seguenti).

Con ciò infatti risultano soddisfatte le (1) pag. 91 e le formole di Codazzi (II) (pag. 90). Così potremo ancora applicare il nostro calcolo precedente, e pei valori di T, U, V si avrà

$$(6^*)\qquad \begin{cases} T = R^2 + \left(\dfrac{\partial R}{\partial t}\right)^2 \\ U = \dfrac{\partial R}{\partial t}\dfrac{\partial R}{\partial u} + \cos t \dfrac{\partial R}{\partial t} + R^2 \dfrac{\cos v}{\rho} - R \operatorname{sen} t \\ V = \dfrac{\partial R}{\partial t}\dfrac{\partial R}{\partial v}. \end{cases}$$

Come si vede, dei due raggi di curvatura di l' figura qui soltanto il primo ρ, onde la proposizione di Ribaucour prende ora l'aspetto seguente: *Se le curve di una congruenza normale* (C) *sono tracciate negli* ∞^2 *piani tangenti di una curva* Γ, *torcendo comunque la curva* Γ *senza alterarne la flessione, la congruenza* (C), *trasportata invariabilmente nelle deformazioni di* Γ, *rimarrà sempre una congruenza normale.*

§. 269.

Formole generali pei sistemi ciclici.

Veniamo ora a considerare il caso di una congruenza di circoli. Per definirla analiticamente basterà dare in funzione di due parametri u, v le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo, i coseni di direzione α, β, γ della normale al piano del circolo ed il raggio R del circolo stesso. Nel piano del circolo (u, v) tracciamo due diametri ortogonali, del resto arbitrarii, e indichiamo con

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\ ;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

i loro coseni di direzione. Se con t denotiamo l'angolo d'inclinazione di un raggio del circolo sulla direzione $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, le formole (1) pag. 130 diverranno nel caso attuale:

$$(7)\qquad \xi = x_1 + R(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \operatorname{sen} t),\ \eta = y_1 + R(\beta_1 \cos t + \beta_2 \operatorname{sen} t),\ \zeta = z_1 + R(\gamma_1 \cos t + \gamma_2 \operatorname{sen} t),$$

e tenendo conto delle relazioni

$$\sum \alpha_1^2 = 1\ ,\quad \sum \alpha_2^2 = 1\ ,\quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

per l'equazione a differenziali totali (4) pag. 131 troveremo:

$$(8)\qquad R\,dt+\left\{\cos t\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}-\operatorname{sen}t\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}+R\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\right\}du+$$
$$+\left\{\cos t\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}-\operatorname{sen}t\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+R\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\right\}dv=0\,.$$

La condizione d'integrabilità (5) assume qui la forma

$$(9)\qquad A+B\operatorname{sen}t+C\cos t=0\,,$$

dove A, B, C sono funzioni di u, v soltanto. Esisterà una serie ∞^1 di superficie ortogonali ai circoli se saranno soddisfatte le tre condizioni:

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0\,.$$

Queste, calcolate ordinatamente, portano alle tre equazioni fondamentali seguenti:

$$(I)\qquad R^2\left\{\frac{\partial}{\partial v}\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\right\}+$$
$$\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}-\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}=0$$

$$(II)\qquad R\left\{\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\cdot\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}-\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u}\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}\right\}+$$
$$+\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial R}{\partial v}-\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial R}{\partial u}=0$$

$$(III)\qquad R\left\{\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\cdot\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}-\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\cdot\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\right\}+$$
$$+\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial R}{\partial u}-\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial R}{\partial v}=0\,.$$

Se queste non sono identicamente soddisfatte, la (9) fornirà *al massimo* due superficie ortogonali ai circoli; ne segue il teorema di Ribaucour: *Se i circoli di una congruenza sono normali a tre diverse superficie, lo sono ad un'intera serie ∞^1 di superficie.*

È importante poi osservare che la (8), prendendo per incognita

$$\Lambda = t g \frac{t}{2} ,$$

assume la forma di Riccati

$$d\Lambda = (a\Lambda^2 + b\Lambda + c)\,du + (a'\Lambda^2 + b'\Lambda + c')\,dv ,$$

essendo $a, b, c; a', b', c'$ funzioni note di u, v. La nota proprietà delle equazioni del tipo di Riccati che il rapporto anarmonico di quattro soluzioni particolari è costante (indipendente da u, v) trova qui il significato geometrico corrispondente nel teorema di Ribaucour [1]. *Quattro superficie della serie ortogonale ai circoli determinano su tutti i circoli del sistema un gruppo di quattro punti, il cui rapporto anarmonico è costante.*

§. 270.

Sistemi ciclici tracciati nei piani tangenti di una superficie Σ.

Facciamo una prima ed importante applicazione delle formole generali del § precedente alla ricerca dei sistemi ∞^2 normali di circoli giacenti nei piani tangenti di una superficie data Σ. Il teorema di Ribaucour (§ 268) ci assicura già *a priori* che la risoluzione del problema deve dipendere unicamente dall'elemento lineare di Σ. Per la superficie Σ riteniamo le solite notazioni del § 254 (pag. 90), le cui formole dovremo qui nuovamente utilizzare. Nel piano tangente in M_0 alla superficie Σ indichino A, B le coordinate cartesiane ortogonali del centro M_1 del circolo, ove si prendano le due direzioni (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) come assi; avremo così evidentemente

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + A X_1 + B X_2 \\ y_1 &= y_0 + A Y_1 + B Y_2 \\ z_1 &= z_0 + A Z_1 + B Z_2 . \end{aligned}\right.$$

e nelle formole del § precedente potremo porre inoltre

$$\alpha_1 = X_1 , \ \beta_1 = Y_1 , \ \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2 , \ \beta_2 = Y_2 , \ \gamma_2 = Z_2 .$$

---

[1] Per convincersene basta osservare che $\Lambda = tg \frac{t}{2}$ è il parametro dei raggi del fascio che dall'estremo del raggio di direzione $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ proietta i punti del circolo.

Dopo di ciò il calcolo dei coefficienti dell'equazione a differenziali totali (8), avendo riguardo alle formole del citato § 254, conduce ai valori seguenti:

$$\begin{cases} \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{E_0} + \frac{\partial A}{\partial u} + B \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \\ \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial v} - B \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial u} - A \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{G_0} + \frac{\partial B}{\partial v} + A \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ \sum \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} . \end{cases}$$

Perchè il sistema sia ciclico dovranno essere soddisfatte le condizioni (I), (II), (III), che assumono qui l'aspetto seguente:

$$\text{(I*)}\quad R^2 . K_0 \sqrt{E_0 G_0} + \left(\sqrt{E_0} + \frac{\partial A}{\partial u} + B \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\sqrt{G_0} + \frac{\partial B}{\partial v} + A \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial u} - A \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial v} - B \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial v}\right) = 0 ,$$

$$\text{(II*)}\quad \left(\frac{\partial A}{\partial v} - B \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) \frac{\partial R}{\partial u} - \left(\sqrt{E_0} + \frac{\partial A}{\partial u} + B \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) \frac{\partial R}{\partial v} = R B K_0 \sqrt{E_0 G_0} ,$$

$$\text{(III*)}\quad - \left(\sqrt{G_0} + \frac{\partial B}{\partial v} + A \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) \frac{\partial R}{\partial u} + \left(\frac{\partial B}{\partial u} - A \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right) \frac{\partial R}{\partial v} = R A K_0 \sqrt{E_0 G_0} ,$$

indicando K_0 la curvatura assoluta di Σ. In queste formole, conformemente al teorema generale di Ribaucour, vediamo figurare soltanto i coefficienti dell'elemento lineare di Σ.

Se risolviamo le (II*), (III*) rapporto a $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$, avendo riguardo alla (I*) e supponendo $K_0 \neq 0$, cioè Σ non sviluppabile, [1] troviamo

$$(10) \qquad \begin{cases} R\,\frac{\partial R}{\partial u} = A\,\frac{\partial A}{\partial u} + B\,\frac{\partial B}{\partial u} + A\,\sqrt{E_0} \\ R\,\frac{\partial R}{\partial v} = A\,\frac{\partial A}{\partial v} + B\,\frac{\partial B}{\partial v} + B\,\sqrt{G_0}\,, \end{cases}$$

ossia

$$(10^*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}\,(R^2 - A^2 - B^2) = 2\,A\,\sqrt{E_0} \\ \frac{\partial}{\partial v}\,(R^2 - A^2 - B^2) = 2\,A\,\sqrt{G_0}\,. \end{cases}$$

Di qui risulta che

$$A\,\sqrt{E_0}\,du + B\,\sqrt{G_0}\,dv$$

deve essere un differenziale esatto, onde indicando con τ una funzione incognita di u, v, potremo porre

$$(11) \qquad A = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial \tau}{\partial u}\,, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial \tau}{\partial v}$$

e le (10*) potranno compendiarsi nell'unica

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,\tau\,,$$

ovvero

$$(11^*) \qquad R^2 = \Delta_1\,\tau + 2\,\tau\,,$$

dove $\Delta_1\,\tau$ indica il parametro differenziale primo di τ calcolato rispetto a Σ. Resta a soddisfarsi soltanto la (I*), che si muterà evidentemente in una equazione alle derivate parziali seconde per τ. Avendo riguardo ai valori dei simboli di Christoffell (I, pag. 92), la (I*) si può scrivere così:

$$\frac{(\tau_{11} + E_0)\,(\tau_{22} + G_0) - \tau_{12}^2}{E_0\,G_0} + K_0\,(\Delta_1\,\tau + 2\,\tau) = 0$$

dove τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} indicano le derivate seconde covarianti di τ.

---

[1] In questo caso, il cui esame diretto lasciamo al lettore, i piani dei circoli formano soltanto un sistema ∞^1.

L'equazione per τ, da cui dipende la soluzione del nostro problema può scriversi adunque sotto forma invariantiva:

$$\text{(A)} \qquad \Delta_{22}\tau + \Delta_1\tau + K_0(\Delta_1\tau + 2\tau) + 1 = 0 \ .$$

La forma di questa equazione suggerisce subito il paragone con quella a cui soddisfa il semiquadrato ρ della distanza dei punti di Σ da un punto dello spazio, cioè colla equazione (C) ottenuta alla fine del Cap. IV (I, pag. 147):

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + K_0(\Delta_1\rho - 2\rho) + 1 = 0 \ .$$

L'equazione (A) si riduce infatti a questa ponendo $\tau = -\rho$. Vediamo quindi che il problema attuale si collega con quello della deformazione (finita) della superficie Σ.

§. 271.

Teorema di Darboux.

Al legame ora accennato, fra i due problemi della ricerca delle deformazioni di una superficie S_0 e della determinazione dei sistemi normali ∞^2 di circoli giacenti nei suoi piani tangenti, si può dare una forma geometrica espressiva mediante un bel teorema di Darboux [1], che in sostanza è già contenuto nelle osservazioni precedenti ed occorre ora soltanto sviluppare. Per questo, riprendendo le considerazioni del Cap. XVII relative alla deformazione delle congruenze rettilinee, immaginiamo che dai punti M_0 di S_0 partano i raggi di una congruenza normale e sia M il punto ove il raggio uscente da M_0 incontra una delle superficie ortogonali Σ. Domandiamo allora: *È possibile deformare la superficie* S_0, *che seco trascini, al modo di Beltrami, i segmenti* M_0M, *in guisa che dopo la deformazione gli estremi* M *dei segmenti vengano a riunirsi in un punto dello spazio?*

Riferendo il punto M al triedro col vertice in M_0 e cogli spigoli nelle tre direzioni

$$(X_1, Y_1, Z_1) \ , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \ , \quad (X_3, Y_3, Z_3)$$

come a triedro coordinato, indichino

$$A \ , \quad B \ , \quad C$$

le coordinate di M rispetto a questo triedro. Le coordinate assolute x, y, z

---

[1] *Leçons* etc. T. III. n. 761 pag. 354.

di M in una qualunque configurazione di M saranno date da

$$x = x_0 + A\,X_1 + B\,X_2 + C\,X_3$$

$$y = y_0 + A\,Y_1 + B\,Y_2 + C\,Y_3$$

$$z = z_0 + A\,Z_1 + B\,Z_2 + C\,Z_3 .$$

Nella configurazione finale supposta di S_0, i punti M essendo riuniti in un solo punto, dovranno risultare nulle le derivate parziali rispetto ad u, v di x, y, z.

Facendo uso delle formole del §. 254 ((1) pag. 91), si trova subito che le dette condizioni si risolvono nelle sei seguenti:

$$(12)\qquad \begin{cases} C\,\dfrac{D_0}{\sqrt{E_0}} = \sqrt{E_0} + \dfrac{\partial A}{\partial u} + B\,\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\,\dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ C\,\dfrac{D'_0}{\sqrt{G_0}} = \dfrac{\partial B}{\partial u} - A\,\dfrac{1}{\sqrt{G_0}}\,\dfrac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial C}{\partial u} + \dfrac{A\,D_0}{\sqrt{E_0}} + \dfrac{B\,D'_0}{\sqrt{G_0}} = 0 \end{cases}$$

$$(12^*)\qquad \begin{cases} C\,\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}} = \sqrt{G_0} + \dfrac{\partial B}{\partial v} + A\,\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\,\dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ C\,\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}} = \dfrac{\partial A}{\partial v} - B\,\dfrac{1}{\sqrt{E_0}}\,\dfrac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial C}{\partial v} + A\,\dfrac{D'_0}{\sqrt{E_0}} + B\,\dfrac{D''_0}{\sqrt{G_0}} = 0 , \end{cases}$$

alle quali sono da aggiungersi le equazioni di Gauss e Codazzi per D_0, D'_0, D''_0. Intanto alle due ultime (12), (12*) si può sostituire per le precedenti il sistema

$$(13)\qquad \begin{cases} C\,\dfrac{\partial C}{\partial u} + A\,\dfrac{\partial A}{\partial u} + B\,\dfrac{\partial B}{\partial u} + A\,\sqrt{E_0} = 0 \\ C\,\dfrac{\partial C}{\partial v} + A\,\dfrac{\partial A}{\partial v} + B\,\dfrac{\partial B}{\partial v} + B\,\sqrt{G_0} = 0 . \end{cases}$$

L'equazione di Gauss, a causa dei valori di D_0, D'_0, D''_0 forniti dalle prime due (12) e (12*), diventa

$$(14)\quad C^2 K_0 \sqrt{E_0 G_0} = \left(\sqrt{E_0} + \frac{\partial A}{\partial u} + B\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right)\left(\sqrt{G_0} + \frac{\partial B}{\partial v} + \right.$$

$$\left. + A\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial u} - A\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial v} - B\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u}\right).$$

D'altronde basta che A, B, C soddisfino alle (13), (14) perchè i valori di D_0, D'_0, D''_0, tratti dalle (12), (12*), soddisfino alle equazioni di Codazzi ed esista quindi la deformazione richiesta di S_0, per la quale i termini M dei segmenti $M_0 M$ vengono a riunirsi in un solo punto.

Ora se si osserva che le attuali equazioni (13), (14) vengono precisamente a coincidere colle (10) e colla (I*) del § precedente, quando si faccia

$$C^2 = -R^2,$$

ossia

$$C = iR.$$

l'interpretazione geometrica di questo risultato dà il teorema di Darboux. Se si considera infatti il punto di coordinate (A, B, iR), rispetto ad un sistema di assi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, come una sfera di raggio nullo

$$(\xi - A)^2 + (\eta - B)^2 + (\zeta - iR)^2 = 0,$$

la sua intersezione col piano $\zeta = 0$ è precisamente il circolo

$$(\xi - A)^2 + (\eta - B)^2 = R^2.$$

Possiamo dunque enunciare il teorema di Darboux:

Per costruire tutti i sistemi normali di circoli tracciati nei piani tangenti di una superficie S_0, *si consideri una qualunque superficie* S'_0 *applicabile sopra* S_0 *e, presa una sfera fissa di raggio nullo, si traccino i circoli d'intersezione di questa sfera coi piani tangenti di* S'_0. *Se si deforma* S'_0 *in guisa che prenda la forma* S_0, *i circoli trascinati nella deformazione daranno il sistema cercato.*

Nell'enunciato di questo teorema, che assegna il legame geometrico fra il problema della deformazione e quello dei sistemi ciclici, non ci si preoccupa della distinzione fra reale ed immaginario. Ma se vogliamo restare al reale, vediamo che quando il sistema ciclico è reale, la con-

figurazione S'_0 di S_0 è necessariamente immaginaria, poichè i valori di D_0, D'_0, D''_0, calcolati dalle (12), risultano puramente immaginarii. Analiticamente, per le proprietà fondamentali della teoria delle superficie (I, Cap. IV), ne dedurremo sempre tre funzioni ξ, η, ζ di u, v tali che

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = E_0\, du^2 + G_0\, dv^2 ;$$

ma facilmente si vede che due delle funzioni, p. e. ξ, η, si potranno ancora prendere reali, mentre la terza ζ sarà puramente immaginaria [1]. Dunque: *Restando nel campo reale, si può dire che ad ogni sistema ciclico reale i cui circoli giacciono nei piani tangenti di una superficie* S *d'elemento lineare*

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 ,$$

corrisponde una terna reale di funzioni x, y, z *tali che*

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 ,$$

e viceversa ad ogni tale terna corrisponde un sistema ciclico.

Se ritorniamo all'equazione dell'applicabilità (I pag. 239)

$$\Delta_{22}\,\theta = (1 - \Delta_1\,\theta)\, K ,$$

ove solo le soluzioni per le quali $\Delta_1\,\theta < 1$ avevano un significato geometrico reale per la deformazione, vediamo ora che anche le altre soluzioni che rendono $\Delta_1\,\theta > 1$ hanno un significato geometrico reale, come determinanti i sistemi ∞^2 normali di circoli giacenti nei piani tangenti della superficie.

---

[1] Per convincersene basta osservare che supponendo x, y reali e z puramente immaginario risultano D, D', D'' puramente immaginari. D'altronde se nelle formole fondamentali del Cap. IV si cangia

$$x,\ y,\ z$$

in

$$x,\ y,\ i\,z$$

e contemporaneamente X, Y, Z in

$$iX ,\ iY ,\ -Z$$

D, D', D'' in $i\,D, i\,D', i\,D''$ le formole fondamentali (II) del Cap. IV (I, pag. 117) restano inalterate mentre le (I) (I, pag. 116) vengono cangiate solo nel segno dell' ultimo termine. Corrispondentemente le equazioni di Codazzi restano inalterate e quella di Gauss diventa

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{EG - F^2} = -K .$$

§. 272.

Sistemi ciclici normali ad una data superficie. Sistemi di raggio costante.

Data una superficie S_0, cerchiamo di costruire un sistema ∞^2 normale di circoli ortogonali alla S_0. Trattiamo dapprima il problema nel modo seguente: da ogni punto M_0 di S_0, tangenzialmente alla normale di S_0, uscirà un circolo del sistema; consideriamo la traccia del piano del circolo sul piano tangente di S_0 e prendiamo a linee coordinate v sulla S_0 quelle inviluppate dalle dette traccie, e a linee u le loro traiettorie ortogonali.

Potremo applicare le formole generali del § 269, ponendo

$$x_1 = x_0 + R X_1 \ , \quad y_1 = y_0 + R Y_1 \ , \quad z_1 = z_0 + R Z_1$$
$$\alpha_1 = X_1 \ , \qquad \beta_1 = Y_1 \ , \qquad \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2 \ , \qquad \beta_2 = Y_2 \ , \qquad \gamma_2 = Z_2$$

Applicando le solite formole fondamentali del § 254, si troverà:

$$\begin{cases} \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial u} + \sqrt{E_0} \ , & \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial v} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = R \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} \ , & \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = R \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} \ , & \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} \ ; \end{cases}$$

ed ora, calcolando le condizioni (I), (II), (III) pag. 136 perchè il sistema sia normale, col far uso delle formole di Codazzi, si vedrà che le (I), (III) si riducono all'unica

$$(15) \qquad R \left\{ \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} D'_0 + \frac{1}{G_0} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} D'_0 \right\} + \left(\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial R}{\partial u} + 1 \right) D'_0 - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial R}{\partial v} D_0 = 0$$

e la (II) dà semplicemente

$$(16) \qquad \frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \ .$$

Si osserverà che la (15) contiene non solo i coefficienti dell'elemento lineare S_0, ma anche quelli della seconda forma fondamentale, per cui se la superficie S_0 si deforma, seco trascinando la congruenza di circoli, questa cessa in generale di essere una congruenza normale.

Possiamo subito risolvere il problema di: *trovare tutti i sistemi ciclici che rimangono ciclici, comunque deformando una delle superficie ortogonali.*

Supposto infatti che questa sia la S_0, la relazione lineare omogenea in D_0, D'_0, D''_0 dovrà risultare un'identità e si avrà quindi:

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

$$(17) \qquad R \frac{1}{\sqrt{E_0 G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial R}{\partial u} + 1 = 0 .$$

Si può dunque porre $E_0 = 1$ ed, essendo R funzione della sola u, sarà pure

$$\frac{\partial \log \sqrt{G_0}}{\partial u}$$

funzione della sola u e si potrà fare

$$\sqrt{G_0} = r = \varphi(u) \ ,$$

cioè la superficie S_0 è applicabile sopra una superficie di rotazione. La (17) si riduce allora a

$$\frac{d}{du}(R r) + r = 0$$

e dà quindi

$$(18) \qquad R = \frac{1}{r}(C - \int r \, du) \ ,$$

indicando con C una costante arbitraria.

Dunque: *i sistemi ciclici domandati sono quelli che si ottengono prendendo per* S_0 *una superficie di rotazione, ed assumendo il raggio* R *del cerchio normale in un punto a* S_0 *secondo la formola* (18).

Che un tale sistema ciclico rimanga sempre normale, comunque deformando S_0, risulta del resto anche dal teorema di Ribaucour § 268, poichè in una qualunque configurazione di S_0 i detti circoli sono tracciati nei piani tangenti della superficie complementare S'_0 ed invariabilmente legati alle flessioni di questa.

In questi particolari sistemi le traccie dei piani dei circoli sui piani tangenti di S_0 inviluppano un sistema di geodetiche, le geodetiche v.

Viceversa, se supponiamo che questo accada, la (16) ci dà

$$\frac{\partial R}{\partial v} = 0 ,$$

dopo di che la (15) diventa

$$\left(R \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial u} + 1 \right) D'_0 = 0 .$$

Se si annulla il primo fattore si trovano le soluzioni precedenti. Quando si annulli D'_0 le linee (u, v) sono linee di curvatura, e per ciò la S_0 è una generale superficie modanata (Cf. I pag. 177 nota). Si vede facilmente che questi ultimi sistemi ciclici si ottengono nel modo seguente: *sopra un piano* π *si tracci ad arbitrio un sistema* ∞^1 *di circoli e si faccia rotolare, senza strisciare, il piano* π *sopra una qualunque superficie sviluppabile; il sistema* ∞^1 *di circoli descriverà la congruenza domandata.*

Facciamo ancora un'applicazione delle formole del presente § alla ricerca degli interessanti sistemi ciclici *di raggio costante*, scoperti da Ribaucour. Se il raggio R è costante, la (16) dimostra che si ha $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$ e siamo quindi nel caso sopra considerato. Lasciando da parte il caso che risulta dall'ultimo teorema, se si suppone R costante, avremo che la S_0 sarà applicabile sopra una superficie di rotazione e precisamente, essendo

$$\frac{r'}{r} = -\frac{1}{R} ,$$

sulla pseudosfera di raggio R. In questo caso la superficie complementare S'_0 è essa stessa pseudosferica di raggio R (I, pag. 296), ed i circoli sono tracciati nei suoi piani tangenti col centro nel punto di contatto. Dunque: *I sistemi ciclici di raggio* R *costante (prescindendo dal caso ovvio sopra notato) si ottengono prendendo una qualunque superficie pseudosferica di raggio* R *e descrivendo in ogni piano tangente col centro nel punto di contatto un cerchio di raggio* R; *le superficie ortogonali ai circoli sono esse stesse pseudosferiche di raggio* R.

Si può osservare che è questo l'unico caso in cui i circoli di un sistema ciclico sono tracciati nei piani tangenti della superficie luogo dei centri. Le formole (10) pag. 139, supponendo $A = B = 0$, danno infatti R = costante e successivamente la (I*) (pag. 138) diventa $K_0 = -\frac{1}{R^2}$.

§. 273.

Nuovo modo di trattare il problema.

Il problema del § precedente può trattarsi in un secondo modo, che conduce ad importanti risultati. Prendiamo una delle superficie S normali ai circoli e riferiamola alle sue linee di curvatura (u, v), mantenendo le nostre consuete notazioni. Avremo le formole:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1\,, \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1 \quad , \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_3 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_1 \quad , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_2\,. \end{cases}$$

Da ogni punto P di S esce un circolo (u, v) del sistema normalmente ad S; per individuarlo basterà dare il suo raggio R e l'angolo φ che la traccia del suo piano sul piano tangente di S fa colla direzione (X_1, Y_1, Z_1). Con queste notazioni, le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo saranno date da

$$(19)\qquad x_1 = x + R\,(\cos\varphi\,X_1 + \operatorname{sen}\varphi\,X_2)$$

e dalle analoghe per y_1, z_1.

Per applicare le formole generali del § 269 potremo fare

$$(20)\qquad \alpha_1 = \cos\varphi\,X_1 + \operatorname{sen}\varphi\,X_2\,, \quad \alpha_2 = X_3\,,$$

e analogamente per $\beta_1, \gamma_1; \beta_2, \gamma_2$.

Da queste formole e dalle (α) si trae

$$\begin{cases} \sum\alpha_1\dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{E}\cos\varphi + \dfrac{\partial R}{\partial u}\,, \quad \sum\alpha_1\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi + \dfrac{\partial R}{\partial v} \\ \sum\alpha_2\dfrac{\partial x_1}{\partial u} = -\dfrac{R\sqrt{E}}{r_2}\cos\varphi \quad , \quad \sum\alpha_2\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\dfrac{R\sqrt{G}}{r_1}\operatorname{sen}\varphi \\ \sum\alpha_3\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r_2} \quad , \quad \sum\alpha_2\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{r_1}\,, \end{cases}$$

onde l'equazione a differenziali totali (8) pag. 136 diventa:

$$(21)\quad dt = \left\{\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\right)\operatorname{sen} t + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r_2}(1+\cos t)\right\} du + \left\{\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\right)\operatorname{sen} t + \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{r_1}(1+\cos t)\right\} dv\,.$$

Quanto alle condizioni d'integrabilità (I), (II), (III) (pag. 136), esse riduconsi alle due seguenti:

$$(IV)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{R}\dfrac{1}{r_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\dfrac{1}{r_2}\right) + \dfrac{\sqrt{EG}}{R^2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Lasciamo per ora da parte il caso che la superficie S sia una sfera (od un piano) nel qual caso (che tratteremo più avanti) le due equazioni (IV) si riducono alla prima soltanto. Servendoci delle formole di Codazzi

$$(\beta)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,,\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,,$$

risolviamo le (IV) rapporto a $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$ ed otterremo il sistema equivalente:

$$(IV^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial u} = \cot\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\cdot R - \sqrt{E}\cos\varphi \\ \dfrac{\partial R}{\partial v} = -\operatorname{tg}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\cdot R - \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\,. \end{cases}$$

Se supponiamo dato l'angolo φ, cioè fissata la giacitura dei piani dei circoli, il sistema (IV*) per determinare R è lineare; ora è importante osservare che, se esso ammette una soluzione in R, sarà *illimitatamente integrabile*, cioè se esiste un sistema ciclico nei piani assegnati si avrà una semplice infinità di tali sistemi, deducibili con due quadrature appena noto φ. E infatti la condizione d'integrabilità del sistema (IV*) si scrive

$$R\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\cot\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]\right\} = 0$$

e non può quindi esistere una soluzione R del sistema se non è illimitatamente integrabile. Così adunque l'equazione del 2.° ordine per φ

$$(22)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left[\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\cot\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]=0$$

limita la giacitura dei piani del sistema ciclico e, per ogni tale giacitura, si hanno ∞^1 sistemi ciclici corrispondenti, deducibili con quadrature.

Alla equazione del 2.° ordine da cui dipende la risoluzione del problema si può dare una forma semplice notevole, procedendo come segue.

Per la prima delle (IV) deve essere

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\,du+\frac{\sqrt{G}\,\operatorname{sen}\varphi}{R}\,dv$$

un differenziale esatto. Indicando con $\Phi(u, v)$ una conveniente funzione ausiliaria, poniamo dunque

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\qquad \frac{\sqrt{G}\,\operatorname{sen}\varphi}{R}=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

dopo di che la seconda delle (IV), avendo riguardo alle formole di Codazzi (3), dà per Φ l'equazione finale di Laplace:

$$(V)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Viceversa, se Φ è una soluzione della (V), ne dedurremo un sistema ciclico corrispondente colle formole

$$(VI)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{R^2}=\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial\log\Phi}{\partial u}\right)^2+\dfrac{1}{G}\left(\dfrac{\partial\log\Phi}{\partial v}\right)^2=\Delta_1\log\Phi \\ \cos\varphi=-\dfrac{R}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\log\Phi}{\partial u},\quad \operatorname{sen}\varphi=-\dfrac{R}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\log\Phi}{\partial v}. \end{cases}$$

È da notarsi che se si aumenta Φ di una costante, l'angolo φ resta il medesimo, ma cangia il valore di R. Si hanno così gli ∞^1 sistemi ciclici, già sopra considerati, corrispondenti ad una giacitura fissa dei piani del sistema.

Colla introduzione della funzione ausiliaria Φ, l'equazione a differenziali totali (21), prendendo per incognita

$$\Lambda = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} ,$$

assume la forma lineare

$$d\Lambda = \left\{ \Lambda \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{R}{\Phi}\right) - \frac{R}{r_2} \frac{\partial \log \Phi}{\partial u} \right\} du + \left\{ \Lambda \frac{\partial}{\partial v} \log\left(\frac{R}{\Phi}\right) - \frac{R}{r_1} \frac{\partial \log \Phi}{\partial v} \right\} dv$$

e dà con una quadratura

$$\text{(VII)} \qquad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{R}{\Phi} \left\{ C - \int \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right) \right\} ,$$

indicando C una costante arbitraria.

Con questa formola vengono così a determinarsi tutte le superficie ortogonali ai circoli.

Ponendo $W = \int \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right)$, la (VII) si scrive

$$\text{(VII*)} \qquad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{C - W}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}} .$$

§. 273*.

Trasformazione delle formole in coordinate curvilinee qualunque.

Per semplificare il calcolo abbiamo supposto, nel § precedente, la superficie S riferita alle sue linee di curvatura u, v; ma possiamo facilmente liberarci da questa restrizione e trasformare le formole ottenute in coordinate curvilinee qualunque. Per ciò cominciamo dall'osservare che l'equazione (V) di Laplace si può scrivere, coi simboli delle derivate covarianti

$$\Phi_{12} = 0 ,$$

e poichè si ha insieme $F = D' = 0$, ne risulta che la forma covariante

$$\Phi_{11}\, du^2 + 2\, \Phi_{12}\, du\, dv + \Phi_{22}\, dv^2 ,$$

posto per Φ una soluzione qualunque della (V), è una combinazione lineare omogenea delle due forme fondamentali della superficie S. Tale proprietà si conserva, per la sua natura invariantiva, in qualunque tra-

sformazione di coordinate, onde si conclude: *L'equazione del 2.° ordine da cui dipende la ricerca dei sistemi* ∞^2 *normali di circoli, ortogonali ad una data superficie* S, *assume in coordinate curvilinee qualunque la forma*:

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0 .$$

In secondo luogo conviene che trasformiamo ancora, in coordinate qualunque, le relazioni fra la funzione Φ e la W, che nei parametri delle linee di curvatura si scrivevano

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial v} .$$

In coordinate generali assumeranno evidentemente la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial v} = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial v} , \end{cases}$$

dove i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resteranno fissi al variare della soluzione Φ della (a). Ora basta osservare che tre soluzioni della (a) sono

$$\Phi = x , y , z$$

e i corrispondenti valori di W vengono dati da

$$W = X, Y, Z$$

per dedurne che i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono precisamente gli stessi come nelle formole fondamentali (I, pag. 117)

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \gamma \frac{\partial x}{\partial u} + \delta \frac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

e le domandate relazioni si scrivono quindi:

$$(b) \qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{F D' - G D}{E G - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{F D - E D'}{E G - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{F D'' - G D'}{E G - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{F D' - E D''}{E G - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v} . \end{cases}$$

Quando adunque, per una superficie S riferita ad un qualunque sistema curvilineo, si conosca una soluzione Φ della (a), ne verrà individuato un sistema ∞^2 normale di circoli ortogonali alla S, situati nei piani normali alle linee $\Phi =$ costante e di raggio $R = \frac{\Phi}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}}$. Calcolata, con una quadratura, la corrispondente funzione W dalle (b), ne risulteranno determinate, in termini finiti, tutte le superficie $\bar{S}$ ortogonali ai circoli mediante la formola (VII*)

$$tg \frac{t}{2} = \frac{C - W}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}} .$$

Osservando che, secondo le formole (20) e le (VI), si ha qui

$$\alpha_1 = -\frac{\nabla(x_1 \Phi)}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}} , \quad \alpha_2 = X , \quad R = \frac{\Phi}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}}$$

$$\cos t = \frac{\Delta_1 \Phi - (C - W)^2}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} , \quad \operatorname{sen} t = \frac{2 (C - W) \sqrt{\Delta_1 \Phi}}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} ,$$

le formole (7) pag. 135, che danno le coordinate di un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mobile sopra una superficie $\bar{S}$ ortogonale ai circoli, diventano

$$(c) \qquad \bar{x} = x - \frac{2 \Phi}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} \nabla (x, \Phi) + \frac{2 \Phi (C - W)}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} X$$

colle analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$. Conviene calcolare altresì i valori dei coseni di direzione $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ della normale alla $\bar{S}$ dalle formole

$$\bar{X} = \alpha_2 \cos t - \alpha_1 \operatorname{sen} t ,$$

che, avendo riguardo alle precedenti, ci danno

$$(d) \qquad \bar{X} = \frac{2 (C - W)}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} \nabla (x, \Phi) + \frac{\Delta_1 \Phi - (C - W)^2}{\Delta_1 \Phi + (C - W)^2} X$$

colle analoghe per $\bar{Y}$, $\bar{Z}$.

§. 274.

Relazione col problema della rappresentazione sferica.

Se in luogo della funzione ausiliaria Φ introduciamo l'altra

$$W = \int \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right),$$

che già comparo nella formola (VII), all'equazione di Laplace (V) veniamo a sostituire l'equivalente

$$(V^*) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v},$$

dove E', G' sono i coefficienti dell'elemento lineare sferico rappresentativo di S. La (V*) non è altro che l'equazione dalla quale al Cap. V (I, pag. 174) abbiamo fatto dipendere la ricerca delle superficie aventi a comune con S la rappresentazione sferica delle linee di curvatura. Già da questa osservazione appare che: *il problema della ricerca dei sistemi ciclici normali ad una data superficie* S *equivale alla determinazione delle superficie* S' *aventi a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura.* Vogliamo ora studiare più da vicino la relazione geometrica fra i due problemi.

Sia dunque S' una superficie avente la medesima immagine sferica (delle linee di curvatura) di S. La normale in un punto M' di S' incontrerà (ortogonalmente) il piano π, tangente nel punto corrispondente M di S, in un punto $M_1 \equiv (x_1\ y_1\ z_1)$. Indichiamo con A, B le coordinate cartesiane ortogonali di M_1 nel piano π, riferito alle tangenti alle linee di curvatura v, u come assi; avremo

$$x_1 = x + A X_1 + B X_2, \quad y_1 = y + A Y_1 + B Y_2$$
$$z_1 = z + A Z_1 + B Z_2.$$

Dobbiamo ora esprimere che le sviluppabili della congruenza formata dalle parallele condotte pei punti $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ alle normali di S corrispondono alle linee di curvatura u, v; per tal modo troveremo evidentemente le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le incognite A, B. Ora i coefficienti della rappresentazione sferica della

nostra congruenza sono

$$E' = \frac{E}{r_2^2}, \quad F' = 0, \quad G' = \frac{G}{r_1^2},$$

e perchè l'equazione differenziale (C) § 141 (I pag. 305) delle sviluppabili della congruenza si riduca a

$$du\, dv = 0$$

dovremo avere

$$f = f' = 0.$$

Ora

$$f = \sum \frac{\partial X_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{B}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right\}$$

$$f = \sum \frac{\partial X_2}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} \left\{ \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{A}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right\};$$

dunque le condizioni per A, B sono

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{B}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{A}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

Di qui si trae

$$\frac{\partial}{\partial v}(A\sqrt{E}) = \frac{\partial}{\partial u}(B\sqrt{G}),$$

onde, indicando con Φ una funzione incognita ausiliaria, potremo porre

$$(23) \qquad A = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

e sostituendo in una delle due precedenti (γ) troviamo per Φ precisamente l'equazione (V) di Laplace. Così vediamo nuovamente che i due problemi considerati dipendono dalla medesima equazione. Di più, paragonando le formole (23) colle seconde (VI), possiamo scriverle così:

$$(23^*) \qquad A = -\frac{\Phi}{R} \cos\varphi, \quad B = -\frac{\Phi}{R} \operatorname{sen}\varphi.$$

L'interpretazione geometrica cercata si ha evidentemente nel teorema seguente. *Per costruire tutti i sistemi ciclici normali ad una data superficie* S, *si consideri una superficie qualunque* S' *avente a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura; i piani condotti per due*

normali corrispondenti di S, S′ *sono i piani dei sistemi ciclici cercati e i corrispondenti* ∞^1 *sistemi ciclici si avranno con quadrature.*

È da osservarsi che data la coppia S, S′ vi sono ∞^1 sistemi ciclici corrispondenti normali ad S. Inversamente, se supponiamo nota S ed un sistema ciclico normale a questa, si avrà Φ con una quadratura e le (23) determineranno una delle congruenze richieste. Le superficie S′ normali a questa congruenza si otterranno con una seconda quadratura, che porterà sull'espressione (I, pag. 311)

$$-\sum X_3 \frac{\partial x_1}{\partial u}\,du - \sum X_3 \frac{\partial x_1}{\partial v}\,dv\ ,$$

cioè sopra

$$\frac{A\sqrt{E}}{r_2}\,du + \frac{B\sqrt{G}}{r_1}\,dv = d\,W;$$

così con due quadrature avremo le corrispondenti superficie S′ aventi a comune con S la rappresentazione sferica. Si osserverà che, moltiplicando Φ per una costante, si otterranno ∞^1 di questi sistemi paralleli di superficie S′.

Una conseguenza notevole risulta dall'identità dei due problemi sopra esaminati, quando si osservi che se si ha un sistema ciclico ed una sua superficie ortogonale S, un'inversione per raggi vettori reciproci lo cangierà in un sistema ciclico normale alla superficie inversa S_1.

Ne risulta: *Se per una superficie* S *si conoscono tutte le superficie aventi a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura, basteranno quadrature per risolvere il problema stesso per ogni altra superficie* S_1 *che derivi da* S *con un' inversione.* [1]

§. 275.

Sistemi ciclici normali ad una sfera (o ad un piano).

Nella discussione al § 273 abbiamo lasciato da parte il caso che la superficie Σ, di cui si vogliono trovare i sistemi ciclici normali, sia una sfera od un piano. In questo caso basta servirsi del teorema generale di Ribaucour al § 269 per ottenere tutti i sistemi ciclici domandati. Prendasi infatti una qualunque superficie S e si costruiscano gli ∞^2 circoli C che sono normali insieme alla S ed alla sfera Σ; siccome ogni

---

[1] Darboux. *Leçons* T. IV n. 981.

tale circolo è normale *due volte* a Σ, la nostra congruenza di circoli ammette tre, e quindi ∞^1 superficie ortogonali, cioè è un sistema ciclico. [1]

È facile anche vedere a quali soluzioni della equazione (V) di Laplace corrispondono questi sistemi ciclici normali insieme a S e ad un piano o ad una sfera fissa. L'equazione (V) possiede invero le soluzioni particolari (I, pag. 141)

$$x,\ y,\ z,\quad x^2+y^2+z^2$$

e quindi anche qualunque loro combinazione lineare; a queste soluzioni corrispondono appunto i sistemi ciclici ora considerati.

E infatti se si fa p. e: $\Phi = z$, si ha

$$\Delta_1 \Phi = \Delta_1 z = 1 - Z_3^2$$

$$R^2 = \frac{z^2}{1-Z_3^2}$$

$$R\cos\varphi = -\frac{R^2}{z} Z_1,\quad R\operatorname{sen}\varphi = -\frac{R^2}{z} Z_2 .$$

Di qui risulta

$$z_1 = z + R\cos\varphi\, Z_1 + R\operatorname{sen}\varphi\, Z_2 = 0 ,$$

cioè i centri dei circoli sono sul piano xy. I coseni di direzione della normale al piano del circolo sono poi dati da $\cos\varphi\, X_2 - \operatorname{sen}\varphi\, X_1$, $\cos\varphi\, Y_2 - \operatorname{sen}\varphi\, Y_1$, $\cos\varphi\, Z_2 - \operatorname{sen}\varphi\, Z_1$ e l'ultimo è nullo per le formole precedenti, cioè i circoli sono normali al piano xy c. d. d.

Se facciamo invece

$$\Phi = x^2 + y^2 + z^2 - c \ (c \text{ costante})$$

abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 2\sum x X_1 = 2 W_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 2\sum x X_2 = 2 W_2 ,$$

indicando W_1, W_2 le distanze dell'origine dai piani principali di S. Se

---

[1] Alla medesima conclusione si arriva mediante considerazioni di metrica non euclidea. Si riguardi infatti la sfera (od il piano Σ) come l'assoluto della rappresentazione conforme dello spazio non euclideo sullo spazio piano. I circoli ortogonali alla sfera Σ rappresentano le geodetiche dello spazio iperbolico e la congruenza dei circoli C costruita nel testo è, nello spazio iperbolico, la congruenza delle normali a S che è dunque normale a tutte le superficie parallele.

ne trae

$$\Delta_1 \Phi = 4 \{W_1^2 + W_2^2\} = 4 \{\Phi + c - W^2\},$$

dove al solito $W = \Sigma x X_3$.

Le formole (VI) danno quindi

$$R^2 = \frac{\Phi^2}{4 \{\Phi + c - W^2\}}$$

$$R \cos \varphi = -2 \frac{R^2}{\Phi} . W_1 , \quad R \operatorname{sen} \varphi = -2 \frac{R^2}{\Phi} W_2 .$$

Ora, indicando con δ la distanza del centro (x_1, y_1, z_1) dall'origine, abbiamo dalle (19):

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \Phi + c + R^2 + 2 R \cos \varphi W_1 + 2 R \operatorname{sen} \varphi W_2$$

ossia per le precedenti

$$\delta^2 = \Phi + c + R^2 - \frac{4 R^2}{\Phi} \{\Phi + c - W^2\},$$

o infine

$$\delta^2 - R^2 = c .$$

Questa esprime evidentemente che tutti i nostri circoli tagliano ortogonalmente la sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c$$

col centro nell'origine. Questa è reale per c positivo, riducendosi all'origine per $c = 0$, nel qual caso i circoli passano tutti per l'origine stessa. Se c è negativa, si può dire che i circoli tagliano in punti diametralmente opposti la sfera reale

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = -c .$$

Nei sistemi ciclici considerati nel presente § tutti i piani dei circoli passano per un punto fisso. Viceversa: *Se i piani dei circoli di un sistema ciclico passano per un punto fisso, i circoli del sistema saranno ortogonali ad una sfera (reale od immaginaria) col centro nel punto fisso.*

E infatti se i piani del sistema ciclico passano per l'origine, dovremo avere

$$\sum x (\cos \varphi X_2 - \operatorname{sen} \varphi X_1) = 0 ,$$

ossia

$$\cos \varphi W_2 - \operatorname{sen} \varphi W_1 = 0 ,$$

e quindi per le seconde (VI)

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\lambda W_1\,,\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\lambda W_2\,, \tag{24}$$

indicando λ un fattore di proporzionalità. Ma dalle formole (α) pag. 147 si trae

$$\frac{\partial W_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,W_2\,,\ \frac{\partial W_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,W_1\,;$$

e poichè Φ deve soddisfare la (V), che si può scrivere sotto l'una o l'altra delle due forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,,$$

dalle (24), avendo riguardo alle (25), segue

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=0\,,\ \frac{\partial\lambda}{\partial v}=0\,,$$

cioè λ costante. Dalle (24) integrando avremo

$$\Phi=\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2+z^2)+\text{costante}\,,$$

ciò che dimostra il teorema.

È da osservarsi che quando i piani del sistema ciclico passassero per un punto comune all'infinito, fossero p. e. paralleli all'asse delle z, si avrebbe

$$\cos\varphi\,Z_2-\operatorname{sen}\varphi\,Z_1=0\,,$$

cioè

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\lambda Z_1\,,\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\lambda Z_2\,,$$

e con un processo affatto analogo al precedente ne dedurremmo

$$\Phi=\lambda z+c\ (\lambda,\ c\ \text{costanti}).$$

In tal caso i circoli del sistema sarebbero ortogonali al piano $z=-\frac{c}{\lambda}$.

§. 276.

Sistema triplo ortogonale collegato ad un sistema ciclico.

Riprendendo ora lo studio generale dei sistemi ciclici, associeremo alla considerazione del sistema ciclico quella della congruenza degli *assi dei circoli*, cioè delle normali ai loro piani nei rispettivi centri. Servendoci delle formole generali del § 273, consideriamo una superficie S ortogonale al sistema ciclico ed in un punto qualunque P di S tiriamo le tangenti P A, P B alle linee di curvatura $v =$ costante, $u =$ costante fino all'incontro coll'asse del circolo C uscente da P. Se con ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 indichiamo le rispettive coordinate di A, B, troveremo subito

$$\xi_1 = x + \frac{R}{\cos\varphi} X_1\,,\ \eta_1 = y + \frac{R}{\cos\varphi} Y_1\,,\ \zeta_1 = z + \frac{R}{\cos\varphi} Z_1$$

$$\xi_2 = x + \frac{R}{\operatorname{sen}\varphi} X_2\,,\ \eta_2 = y + \frac{R}{\operatorname{sen}\varphi} Y_2\,,\ \zeta_2 = z + \frac{R}{\operatorname{sen}\varphi} Z_2.$$

Derivando le prime rapporto a v, le seconde rispetto ad u, coll'osservare le (α) pag. 147 e le (IV*) pag. 148, ne deduciamo le proporzioni:

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial v} : \frac{\partial\eta_1}{\partial v} : \frac{\partial\zeta_1}{\partial v} = \frac{\partial\xi_2}{\partial u} : \frac{\partial\eta_2}{\partial u} : \frac{\partial\zeta_2}{\partial u} =$$

$$= \cos\varphi\, X_2 - \operatorname{sen}\varphi\, X_1 \,:\, \cos\varphi\, Y_2 - \operatorname{sen}\varphi\, Y_1 \,:\, \cos\varphi\, Z_2 - \operatorname{sen}\varphi\, Z_1\,.$$

I tre ultimi termini essendo i coseni di direzione dell'asse del circolo, queste proporzioni ci dicono che i due punti A, B sono, sull'asse del circolo, i due fuochi di questo raggio nella congruenza degli assi dei circoli. Dunque: *Le sviluppabili della congruenza degli assi dei circoli, in un sistema ciclico, sono sempre reali e corrispondono alle linee di curvatura di una qualunque superficie* S *ortogonale ai circoli; le tangenti in un punto qualunque* P *di* S *alle sue linee di curvatura vanno ad incontrare l'asse del corrispondente circolo nei due fuochi.*

Da questo teorema segue che sopra tutte le superficie S ortogonali ai circoli le linee di curvatura si corrispondono e quindi, pel teorema di Darboux-Dupin al § 172 (I, pag. 383), abbiamo l'importante risultato di Ribaucour: *Le* ∞^1 *superficie ortogonali ai circoli di un sistema ciclico formano sempre una famiglia di Lamè, cioè appartengono ad un sistema triplo ortogonale.*

Senza invocare il teorema inverso di Dupin, possiamo dimostrare

questa proposizione fondamentale colle osservazioni seguenti. Indichiamo con S_1 le superficie luogo dei circoli $u =$ costante, con S_2 quelle luogo dei circoli $v =$ costante. Poichè una S_1 taglia tutte le S ortogonalmente lungo linee di curvatura, queste sono altresì linee di curvatura di S_1, che ha dunque per secondo sistema di linee di curvatura i circoli $u =$ costante. La normale in P alla S_1 è quindi la tangente P A alla linea di curvatura (v) di S e similmente la normale in P alla S_2 sarà la tangente P B alla u sopra S; dunque: *le tre serie di superficie* S', S'_1, S'_2 *costituiscono un sistema triplo ortogonale, c. d. d.* Osserviamo poi che se si indica con 2ρ la distanza focale A B sull'asse del circolo e con δ la distanza del centro del circolo dal punto medio dell'asse, avremo

$$R^2 + \delta^2 = \rho^2 ,$$

onde potremo porre

$$\delta = \rho \cos \sigma , \quad R = \rho \operatorname{sen} \sigma ,$$

indicando σ un angolo reale.

Ritornando alla proprietà sopra dimostrata, che le sviluppabili della congruenza degli assi dei circoli corrispondono alle linee di curvatura di una qualunque delle superficie S ortogonali ai circoli, non sarà inutile provare che la proposizione si può invertire ed enunciare il teorema: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema* ∞^2 *di circoli ortogonali ad una superficie* S *sia un sistema normale è che le sviluppabili della congruenza degli assi dei circoli corrispondano alle linee di curvatura di* S. Si è visto che la condizione è necessaria; per provare che è anche sufficiente suppongasi verificata e sopra ogni asse del circolo indichisi con T_1, T_2 le ascisse dei fuochi, riferiti al centro dei circoli come origine. Per le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 dell'un fuoco avremo

$$\xi_1 = x + R(\cos\varphi X_1 + \operatorname{sen}\varphi X_2) + T_1(\cos\varphi X_2 - \operatorname{sen}\varphi X_1)$$

e analogamente per η_1, ζ_1. Se supponiamo che questo fuoco corrisponda alla sviluppabile $u =$ costante, dovremo avere le proporzioni

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial v} : \frac{\partial\eta_1}{\partial v} : \frac{\partial\zeta_1}{\partial v} = \cos\varphi X_2 - \operatorname{sen}\varphi X_1 :$$

$$: \cos Y_2 - \operatorname{sen}\varphi Y_1 : \cos\varphi Z_2 - \operatorname{sen}\varphi Z_1 .$$

Con un semplice calcolo si trova che esse si risolvono nella seconda delle (IV*) pag. 148 e T_1 deve avere il valore $T_1 = -R\,tg\,\varphi$. Similmente

considerando le sviluppabili v, si trae $T_1 = R \cot \varphi$ e si ritrova la prima delle (IV*), ciò che dimostra il nostro teorema.

§. 277.

Le congruenze rettilinee cicliche [1].

Diremo *ciclica* una congruenza rettilinea quando i suoi raggi siano gli assi di un sistema ciclico. Vogliamo ora ricercare a quale condizione dovrà soddisfare una congruenza rettilinea perchè sia ciclica. Come si vedrà, la condizione dipende unicamente dalla immagine sferica delle sviluppabili, che sappiamo dovere esser sempre reali.

Tratteremo solo il caso generale supponendo che queste immagini sferiche delle sviluppabili formino due sistemi distinti di linee u, v e ci serviremo delle formole di Guichard al § 147 (I, pag. 316) che danno le congruenze con assegnata immagine sferica delle sviluppabili

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{26}$$

Ricorderemo che il problema dipende dall'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + F\right]\rho = 0, \tag{27}$$

a cui soddisfa la semi-distanza focale ρ; ad ogni soluzione ρ di questa corrisponde una congruenza della specie richiesta, e le coordinate del punto medio (x, y, z) del raggio sono date per quadrature dalle formole (32) § 149 (I, pag. 321):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\rho\right]X - \sqrt{E}\,\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\rho\,X_1 - \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\rho\,X_2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\rho\right]X - \sqrt{G}\,\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2}\rho\,X_1 + \sqrt{G}\cos\dfrac{\Omega}{2}\rho\,X_2. \end{cases} \tag{28}$$

Indicando, come alla fine del § precedente, con

$$\delta = \rho\cos\vartheta, \quad R = \rho\,\operatorname{sen}\vartheta$$

la distanza del centro (x_1, y_1, z_1) del circolo dal punto medio (x, y, z)

[1] I teoremi sulle congruenze cicliche di questo e dei seguenti §§ furono stabiliti dall'Autore nei tomi XVIII e XIX (serie seconda) degli *Annali* (1890).

ed il raggio, dovremo porre nelle formole generali al § 269

$$x_1 = x + \rho \cos\sigma \, X\,,\ y_1 = y + \rho\cos\sigma\, Y, z_1 = z + \rho\cos Z\,,$$

indi potremo fare

$$\alpha_1 = X_1\,,\quad \beta_1 = Y_1\,,\quad \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2\,,\quad \beta_2 = Y_2\,,\quad \gamma_2 = Z_2\,.$$

Calcoliamo ora l'equazione a differenziali totali (8) pag. 136, servendoci delle formole (30) § 148 (I, pag. 320), e troveremo dapprima:

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\rho(1+\cos\sigma)\right\} + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\rho\right] X - \\ -\sqrt{E}\,\text{sen}\,\dfrac{\Omega}{2}\,(1-\cos\sigma)\rho X_1 - \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\rho(1-\cos\sigma)X_2 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\rho(1-\cos\sigma)\right\} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\rho\right] X - \\ -\sqrt{G}\,\text{sen}\,\dfrac{\Omega}{2}\rho(1+\cos\sigma)\ X_1 + \sqrt{G}\cos\dfrac{\Omega}{2}\rho(1+\cos\sigma)X_2\,, \end{cases}$$

indi per l'equazione a differenziali totali:

$$(30)\quad dt = \left\{\sqrt{E}\,\text{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos\left((t+\frac{\Omega}{2}\right) + A\right\} du - \left\{\sqrt{G}\,\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(t-\frac{\Omega}{2}\right) + B\right\} dv\,,$$

dove si è posto (I, pag. 320)

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\dfrac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\text{sen}\,\Omega \\ B = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\dfrac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\text{sen}\,\Omega\,. \end{cases}$$

La equazione (30) offre la notevole particolarità di dipendere unicamente dalla immagine sferica delle sviluppabili della congruenza, onde segue: *Tutte le congruense che hanno a comune l'immagine sferica delle sviluppabili con una congruenza ciclica sono cicliche.*

Scrivendo le condizioni d'integrabilità per la (30), coll'osservare l'identità (§ 248, pag. 58)

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{E\,G}\,\operatorname{sen}\,\Omega\,,$$

troviamo per le condizioni richieste:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\,\cot\dfrac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{E}\,\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cot\dfrac{\sigma}{2}\,\cos\Omega - \sqrt{G}\,\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\sigma}{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{G}\,\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\sigma}{2}\,\cos\Omega - \sqrt{E}\,\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\cot\dfrac{\sigma}{2}\,, \end{cases}$$

e queste, esprimendo le derivate dei coefficienti pei simboli di Christoffel, si convertono nelle equivalenti:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\cos\sigma}{\partial u} = 2\,(\cos\sigma - 1)\,\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{\partial\,\cos\sigma}{\partial v} = 2\,(\cos\sigma + 1)\,\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\,. \end{cases}$$

La condizione d'integrabilità per queste equazioni ci dà:

$$(32)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right]\cos\sigma = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - 4\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},$$

onde, se questa non è un'identità, ne dedurremo per $\cos\sigma$ un valore unico e determinato, e la congruenza sarà ciclica se questo valore di $\cos\sigma$ soddisferà le (31); di più, se il sistema ciclico è reale, dovrà risultare $|\cos\sigma| < 1$. Ne concludiamo: *Ad una congruenza ciclica si può, in generale, associare uno ed un solo sistema ciclico, i cui assi sono i raggi della congruenza.*

La forma delle equazioni (31) suggerisce il confronto colle formole analoghe ottenute al § 239 (pag. 42) quando abbiamo trattato il problema di riconoscere se una superficie può ricevere una deformazione finita, nella quale un sistema (u, v) attualmente coniugato rimanga coniugato.

Le formole attuali (31) si riducono infatti alle (29) del citato §, ponendo

$$\nu = -\,\frac{\cos\sigma + 1}{2}\,,$$

e quindi, prescindendo come nel teorema di Darboux (§ 271) dal reale od immaginario, abbiamo il risultato:

Affinchè una congruenza rettilinea sia ciclica è necessario e sufficiente che l'immagine sferica delle sue sviluppabili sia altresì l'immagine di un sistema coniugato di una superficie che si conserva coniugato in una deformazione di questa.

Avvertiamo però subito che se il sistema ciclico è reale la corrispondente deformazione di una superficie S reale, avente per immagine di un sistema coniugato quella delle sviluppabili della congruenza, è necessariamente immaginaria, poichè, risalendo alle formole del citato § 239 ne risulta

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

cioè

$$\lambda = i \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}.$$

I nuovi valori di D, D'' (D' = 0) per la superficie deformata sono dunque puramente immaginarii e, volendo restare nel reale, converrà realizzare la nuova forma di S nello spazio d'elemento lineare

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Dalle formole precedenti può dedursi un'altra conseguenza importante, contenuta nel teorema di Ribaucour: *Sulla superficie inviluppo dei piani dei circoli in un sistema ciclico, alle sviluppabili della congruenza degli assi (cioè alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli) corrisponde un sistema coniugato.*

Indicando con W la distanza dell'origine dal piano del circolo, abbiamo

$$W = \sum X x_1 = \sum X x + \rho \cos\sigma.$$

Formando le derivate parziali

$$\frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}, \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}$$

facendo uso delle formole al § 148 (I, pag. 320) e delle precedenti, si trova facilmente che W soddisfa l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial v} + F W = 0,$$

ciò che dimostra appunto il teorema (Cf. I, pag. 174).

§. 278.

Congruenze infinite volte cicliche e congruenze cicliche normali.

A) Il teorema sopra stabilito che una congruenza rettilinea ciclica è *una sola volta* ciclica soffre un'eccezione molto notevole; questa si presenta allora ed allora soltanto quando la (32) risulta un' identità, per la qual cosa debbono sussistere le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{33}$$

Secondo il calcolo già eseguito al § 252 sulle identiche equazioni ivi segnate (62) (pag. 83), queste esprimono che le linee sferiche (u, v) sono le immagini delle assintotiche di una superficie S, per la quale la curvatura K ha l'espressione:

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}. \tag{A}$$

Di queste superficie abbiamo trattato ai §§ 249-251; possiamo enunciare il nostro risultato col teorema: *Le uniche congruenze che siano più d'una volta e quindi infinite volte cicliche sono le congruenze di Ribaucour* (§ 229) *che hanno per superficie generatrice una superficie della classe* (A).

Inoltre la (32) ci dimostra che esse sono le uniche congruenze di Ribaucour cicliche, poichè se la congruenza è di Ribaucour si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$$

e, se essa è ciclica, per la (32) dovranno sussistere le (33).

Un'altra proprietà degli attuali sistemi ciclici può dedursi dal teorema di Ribaucour alla fine del § precedente, ove si consideri la superficie Σ inviluppo dei piani dei circoli. Su questa il sistema (u, v) sarà coniugato e, corrispondendo la Σ per parallelismo di normali alla S, la Σ non è altro che una delle superficie associate considerate al § 252. Dunque: *In ogni sistema ciclico i cui assi formino una congruenza di Ribaucour (che abbia quindi per superficie generatrice una superficie* S *della classe* (A)) *l'inviluppo dei piani dei circoli è una superficie* Σ *suscettibile di una deformazione continua che conserva un sistema coniugato.*

Notevole è il caso che la superficie S sia pseudosferica; allora si ha

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0 \ , \ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0 \ ,$$

e la congruenza degli assi dei circoli è una congruenza di Guichard (§§ 151 e 230), le cui sviluppabili tagliano le due superficie focali secondo le loro linee di curvatura. In tal caso, per le (31), l'angolo σ può avere un valore *costante* qualunque, cioè sopra ogni asse il centro del circolo divide (internamente) in rapporto costante il segmento focale. In particolare per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ogni circolo del sistema ha il centro nel punto medio dell'asse, ed il suo raggio eguaglia la semidistanza focale. *In questi particolari sistemi ciclici, caratterizzati dalla proprietà che il centro del circolo divide sopra ogni asse in rapporto costante il segmento focale, l'inviluppo dei piani dei circoli è una superficie di Voss.*

B) In secondo luogo ci proponiamo qui di determinare tutte le congruenze che sono ad un tempo cicliche e normali. Intanto dal teorema alla fine del § 272 segue che le normali di una qualunque superficie pseudosferica formano una congruenza ciclica e, pei risultati generali al § 277, anche per qualunque superficie avente a comune con una pseudosferica l'immagine sferica delle linee di curvatura le normali formeranno una congruenza ciclica. Si può facilmente dimostrare che queste sono le uniche congruenze normali e cicliche.

Applicando infatti le formole del § 277 per le congruenze cicliche, nell'ipotesi di una congruenza normale avremo

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \ , \ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \ , \ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \ ,$$

e le (31) potranno scriversi

$$\frac{\partial \log \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \ , \quad \frac{\partial \log \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \ .$$

Cangiando i parametri u, v, potremo prendere semplicemente

$$\sqrt{E} = \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right), \ \sqrt{G} = \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

e per l'elemento lineare sferico avremo

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2,$$

ove si è posto $\theta = \frac{\sigma}{2}$. Ora queste linee sferiche u, v sono appunto le immagini delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica, poichè ponendo

$$r_1 = \cot\theta\,,\quad r_2 = -\operatorname{tg}\theta\,,$$

con che $r_1 r_2 = -1$, si soddisfano le equazioni di Codazzi (I, pag. 167)

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2)\,\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1)\,\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}$$

Dunque: *Le congruenze normali cicliche sono tutte e sole quelle delle normali ad una superficie avente a comune con una superficie pseudosferica l'immagine sferica delle linee di curvatura.*

§. 279.

Forma dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema ciclico.

Ritorniamo ora ai sistemi ciclici generali per considerare il sistema triplo ortogonale corrispondente (§ 276) e calcolare la forma dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un tale sistema.

Essendo t una soluzione qualunque dell'equazione a differenziali totali (30), le formole

$$(34)\qquad \begin{cases} \xi = x + \rho\cos\sigma\, X + \rho\operatorname{sen}\sigma\,(X_1\cos t + X_2\operatorname{sen} t) \\ \eta = y + \rho\cos\sigma\, Y + \rho\operatorname{sen}\sigma\,(Y_1\cos t + Y_2\operatorname{sen} t) \\ \zeta = z + \rho\cos\sigma\, Z + \rho\operatorname{sen}\sigma\,(Z_1\cos t + Z_2\operatorname{sen} t) \end{cases}$$

danno le coordinate ξ, η, ζ di un punto mobile sopra una delle superficie ortogonali ai circoli.

Ora indichiamo con w la costante arbitraria che entra in t, e riguardiamo ξ, η, ζ come funzioni delle tre variabili u, v, w. Derivando le (34), coll'osservare le formole già sopra usate del § 148 (I, pag. 320),

troviamo

$$(34^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} + \mathrm{B}\,\mathrm{X}_1 + \mathrm{C}\,\mathrm{X}_2 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \mathrm{A}'\mathrm{X} + \mathrm{B}'\mathrm{X}_1 + \mathrm{C}'\mathrm{X}_2 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = \alpha\ \mathrm{X}_1 + \beta\ \mathrm{X}_2 , \end{cases}$$

colle analoghe per η, ζ, dove ponendo

$$(35)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \sqrt{\mathrm{E}}\ \mathrm{tg}\ \dfrac{\sigma}{2}\ \mathrm{sen}\left(t + \dfrac{\Omega}{2}\right)\rho + \dfrac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\cdot\rho \\ \mathrm{M} = \dfrac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{\mathrm{G}}\ \mathrm{cot}\ \dfrac{\sigma}{2}\ \mathrm{sen}\left(t - \dfrac{\Omega}{2}\right)\rho - \dfrac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\cdot\rho , \end{cases}$$

si ha

$$\mathrm{A} = (\cos\sigma + 1)\,\mathrm{L}\ , \quad \mathrm{B} = \mathrm{sen}\,\sigma\cos t\,\mathrm{L}\ , \quad \mathrm{C} = \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{L}$$
$$\mathrm{A}' = (\cos\sigma - 1)\,\mathrm{M}\ , \quad \mathrm{B}' = \mathrm{sen}\,\sigma\cos t\,\mathrm{M}\ , \quad \mathrm{C}' = \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{M}$$
$$\alpha = -\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,t\,\rho\,\frac{\partial t}{\partial w}\ , \quad \beta = \mathrm{sen}\,\sigma\cos t\,\rho\,\frac{\partial t}{\partial w}\ .$$

Da queste formole risultano subito le altre

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{L}^2, \quad \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{M}^2,$$
$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial w}\right)^2 = \mathrm{sen}^2\sigma\,\rho^2\cdot\left(\frac{\partial t}{\partial w}\right)^2$$
$$\Sigma\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} = \Sigma\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial w} = \Sigma\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial w} = 0\ .$$

Per il quadrato $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo (u, v, w), otteniamo quindi

$$(36)\quad ds^2 = 4\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{L}^2\,du^2 + 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{M}^2\,dv^2 + \mathrm{sen}^2\sigma\,\rho^2\left(\frac{\partial t}{\partial w}\right)^2\,dw^2\ .$$

In questo calcolo non abbiamo fatto uso che delle formole generali al § 277 senza riferirci al teorema di Ribaucour (§ 276), il quale ne risulta così nuovamente confermato, poichè la formola (36) ci dice che:

Il sistema (u, v, w) è un sistema triplo ortogonale.

§. 280.

Determinazione delle immagini sferiche delle congruenze cicliche.

La ricerca dei sistemi ciclici si può decomporre in due problemi successivi, e cioè:

1.° Trovare tutti i sistemi di linee sferiche u, v, che sono immagini delle sviluppabili di una congruenza ciclica.

2.° Costruire le congruenze che hanno un'assegnata immagine sferica delle sviluppabili.

Del secondo problema abbiamo già fatto conoscere al § 147 (I, pag. 316) la trattazione di Guichard, che lo riduce all'integrazione di un'equazione di Laplace.

Quanto al primo si può risolvere completamente, facendo uso del seguente teorema:

Fra le congruenze cicliche, aventi a comune l'immagine sferica delle sviluppabili, se ne possono sempre scegliere infinite per le quali i circoli corrispondenti passino per un punto fisso dello spazio.

Per dimostrarlo, supposte fissate le linee sferiche u, v, indichiamo con con t_0 una soluzione particolare qualunque della equazione a differenziali totali (30) e sia w_0 il corrispondente valore di w. Determiniamo ρ dalle due equazioni simultanee

$$\mathrm{L} = 0 \quad , \quad \mathrm{M} = 0 \ ,$$

ossia dalle due;

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} &= \sqrt{\mathrm{E}}\ \mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(t_0 + \frac{\Omega}{2}\right) - \frac{2\cos\sigma}{\cos\sigma + 1}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} \\ \frac{\partial \log \rho}{\partial v} &= -\sqrt{\mathrm{G}}\cot\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(t_0 - \frac{\Omega}{2}\right) + \frac{2\cos\sigma}{\cos\sigma - 1}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} , \end{aligned}\right.$$

le quali, in virtù delle formole al §. 277, risultano fra loro compatibili e danno per ρ appunto una soluzione della equazione di Laplace (27).

Nel corrispondente sistema ciclico avremo, a causa delle (34*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0 \ , \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0 \ , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0 \ , \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0 \ , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \text{per } w = w_0 \ ;$$

dunque la superficie $w = w_0$ si riduce ad un punto (ξ_0, η_0, ζ_0), pel quale vengono conseguentemente a passare tutti i circoli del sistema ciclico.

Ne risulta che si ottengono tutte le immagini sferiche delle sviluppabili delle congruenze cicliche colla costruzione seguente:

Prendasi una superficie arbitraria S e per un punto fisso O dello spazio si conducano i circoli normali ad S; questi costituiscono un sistema ciclico [1] e le immagini sferiche delle sviluppabili della congruenza dei loro assi danno le linee più generali richieste.

§. 281.

Inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura.

Termineremo queste ricerche sulla teoria dei sistemi ciclici col dimostrare che essa può anche riguardarsi come la teoria degli inviluppi di sfere *sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura.*

Consideriamo infatti un qualunque sistema ciclico e due superficie Σ, Σ' ortogonali ai circoli, riguardando sopra Σ, Σ' come corrispondenti i due punti P, P′ d'incontro col medesimo circolo C. Le normali in P, P′ a Σ, Σ' (tangenti a C) s'incontrano in un punto O ad egual distanza da P, P′ e la sfera descritta con centro O e con raggio $OP = OP'$ tocca Σ in P e Σ' in P′. Facendo variare la coppia (P, P′) abbiamo una doppia infinità di sfere e le due falde del loro inviluppo sono Σ, Σ'; dunque:

Due qualunque superficie ortogonali ai circoli di un sistema ciclico sono le due falde di un inviluppo di sfere, che si corrispondono per linee di curvatura.

Inversamente dimostriamo: *Se sopra le due falde Σ, Σ' di un inviluppo di sfere, riguardando come corrispondenti i due punti P, P′ di contatto di ogni sfera con Σ, Σ', si corrispondono le linee di curvatura, i circoli normali in ogni coppia di punti corrispondenti P, P′ a Σ, Σ' costituiscono un sistema ciclico.*

Deduciamo facilmente la dimostrazione del nostro teorema, insieme all'inverso già dimostrato, dai calcoli eseguiti al § 262 (pag. 115) per la ricerca degli inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura. Riprendendo le notazioni ivi adoperate, vediamo subito che

---

[1] Ciò risulta, se si vuole, dal § 275, e più semplicemente dall'osservare che un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto al punto O trasforma i detti circoli nelle normali alla superficie inversa della S.

le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del nostro circolo C saranno

$$x_1 = x_0 + \frac{T}{\cos\sigma} X_1 , \quad y_1 = y_0 + \frac{T}{\cos\sigma} Y_1 , \quad z_1 = z_0 + \frac{T}{\cos\sigma} Z_1 ,$$

mentre il suo raggio R è dato da

$$R = T \operatorname{tg}\sigma .$$

D'altronde, poichè la normale al piano del circolo ha i coseni di direzione

$$X_2 , \quad Y_2 , \quad Z_2 ,$$

potremo applicare le formole generali del § 269 ponendo

$$\alpha_1 = X_1 , \quad \beta_1 = Y_1 , \quad \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2 , \quad \beta_2 = Y_2 , \quad \gamma_2 = Z_2 .$$

Il calcolo dei coefficienti dell'equazione a differenziali totali (8) del detto paragrafo, avendo riguardo alle formole fondamentali dei §§. 254, 255, porge:

$$\begin{cases} \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{T \operatorname{sen}\sigma}{\cos^2\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial u} , & \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{T \operatorname{sen}\sigma}{\cos^2\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial v} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{T}{\cos\sigma} \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} , & \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{T}{\cos\sigma} \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} \\ \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{D_0}{\sqrt{E_0}} , & \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \frac{D'_0}{\sqrt{E_0}} . \end{cases}$$

Costruendo ora le equazioni di condizione (I), (II), (III) § 269 perchè il sistema di circoli sia normale, si trova che la (II) è identicamente soddisfatta e le (I), (III) si riducono all'unica:

$$\sqrt{G_0}\frac{\partial\sigma}{\partial v} D_0 - \sqrt{G_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial u}\right) D'_0 - \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}} \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma \frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial v} D''_0 = 0 .$$

Ora questa coincide colla (38) § 262 ed esprime appunto, per quanto ivi abbiamo visto, che le linee di curvatura di Σ, Σ' si corrispondono.

Possiamo evidentemente enunciare i risultati ottenuti anche nel modo seguente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema ∞^2 di circoli, ortogonali a due superficie Σ, Σ' ammetta un' intera serie di superficie ortogonali è che sopra Σ, Σ' si corrispondano le linee di curvatura.*

Capitolo XIX.

Il nuovo metodo di Weingarten per la ricerca delle superficie applicabili

Descrizione del nuovo metodo di Weingarten come collegato alla deformazione della falda focale di una congruenza di raggi. — Considerazioni geometriche di Darboux relative alle seconde linee di stringimento sulla falda focale. — Formole generali di Darboux relative al triedro mobile ed equivalenza di esse alle formole di Codazzi e di Gauss. — Forme ridotte del ds^2 come soddisfacenti alla condizione $K\sqrt{EG-F^2}=\pm 1$. — Calcolo della nuova equazione (W) di Weingarten per l'applicabilità e corrispondenza delle sue soluzioni alle deformazioni della superficie primitiva. — Esame dei casi eccezionali secondo Hessenberg. — Riduzione del caso generale all'equazione di Ampère:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\rho_1\rho_2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1+\rho_2)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}=0.$$

§. 282.

Preliminari.

Allo studio delle proprietà generali delle superficie dedicheremo ancora questo ed il seguente capitolo, nel quale riprendiamo a trattare il secondo problema dell'applicabilità (I, §§. 108 e seguenti) per far conoscere i nuovi ed importanti risultati conseguiti da Weingarten nella memoria del 1894: *Sur la déformation des surfaces*, che riportava il gran premio delle scienze matematiche dell'Accademia di Parigi [1]. Il principale risultato ottenuto da Weingarten colle sue nuove ricerche consiste in una radicale trasformazione dell'ordinaria equazione dell'applicabilità

$$\text{(A)}\qquad \Delta_2\theta=(1-\Delta_1\theta)\,K\ .$$

Secondo quanto abbiamo osservato alla fine del §. 271 (pag. 143), l'equazione (A) abbraccia in sostanza due distinti problemi geometrici e cioè 1.° il problema della deformazione di una superficie S di dato elemento lineare, 2.° il problema della ricerca dei sistemi ∞^1 normali di circoli giacenti nei piani tangenti di S. Le soluzioni θ della (A) corrispondenti al primo od al secondo problema si distinguono dal rendere

[1] *Acta Matematica* t. 20.

nel primo caso $\Delta_1 \theta < 1$, nel secondo $\Delta_1 \theta > 1$. Un primo effetto della trasformazione di Weingarten è di separare nettamente i due problemi, scindendoli analiticamente in due distinte equazioni del secondo ordine, che hanno ancora ciascuna la forma di Ampère e delle quali qui verrà studiata solo la prima.

Un altro e più importante vantaggio offre la trasformata di Weingarten. Se si eccettua il caso delle superficie sviluppabili $K = 0$, l'equazione (A) non si sapeva in alcun altro caso completamente integrare, non ammettendo integrali intermediarî del primo ordine, nè rientrando in alcuni degli altri casi noti di integrabilità. Eppure erano già note, per via geometrica, classi complete di superficie applicabili e cioè: 1.° tutte le evolute delle superficie d'area minima corrispondenti, secondo il teorema di Weingarten, alla forma

$$ds^2 = du^2 + u\, dv^2$$

dell'elemento lineare, 2.° le evolute delle superficie W con

$$k\,(r_2 - r_1) = \operatorname{sen} k\,(r_2 + r_1)$$

corrispondenti (I, § 135 pag. 292) a

$$ds^2 = \{\operatorname{sen}^4\theta\, d\theta^2 + \cos^2\theta\, dv^2\}\ .$$

A queste abbiamo aggiunto, nel Cap. XVI § 246, la classe completa delle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione, ed altre classi impareremo a conoscere fra breve, la cui scoperta è dovuta ancora a Weingarten. Ora la trasformata di Weingarten dell'equazione dell'applicabilità possiede in tutti e soli questi casi due integrali intermediarî del primo ordine, ovvero è integrabile con altri metodi noti. Così la nuova forma dell'equazione dell'applicabilità rende ragione dei successi ottenuti fin qui nella ricerca delle superficie applicabili e la ricerca analitica viene posta sopra una nuova via, ove le considerazioni geometriche l'avevano già da molto tempo preceduta

§. 283.

Considerazioni geometriche di Darboux.

Il nuovo metodo di Weingarten, come ha rilevato Darboux, nella esposizione che egli ce ne ha dato negli ultimi capitoli del suo libro [1] si collega essenzialmente alla teoria della *deformazione delle congruenze*,

---

[1] *Leçons* etc. t. IV, Chap. XIII, XIV.

la cui importanza per la teoria delle superficie già più volte abbiamo avuto occasione di rilevare nel corso di queste Lezioni. E qui, prima di addentrarci nello studio del metodo di Weingarten, vogliamo brevemente esporre le osservazioni geometriche di Darboux.

Si consideri una congruenza C di raggi tangenti ad una superficie S, invariabilmente legata alle flessioni di questa sua falda focale. Se domandiamo di costruire quelle rigate della congruenza C che hanno la loro linea di stringimento (I, pag. 256) sulla falda focale S_1, una prima ed evidente soluzione si ha nella serie di sviluppabili di C circoscritte alla S. Ma in generale (salvo, come ora si vedrà, il caso di una congruenza C normale) esiste una seconda serie di superficie rigate di C che rispondono al problema, e queste rigate (come le dette sviluppabili) rimangono sempre costituite, secondo un'osservazione di Darboux, dai medesimi raggi, comunque si deformi la congruenza.

Per dimostrarlo si riferisca la superficie S ad un sistema curvilineo (u, v), di cui le linee v siano quelle inviluppate dai raggi di C, e sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

l'elemento lineare di S. I coseni di direzione dei raggi di C saranno, nelle solite nostre notazioni:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Se prendiamo sopra S una linea L e vogliamo che la rigata formata dai raggi di C uscenti dai punti di L abbia questa linea per linea di stringimento, dovrà verificarsi lungo L la condizione necessaria e sufficiente

$$dx\,dX_1 + dy\,dY_1 + dz\,dZ_1 = 0 .$$

Le linee cercate L sono dunque le linee integrali della equazione differenziale

$$du^2 \cdot \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u} + du\,dv \cdot \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u}\right) +$$

$$+ dv^2 \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v} = 0$$

Ora si trova subito:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0 , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} = 0 . \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

i simboli di Christoffel essendo calcolati per la forma differenziale (1).

La nostra equazione differenziale si decompone adunque nelle due

$$dv = 0 , \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} dv = 0 .$$

Le linee integrali della prima sono le $v =$ costante e danno come prima soluzione le sviluppabili di C circoscritte ad S. Le seconde danno luogo alla seconda serie di rigate; queste sono sempre distinte dalle prime salvo quando $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$, nel qual caso le v sono geodetiche, ossia la C è una congruenza normale. I coefficienti della equazione differenziale

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} du + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} dv = 0 , \tag{2}$$

dipendono unicamente dalla forma (1) del ds^2 e per ciò la (2) rimane la stessa in qualunque flessione di S, ciò che dimostra le asserzioni superiori. Così rimane stabilita la proposizione di Darboux:

Se ad una rigata si inscrive, secondo la linea di stringimento L *una superficie qualunque* S, *indi si deforma comunque la* S *che seco trascini le generatrici della rigata, la linea di contatto rimarrà sempre linea di stringimento.*

Ciò premesso, alle flessioni di una superficie S si associ la considerazione di una congruenza C formata da raggi tangenti a S ed invariabilmente legati alla superficie.

Sulla falda focale S le seconde linee di stringimento L rimarranno sempre le stesse, comunque si deformi S.

Ora della congruenza C si faccia la consueta immagine sferica e sia

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \tag{3}$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo, in coordinate qualunque u, v; se supponiamo che $\Phi(u, v) =$ costante sia l'equazione

delle linee L di stringimento, sopra S, in una certa configurazione di C, il fondamento del nuovo metodo di Weingarten consiste nella seguente proprietà: *Il parametro* Φ *delle linee di stringimento soddisfa ad un' equazione a derivate parziali del secondo ordine della forma d' Ampère, formata con parametri differenziali primi e secondi di* Φ, *calcolati rispetto alla forma* (3) *dell' elemento lineare sferico rappresentativo della congruenza.*

È questa la nuova equazione dell'applicabilità di Weingarten (equazione (W) § 288); ad ogni sua soluzione reale nota Φ corrisponde una deformazione reale della superficie S, che si calcola con quadrature.

§. 284.

Il triedro mobile e le formole relative alle rotazioni.

Per eseguire i calcoli relativi allo sviluppo del nuovo metodo di Weingarten adotteremo il procedimento stesso usato dall'autore [1] fondato sul metodo del *triedro mobile*. Così avremo occasione di porre le formole generali della teoria delle superficie sotto la forma preferita dai geometri della scuola Francese, sviluppata sistematicamente nella classica opera di Darboux. Già in varii luoghi delle presenti Lezioni abbiamo adoperato in casi particolari questo metodo, che ora andiamo a fare conoscere in tutta la sua generalità, servendoci per agevolare i confronti delle notazioni medesime usate da Darboux [2].

Data una superficie S, riferita ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee u, v, che dia all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{3}$$

pensiamo ad ogni punto M di S associato un triedro trirettangolo di vertice M, di cui uno spigolo abbia la direzione (positiva) della normale (X_3, Y_3, Z_3) alla S, e gli altri due spigoli, coi coseni di direzione

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \end{matrix}$$

giacciano comunque nel piano tangente di S. Per altro si supporrà questa giacitura fissata esclusivamente rispetto alla prima forma fondamentale (3), sicchè, quando la superficie S si deformi venga a trascinare seco

---

[1] M. c § I (*Acta* t. 20).

[2] Cf. specialmente *Leçons* etc. t. I, Chap: V e t. II, Livre V, Chap. I.

il triedro invariabilmente legato alla superficie. Se indichiamo dunque con $\varphi\ (u, v)$ l'angolo di cui deve rotare sulla pagina positiva del piano tangente, e nel verso positivo delle rotazioni, la direzione (X_1, Y_1, Z_1) per sovrapporsi alla direzione positiva della linea v, basterà fissare il valore di φ in funzione di u, v per avere definito in ogni punto di S la posizione del triedro mobile

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \quad , \quad (X_3, Y_3, Z_3) ,$$

che supponiamo direttamente congruente colla terna degli assi coordinati. Consideriamo dapprima il nostro triedro mobile trasportato, parallelamente a sè stesso, col vertice nell'origine O, sicchè il nuovo triedro T avrà il vertice fisso in O ed assumerà al variare di u, v, una doppia infinità di posizioni. I nove coseni di direzione degli spigoli di T, che scriviamo nel quadro

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} ,$$

sono funzioni di u, v che formano i coefficienti di una sostituzione ortogonale. Ora, se in una linea del quadro (4) sostituiamo ai coefficienti le loro derivate parziali rispetto ad u o a v, il determinante corrispondente è manifestamente nullo, [1] e per ciò quelle tre derivate sono le medesime combinazioni lineari omogenee dei coseni delle altre due linee. Scrivendo per disteso le formole corrispondenti pei coseni della prima verticale, coll'aver riguardo alle condizioni d'ortogonalità, si vede subito che esse assumono l'aspetto seguente:

$$(I) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = r\,X_2 - q\,X_3 \quad , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = r_1\,X_2 - q_1\,X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = p\,X_3 - r\,X_1 \quad , \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = p_1\,X_3 - r_1\,X_1 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = q\,X_1 - p\,X_2 \quad , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = q_1\,X_1 - p_1\,X_2 , \end{cases}$$

---

[1] Così p. e. $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial Z_1}{\partial u} \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{\partial X_1}{\partial u}\,X_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial u}\,Y_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial u}\,Z_1 = 0 .$$

dove (p, q, r), (p_1, q_1, r_1) sono due terne di funzioni di u, v, alle quali facilmente si riconosce il significato cinematico di *rotazioni* [1]. Alle equazioni (I) stesse soddisfano naturalmente le altre due terne

$$(Y_1, Y_2, Y_3) \quad , \quad (Z_1, Z_2, Z_3) ;$$

e se scriviamo le condizioni d'integrabilità delle (I), troviamo subito che le rotazioni p, q, r; p_1, q_1, r_1 debbono soddisfare alle tre relazioni fondamentali:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - q_1 r \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - r_1 p \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - p_1 q . \end{cases}$$

Inversamente, se p, q, r; p_1, q_1, r_1 sono 6 funzioni di u, v che soddisfano le (II), dalla teoria dei sistemi di equazioni ai differenziali totali risulta subito che le (I) formano un sistema *illimitatamente integrabile* e dalla sua forma speciale, procedendo precisamente come abbiamo fatto al Cap. IV (I, pag. 124), risulta altresì che potremo scegliere tre sistemi integrali

$$\begin{matrix} X_1 & , & X_2 & , & X_3 \\ Y_1 & , & Y_2 & , & Y_3 \\ Z_1 & , & Z_2 & , & Z_3 , \end{matrix}$$

che formino i coefficienti di una sostituzione ortogonale, e resteranno ancora arbitrarî i valori iniziali dei nove coefficienti stessi, per un sistema iniziale $(u_0 v_0)$ di valori delle variabili. In altre parole: *Le relazioni* (II) *costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti, cui debbono soddisfare le sei rotazioni p, q, r; p_1, q_1, r_1 in un triedro mobile, in una doppia infinità di posizioni, con un punto fisso.*

---

[1] p, q, r sono le componenti attorno agli assi di T della rotazione che subisce T tenendo fissa v e facendo variare u; analogamente p_1, q_1, r_1 quando si faccia variare la sola v.

§. 285.

Formole relative alle traslazioni.

Venendo ora a considerare il triedro mobile $\overline{\mathrm{T}}$, parallelo a T, e col vertice $\mathrm{M} \equiv (x\,y\,z)$ variabile sopra S, cominciamo dall'osservare che, essendo nulli i determinanti:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Z}_1 \\ \mathrm{X}_2 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Z}_2 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Z}_1 \\ \mathrm{X}_2 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Z}_2 \end{array}\right|,$$

gli elementi della prima linea in ciascuno saranno combinazioni lineari omogenee di quelli delle altre due linee, e potremo quindi scrivere le formole

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \xi\,\mathrm{X}_1 + \eta\,\mathrm{X}_2, \frac{\partial y}{\partial u} = \xi\,\mathrm{Y}_1 + \eta\,\mathrm{Y}_2, \frac{\partial z}{\partial u} = \xi\,\mathrm{Z}_1 + \eta\,\mathrm{Z}_2 \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \xi_1\,\mathrm{X}_1 + \eta_1\,\mathrm{X}_2, \frac{\partial y}{\partial v} = \xi_1\,\mathrm{Y}_1 + \eta_1\,\mathrm{Y}_2, \frac{\partial z}{\partial v} = \xi_1\,\mathrm{Z}_1 + \eta_1\,\mathrm{Z}_2, \end{cases}$$

dove $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ sono quattro funzioni di u, v, che rispetto al triedro mobile $\overline{\mathrm{T}}$ hanno il significato cinematico di *traslazioni*. (Cf. Darboux l. c.).

Dalle (III) si deduce subito che le traslazioni sono legate ai coefficienti dell'elemento lineare ds dalle formole:

$$\text{(4)} \qquad \xi^2 + \eta^2 = \mathrm{E}\,, \quad \xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 = \mathrm{F}\,, \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \mathrm{G}\,,$$

dalle quali segue

$$(\xi\,\eta_1 - \eta\,\xi_1)^2 = \mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2,$$

e ponendo per brevità

$$\Delta = \mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2,$$

avremo quindi

$$\xi\,\eta_1 - \eta\,\xi_1 = \pm\sqrt{\Delta}\,,$$

dove al solito con $\sqrt{\Delta}$ indichiamo il valore positivo del radicale.

L'incertezza del doppio segno si toglie ricordando che, per le convenzioni fondamentali (Cap. IV), si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = + \sqrt{\Delta} ,$$

e d'altronde essendo

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = + 1 ,$$

dalle (III) risulta precisato il segno colla formola

$$(4^*) \qquad \xi\,\eta_1 - \eta\,\xi_1 = + \sqrt{\Delta} .$$

Avendo riguardo alle (4), (4*) ed alle formole

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} , \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{EG}} ,$$

che definiscono (I, pag. 88) l'angolo ω delle linee coordinate, si vede subito che le quattro traslazioni ξ, η; ξ_1, η_1 possono esprimersi per un unico angolo ausiliario φ colle formole

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{E}\cos\varphi & , \quad \eta = \sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi \\ \xi_1 = \sqrt{G}\cos(\omega+\varphi) , & \eta_1 = \sqrt{G}\operatorname{sen}(\omega+\varphi) ; \end{cases}$$

e poichè dalle (III) segue

$$\begin{cases} \Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot X_1 = \cos\varphi \\ \Sigma \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot X_2 = \operatorname{sen}\varphi , \end{cases}$$

vediamo che il significato geometrico di φ è precisamente quello fissato nel § precedente, che serve a definire la posizione del triedro $\overline{T}$ rispetto alla superficie, cioè: *φ misura la rotazione positiva che deve compiere sul piano tangente la direzione* (X_1, Y_1, Z_1) *per sovrapporsi alla direzione positiva della tangente alla linea v.*

§. 286.

Formole fondamentali per la teoria delle superficie.

Dobbiamo ora scrivere le condizioni di integrabilità delle (III), per la qual cosa basta sviluppare l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial v}(\xi X_1 + \eta X_2) - \frac{\partial}{\partial u}(\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2),$$

che secondo le (I) si cangia in un'espressione lineare omogenea in X_1, X_2, X_3, ed eguagliare quindi a zero i rispettivi coefficienti di X_1, X_2, X_3, ciò che dà le tre equazioni:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta\, r_1 - \eta_1 r \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1 r - \xi\, r_1 \end{cases}$$

$$\text{(V)} \qquad -\xi q_1 + \eta p_1 + \xi_1 q - \eta_1 p = 0.$$

Ora, se nelle (IV) sostituiamo per le traslazioni i valori (5) ed abbiamo riguardo alle formole seguenti

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = -\sqrt{\Delta}\left[\dfrac{1}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \dfrac{1}{G}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = -\sqrt{\Delta}\left[\dfrac{1}{E}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \dfrac{1}{G}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right] \end{cases}$$

che danno le derivate dell'angolo ω, [1] le (IV), risolute rispetto a $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, ci danno

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - r \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{E}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - r_1 . \end{cases}$$

---

[1] Per stabilirle basta derivare le due

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{EG}},$$

esprimendo le derivate dei coefficienti pei simboli di Christoffel.

Queste ci dimostrano intanto che: *le rotazioni* r, r_1 *dipendono unicamente dall'elemento lineare di* S *e dalla posizione scelta pel triedro* $\overline{\mathrm{T}}$. Eliminando poi φ dalle (7), deduciamo

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{E}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{E}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right];$$

il secondo membro di questa formola non è altro che $\mathrm{K}\sqrt{\Delta}$, indicando K la curvatura assoluta di S [1], onde la precedente si scrive

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \mathrm{K}\sqrt{\Delta}\,. \tag{8}$$

Se supponiamo scelto φ in modo arbitrario, ciò che fissa la posizione del triedro $\overline{\mathrm{T}}$ rispetto alla superficie, le (7) ci daranno i valori delle rotazioni r, r_1 e le altre quattro rotazioni p, q; p_1, q_1 dovranno soddisfare le (II), (V), cioè le quattro relazioni

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - q_1 r \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - r_1 p \\ p\,q_1 - p_1 q = \mathrm{K}\sqrt{\Delta} \\ \eta_1 p - \xi_1 q + \xi q_1 - \eta p_1 = 0\,, \end{cases}$$

dove le traslazioni ξ, η; ξ_1, η_1 hanno i valori (5) e le rotazioni r, r_1 i valori tratti dalla (7).

Inversamente è ora facile dimostrare la proprietà fondamentale: *Se le rotazioni* p, q; p_1, q_1 *soddisfano le quattro equazioni* (B), *le traslazioni* ξ, η; ξ_1, η_1 *avendo i valori* (5) *in funzione dell'angolo arbitrario* φ *e le rotazioni* r, r_1 *essendo calcolate dalle* (7), *ne verrà individuata una superficie* S *del dato elemento lineare* (3).

E infatti, essendo soddisfatte le (II), il sistema (I) sarà illimitatamente integrabile, e scelti tre sistemi integrali

$$\begin{matrix} \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Y}_3 \\ \mathrm{Z}_1 & \mathrm{Z}_2 & \mathrm{Z}_3 \end{matrix}$$

formanti i coefficienti di una sostituzione ortogonale, le formole (III)

---

[1] Vedi § 37 formola (V) (I, pag. 77).

definiranno per quadrature x, y, z, le condizioni d'integrabilità risultando identicamente soddisfatte. Il punto x, y, z descriverà così la superficie richiesta.

Il sistema di formole (B), unito alle (5), (7) che definiscono le traslazioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ e le rotazioni r, r_1, tiene perfettamente il luogo nella teoria generale delle superficie delle formole fondamentali del metodo di Gauss (Cap. IV).

Notiamo in fine le formole seguenti che danno i valori dei coefficienti della seconda forma fondamentale di S in funzione delle traslazioni e delle rotazioni $p, q; p_1, q_1$:

$$(9)\qquad \begin{cases} D = \eta\, p - \xi\, q & D' = \eta\, p_1 - \xi\, q_1 \\ D' = \eta_1 p - \xi_1\, q & D'' = \eta_1\, p_1 - \xi_1\, q_1 . \end{cases}$$

Esse risultano subito dalle (I), (III), derivando le (III) rapporto ad u, v e nei primi membri sostituendo i valori

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + D\, X_3 \text{ ecc.},$$

tratti dalle formole fondamentali del Cap. IV (I, pag. 116). Paragonando i coefficienti di X_3 dall'una e dall'altra parte, si ottengono appunto le (9). Se si paragonano invece i coefficienti di X_1, X_2 si otterranno i valori dei simboli $\left\{\begin{matrix}i\,k\\l\end{matrix}\right\}$ di Christoffel espressi per le traslazioni e per le rotazioni.

§. 287.

Forme ridotte del ds^2.

Andiamo ora ad applicare le formole stabilite alla nuova trattazione del secondo problema dell'applicabilità, nel modo già indicato alla fine del § 283.

Sopra una data superficie S fissiamo le linee coordinate u, lasciando per ora indeterminate le v, ed associamo alla S una congruenza C di sue tangenti tale che le linee u sopra S siano le *seconde* linee di stringimento (§ 283).

Facendo coincidere lo spigolo (X_1, Y_1, Z_1) del triedro mobile $\bar{T}$ col raggio della congruenza, esprimeremo che le linee u sono le seconde

linee di stringimento, scrivendo che *lungo una linea* $u = \text{cost}^{te}$ deve essere

$$\sum dx\, d\mathrm{X}_1 = 0$$

ossia

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = 0 \ .$$

A causa delle (I), (III), questa si traduce nella relazione

$$\eta_1 r_1 = 0 \ .$$

In ogni caso deduciamo che la condizione imposta si riduce a

$$r_1 = 0 \ ;$$

poichè, se fosse $\eta_1 = 0$, si avrebbe per le seconde (III)

$$\mathrm{X}_1 : \mathrm{Y}_1 : \mathrm{Z}_1 = \frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} \ ,$$

cioè la congruenza C sarebbe formata dalle tangenti alle linee u, nelle quali dovrebbero dunque coincidere le prime e seconde linee di stringimento e per ciò (§ 283) le u sarebbero geodetiche, ossia sarebbe $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$. D'altra parte in questo caso il valore dell'angolo φ sarebbe manifestamente $\varphi = 2\pi - \omega$ e il paragone delle due ultime formole (6), (7) dà nuovamente

$$r_1 = 0 \ .$$

Dunque: *L'annullarsi della rotazione* r_1 *esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le linee* u *siano le seconde linee di stringimento per la congruenza* C.

L'angolo φ risulta così determinato dall'unica condizione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\mathrm{E}} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} ,$$

e per ciò si ha φ con una quadratura, a meno di una funzione arbitraria della u additiva in φ. Di qui si vede che, fissate le linee u, esistono infinite congruenze C di tangenti alla S che ammettono le linee u come

seconde linee di stringimento; e, scelta una di queste congruenze, si ottengono tutte le altre, facendo rotare tutti i raggi di C che partono dai punti di una linea u di un medesimo angolo, funzione arbitraria di u.

Ora, per l'applicazione del metodo di Weingarten, è essenziale dimostrare che si possono scegliere le seconde linee coordinate v e la congruenza C in guisa che, mentre la seconda rotazione r_1 è sempre nulla, la seconda r acquisti semplicemente il valore

$$r = \pm v \ .$$

A causa della (8) pag. 182, ciò richiede in primo luogo che le linee coordinate u, v siano tali da rendere

$$\text{(10)} \qquad K\sqrt{\Delta} = \pm 1 \ ,$$

ed è molto facile vedere che basta una quadratura per effettuare il voluto cangiamento delle linee v.

Se facciamo infatti il cangiamento di coordinate

$$u' = u \quad , \quad v' = v\,(u, v)$$

e indichiamo con Δ' il nuovo discriminante, avremo

$$\Delta' \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = \Delta \ ,$$

cioè

$$\Delta' \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 = \Delta$$

e per rendere $K\sqrt{\Delta'} = \pm 1$, basterà assumere

$$\frac{\partial v'}{\partial v} = K\sqrt{\Delta} \ ,$$

ciò che determina v' (a meno di una funzione arbitraria U additiva) con una quadratura.

Quando per una data forma del ds^2

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

è soddisfatta la (10), diremo con Weingarten che la forma è *ridotta* [1].

Ora notiamo che, avendo per noi $\sqrt{\Delta}$ il significato del valore positivo del radicale, dovremo nella (10) scegliere il segno superiore o l'inferiore secondo che K è positiva o negativa. Nelle ricerche che seguono dovremo quindi intendere limitate le nostre considerazioni ad una regione di S, *ove la curvatura* K *conserva sempre il medesimo segno.*

Supposta dunque la prima forma fondamentale di S ridotta, posto

$$r_1 = 0 \quad , \quad r = \pm v \ ,$$

la condizione (8) è soddisfatta e le (7) determinano φ con una quadratura, a meno di una costante additiva. Così è dimostrato quanto sopra avevamo asserito.

§. 288.

La nuova equazione dell'applicabilità.

Ciò premesso, veniamo a calcolare in coordinate u, v l'elemento lineare sferico ds_1 rappresentativo della nostra congruenza C, cioè

$$ds_1^2 = dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 \ .$$

Le prime formole (I) pag. 177, essendo

$$r_1 = 0 \quad , \quad r = \pm v \ ,$$

danno

$$ds_1^2 = (v^2+q^2)\, du^2 + 2\, q\, q_1\, du\, dv + q_1^2\, dv^2 \ . \tag{11}$$

È qui subito necessario avvertire che l'applicazione del metodo di Weingarten richiede essenzialmente che l'immagine sferica della congruenza C non si riduca ad una linea, cioè che il discriminante della (11) sia diverso da zero. Supporremo quindi in ciò che segue che sia $q_1 \neq 0$, riservandoci ad esaminare più tardi questo caso eccezionale.

Per fissare le idee eseguiremo i nostri calcoli nel caso in cui valga nella (10) il segno superiore, cioè la superficie S sia a curvatura K positiva nella regione che si considera e valgano quindi le formole

$$K\sqrt{\Delta} = 1 \quad , \quad r_1 = 0 \quad , \quad r = v \ ,$$

---

[1] La condizione di riduzione assunta da Weingarten è leggermente diversa; qui abbiamo adottata, come più semplice, quella modificata di Darboux.

e quindi, per le (B) pag. 182

$$(B^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = -q_1 v \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = p_1 v \\ p q_1 - p_1 q = 1 \ . \end{cases}$$

Dobbiamo ora calcolare, rispetto alla forma (11), diversi parametri differenziali e senz'altro s'intenderà nel seguito che i simboli dei parametri differenziali si riferiscano al ds_1^2 dell'immagine sferica della congruenza C. In primo luogo dalla (11), calcolando il parametro differenziale primo $\Delta_1 u$, risulta subito la formola fondamentale

$$(12)\qquad \Delta_1 u = \frac{1}{v^2} \ .$$

Indicando con θ una funzione qualunque di u, v e costruendo il parametro differenziale misto

$$\nabla (\theta, u) \ ,$$

abbiamo

$$(12^*)\qquad \nabla (\theta, u) = \frac{1}{v^2 q_1} \left(q_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} - q \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) \ .$$

Se facciamo successivamente

$$\theta = X_1 \ , \quad Y_1 \ , \quad Z_1 \ ,$$

ed osserviamo che per le (I)

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = v X_2 - q X_3 \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -q_1 X_3 \ ,$$

ne deduciamo

$$\nabla (X_1, u) = \frac{1}{v} X_2 \ ;$$

così adunque si avrà

$$(13)\qquad X_2 = v \nabla (X_1, u) \ , \quad Y_2 = v \nabla (Y_1, u) \ , \quad Z_2 = v \nabla (Z_1, u) \ .$$

Colle (12), (13) abbiamo così espressi v, X_2, Y_2, Z_2 per mezzo di parametri differenziali e le formole (III), che definiscono per quadrature la superficie S deformata, diventano

$$(14)\qquad dx = [\xi X_1 + \eta v \nabla (X_1, u)] du + [\xi_1 X_1 + \eta_1 v \nabla (X_1, u)] dv \ .$$

Per le proprietà dei parametri differenziali, queste sussistono riferendo il ds_1 dell'immagine sferica ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee u', v'. In queste formole (14) essendo $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ funzioni *note* di u, v e v determinata per mezzo della u colla formola (12)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}} ,$$

basterà conoscere u in funzione di u', v' perchè i secondi membri delle (14) siano pienamente determinati. A tale scopo conviene passare al calcolo di parametri differenziali secondi, dal quale risulterà che u, considerata come funzione di u', v', deve soddisfare ad un'equazione del secondo ordine della forma d'Ampère.

Calcolando in primo luogo i simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' , \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' , \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}'$$

per la forma differenziale (11), col sostituire i loro valori effettivi dati dalla tabella (A) al §. 43, (I, pag. 92) ed avendo riguardo alle (B*), troviamo

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{pq}{v} , \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{pq_1}{v} , \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{p_1 q_1}{v} .$$

Per le derivate seconde covarianti di u

$$u_{11} , \quad u_{12} , \quad u_{22}$$

abbiamo quindi

$$u_{11} = -\frac{pq}{v} , \quad u_{12} = -\frac{pq_1}{v} , \quad u_{22} = -\frac{p_1 q_1}{v} .$$

Ed ora se calcoliamo i due parametri differenziali secondi

$$\Delta_2 u = \frac{G_1 u_{11} - 2 F_1 u_{12} + E_1 u_{22}}{E_1 G_1 - F_1^2}$$

$$\Delta_{22} u = \frac{u_{11} u_{22} - u_{12}^2}{E_1 G_1 - F_1^2} ,$$

notando che si ha

$$E_1 = v^2 + q^2 , \quad F_1 = q q_1 , \quad G_1 = q_1^2$$

$$E_1 G_1 - F_1^2 = v^2 q_1^2 ,$$

ne deduciamo le formole

$$(a) \qquad \Delta_2 u = \frac{q}{v^3 q_1} - \frac{p_1}{v q_1} , \quad \Delta_{11} u = -\frac{p}{v^4 q_1} .$$

In fine se dalla (12*) calcoliamo il parametro differenziale secondo

$$\nabla (\Delta_1 u, u) = \nabla \left(\frac{1}{v^2} , u \right)$$

troviamo

$$(b) \qquad \nabla (\Delta_1 u, u) = \frac{2q}{v^5 q_1} .$$

Mediante le (a), (b) esprimiamo i tre rapporti $\frac{p}{q_1}$, $\frac{q}{q_1}$, $\frac{p_1}{q_1}$ per parametri differenziali di u colle formole:

$$(15) \qquad \frac{p}{q_1} = -v^4 \Delta_{11} u \quad , \quad \frac{q}{q_1} = \frac{1}{2} v^5 \nabla (\Delta_1 u, u) ,$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2} v^3 \nabla (\Delta_1 u, u) - v \Delta_2 u .$$

Ed ora in fine se nell'ultima delle equazioni (B), divisa per q_1:

$$\eta_1 \frac{p}{q_1} - \xi_1 \frac{q}{q_1} + \xi - \eta \frac{p_1}{q_1} = 0 ,$$

sostituiamo i valori (15), troviamo l'equazione finale

$$(W) \qquad -\eta_1 \Delta_{11} u + \frac{\eta}{v^3} \Delta_2 u + \frac{\xi}{v^4} - \frac{\eta + \xi_1 v^3}{2v} \nabla (u, \Delta_1 u) = 0 .$$

Essendo qui $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ funzioni note di u, v, e v determinata per mezzo di u dalla relazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}} ,$$

la (W) è precisamente per u un'equazione del secondo ordine della forma d'Ampère. È questa la nuova equazione dell'applicabilità stabilita da Weingarten.

Si osserverà che, essendo u, v indipendenti, la soluzione u della (W) è tale che $\Delta_1 u$ *non è funzione della sola* u, cioè sulla sfera le linee $u =$ costante non sono geodeticamente parallele.

Abbiamo eseguito il calcolo nell'ipotesi $K\sqrt{\Delta} = 1$; se fosse $K\sqrt{\Delta} = -1$, indi $r = -v$, si arriverebbe ancora, come il lettore facilmente verificherà, alla medesima equazione (W) e alle stesse equazioni (14), dove soltanto η, η_1 sarebbero sostituite da $-\eta, -\eta_1$.

§. 289.

Corrispondenza fra le soluzioni della (W) e le deformazioni della S.

Possiamo riassumere i risultati sopra ottenuti nel teorema:
Se S *è una superficie del dato elemento lineare ridotto*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 ,$$

colle formole del § 287 *si associ alla* S *una congruenza* C *di sue tangenti, tale che le linee u sopra* S *siano le seconde linee di stringimento, indi si esprimano i coseni di direzione* X_1, Y_1, Z_1 *del raggio variabile di* C *per due variabili indipendenti qualunque* u', v'. *Supposto che l'immagine sferica della congruenza* C *non si riduca ad una linea, si costruisca l'elemento lineare*

$$ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2$$

della rappresentazione sferica di C; *la u, considerata come funzione di* u', v', *sarà una soluzione della equazione* (W), *e* $\Delta_1 u$ *non sarà funzione della sola u.*

Inversamente dimostriamo ora che ad ogni soluzione u della (W), *tale che u,* $\Delta_1 u$ *siano fra loro indipendenti*, corrisponde una superficie S del dato elemento lineare, che si otterrà con quadrature.

Essendo X_1, Y_1, Z_1 funzioni note di u', v', e posto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}} ,$$

supponiamo dunque che u sia una tale soluzione della (W), indipendente da v. Se prendiamo secondo le (13)

$$(16) \qquad X_2 = v\,\nabla(X_1, u) , \quad Y_2 = v\,\nabla(Y_1, u) , \quad Z_2 = v\,\nabla(Z_1, u),$$

avremo

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = v^2 \sum (\nabla(X_1, u))^2 = v^2 \Delta_1 u = 1 ,$$

cioè X_2, Y_2, Z_2 saranno i coseni di una direzione ortogonale a (X_1, Y_1, Z_1).

Associandovi una terza direzione (X_3, Y_3, Z_3) ortogonale ad ambedue, potremo esprimere i nove coseni per le due variabili *indipendenti u, v*, e se supponiamo

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 ,$$

le (16) si scriveranno:

$$X_2 = v\,\frac{G_1\frac{\partial X_1}{\partial u} - F_1\frac{\partial X_1}{\partial v}}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

colle analoghe per $Y_2\,Z_2$. Ne deduciamo le formole

$$\sum X_2\frac{\partial X_1}{\partial u} = v\,,\ \sum X_2\frac{\partial X_1}{\partial v} = 0\,. \tag{17}$$

D'altra parte per la terna ortogonale (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), $(X_3, Y_3 Z_3)$ sussisteranno formole del tipo (I) pag. 177 e le (17) ci dimostrano che in esse sarà precisamente

$$r = v\,,\quad r_1 = 0\,.$$

Ora le formole

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = v\,X_2 - q\,X_3\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -q_1\,X_2$$

danno, come già si osservò al principio del § 238:

$$E_1 = v^2 + q^2\,,\ F_1 = q\,q_1\,,\ G_1 = q_1^2$$

ed il calcolo stesso eseguito alla fine del § citato prova che sussistono le (15) e quindi, poichè u è una soluzione della (W), saranno $p, q\,;\ p_1, q_1$ legate dalla relazione lineare (V)

$$-\xi q_1 + \eta p_1 + \xi_1 q - \eta_1 p = 0\,. \tag{V}$$

D'altra parte, pel modo come furono calcolate $\xi, \eta\,;\ \xi_1, \eta_1$, sono soddisfatte le equazioni (IV)

$$\text{(IV*)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = -\eta_1\,v \\[2ex] \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1\,v\,, \end{cases}$$

Queste, insieme colla (V) costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti (§ 286) perchè siano tre differenziali esatti le espressioni

$$(\xi\,X_1 + \eta\,X_2)\,du + (\xi_1\,X_1 + \eta_1\,X_2)\,dv$$
$$(\xi\,Y_1 + \eta\,Y_2)\,du + (\xi_1\,Y_1 + \eta_1\,Y_2)\,dv$$
$$(\xi\,Z_1 + \eta\,Z_2)\,du + (\xi_1\,Z_1 + \eta_1\,Z_2)\,dv\,.$$

Con queste considerazioni abbiamo dimostrato il teorema inverso:
Sia data una forma differenziale ridotta

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

per la quale, nel modo indicato al § 287, *siano calcolate le corrispondenti funzioni di* u, v,

$$\xi, \eta\,; \quad \xi_1, \eta_1\,.$$

Essendo X_1, Y_1, Z_1 *le coordinate di un punto della sfera rappresentativa, espresse per due variabili qualunque* u', v', *e posto* $v = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}}$, *si scelga una qualunque soluzione dell'equazione* (W):

$$-\eta_1 \Delta_{22} u + \frac{\eta}{v^3} \Delta_2 u + \frac{\xi}{v^4} - \frac{\eta + \xi_1 v^3}{2v} \nabla (u, \Delta_1 u) = 0\ ,$$

dove i parametri differenziali sono calcolati rispetto all'elemento lineare sferico. Supposta la soluzione u *tale che* $\Delta_1 u$ *sia indipendente da* u, *le formole* (14)

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} x = \int \left[\xi X_1 + \eta v \nabla (X_1, u) \right] du + \left[\xi_1 X_1 + \eta_1 v \nabla (X_1, u) \right] dv \\ y = \int \left[\xi Y_1 + \eta v \nabla (Y_1, u) \right] du + \left[\xi_1 Y_1 + \eta_1 v \nabla (Y_1, u) \right] dv \\ z = \int \left[\xi Z_1 + \eta v \nabla (Z_1, u) \right] du + \left[\xi_1 Z_1 + \eta_1 v \Delta (Z_1, u) \right] dv \end{cases}$$

definiranno per quadrature una corrispondente superficie S *del dato elemento lineare*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

§. 290.

Esame dei casi eccezionali.

La discussione precedente ci ha dimostrato che ad ogni soluzione reale della nuova equazione (W) dell'applicabilità corrisponde *in generale* una determinata superficie reale dell'assegnato elemento lineare, e viceversa ad ogni tale superficie una soluzione della (W). Però l'una e l'altra proprietà soffrono ancora eccezioni che conviene esaminare. In primo luogo le eventuali soluzioni della (W) che rendono $\Delta_1 u$ funzione di u (e queste soltanto) non corrispondono ad alcuna soluzione del problema dell'applicabilità. Esistono effettivamente di tali soluzioni? È facile vedere che ne esistono sempre, per qualunque forma assegnata del ds^2

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2\,.$$

E infatti se prendiamo l'elemento lineare sferico sotto la forma normale, riferita ai meridiani ed ai paralleli

$$ds'^2 = d\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\, d\beta^2,$$

potremo certamente soddisfare alla (W) assumendo in particolare u funzione della sola α, con che

$$\Delta_1 u = u'^2(\alpha)$$

(l'accento indicando derivazione rapporto ad α) sarà appunto funzione di u. Sostituendo in (W) si avrà manifestamente per $u(\alpha)$ un'equazione differenziale ordinaria del 2.° ordine. Ogni soluzione di questa ci dà una delle soluzioni eccezionali cercate.

Così adunque anche nella nuova forma dell'equazione dell'applicabilità si conserva, benchè in grado assai minore, l'inconveniente che si verificava per l'antica:

$$\Delta_2\theta = (1 - \Delta_1\theta)\,K;$$

e cioè vi sono soluzioni della (W) alle quali non corrispondono soluzioni del problema dell'applicabilità.

Di più, se si considera ora la questione inversa, *può darsi* che qualche effettiva soluzione del problema d'applicabilità sfugga all'equazione (W), la qual cosa non accadeva nella forma antica dell'equazione stessa. L'esame accurato di questo caso singolare è dovuto ad Hessenberg [1] ed il Weingarten stesso, che nella citata memoria lo aveva escluso, se ne è poi occupato in una nota inserita nel t. 22 degli Acta.

Il detto caso d'eccezione si presenta quando nella deformazione corrispondente della S si ha $q_1 = 0$, cioè l'immagine sferica della congruenza C si riduce ad una linea. In questo caso, essendo insieme $q_1 = r_1 = 0$, le formole (I) pag. 177 dimostrano che si ha

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{\partial Z_1}{\partial v} = 0$$

e però X_1, Y_1, Z_1 sono funzioni della sola u, cioè i raggi C uscenti dai punti di una medesima linea u sono paralleli, ossia la linea u è *linea d'ombra* sulla superficie S. Viceversa, se esiste una tale configurazione della S, essa sfugge all'equazione (W).

Ora Hessenberg osserva che presa una qualunque configurazione della superficie S (non sviluppabile) e scelte sopra di essa una semplice

---

[1] *Ueber die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen* (Acta mathem. t. 23, pag. 121) Cf. specialmente § XI.

infinità di linee d'ombra (nella doppia infinità di tali linee esistenti sopra S), se si prendono queste per linee u e per congruenza C si assume quella dei corrispondenti raggi paralleli lungo ogni linea u, si avrà manifestamente

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{\partial Z_1}{\partial v} = 0 ,$$

e quindi per le (I) $q_1 = r_1 = 0$. Formando la corrispondente equazione (W), la configurazione scelta per S sfugge evidentemente alle sue soluzioni. D'altra parte però è sempre possibile scegliere le linee u e la congruenza C in guisa che *nessuna soluzione del problema dell'applicabilità sfugga all'equazione* (W). Basta infatti prendere per le u un sistema di geodetiche non rettificabili insieme [1] e per congruenza C quella delle sue tangenti (Cf. § 287). Allora è manifestamente impossibile deformare la S in guisa che i raggi di C riescano paralleli lungo ogni linea u, che dovrebbe in tal caso rettificarsi.

Del resto, anche se si fa uso di una forma dell'equazione (W) per la quale si presenti il caso eccezionale, è facile stabilire dei criterii che, *senza alcuna integrazione*, lasciano riconoscere l'esistenza di questi casi e la ricerca delle deformazioni singolari corrispondenti si riduce all'integrazione di un'equazione di Riccati (Cf. Hessenberg e Weingarten l. c.).

§. 291.

Semplificazione dell'equazione (W).

Andiamo ora a considerare il caso in cui nella equazione (W) manchi il termine in $\nabla(u, \Delta_1 u)$, cioè sia

$$\eta_1 + \xi_1 v^3 = 0 .$$

A questo caso, in apparenza particolare, vedremo che si può sempre ridurre il problema dell'applicabilità; i teoremi di Weingarten ai quali così perveniamo furono d'altronde scoperti anteriormente dall'autore, che partendo da questi risultati è poi giunto al metodo generale esposto nei §§ precedenti. Essendo u una soluzione dell'equazione (W), supposta priva del termine in $\nabla(u, \Delta_1 u)$:

$$(W^*) \qquad -\eta_{11}\Delta_{22} u + \frac{\eta}{v^3}\Delta_2 u + \frac{\xi}{v^4} = 0 .$$

---

[1] Ciò si può fare evidentemente in infiniti modi, quando anche l'elemento lineare dato appartenga ad una rigata.

consideriamo la superficie Σ inviluppo del piano mobile

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z = u,$$

cioè la superficie definita dalle coordinate tangenziali (I, pag. 172)

$$X_1, Y_1, Z_1; u.$$

Indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura di Σ, secondo le formole (37), (38) del § 81 (I, pag. 174), avremo

$$\rho_1 + \rho_2 = \Delta_1 u + 2u$$
$$\rho_1 \rho_2 = \Delta_{11} u + u \Delta_1 u + u^2,$$

da cui

$$\Delta_1 u = \rho_1 + \rho_2 - 2u$$
$$\Delta_{11} u = \rho_1 \rho_2 - u(\rho_1 + \rho_2) + u^2;$$

sostituendo nella (W*), questa diventa:

$$(18) \quad -\eta_1 v^4 \rho_1 \rho_2 + (\eta_1 v^4 u + \eta v)(\rho_1 + \rho_2) + (\xi - \eta_1 v^4 u^2 - 2\eta v u) = 0.$$

Ora, per adottare le notazioni stesse usate nelle ricerche di Weingarten, indichiamo per la superficie Σ con p la distanza algebrica del suo piano tangente dall'origine e con $2q$ il quadrato della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto [1]. A causa della formola (I, pag. 173)

$$\Delta_1 u + u^2 = 2q,$$

risulta che p, q sono fra loro indipendenti e possiamo sostituirle ad u, v come nuove variabili, le formole di passaggio dalle antiche alle nuove variabili essendo

$$(19) \qquad u = p, \quad \frac{1}{v^2} = 2q - p^2.$$

Nelle funzioni note di u, v

$$\xi, \eta, \xi_1 = -\frac{\eta}{v^3}, \eta_1$$

intendiamo eseguite le sostituzioni (19), esprimendole per p, q e scri-

---

[1] Le lettere p, q furono adoperate in altro significato (di rotazioni) nei §§ precedenti; ma, non comparendo più in questo significato nel seguito, la nuova convenzione nel testo non può produrre equivoci.

viamo la (18) sotto la forma

$$(20)\quad -\eta_1 v^4 \rho_1 \rho_2 + (\eta_1 v^4 p + \eta v)\ (\rho_1 + \rho_2) + (\xi - \eta_1 v^4 p^2 - 2\,\eta\, v\, p) = 0\,.$$

Ricordiamo ora che ξ, η; ξ_1, η_1 sono legate fra loro dalle equazioni caratteristiche (IV*) (pag. 191)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = -\eta_1 v \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1 v\,, \end{cases}$$

che tradotte nelle nuove variabili p, q, secondo le (19), diventano [1]

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial \xi}{\partial q} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial p} + p\,\dfrac{\partial \xi_1}{\partial q} = \eta_1 v \\ \dfrac{1}{v^3}\dfrac{\partial \eta}{\partial q} + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial p} + p\,\dfrac{\partial \eta_1}{\partial q} = \dfrac{\eta}{v}\,. \end{cases}$$

Avendo riguardo a queste formole ed alla relazione $\eta = -\xi_1 v^3$, si vede che i coefficienti di $\rho_1\rho_2$, $\rho_1 + \rho_2$ ed il termine indipendente nella (20) possono eguagliarsi alle tre derivate seconde di una medesima funzione $\varphi(p, q)$ di p e q. E infatti se si scrivono le tre equazioni

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = \xi - \eta_1 v^4 p^2 - 2\,\eta\, v\, p = \xi - \eta_1 v^4 p^2 + 2\,\xi_1 v^3 p \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = \eta_1 v^4 p + \eta v = \eta_1 v^4 p - \xi_1 v^3 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = -\eta_1 v^4, \end{cases}$$

si trova subito che le due condizioni d'integrabilità per le (22) si riducono appunto alle (21).

---

[1] Si osservi che indicando con θ una qualunque funzione di u, v e considerandola come funzione di p, q, dalle (19) seguono le formole

$$\frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} + v^3 p \frac{\partial \theta}{\partial q}\,,\quad \frac{\partial \theta}{\partial q} = -v^3 \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial p} + p \frac{\partial \theta}{\partial q}\,,\quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\frac{1}{v^3}\frac{\partial \theta}{\partial q}\,.$$

Inversamente, se prendiamo *ad arbitrio* una funzione φ di p, q determinando ξ, η; ξ_1, η_1 dalle (22), cioè assumendo:

$$(22^*)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2p\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + p^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} \quad , \quad \eta = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \dfrac{p}{v}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} \\ \xi_1 = -\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} - \dfrac{p}{v^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} \quad , \quad \eta_1 = -\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}, \end{cases}$$

le (21) risultano identiche.

Mediante le formole (VI) pag. 192 esprimiamo ora le relazioni che intercedono fra la superficie S del dato elemento lineare e la superficie Σ. E, per semplificare le notazioni, in luogo di X_1, Y_1, Z_1 scriviamo X, Y, Z, che indicheranno dunque i coseni di direzione della normale a Σ e con x, y, z indichiamo le coordinate del punto di contatto di Σ col suo piano tangente; in fine denotiamo con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le coordinate del punto corrispondente di S. Nei primi membri della (VI) dovremo dunque sostituire ad x, y, z; $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ e ricordando che, per le formole in coordinate tangenziali, si ha

$$x = u\,\mathrm{X} + \nabla(\mathrm{X}, u)$$

le (VI) ci daranno

$$d\bar{x} = \Big[(\xi - \eta\, v\, p)\,\mathrm{X} + \eta\, v\, x\Big]\,du + \Big[(\xi_1 - \eta_1\, v\, p)\,\mathrm{X} + \eta_1\, v\, x\Big]\,dv$$

colle analoghe per $d\bar{y}$, $d\bar{z}$. Esprimendo poi du, dv per dp, dq per mezzo delle (19), ed avendo riguardo alle formole precedenti, si trova facilmente

$$(\mathrm{VII})\quad \begin{cases} d\bar{x} = x\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + \mathrm{X}\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\right) \\ d\bar{y} = y\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + \mathrm{Y}\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\right) \\ d\bar{z} = z\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + \mathrm{Z}\,d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\right). \end{cases}$$

Di qui, quadrando e sommando, col ricordare che si ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2q, \quad x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} = p, \quad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1,$$

deduciamo per l'elemento lineare di S:

$$\text{(VIII)} \qquad d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = 2q\left(d.\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + 2p\left(d.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) + \left(d.\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2.$$

L'equazione (20) che lega i raggi principali di curvatura della Σ si scrive, per le (22), sotto la forma seguente:

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\cdot\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0.$$

Fissata la funzione $\varphi(p, q)$, questa è evidentemente per le superficie Σ un'equazione del secondo ordine della forma di Ampère.

§. 292.

Altra dimostrazione dei risultati precedenti.

Se applichiamo i teoremi generali § 289 al caso particolare considerato nel § precedente, ne deduciamo le proposizioni seguenti.

Indicando con p la distanza dell'origine dal piano tangente di una superficie Σ, *con* $2q$ *il quadrato della distanza dell'origine dal punto di contatto, si considerino tutte le superficie* Σ *integrali dell'equazione* (IX) *d'Ampère, dove* φ *indica una funzione fissa di* p, q. *Per ogni tale superficie* Σ *i secondi membri delle* (VII) *risultano differenziali esatti, ed interpretando* $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *come coordinate di un punto mobile sopra una superficie* S, *l'elemento lineare della* S *sarà dato dalla* (VIII), *onde queste infinite superficie* S *saranno tutte applicabili l'una sull'altra. Inversamente ogni superficie* S *d'elemento lineare* (VIII) *deriva da una superficie* Σ *integrale della* (IX) *mediante le formole* (VII).

Quanto ai casi d'eccezione alla prima proposizione ora enunciata ed alla sua inversa, essi risultano subito dalla discussione al § 290. Fra le superficie Σ integrali della (IX) ve ne hanno evidentemente di quelle che sono di rotazione attorno ad un asse uscente dall'origine, sicchè per esse q è funzione di p. A queste superficie Σ di rotazione integrali della (IX), ed in generale a tutte quelle in cui q riesce funzione di p, non corrisponde alcuna deformazione della S.

In secondo luogo sfuggiranno, nella proposizione inversa, alla equazione (IX) quelle eventuali deformazioni della S nelle quali le tangenti alle linee $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ = costante riescissero parallele lungo ogni linea p = costante.

Non sarà inutile che stabiliamo direttamente i risultati già sopra ottenuti, dimostrando come essi dipendano dalle speciali proprietà delle variabili p, q. Sia Σ una superficie qualunque, per la quale assumiamo a coordinate curvilinee p, q, supposte indipendenti. Le formole generali della teoria delle superficie (Cap. IV, formole (II), I, pag. 117) danno relazioni della forma

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p} = \mathrm{M}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} + \mathrm{N}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q} = \mathrm{P}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}, \end{cases}$$

che sussistono egualmente per y, Y; z, Z.

Ma poichè si ha

$$\sum x\,\mathrm{X} = p\,, \quad \sum x^2 = 2q\,,$$

ne risulta

$$\sum x\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} = 1\,, \quad \sum x\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} = 0$$

$$\sum x\frac{\partial x}{\partial p} = 0 \qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial q} = 1\,;$$

queste applicate alle (23) danno subito

$$\mathrm{M} = 0\,, \quad \mathrm{P} = 1\,.$$

D'altronde, indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura di Σ, dalle citate formule risulta

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = \mathrm{M} + \mathrm{Q} \\ \rho_1\,\rho_2 = \mathrm{MQ} - \mathrm{N}\,\mathrm{P}\,, \end{cases}$$

e per ciò le (23) assumono qui la forma

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p} = -\rho_1\,\rho_2\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q} = \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} + (\rho_1 + \rho_2)\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\,. \end{cases}$$

Ciò premesso, è facile verificare che, se la Σ soddisfa la (IX), i secondi membri delle (VII)

$$\left(x\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \mathrm{X}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\right)dp + \left(x\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + \mathrm{X}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}\right)dq$$

ecc. saranno differenziali esatti. E infatti si ha per le (24)

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(x\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+\mathrm{X}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(x\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}+\mathrm{X}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}\right)=$$
$$=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1+\rho_2)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\rho_1\rho_2\right],$$

espressione che è nulla per la (IX). Così la prima proposizione è nuovamente dimostrata.

§. 293.

Dimostrazione del teorema inverso.

Per dimostrare la proposizione reciproca facciamo un cangiamento di variabili assumendo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}=u\ ,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial q}=v\ , \tag{25}$$

e ponendo

$$\psi=p\frac{\partial\psi}{\partial p}+q\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi=pu+qv-\varphi \tag{26}$$

si avrà

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial u}\ ,\quad q=\frac{\partial\psi}{\partial v}\ ,$$

e l'elemento lineare (VIII) assumerà la forma

$$d\bar{x}^2+d\bar{y}^2+d\bar{z}^2=du^2+2\frac{\partial\psi}{\partial u}du\,dv+2\frac{\partial\psi}{\partial v}dv^2\ , \tag{VIII*}$$

mentre le formole (VII) diverranno:

$$\text{(VII*)}\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}\ ,\quad y=\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial v}\ ,\quad z=\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial v} \\ \mathrm{X}=\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}\ ,\quad \mathrm{Y}=\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial u}\ ,\quad \mathrm{Z}=\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial u}\ . \end{cases}$$

È utile osservare inversamente che se, x, y, z; X, Y, Z hanno il consueto significato per una superficie Σ, e le coordinate curvilinee u, v sono tali da rendere

$$\mathrm{X}\,du+x\,dv\ ,\quad \mathrm{Y}\,du+y\,dv\ ,\quad \mathrm{Z}\,du+z\,dv$$

tre differenziali esatti

$$d\bar{x}\ ,\quad d\bar{y}\ ,\quad d\bar{z}$$

sussisterà la (VIII*), essendo ψ una conveniente funzione di u, v. E infatti avremo

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = \sum (\mathrm{X}\, du + x\, dv)^2 =$$

$$= du^2 + 2 \sum x\, \mathrm{X}\, du\, dv + \sum x^2 dv^2,$$

mentre è

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum x\, \mathrm{X} = \sum x \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = \sum x \frac{\partial x}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \sum x^2 .$$

Si tratta ora di dimostrare che, essendo S una superficie qualunque d'elemento lineare (VIII*), escluso il caso che $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ siano funzioni di $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, le formole (VII*) definiranno le coordinate x, y, z di un punto mobile sopra una superficie Σ, di cui X, Y, Z saranno i coseni di direzione della normale, e questa superficie Σ sarà un integrale della (IX). Intanto le formole

$$\sum \mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial u} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u dv} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\sum \mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

dimostrano subito la prima cosa. Di più dalle (VII*) risulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \frac{\partial \psi}{\partial v} = 2q \\ x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} = \frac{\partial \psi}{\partial u} = p \ , \end{cases}$$

onde $p, 2q$ hanno per la nostra superficie Σ il significato stabilito.

Calcoliamo i valori effettivi dei simboli di Christoffel per la forma (VIII*) colle formole del T. I, pag. 92; troviamo

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}}{2q - p^2} , & \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}}{2q - p^2} , & \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}}{2q - p^2} \\ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}}{2q - p^2} , & \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}}{2q - p^2} , & \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}}{2q - p^2} . \end{cases}$$

Ora costruiamo l'equazione del secondo grado che dà i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 di Σ, osservando che spostandosi lungo una linea di curvatura di Σ si ha

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv = \rho\left(\frac{\partial X}{\partial u}\,du + \frac{\partial X}{\partial v}\,dv\right),$$

cioè

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}\,du + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2}\,dv = \rho\left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}\,dv\right)$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$. Sostituendo per le derivate seconde di $\bar{x}$ i valori dati dalle formole fondamentali (I, pag. 116), queste si risolvono nelle due

$$(27)\qquad \begin{cases} D'\,du + D''\,dv = \rho\,(D\,du + D'\,dv) \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}\,du + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\,dv = \rho\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\,du + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}\,dv\right). \end{cases}$$

Eliminando il rapporto $\frac{du}{dv}$, si ha per ρ l'equazione di secondo grado

$$(27^*)\qquad \left(D\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - D'\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right)\rho^2 - \left(D\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - D''\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right)\rho + D'\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - D''\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0,$$

ove dobbiamo osservare che il coefficiente di ρ^2 sarebbe nullo nel solo caso escluso che X, Y, Z fossero funzioni di $\frac{\partial \psi}{\partial u}$. Dalla (27*) segue

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{D'\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - D''\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}}{D\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - D'\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}}$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{D\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - D''\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}}{D\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - D'\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}},$$

e quindi

$$(28)\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\cdot \rho_1 \rho_2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0.$$

In fine, se si osserva che le formole (25), (26) costituiscono la ben

nota trasformazione di Legendre, in forza della quale si ha:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = \frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} = \frac{-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = \frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)^2},$$

la (28) si cangia appunto nella (IX), ciò che dimostra la nostra proposizione.

Un'altra conseguenza notevole deduciamo dalle (27) eliminando ρ, ciò che dà per l'equazione differenziale delle linee di curvatura della superficie Σ l'equazione:

$$\left(D'\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - D\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)du^2 + \left(D''\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - D\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)du\,dv + \tag{29}$$
$$+\left(D''\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} - D'\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)dv^2 = 0\ .$$

Ora poichè si ha identicamente:

$$D''\left(D'\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - D\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right) - D'\left(D''\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - D\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) +$$
$$+ D\left(D''\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}D - D'\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) = 0\ .$$

e questa, secondo un'osservazione fatta in nota al § 262 (pag. 116), esprime che le linee integrali della (29) tracciano sulla superficie S un sistema coniugato, abbiamo il teorema:

Sulle superficie applicabili S *che il metodo di Weingarten fa derivare, per quadrature, dalle superficie* Σ *integrali di un'equazione* (IX), *alle linee di curvatura delle* Σ *corrisponde ogni volta un sistema coniugato.*

Capitolo XX

Applicazioni del nuovo metodo di Weingarten

Relazione del nuovo metodo di Weingarten colla teoria dei sistemi ciclici. — Classi note di superficie applicabili dedotte col metodo di Weingarten. — Le nuove classi d'elemento lineare: $ds^2 = du^2 + 2(u-v)\,dv^2$, $ds^2 = du^2 + (2u + 2v \pm e^{2v})\,dv^2$. — Applicazione del metodo di Weingarten alla deformata delle superficie di rotazione. — Caso particolare delle superficie a curvatura costante. — Superficie nelle quali la curvatura totale e media sono legate da una relazione lineare. — Sistemi ciclici particolari ortogonali ad esse ed elemento lineare tipico della superficie inviluppo dei piani dei circoli. — Caso particolare che conduce all'inversione dei teoremi di Guichard sulle quadriche di rotazione. — Trasformazioni che ne conseguono per le superficie a curvatura costante. — Applicazioni del metodo di Weingarten alla geometria ellittica ed iperbolica.

§. 294.

Relazione colla teoria dei sistemi ciclici.

Per ridurre la ricerca delle superficie S di un dato elemento lineare alla integrazione della (IX) pag. 198:

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\rho_1\rho_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1+\rho_1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0$$

occorre prima aver posto l'elemento lineare dato sotto la forma (VIII) o l'equivalente (VIII*):

$$\text{(VIII*)} \qquad ds^2 = du^2 + 2\,d\psi\,dv\ ,$$

dove ψ è una funzione qualunque di u, v. Ora se si pone

$$u = \xi \quad , \quad v = \eta - \zeta \quad , \quad 2\psi = \eta + \zeta\ ,$$

ne risulta

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2\ .$$

Ed inversamente, posto il ds^2 sotto questa forma, le sostituzioni

$$\xi = u \quad , \quad \eta = \psi + \frac{v}{2} \quad , \quad \zeta = \psi - \frac{v}{2}$$

lo riconducono alla forma (VIII*). Ora abbiamo visto, al § 271, che la riduzione del dato ds^2 alla forma

$$d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2$$

equivale alla ricerca dei sistemi ∞^1 normali di circoli giacenti nei piani tangenti della superficie S. Ogni particolare soluzione di questo problema permette di ricondurre la ricerca delle superficie applicabili alla integrazione di una particolare equazione della forma (IX). Vediamo adunque che la forma (IX) della equazione dell'applicabilità è in fondo altrettanto generale quanto quella della equazione (Ẇ) pag. 189.

Ed anzi possiamo porre la (IX) sotto infinite diverse forme, per le quali i corrispondenti problemi di integrazione della (IX) sono tutti fra loro equivalenti.

Dalle considerazioni precedenti già si vede come il nuovo metodo di Weingarten si collega alla teoria dei sistemi ciclici; má ora vogliamo meglio approfondire queste relazioni, cominciando dal dimostrare come:

Dato un sistema ∞^2 normale di circoli, e nota una superficie ortogonale, si può ridurre con quadrature il ds^2 della superficie inviluppo dei piani dei circoli alla forma (VIII*).

Per questo applicheremo le formole generali stabilite al §. 273*, che determinano i sistemi ∞^2 normali di circoli ortogonali ad una data superficie S, ed in primo luogo cercheremo la superficie inviluppo dei piani dei circoli.

Riferita dunque la superficie S ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee, prenderemo una soluzione Φ dell'equazione

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0$$

e, con una quadratura, dalle formole

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{F D' - G D}{EG - F^2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{F D - E D'}{EG - F^2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \dfrac{F D'' - G D'}{EG - F^2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{F D' - E D''}{EG - F^2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \end{cases}$$

calcoleremo la corrispondente funzione W. I piani del corrispondente sistema ciclico sono i piani normali alle linee $\Phi =$ costante sulla S, e noi dobbiamo determinare le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ del punto ove uno di questi piani π tocca la corrispondente superficie inviluppo. Per questo osserviamo che la normale ad un tale piano π, ossia la tangente alla linea

$\Phi =$ costante sopra S, ha i coseni di direzione $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ dati dalle formole

$$\overline{X} = \rho \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right), \quad \overline{Y} = \rho \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)$$

$$\overline{Z} = \rho \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right),$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità. Ne segue che la tangente alla S giacente su π ha i coseni di direzione proporzionali alle tre espressioni

$$\nabla (x, \Phi) \quad , \quad \nabla (y, \Phi) \quad , \quad \nabla (z, \Phi)$$

ed in conseguenza si potrà porre

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{x} = x + \mathrm{P} \nabla (x, \Phi) + \mathrm{Q}\, \mathrm{X} \\ \overline{y} = y + \mathrm{P} \nabla (y, \Phi) + \mathrm{Q}\, \mathrm{Y} \\ \overline{z} = z + \mathrm{P} \nabla (z, \Phi) + \mathrm{Q}\, \mathrm{Z} , \end{cases}$$

dove P, Q sono convenienti funzioni di u, v, da determinarsi dalle due condizioni

$$(2) \qquad \sum \overline{X} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0 , \quad \sum \overline{X} \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0 .$$

Ora dalle due identità

$$\sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

$$\sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} ,$$

derivando, col tener conto delle formole fondamentali (I) (I, pag. 116) della teoria delle superficie, si ottengono subito le altre:

$$\begin{cases} \sum \frac{\partial \nabla (x, \Phi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \Phi_{11} , \quad \sum \frac{\partial \nabla (x, \Phi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \Phi_{22} \\ \sum \frac{\partial \nabla (x, \Phi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \Phi_{12} , \quad \sum \frac{\partial \nabla (x, \Phi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \Phi_{12} . \end{cases}$$

Dopo ciò, calcolando le (2), troviamo per determinare P, Q le due

equazioni lineari

$$(P\,\Phi_{11} - Q\,D + E)\frac{\partial\Phi}{\partial v} - (P\,\Phi_{12} - Q\,D' + F)\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0$$

$$(P\,\Phi_{12} - Q\,D' + F)\frac{\partial\Phi}{\partial v} - (P\,\Phi_{22} - Q\,D'' + G)\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0\ .$$

Ma, soddisfacendo Φ alla (a), esistono due determinati moltiplicatori λ, μ tali che si ha

$$\Phi_{11} = \lambda E + \mu D \quad , \quad \Phi_{12} = \lambda F + \mu D' \qquad (3)$$
$$\Phi_{22} = \lambda G + \mu D''$$

e queste, confrontate colle precedenti, dimostrano che i valori cercati di P, Q sono

$$P = -\frac{1}{\lambda} \ , \ Q = -\frac{\mu}{\lambda}\ . \qquad (4)$$

Dunque: *La superficie* $\bar{S}$ *inviluppo dei piani dei circoli è determinata dalle formole* (1), *dove* P, Q *hanno i valori* (4), *indicando con* λ, μ *i moltiplicatori che figurano nelle* (3).

§. 295.

Calcoli relativi alla superficie inviluppo.

Per condurre con maggiore semplicità e simmetria i calcoli seguenti conviene adottare di nuovo, per un momento, la notazione dei doppi indici, e così indicare con

$$a_{11}\,du_1^2 + 2\,a_{12}\,du_1\,du_2 + a_{22}\,du_2^2$$
$$b_{11}\,du_1^2 + 2\,b_{12}\,du_1\,du_2 + b_{22}\,du_2^2$$

le due forme quadratiche fondamentali di S; conseguentemente le formole (b) si scrivono sotto la forma

$$\frac{\partial W}{\partial u_r} = -\sum_{i,k}{}' A_{ik}\,b_{ir}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\ . \qquad (b^*)$$ [1]

---

[1] L'accento sulla somma Σ indica che la sommazione è eseguita rapporto ad indici variabili da 1 a 2. Colla somma Σ senza accento indichiamo una sommatoria di tre termini rispetto a x, y, z o X, Y, Z.

Ora avendosi

$$\nabla(x, \Phi) = \sum_{i,k}^{\nu} A_{ik} \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$$

e quindi

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u_i} \nabla(x, \Phi) = -\sum_{i,k}^{\nu} A_{ik} b_{il} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = \frac{\partial W}{\partial u_l},$$

ne risulta

$$\sum \nabla(x,\Phi)\, dX = dW .$$

Siccome poi

$$\sum X \nabla(x, \Phi) = 0$$

ne segue

$$\sum X\, d\nabla(x, \Phi) = -dW;$$

Abbiamo inoltre le formole

$$\sum \nabla(x, \Phi)\, dx = d\Phi$$

$$\sum \nabla(x, \Phi)\, d\nabla(x,\Phi) = \frac{1}{2}\, d\Delta_1 \Phi ,$$

la quale ultima deriva dall'identità

$$\sum [\nabla(x, \Phi)]^2 = \Delta_1 \Phi .$$

Ora dalle (1) formando i differenziali $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$, abbiamo

$$d\bar{x} - \nabla(x, \Phi)\, dP = dx + P\, d\nabla(x, \Phi) + Q\, dX + X\, dQ$$

e quindi, a causa delle precedenti

$$(\alpha) \qquad \sum X [d\bar{x} - \nabla(x, \Phi)\, dP] = dQ - P\, dW$$

$$\sum \nabla(x, \Phi) [d\bar{x} - \nabla(x, \Phi)\, dP] = d\Phi + P\, \frac{1}{2}\, d\Delta_1 \Phi + Q\, dW .$$

Constatiamo che nella seconda formola il secondo membro è nullo, che si ha cioè

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_l} + P\, \frac{1}{2}\, \frac{\partial \Delta_1 \Phi}{du_l} + Q\, \frac{\partial W}{\partial u_l} = 0 \,(l = 1, 2) .$$

E infatti dalla espressione di $\Delta_1 \Phi$

$$\Delta_1 \Phi = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} ;$$

derivando rapporto ad u_i e ricordando l'identità (I, pag. 349 (a^*))

$$\frac{\partial A_{rs}}{\partial u_i} = -\sum_t^{\nu} A_{rt} \begin{Bmatrix} lt \\ k \end{Bmatrix} - \sum_t^{\nu} A_{kt} \begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix},$$

si trae facilmente

$$(4^*) \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u_i} = \sum_{r,s}^{\nu} A_{rs} \Phi_{rl} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}.$$

Ma per le (3) è

$$\Phi_{rl} = \lambda a_{rl} + \mu b_{rl},$$

e quindi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + Q \frac{\partial W}{\partial u_i} + P \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u_i} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + Q \frac{\partial W}{\partial u_i} + P \sum_{r,s}^{\nu} (\lambda a_{rl} + \mu b_{rl}) A_{rs} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + Q \frac{\partial W}{\partial u_i} + P \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - P \mu \frac{\partial W}{\partial u_i},$$

la quale ultima espressione, a causa dei valori (4) di P, Q, si annulla. Abbiamo dunque

$$(\beta) \qquad \sum \nabla (x, \Phi) \left[d\bar{x} - \nabla (x, \Phi)\, d\,P \right] = 0.$$

Se alle (α), (β) associamo l'altra evidente

$$(\gamma) \qquad \sum \bar{X} \left(d\bar{x} - \Delta (x, \Phi)\, d\,P \right) = 0,$$

notando che

$$\begin{matrix} X, & Y, & Z \\ \bar{X}, & \bar{Y}, & \bar{Z} \end{matrix}$$

$$\frac{\nabla (x, \Phi)}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}}, \quad \frac{\nabla (y, \Phi)}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}}, \quad \frac{\nabla (z, \Phi)}{\sqrt{\Delta_1 \Phi}}$$

sono i nove coseni di direzione di una terna ortogonale, ne deduciamo per le formole richieste

$$(5) \qquad \begin{cases} d\bar{x} = X (d\,Q - P\,d\,W) + \nabla (x, \Phi)\, d\,P \\ d\bar{y} = Y (d\,Q - P\,d\,W) + \nabla (y, \Phi)\, d\,P \\ d\bar{z} = Z (d\,Q - P\,d\,W) + \nabla (z, \Phi)\, d\,P. \end{cases}$$

§. 296.

Interpretazione del metodo di Weingarten.

Alle formole testè ottenute possiamo dare una nuova forma introducendo la superficie Σ inviluppo del piano di coordinate (X, Y, Z, W), superficie che ha a comune colla primitiva S l'immagine sferica delle linee di curvatura. Indicando con ξ, η, ζ le coordinate del punto di contatto del detto piano con Σ, le formole in coordinate tangenziali ci danno

$$\xi = W X + \nabla' (X, W) ,$$

il parametro ∇' essendo calcolato rispetto all'elemento lineare sferico.

Ora si ha [1]

$$\nabla' (X, W) = \nabla (x, \Phi) , \quad \nabla' (Y, W) = \nabla (y, \Phi), \quad \nabla' (Z, W) = \nabla (z, \Phi)$$

e quindi le formole che definiscono la superficie Σ possono scriversi

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = W X + \nabla (x, \Phi) \\ \eta = W Y + \nabla (y, \Phi) \\ \zeta = W Z + \nabla (z, \Phi) . \end{cases}$$

Dopo di ciò le (5) diventano

$$(5^*) \qquad \begin{cases} d\bar{x} = X\, d (Q - P W) + \xi . dP \\ d\bar{y} = Y\, d (Q - P W) + \eta . dP \\ d\bar{z} = Z\, d (Q - P W) + \zeta . dP , \end{cases}$$

le quali, se si pone

$$(7) \qquad Q - P W = u , \quad P = v ,$$

assumono la forma caratteristica

$$(8) \qquad d\bar{x} = X\, du + \xi\, dv , \quad d\bar{y} = Y\, du + \eta\, dv , \quad d\bar{z} = Z\, du + \zeta\, dv$$

del § 293 e dimostrano che la superficie $\bar{S}$, inviluppo dei piani dei circoli

---

[1] Queste identità si verificano subito riferendosi alle linee di curvatura.

del sistema ciclico, è dedotta dalla superficie Σ precisamente colla trasformazione di Weingarten. L'elemento lineare $d\bar{s}$ della $\bar{S}$ assumerà quindi per le coordinate u, v la forma caratteristica (VIII*) § 293

$$d\bar{s}^2 = du^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du\,dv + 2\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv^2,$$

dove ci rimane solo da calcolare la funzione ψ. Colle consuete notazioni di Weingarten si ha

$$(8^*) \qquad p = \sum \xi X = W, \quad 2q = \sum \xi^2 = W^2 + \Delta_1 \Phi,$$

indi (pag. 200)

$$d\psi = p\,du + q\,dv = W\,d(Q - P\,W) + \frac{1}{2}(W^2 + \Delta_1\Phi)\,dP.$$

Questa, avendo riguardo alla identità dimostrata al § precedente

$$d\Phi + P\frac{1}{2}\,d\Delta_1\Phi + Q\,d\,W = 0,$$

può scriversi

$$d(\psi - \Phi) = d(Q\,W) + \frac{1}{2}\,d(P\,\Delta_1\Phi) - \frac{1}{2}\,d(P\,W^2),$$

ossia

$$d(\psi - \Phi) = d.\left\{W(Q - P\,W) + P\frac{1}{2}(\Delta_1\Phi + W^2)\right\},$$

e dimostra quindi che si può porre

$$(9) \qquad \psi = W(Q - P\,W) + P\frac{1}{2}(\Delta_1\Phi + W^2) + \Phi.$$

Calcoliamo infine la funzione $\varphi(p, q)$ dalla quale dipende l'equazione d'Ampère

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}r_1 r_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0,$$

cui soddisfa la superficie Σ.

Abbiamo per la (26) del § 293 (pag. 200)

$$\varphi = pu + qv - \psi = W(Q - P\,W) + P\frac{1}{2}(\Delta_1\Phi + W^2) - \psi,$$

ossia per la (9) semplicemente

$$\varphi = -\Phi \,. \tag{10}$$

Possiamo riassumere i risultati ottenuti colla proposizione seguente: *Nota una superficie* S *ortogonale ad un sistema* ∞^2 *normale di circoli tracciati nei piani tangenti di una data superficie* $\overline{\mathrm{S}}$, *si calcolino le corrispondenti funzioni* Φ, W *relative al sistema ciclico, e colle sostituzioni* (7) *si avrà l'elemento lineare della* $\overline{\mathrm{S}}$ *ridotto alla forma caratteristica*

$$d\overline{s}^2 = du^2 + 2\,\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du\,dv + 2\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv^2,$$

che permette l'applicazione del metodo di Weingarten. La superficie Σ *che questo metodo associa alla* $\overline{\mathrm{S}}$ *non è altro che l'inviluppo del piano* (X, Y, Z, W); *essa ha a comune colla* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura. In fine nell'equazione d'Ampère*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\,\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}\,(\rho_1+\rho_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0\,,$$

in cui viene trasformato il problema dell'applicabilità, la funzione $\varphi\,(p, q)$ *non è altro che la primitiva* Φ *espressa per* p, q *mediante le* (8*).

§. 297.

Prime applicazioni del metodo di Weingarten.

Veniamo ora a considerare alcuni casi particolari della equazione (IX) dell'applicabilità:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\,\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}\,(\rho_1+\rho_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0$$

nei quali riesce l'integrazione completa. Ed in primo luogo consideriamo quelle particolari superficie Σ, nelle quali $\rho_1+\rho_2$ è funzione di p soltanto. Il corrispondente valore della funzione $\varphi\,(p, q)$ si può scrivere, per comodità dei calcoli seguenti:

$$\varphi = p\,q - \frac{p^3}{3} - \psi\,(p)\,,$$

essendo $\psi\,(p)$ una funzione arbitraria di p. L'equazione (IX) per le attuali superficie Σ diventa

$$\rho_1+\rho_2 = 2\,p + \psi''\,(p)\,, \tag{X}$$

ovvero in coordinate tangenziali

$$\Delta_2 p = \psi''(p). \tag{X*}$$

L'elemento lineare delle superficie $\overline{\Sigma}$ che se ne deducono per quadrature colle formole (VII) pag. 197, avendosi qui

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial p} = q - p^2 - \psi'(p)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial q} = p,$$

assume la forma:

$$\overline{ds^2} = du^2 + 2\,v\,du\,dv + [2\,u + 2\,v^2 + 2\,\psi']\,dv^2. \tag{11}$$

Ponendo

$$u + \frac{v^2}{2} = u_1,$$

si ha la forma semplice

$$\overline{ds^2} = du_1^2 + 2\,[u_1 + \psi'(v)]\,dv^2. \tag{11*}$$

Un primo e più semplice caso in cui si integra completamente la (X*) è quello ove si ha

$$\psi''(p) = \text{costante};$$

le corrispondenti superficie Σ hanno per evoluta media una sfera e in particolare un punto se $\psi''(p) = 0$ (I, pag. 280).

In quest'ultimo caso l'elemento lineare (11*) diventa

$$ds^2 = du_1^2 + 2\,u_1\,dv^2$$

ed appartiene alle evolute delle superficie d'area minima. Quando $\psi''(p)$ è costante non nulla, si può fare $\psi'(v) = v$ e la (11*), ponendo

$$2\,(u_1 + v) = \operatorname{senh}^2\omega,\ v = v_1 + \log\cosh\omega,$$

diventa

$$ds^2 = \operatorname{senh}^4\omega\,d\omega^2 + \cosh^2\omega\,dv^2$$

ed appartiene alla complementare del paraboloide di rotazione (§ 246 pag. 68). Così questi casi di integrabilità della (X*) ci conducono a classi complete di superficie applicabili già note.

§. 298.

Nuove classi complete di superficie applicabili.

La equazione fondamentale, nei casi considerati nel § precedente, possiede due integrali intermediarî del 1.° ordine; Weingarten ha dimostrato più in generale che se l'equazione (W) possiede due tali integrali intermediarî, il ds^2 è riducibile alla forma [1]

$$ds^2 = (\alpha + \beta r^2)\, dr^2 + r^2\, d\beta^2 ;$$

tutte le superficie di questo elemento lineare ci sono già note dalle ricerche del Cap. XVI (§§ 245, 246).

Passiamo ora a considerare altre speciali forme della funzione $\psi''(p)$ nella (X), per le quali riesce ancora l'integrazione completa. Troveremo così nuove classi complete di superficie applicabili, determinate da Weingarten.

Il primo e più semplice caso è quello che corrisponde alle superficie d'area minima, ove $\psi''(p) = -2p$, cioè $\psi'(v) = -v^2$. Allora la (11*) diventa

$$ds^2 = du_1^2 + 2\,[u_1 - v^2]\, dv^2 ; \tag{12}$$

tutte le superficie di questo elemento lineare si deducono dunque per quadrature dalle superficie d'area minima. Questo risultato, ottenuto da Weingarten nel 1887 [1], è stato il punto di partenza delle sue ricerche ulteriori che lo hanno condotto al nuovo metodo sviluppato nel precedente Capitolo.

Weingarten ha considerato (*Comptes Rendus*, avril 1891) un altro caso molto notevole in cui la (X*) si integra completamente, riducendosi alla nota equazione di Liouville [2]

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \pm e^{2\theta} . \tag{13}$$

---

[1] M. c. § V.

[2] *Göttinger Nachrichten*, 9 Febr. 1887.

[3] L'integrazione dell'equazione di Liouville (13) si può presentare sotto forma geometrica, osservando che, se θ vi soddisfa, la forma differenziale quadratica

$$e^{2\theta}\,(du^2 + dv^2)$$

possiede la curvatura $K = \mp 1$. L'integrazione della (13) equivale dunque alla ricerca dei sistemi ortogonali isotermi sulla sfera o sulla pseudosfera, sistemi che sono tutti noti.

Per ritrovarlo osserviamo che le coordinate di un punto mobile sulla sfera rappresentativa, riferita ai meridiani e paralleli, possono scriversi

$$X = \frac{\cos v}{\cosh u}, \quad Y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u}, \quad Z = \tanh u,$$

onde

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{1}{\cosh^2 u}(du^2 + dv^2).$$

La (13) si può scrivere

$$\cosh^2 u\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}\right) = \pm e^{2(\theta + \log \cosh u)},$$

ovvero

$$\Delta_2 \theta = \pm e^{2(\theta + \log \cosh u)},$$

il parametro Δ_2 essendo calcolato rispetto all'elemento lineare sferico. Ponendo

$$p = \theta + \log \cosh u,$$

la precedente diventa

$$\Delta_2 p = 1 \pm e^{2p}, \tag{14}$$

onde si conclude che questa equazione (14) si può integrare completamente. Ora essa corrisponde alla forma

$$\psi''(p) = 1 \pm e^{2p}$$

della funzione ψ'' nella (X*), ossia a

$$\psi' = v \pm \frac{1}{2} e^{2v},$$

La formola (11*) diventa ora

$$ds^2 = du^2 + \left[2u + 2v \pm e^{2v}\right] dv^2 \tag{15}$$

e definisce una classe di superficie applicabili, che è adunque completamente nota.

Darboux ha osservato che le forme (12) e (15) del ds^2 appartengono a paraboloidi immaginarî una cui generatrice tocca il circolo immaginario all'infinito. Per dimostrarlo osserviamo che nel 1.° caso $\psi'(v) = -v^2$ la (11) si scrive

$$ds^2 = du^2 + 2\,dv\,(u\,dv + v\,du),$$

e quindi se si pone

$$x = u \quad y + i\,z = 2v, \quad y - i\,z = uv,$$

si ha una superficie dell'assegnato elemento lineare che è il paraboloide immaginario

$$(y + i\,s)\,x = 2\,(y - i\,s)\,. \tag{16}$$

Analogamente, scrivendo la (15) sotto la forma

$$ds^2 = (du + dv)^2 + e^v\,dv\left\{(2\,u + 2\,v \pm e^{2v} - 1)\,e^{-v}\,dv - 2\,e^{-v}\,du\right\},$$

si vede che avremo una superficie di questo elemento lineare ponendo

$$x = u + v\,,\quad y + i\,s = e^v\,,\quad y - i\,s = \pm\,e^v - e^{-v}\,(2\,u + 2\,v + 1)\,,$$

ciò che dà il paraboloide

$$(y + i\,s)\,(y - i\,s) = \pm\,(y + i\,s)^2 - (2\,x + 1)\,. \tag{17}$$

Nell'uno e nell'altro paraboloide la generatrice $y + i\,s = 0$ sul piano all'infinito tocca il circolo immaginario (nel punto $x : y : s = 0 : 1 : i$), colla differenza che nel primo caso il punto di contatto coincide, nel secondo è distinto dal punto di contatto del paraboloide col piano all'infinito (punto d'intersezione delle due generatrici). Possiamo dunque dire con Darboux che queste nuove ricerche di Weingarten ci hanno fatto conoscere la classe completa delle superficie applicabili sui detti paraboloidi.

Da ultimo accenniamo ad altre classi complete di superficie applicabili segnalate da Baroni e Goursat, [1] che si ottengono col metodo di Weingarten. Se nella (X*) supponiamo

$$\psi''(p) = h\,p \quad (h \text{ costante})\,,$$

le superficie Σ corrispondenti

$$\rho_1 + \rho_2 = (h+2)\,p$$

sono quelle, già ricordate in nota al § 128 (I, pag. 280), caratterizzate dalla proprietà di essere simili alle loro evolute medie. Tutte le volte che la costante h ha la forma

$$h = m\,(1 - m)\,,$$

---

[1] *Giornale di matematiche*, 1890, t. 28 e *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 1891 t. V.

essendo m intero, l'equazione corrispondente

$$\Delta_2 p = m\,(1-m)\,p$$

si può integrare completamente e si trovano così altrettante classi complete di superficie applicabili.

§. 299.

Applicazione del metodo di Weingarten alle deformate delle superficie di rotazione.

Cogli esempî addotti nei due §§. precedenti sono esauriti i casi nei quali si sa integrare completamente l'equazione (W) dell'applicabilità. Ma, anche quando l'integrazione completa della (W) non riesca, può sempre tornar utile la conseguita trasformazione del problema dell'applicabilità per la ricerca di nuove proprietà geometriche, il che appunto cercheremo di provare colle ricerche seguenti. Cominciamo dal caso particolare in cui si applichi il metodo di Weingarten alle deformate di una superficie qualunque di rotazione nel modo che andiamo ad indicare.

Nella equazione fondamentale (IX) (pag. 204) prendasi per φ una funzione arbitraria dell'argomento $\tau = 2q - p^2$, sia

$$\varphi = f(\tau)\ , \quad \tau = 2\,q - p^2\ ,$$

Se si pone

$$\psi(\tau) = 2\,f'(\tau)\ ,$$

la formola (VIII) (pag. 198) pel ds^2 diventa

$$ds^2 = \tau\,d\psi^2 + \psi^2\,dp^2\ . \tag{18}$$

Questa appartiene evidentemente ad una superficie di rotazione che può prendersi ad arbitrio, a causa dell'arbitrarietà della funzione $\psi(\tau)$. L'equazione d'Ampère (IX) per le corrispondenti superficie Σ diventa

$$\rho_1\rho_2 - p\,(\rho_1+\rho_2) + p^2 - \frac{\psi(\tau)}{2\,\psi'(\tau)} = 0\ , \tag{19}$$

che si può scrivere sotto la forma

$$(\rho_1 - p)\,(\rho_2 - p) = \mathrm{F}(2q - p^2)\ . \tag{19*}$$

La ricerca delle deformate di una superficie di rotazione equivale adunque a quella delle superficie Σ integrali dell'equazione d'Ampère (19*).

Ora il primo membro della (19*) ha il semplice significato geometrico seguente: se indichiamo con M_1, M_2 i due centri principali di curvatura sopra una normale qualunque di Σ e con P il piede della perpendicolare abbassata sulla normale dall'origine 0, si ha

$$(\rho_1 - p)\,(\rho_2 - p) = \overline{PM_1}\,.\,\overline{PM_2}\,.$$

E poichè $\overline{OP} = \sqrt{2q - p^2}$, possiamo dire: *La ricerca di tutte le superficie applicabili sopra superficie di rotazione equivale alla ricerca di quelle superficie Σ, per le quali la distanza di ogni normale dall'origine è funzione del prodotto dei segmenti che, sulla normale stessa, intercedono fra la proiezione dell'origine e i due centri principali di curvatura.*

Studiamo ora più da vicino la relazione fra le superficie Σ integrali della (19*) e le superficie S, applicabili sopra superficie di rotazione, da cui derivano. Se applichiamo le formole (VII) pag. 197, osservando che qui si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \psi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = -p\,.\,\psi\,,$$

avremo

$$d\bar{x} = x\,d\psi - \mathrm{X}\,d(p\psi)$$

colle analoghe per $d\bar{y}$, $d\bar{z}$. Ponendo l'elemento lineare della (18) sotto l'ordinaria forma

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2 \tag{20}$$

col porre

$$u = \int \sqrt{\tau}\,d\psi\,, \quad \psi = r\,, \; p = -v\,,$$

le precedenti diventano

$$d\bar{x} = x\,dr + \mathrm{X}\,d(vr)$$

e danno quindi le formole richieste

$$(21)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} - \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v}\,, \; y = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial u} - \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial v}\,, \; z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial u} - \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial v} \\ \mathrm{X} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v}\,, \quad \mathrm{Y} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial v}\,. \quad \mathrm{Z} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial v}\,, \end{cases}$$

le quali ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ indicando le coordinate di un punto mobile sopra una qualunque superficie S d'elemento lineare (20)) definiscono la superficie Σ corrispondente integrale della (19*), dando le coordinate x, y, z di un suo

punto mobile e i coseni di direzione X, Y, Z della sua normale. Le (21) ci dimostrano 1.° che la normale alla Σ è parallela alla tangente nel punto corrispondente della S alla deformata del parallelo $u =$ costante, 2.° che la perpendicolare calata dall'origine alla normale di Σ ha la direzione della tangente alla deformata del meridiano di S e la sua lunghezza è costante lungo ogni linea u.

§. 300.

La superficie Σ in relazione colla complementare di S.

Le osservazioni ora fatte ci conducono a ricercare direttamente la relazione fra la superficie Σ e la superficie S′ complementare della S rispetto alle linee v. Ogni normale di Σ è parallela alla corrispondente normale di S′; la perpendicolare calata dall'origine sulla normale di Σ ha la direzione della tangente alla deformata del meridiano sopra S′ e la sua lunghezza è invariabile lungo ogni parallelo.

Indicando nuovamente con S la complementare della primitiva e con

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2\,, \tag{20}$$

il suo elemento lineare, denotiamo poi con x_0, y_0, z_0 le coordinate del piede della perpendicolare abbassata dall'origine sulla perpendicolare di Σ ed avremo per le osservazioni precedenti

$$x_0 = \mathrm{U}\frac{\partial x}{\partial u}\,, \quad y_0 = \mathrm{U}\frac{\partial y}{\partial u}\,, \quad z_0 = \mathrm{U}\frac{\partial z}{\partial u}\,,$$

essendo U una funzione della sola u. Ora tirando pel punto $(x_0\,y_0\,z_0)$ la parallela alla normale (X, Y, Z) di S, questi raggi debbono costituire nuovamente una congruenza normale, per la qual cosa ponendo

$$\mathrm{A} = \sum \mathrm{X}\frac{\partial x_0}{\partial u}\,, \qquad \mathrm{B} = \sum \mathrm{X}\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

è necessario e sufficiente (I, pag. 310) che si abbia

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} \tag{α}$$

I valori dei simboli di Christoffel per l'elemento lineare (20) essendo

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = 0\ , \quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0\ , \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -rr'$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0\ , \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{r'}{r}\ , \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 0\ ,$$

si trova subito

$$A = U\,D \quad , \quad B = U\,D'$$

e quindi la (α), a causa della equazione di Codazzi:

(β) $$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{r'}{r}\,D' = 0\ ,$$

si cangia in

$$\left(U\frac{r'}{r} - U'\right) D' = 0\ .\ .$$

Dunque si ha necessariamente

$$\frac{U'}{U} = \frac{r'}{r}$$

e per ciò U deve essere proporzionale al raggio r del parallelo. Possiamo senz'altro prendere $U = r$, sostituendo alla Σ una superficie omotetica rispetto all'origine. Ponendo allora

(22) $$\tau = \int r\,(D\,du + D'\,dv)\ ^{(1)}\ ,$$

le coordinate ξ, η, ζ del punto corrispondente di una superficie Σ saranno (I, pag. 310)

(23) $$\xi = r\frac{\partial x}{\partial u} - \tau\,X\ , \quad \eta = r\frac{\partial y}{\partial u} - \tau\,Y\ , \quad \zeta = r\frac{\partial z}{\partial u} - \tau\,Z\ ,$$

ovvero, riprendendo le notazioni generali del §. 254:

(23*) $$\xi = r\,X_1 - \tau\,X_2\ , \quad \eta = r\,Y_1 - \tau\,Y_2\ , \quad \zeta = r\,Z_1 - \tau\,Z_2\ .$$

Di qui derivando, coll'aver riguardo alle formole del citato §. (pag. 91) ed alla (22), troviamo

(24) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = (r' + \tau D)\,X_1 + \dfrac{\tau D'}{r}\,X_2 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \tau D'\,X_1 + \left(r r' + \dfrac{\tau D''}{r}\right) X_2\ , \end{cases}$$

---

(1) A causa della equazione (β) di Codazzi l'espressione sotto il segno $\int$ è appunto un differenziale esatto.

dalle quali risulta confermato che X_3, Y_3, Z_3 sono altresì i coseni di direzione della normale a Σ.

Poichè inoltre sussistono le formole (ibid.)

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = -D X_1 - \dfrac{D'}{r} X_2 \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -D' X_1 - \dfrac{D''}{r} X_2 , \end{cases}$$

se consideriamo una linea L di curvatura della Σ e con ρ indichiamo il corrispondente raggio principale di curvatura, dovremo avere spostandoci lungo L

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} du + \frac{\partial \xi}{\partial v} dv = \rho \left(\frac{\partial X_3}{\partial u} du + \frac{\partial X_3}{\partial v} dv \right)$$

colle analoghe per η, ζ. A causa delle (24), (25) queste si riducono alle due

$$(26)\qquad \begin{cases} (r' + \tau D)\, du + \tau D'\, dv + \rho\,(D\, du + D'\, dv) = 0 \\ \tau D'\, du + (r^2 r' + \tau D'')\, dv + \rho (D'\, du + D''\, dv) = 0 , \end{cases}$$

dalle quali eliminando il rapporto $du : dv$ si trova per ρ l'equazione di secondo grado.

$$(27)\qquad (\tau+\rho)^2 (D D'' - D'^2) + (\tau+\rho)\, r' (r^2 D + D'') + r^2 r'^2 = 0 ,$$

ovvero

$$(27^*)\qquad (\tau + \rho)^2 K - (\tau + \rho)\, r' H + r'^2 = 0 ,$$

indicando con H, K la curvatura media e la curvatura assoluta di S. Di qui risulta in particolare la formola

$$(28)\qquad (\tau + \rho_1)(\tau + \rho_2) + \frac{r'^2 r}{r''} = 0 .$$

Ora se si osserva che per le (23*) si ha

$$(28^*)\qquad 2q = \sum \xi^2 = r^2 + \tau^2 , \quad p = \sum \xi X_3 = -\tau ,$$

si vede che la (28) assume precisamente la forma (19*)

$$(\rho_1 - p)(\rho_2 - p) = F(2q - p^2) .$$

Così risultano confermate tutte le proprietà già note delle superficie Σ. Ma un'altra conseguenza notevole deduciamo dalle (44), eliminando ρ,

cioè formando l'equazione differenziale delle linee di curvatura di Σ per la quale troviamo:

$$\begin{vmatrix} r' du + \tau (D du + D' dv) & , & r^2 r' dv + \tau (D' du + D'' dv) \\ D du + D' dv & , & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0 ,$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} du & r^2 dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa coincide coll'equazione delle linee di curvatura di S; dunque le due superficie S, Σ si corrispondono per parallelismo delle normali e per linee di curvatura. Raccogliamo i risultati ottenuti nel teorema:

Data una superficie qualunque S, *applicabile sopra una superficie di rotazione, si conducano per un punto fisso* 0 *dello spazio i segmenti paralleli alle tangenti delle deformate dei meridiani ed eguali (o proporzionali) al raggio del corrispondente parallelo, indi per gli estremi di questi segmenti si conducano le rette parallele alle normali di* S. *Queste rette costituiscono una congruenza normale e le superficie ortogonali* Σ *hanno a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura e sono le superficie integrali dell'equazione* (19*) *d'Ampère.*

§. 301.

Relazione fra due superficie Σ, Σ' dedotte da due superficie complementari S, S'.

Se applichiamo la costruzione dell'ultimo teorema anche alla superficie S' (applicabile sopra una superficie di rotazione) complementare della S, otterremo medesimamente una serie di superficie Σ' parallele, integrali di una seconda equazione del tipo (19*). Basta ora riflettere che le tangenti alle deformate dei meridiani della S sono le stesse che per la S' per dedurne che in ogni tale coppia (Σ, Σ') le due superficie stanno fra loro nelle relazioni seguenti:

1.° *Due normali a* Σ, Σ' *in punti corrispondenti sono sempre fra loro ortogonali.*

2.° *La perpendicolare comune a due normali corrispondenti passa costantemente per l'origine e resta ivi divisa in due segmenti che sono funzioni l'uno dell'altro.*

Si può dimostrare facilmente che queste proprietà sono *caratteristiche* per le coppie di superficie Σ, Σ' dedotte così, col metodo di Weingarten, da due superficie complementari S, S′ applicabili sopra superficie di rotazione.

Suppongasi infatti di avere una coppia Σ, Σ' di superficie che, corrispondendosi punto per punto, godano delle proprietà enunciate. Intersechiamo i raggi usconti dall'origine O, perpendicolari comuni a due normali corrispondenti di Σ, Σ', colla sfera di centro O e di raggio = 1 e scegliamo sulla sfera a linee coordinate v, u quelle le cui tangenti sono rispettivamente parallele alle normali di Σ, Σ'. Il sistema (u, v) sarà dunque sulla sfera un sistema ortogonale; e scrivendo l'elemento lineare sferico sotto la forma

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2\,, \tag{29}$$

riterremo le solite nostre notazioni (§ 254), talchè avremo le formole:

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_2 - \sqrt{\mathrm{E}}\,\mathrm{X}_3, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_1\,, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{dv} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_1 - \sqrt{\mathrm{G}}\,\mathrm{X}_3 \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\mathrm{X}_1\,, \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,\mathrm{X}_2\,. \end{cases}$$

Indichino ora, sul raggio $(\mathrm{X}_3, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$, λ, μ le ascisse dei piedi delle normali a Σ, Σ'; per le coordinate x_0, y_0, z_0 del piede della normale di Σ avremo

$$x_0 = \lambda\,\mathrm{X}_3\,, \quad y_0 = \lambda\,\mathrm{Y}_3\,, \quad z_0 = \lambda\,\mathrm{Z}_3\,.$$

Le rette condotte pel punto $(\lambda\,\mathrm{X}_3, \lambda\,\mathrm{Y}_3, \lambda\,\mathrm{Z}_3)$ nella direzione $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$ dovendo formare una congruenza normale, si dovrà avere (I, pag. 310)

$$\sum \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\frac{\partial(\lambda\,\mathrm{X}_3)}{\partial v} = \sum \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}\frac{\partial(\lambda\,\mathrm{X}_3)}{\partial u}\,;$$

questa, per le (β), si riduce semplicemente a

$$\frac{\partial(\lambda\sqrt{\mathrm{E}})}{\partial v} = 0\,.$$

Dunque, disponendo convenientemente del parametro u, potremo fare

$$\sqrt{E} = \frac{1}{\lambda}.$$

Del tutto similmente operando per la seconda superficie Σ', avremo

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\mu};$$

e, poichè λ, μ sono supposte funzioni l'una dell'altra, ne dedurremo che nell'elemento lineare sferico (29) sarà E funzione di G e quindi, pei teoremi di Weingarten al Cap. IX (I, pag. 290), le linee sferiche u, v sono le immagini delle linee di curvatura di una superficie W [1]. Basta ora uno sguardo alle formole che ai §§ 132, 134 (I, pag. 286, 289) sono segnate coi numeri (19), (19*), (20), per vedere che λ, μ sono rispettivamente eguali (o proporzionali) ai raggi dei paralleli delle superficie di rotazione sulle quali sono applicabili le due superficie complementari S, S', che formano le due falde dell'evoluta della W. Dunque le due superficie Σ, Σ' sono dedotte da S, S' precisamente colla costruzione del teorema al § 300, ciò che dimostra quanto avevamo asserito.

§. 302.

Applicazione alle superficie di curvatura costante.

Esaminiamo le superficie Σ che derivano, secondo la costruzione del teorema al § 300, da una superficie a curvatura costante. Prendiamo dapprima una superficie pseudosferica S di raggio $R = 1$ coll'elemento

---

[1] Affatto analogamente si può stabilire più in generale che la riduzione dell'elemento lineare sferico alla forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

con E, F, G funzioni l'uno dell'altro corrisponde al seguente problema geometrico generalizzato da quello del testo: *Trovare le coppie* (Σ, Σ') *di superficie corrispondentisi punto per punto in guisa che la perpendicolare comune a due normali corrispondenti passi costantemente per l'origine e vi resti divisa in due segmenti che siano funzioni l'uno dell'altro e dell'angolo* Ω *delle due normali.* Procedendo infatti come nel testo ed assumendo per linee sferiche u, v quelle le cui tangenti sono rispettivamente perpendicolari alle normali di Σ, Σ', si trova appunto che, per una conveniente scelta dei parametri u, v, saranno in ds^2 i coefficienti E, F, G funzioni l'uno dell'altro e viceversa.

lineare ridotto alla forma parabolica

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2 .$$

Applicando la formola (28), (28*), coll'osservare che qui si ha

$$\frac{r'' r}{r'^2} = e^{2u} = r^2 = 2q - p^2 ,$$

l'equazione d'Ampère (28) di cui le superficie Σ sono integrali diventa

$$\rho_1 \rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q = 0 , \tag{30}$$

il cui significato geometrico è evidentemente questo: *Il segmento di ogni normale ad una tale superficie Σ compreso fra i centri principali di curvatura è visto dall'origine 0 sotto angolo retto.* Viceversa ogni tale superficie deriva, colla costruzione del § 390, da una superficie pseudosferica colla quale ha a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura. Se applichiamo la medesima costruzione alla superficie pseudosferica S', complementare della S rispetto alle geodetiche parallele v, la superficie derivata Σ' avrà per normali le rette polari reciproche delle normali alla primitiva Σ rispetto ad una sfera col centro nell'origine. Viceversa dalle ricerche del § precedente risulta:

Se due congruenze rettilinee normali sono polari l'una dell'altra rispetto ad una sfera fissa, le superficie Σ, Σ' normali alle due congruenze appartengono alla classe (30) *e derivano da due superficie pseudosferiche complementari* [1]. In secondo luogo prendiamo l'elemento lineare di una superficie pseudosferica S ridotto alla forma ellittica

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{senh}^2 u\,dv^2 ,$$

ovvero alla forma iperbolica

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 u\,dv^2 .$$

Qui avremo

$$\frac{r''^2 r}{r'^3} = r^2 + 1 = 2q - p^2 + 1$$

nel primo caso, e invece

$$\frac{r''^2 r}{r'^3} = r^2 - 1 = 2q - p^2 - 1$$

---

[1] Questa proposizione si stabilisce del resto subito colla considerazione geometrica diretta, osservando che in due congruenze polari reciproche rispetto ad una sfera l'angolo che fanno i due piani focali d'un raggio nell'una è eguale a quello sotto cui si vede dall'origine il segmento compreso fra i fuochi sul raggio corrispondente dell'altra.

nel secondo. Le superficie Σ derivate soddisferanno quindi all'equazione d'Ampère

$$(30^*) \qquad \rho_1 \rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q \pm 1 = 0 ,$$

che esprime la seguente proprietà geometrica:

Sopra ogni normale di una tale superficie Σ i due centri principali di curvatura sono coniugati armonici rispetto alla sfera fissa

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0 .$$

Se prendiamo in fine una superficie S a curvatura costante positiva $= +1$, coll'elemento lineare della forma normale

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2 ,$$

abbiamo

$$\frac{r'' r}{r'^2} = -\cos^2 u = r^2 - 1 ,$$

e quindi le superficie Σ derivate soddisfano ancora la (30*) ove si prenda il segno inferiore. La differenza fra l'uno e l'altro caso consiste in ciò che nel primo

$$2q - p^2 = \cosh^2 u > 1$$

e nel secondo

$$2q - p^2 = \operatorname{sen}^2 u < 1 ,$$

cioè nel primo la proiezione dell'origine sulla normale cade esternamente, nel secondo internamente alla sfera fissa.

È interessante osservare che le superficie della classe (30*), corrispondenti al segno inferiore, hanno l'equazione tangenziale

$$\Delta_u p = 1 - \Delta_1 p ,$$

che è precisamente l'equazione dell'applicabilità per una sfera di raggio $= 1$. Ne risulta la proposizione seguente: *Si consideri una qualunque deformata* S′ *della sfera* S *e sopra ogni raggio della sfera si riporti, a partire dal centro, un segmento eguale alla distanza del punto corrispondente di* S′ *da un piano fisso; i piani normali ai segmenti nei loro estremi inviluppano una superficie Σ integrale dell'equazione*

$$\rho_1 \rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q - 1 = 0 .$$

È ancora da osservarsi che tutte queste superficie Σ derivate hanno a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura con un'altra defor-

mata S'' della sfera, la così detta trasformata di Hazzidakis della primitiva. (Cf. più avanti Cap. XXV, § 392).

§. 303.

Enunciato di un nuovo problema.

Nelle ricerche seguenti abbiamo principalmente per iscopo di collegare al metodo di Weingarten i bei teoremi di Guichard sulla deformazione delle quadriche di rotazione, esposti nel Cap. XVII, per dimostrare come questi teoremi possano invertirsi, ciò che ci condurrà ad importanti trasformazioni delle superficie a curvatura costante. Nello stesso tempo otterremo nuove classi di superficie applicabili, collegate alle superficie di curvatura costante e a quelle d'area minima.

Fonderemo la nostra ricerca sugli sviluppi dati nei primi §§ del presente Capitolo, riguardanti le relazioni fra il nuovo metodo di Weingarten e la teoria dei sistemi ciclici. Come si è visto al § 273*, la determinazione dei sistemi ciclici normali ad una data superficie S dipende dalla equazione del 2.° ordine

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Nota una soluzione Φ di questa, si può determinare con una quadratura la corrispondente funzione W dalle formole (*b*) § 273* (pag. 151).

Soddisfacendo Φ alla (*a*), possiamo determinare due tali moltiplicatori λ, μ che si abbia

$$\Phi_{11} = \lambda E + \mu D , \quad \Phi_{12} = \lambda F + \mu D' , \quad \Phi_{22} = \lambda G + \mu D'' .$$

Ora le formole fondamentali della teoria delle superficie ci fanno conoscere, per qualunque superficie, dei casi *nei quali* λ, μ *sono funzioni lineari intere di* Φ, W. Tale proprietà si presenta appunto nelle formole (I) (II) del § 55 (I, pag. 116-117), ove si ponga

$$\Phi = x , \quad W = X .$$

Così pure le formole alla fine del Cap. IV (I, pag. 147) dimostrano che la medesima proprietà sussiste per qualunque superficie ponendo

$$\Phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad W = \sum x X .$$

I corrispondenti sistemi ciclici sono quelli normali ad un piano ovvero ad una sfera (§ 275).

Ci proponiamo di trovare tutti i casi in cui ha luogo la proprietà osservata, cioè di ricercare per quali superficie S formano un sistema illimitatamente integrabile le equazioni seguenti

$$(A)\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + (\alpha\Phi+\beta W+m)\,E + (\alpha'\Phi+\gamma W+n)\,D \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + (\alpha\Phi+\beta W+m)\,F + (\alpha'\Phi+\gamma W+n)\,D' \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = \left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + (\alpha\Phi+\beta W+m)\,G + (\alpha'\Phi+\gamma W+n)\,D'' \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{F\,D'-G\,D}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D-E\,D'}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \dfrac{F\,D''-G\,D'}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D'-E\,D''}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}, \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, m; \alpha', \gamma, n$ indicano costanti e le due forme

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

sono al solito le due forme fondamentali della superficie S.

§. 304.

Caso d'illimitata integrabilità del sistema (A), (B).

Le condizioni d'integrabilità (illimitata) del sistema (A), (B) si trovano esprimendo che, in virtù delle (A), (B) stesse, risultano identiche le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

Ora la prima è già identica in virtù delle (A), essendo Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} le stesse combinazioni lineari omogenee delle coppie (E, D), (F, D'), (G, D''). Se formiamo poi, con riguardo alle (A), (B) stesse, l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right),$$

osservando che D, D', D'' soddisfano alle equazioni di Codazzi

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} D + \left[\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right] D' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} D'' = 0$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} D + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right] D' - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} D'' = 0,$$

e a queste medesime equazioni soddisfano altresì E, F, G, troviamo con un semplice calcolo

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right) = L\frac{\partial\Phi}{\partial u} + M\frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

dove L, M hanno le espressioni seguenti:

$$L = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + (\gamma K - \alpha - \beta H) F - (\beta + \alpha') D',$$

$$M = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}^2 -$$
$$- (\gamma K - \alpha - \beta H) E + (\beta + \alpha') D,$$

K, H significando la curvatura totale e media di S, cioè essendo

$$K = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2}, \quad H = \frac{2 F D' - E D'' - G D}{E G - F^2}.$$

Ma, in virtù delle formole per la curvatura K date al § 37 (I, pag. 77 formole (IV)), le espressioni precedenti di L, M possono scriversi più semplicemente così:

$$L = \{(\gamma - 1) K - \alpha - \beta H\} F - (\beta + \alpha') D'$$
$$M = -\{(\gamma - 1) K - \alpha - \beta H\} E + (\beta + \alpha') D,$$

e le condizioni d'integrabilità esigono quindi che si abbia

$$[(\gamma - 1) K - \alpha - \beta H] E - (\beta + \alpha') D = 0$$
$$[(\gamma - 1) K - \alpha - \beta H] F - (\beta + \alpha') D' = 0.$$

Similmente, calcolando l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right),$$

a queste verrà ad aggiungersi, per simmetria, la terza

$$[(\gamma-1)\,K - \alpha - \beta\,H]\,G - (\beta+\alpha')\,D'' = 0\ .$$

E siccome escludiamo naturalmente il caso privo d'interesse che la S sia una sfera od un piano, cioè che si abbia

$$E : F : G = D : D' : D'',$$

le condizioni necessarie e sufficienti per l'illimitata integrabilità del nostro sistema si ridurranno alle due

$$\alpha' = -\beta$$
$$(\gamma-1)\,K - \alpha - \beta\,H = 0\ ,$$

la prima delle quali esprime solo la costante α' per β, mentre la seconda vincola linearmente la curvatura totale e media della superficie S, a meno che non sia

$$\alpha = \alpha' = \beta = 0 \quad , \quad \gamma = 1$$

nel qual caso si risolverebbe in una identità, e saremmo ricondotti ai sistemi ciclici normali ad una sfera o ad un piano.

Siamo così pervenuti al risultato fondamentale seguente:

Affinchè il sistema di equazioni

$$(A^*)\qquad \begin{cases} \Phi_{11} = (\alpha\,\Phi+\beta\,W+m)\,E + (-\beta\,\Phi+\gamma\,W+n)\,D \\ \Phi_{12} = (\alpha\,\Phi+\beta\,W+m)\,F + (-\beta\,\Phi+\gamma\,W+n)\,D' \\ \Phi_{22} = (\alpha\,\Phi+\beta\,W+m)\,G + (-\beta\,\Phi+\gamma\,W+n)\,D'' \end{cases}$$

$$(B^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{F\,D' - G\,D}{EG-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D - E\,D'}{EG-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \dfrac{F\,D'' - G\,D'}{EG-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D' - E\,D''}{EG-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, m, n$ *indicano costanti, sia illimitatamemte integrabile è necessario e sufficiente che le curvature totale e media* K, H *siano legate dalla relazione lineare intera:*

$$(I)\qquad (\gamma-1)\,K - \beta\,H - \alpha = 0\ .$$

Viceversa, suppongasi che S sia una superficie per la quale le curvature K, H siano legate dalla relazione

$$(I^*) \qquad a\,K + b\,H + c = 0\ ,$$

a coefficienti a, b, c, costanti. Potremo, in infiniti modi, determinare le costanti α, β, γ in guisa che la (I) coincida colla (I*), bastando per ciò che sussistano le proporzioni

$$1 - \gamma : \beta : \alpha = a : b : c\ ,$$

onde una delle tre costanti α, β, γ resterà affatto arbitraria, esprimendosi le altre due per funzioni lineari intere di questa. Così, per ogni superficie S della classe (I*), potremo costruire ∞^1 sistemi illimitatamente integrabili della forma (A*), (B*), dipendenti da una costante arbitraria.

§. 305.

Proprietà del sistema (A*), (B*).

Il sistema (A*), (B*) essendo illimitatamente integrabile, per individuare una coppia (Φ, W) di soluzioni possiamo assegnare ad arbitrio, per un sistema iniziale u_0, v_0 di valori delle variabili indipendenti, i valori di

$$\Phi,\ W,\ \frac{\partial\Phi}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}\ .$$

Ora dimostriamo che per qualunque coppia di soluzioni sarà $\Delta_1\,\Phi$ una funzione intera di secondo grado in Φ, W.

Per ciò osserviamo che, ponendo

$$\Omega = \alpha\,\Phi^2 + 2\,\beta\,\Phi\,W - \gamma\,W^2 + 2\,m\,\Phi - 2\,n\,W\ ,$$

i coefficienti di (E, D), (F, D'), (G, D'') non sono altro che

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}\ ,\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial W}\ .$$

Se riprendiamo dunque la notazione dei doppi indici, potremo scrivere il sistema (A*), (B*) nel modo seguente

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}\,a_{ik} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial W}\,b_{ik}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = -\sum_{i,k}{}' A_{ik}\,b_{ri}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\ .$$

Ora prendiamo la formola (4*) pag. 209

$$\frac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u_i} = 2 \sum_{i,k}' A_{ik} \Phi_{ii} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} ,$$

che per le precedenti diventa

$$\frac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \sum_{i,k}' A_{ik} a_{ii} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} - \frac{\partial \Omega}{\partial W} \sum_{i,k}' A_{ik} b_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} ,$$

ossia

$$\frac{\partial \Delta_1 \Phi}{\partial u_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial u_i}$$

$$(i = 1, 2) .$$

Di qui concludiamo che sarà necessariamente

$$\Delta_1 \Phi = \Omega + C ,$$

essendo C una costante.

Dunque: *Per qualunque coppia* (Φ, W) *di soluzioni del sistema* (A*) (B*) *sussisterà l'equazione del primo ordine*

$$(C) \qquad \Delta_1 \Phi = \alpha \Phi^2 + 2 \beta \Phi W - \gamma W^2 + 2 m \Phi - 2 n W + C .$$

Questa proprietà analitica del sistema (A*), (B*) ha una conseguenza geometrica notevole rispetto alla superficie $\overline{S}$ inviluppo dei piani dei circoli nel corrispondente sistema ciclico, e cioè questa che: *cangiando comunque la superficie della classe* (I), *purchè rimangano le stesse le costanti*

$$\alpha, \beta, \gamma, m, n, C ,$$

la superficie $\overline{S}$ *conserva sempre lo stesso elemento lineare.*

Per vederlo basta osservare che, secondo le formole (5*), (8*) del § 296 (pag. 210), l'elemento lineare di $\overline{S}$ è dato da:

$$(31) \quad \overline{ds}^2 = [d(Q - P W)]^2 + 2 W d P . d(Q - P W) + (\Delta_1 \Phi + W^2) d P^2 ,$$

dove P, Q, secondo le (4) pag. 207, hanno i valori

$$(32) \qquad P = - \frac{1}{\alpha \Phi + \beta W + m} , \quad Q = \frac{\beta \Phi - \gamma W - n}{\alpha \Phi + \beta W + m}$$

in funzione di Φ, W, mentre $\Delta_1 \Phi$ si esprime per Φ, W colla (C), onde si vede appunto che il $\overline{ds}^2$ dipende solo dalle costanti $\alpha, \beta, \gamma, m, n, C$.

Osserviamo poi che le superficie Σ dedotte colle (6) § 296:

$$(32^*)\qquad \begin{cases} \xi = W X + \nabla(x, \Phi) \\ \eta = W Y + \nabla(y, \Phi) \\ \zeta = W Z + \nabla(z, \Psi) \end{cases}$$

ed aventi a comune colla S l'immagine sferica delle linee di curvatura saranno integrali di una medesima equazione d'Ampère

$$(33)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1+\rho_2) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2} = 0\,,$$

dove Ψ è da calcolarsi in funzione di p, q dalle formole

$$(34)\qquad p = W\,,\quad 2q = \Delta_1\Psi + W^2 =$$
$$= \alpha\Psi^2 + 2\beta\Phi W + (1-\gamma)W^2 + 2m\Phi -$$
$$- 2nW + C\,.$$

Conviene ancora osservare che la normale alla S giacente nel piano tangente di $\overline{S}$ ha ivi una posizione esclusivamente determinata dall'elemento lineare di $\overline{S}$. E infatti dalle formole (8) pag. 210 risulta che essa è parallela alla tangente della linea $P =$ costante sopra $\overline{S}$ e, per le (1) pag. 206, la sua distanza dal punto $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ di contatto è data da $P\sqrt{\Delta_1\Phi}$. Dunque: *Variando comunque la superficie* S *della classe* (I*) *la superficie* $\overline{S}$ *non fa altro che deformarsi e le normali di* S, *che giacciono nei piani tangenti di* $\overline{S}$, *rimangono invariabilmente legate alle flessioni della* $\overline{S}$.

Aggiungiamo che inversamente le superficie applicabili $\overline{S}$ a cui siamo così condotti sono le più generali superficie alle quali possono associarsi congruenze di raggi, individualmente giacenti nei piani tangenti di $\overline{S}$, e che in tutte le deformazioni di questa rimangono normali a superficie della classe (I*) [1].

§. 306.

Caso di una superficie S d'area minima.

Possiamo ridurre a forme semplici il $\overline{ds}^2$ dato dalla (31), osservando che, per questo calcolo, è lecito sostituire alla primitiva superficie S una qualunque sua parallela, senza che si alteri la superficie $\overline{S}$ inviluppo dei

[1] Per le dimostrazioni veggasi la mia memoria: *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (Annali, t. VI, 1901).

piani dei circoli nè la superficie Σ determinata dalle coordinate tangenziali (X, Y, Z, W). Ciò risulta dall'osservazione, di facile verifica, che se S è una superficie qualunque e (Φ, W) una coppia di funzioni che individuano un sistema ciclico ad essa ortogonale, per una superficie S_1 parallela ad S e distante da questa di h si avrà una coppia analoga nelle funzioni $\Phi_1 = \Phi + hW$, $W_1 = W$, ed i circoli del secondo sistema giaceranno nei piani stessi del sistema primitivo.

Ciò premesso, osserviamo che se S è una superficie soddisfacente alla (I*), cioè alla relazione

$$(I^*) \qquad c\, r_1 r_2 + b\,(r_1 + r_2) + a = 0\,,$$

fra le sue parallele vi sarà una superficie d'area minima se $c = 0$ ed una superficie a curvatura costante se $c \neq 0$. Eccezione si ha soltanto nel caso in cui $ac - b^2 = 0$; ma allora la (I*) si scrive

$$(b r_1 + a)\,(b r_2 + a) = 0$$

e dimostra che l'uno o l'altro dei due raggi di curvatura della S deve essere una costante, cioè la S sarà una superficie canale. Noi trascureremo questo caso perchè, sebbene le proprietà del sistema (A*), (B*) valgano anche qui, le conseguenze che se ne deducono non hanno interesse alcuno, la superficie inviluppo $\overline{S}$ risultando allora sviluppabile. Concludiamo che ci possiamo limitare a trattare i due casi seguenti: 1.° la S sia ad area minima, 2.° la S sia a curvatura costante.

1.° caso: $H = 0$

La (I) dovendo ridursi ad $H = 0$, dovremo avere

$$\alpha = 0\,,\ \gamma = 1$$

e rimarrà arbitraria la β. Inoltre, cangiando nelle (A*), (B*) Φ, W in $\Phi + h$, $W + k$ con h, k convenienti costanti, potremo, senza alterare la generalità, sopprimere i termini costanti m, n rendendo

$$\beta k + m = 0\,,\ -\beta h + n = 0\,.$$

Dopo di ciò le (32) ci daranno per P, Q i valori

$$P = -\frac{1}{\beta W}\,,\quad Q = \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{\beta}\,,$$

indi

$$Q - P W = \frac{\Phi}{W}\,.$$

Inoltre la (C) dimostra che si ha

$$\Delta_1 \Phi + W^2 = 2\beta\Phi W + C, \tag{35}$$

e possiamo quindi colla (31) calcolare l'elemento lineare di $\overline{S}$. Posto

$$\frac{\Phi}{W} = t,$$

calcoliamolo in coordinate curvilinee t, W ed avremo

$$\overline{ds}^2 = dt^2 + \frac{2}{\beta W} d W\, dt + (2\beta\Phi W + C)\frac{d W^2}{\beta^2 W^4}.$$

Ora se poniamo

$$W = e^{-v}, \; t = \frac{u+v}{\beta} + \frac{1}{2\beta},$$

questa diventa

$$\overline{ds}^2 = \frac{1}{\beta^2}\left\{du^2 + \left[2u + 2v + C e^{2v}\right] dv^2\right\}. \tag{36}$$

Se $C = 0$ l'elemento lineare precedente appartiene alla superficie complementare del paraboloide di rotazione (§ 297). Quando $C \neq 0$, aumentando v di una costante si può fare $C = \pm 1$ e la (36) non differisce che per un fattore costante dalla (15) (pag. 215), cioè le superficie $\overline{S}$ formano la nuova classe completa di superficie applicabili determinata da Weingarten. Colle presenti ricerche queste superficie $\overline{S}$ vengono così geometricamente collegate alle superficie d'area minima per mezzo di una congruenza di raggi giacenti singolarmente nei piani tangenti di $\overline{S}$ e che, in qualunque deformazione di $\overline{S}$, rimane normale ad una superficie d'area minima.

Esaminiamo in fine le superficie Σ integrali di un'equazione del tipo (IX)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p\,\partial q}(\rho_1+\rho_2) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2} = 0 \tag{IX}$$

che il metodo di Weingarten associa (§ 296) alle superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare (36). Per trovare la corrispondente equazione basterà calcolare Φ in funzione di p, q, essendo

$$p = W, \; 2q = \Delta_1\Phi + W^2$$

ciò che dà, secondo la (35):

$$2\beta\Phi = \frac{2q - C}{p}$$

e quindi per la relazione fra i raggi di curvatura di Σ:

$$(37) \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{2q - C}{p}.$$

Risulta dalle ricerche superiori che queste superficie Σ hanno una rappresentazione isoterma delle linee di curvatura e le loro superficie derivate col metodo di Weingarten sono le superficie d'elemento lineare (36).

§. 307.

Caso di una superficie S a curvatura costante K.

Veniamo ora al caso in cui la superficie S sia a curvatura costante K. Nella (I) dovremo porre allora

$$\beta = 0$$

e, rimanendo γ arbitraria, dovremo assumere

$$\alpha = (\gamma - 1)\,K.$$

Cangiando nel sistema (A*) Φ, W in $\Phi + h$, $W + k$, potremo ancora rendere, senza alterare la generalità, $m = 0$, $n = 0$, purchè sia $\gamma \neq 0$. Quando sia $\gamma = 0$, indi $\alpha = -K$, potremo rendere ancora $m = 0$, restando n arbitrario. Il seguito della discussione ci conduce quindi a distinguere due casi, nel primo dei quali si ha $m = 0$, $n = 0$, e nel secondo $m = 0$, $\gamma = 0$.

$$1.^\circ \text{ caso } m = n = 0\,.$$

Allora le (32) diventano

$$P = -\frac{1}{(\gamma-1)K\Phi}\,, \quad Q = -\frac{\gamma W}{(\gamma-1)K\Phi}\,,$$

indi

$$Q - P\,W = \frac{W}{K\Phi}\,,$$

mentre la (C) ci dà:

$$(37^*) \qquad \Delta_1 \Phi + W^2 = (\gamma - 1)\,[K\Phi^2 - W^2] + C\,.$$

L'elemento lineare (31) della $\bar{S}$, prendendo per variabili

$$\frac{W}{\Phi} = t\,, \quad \Phi$$

diventa

$$(38) \qquad \bar{ds}^2 = \frac{1}{K^2}\left\{dt^2 + \frac{2t}{(\gamma-1)\Phi}\,dt\,d\Phi + \left[(\gamma-1)\Phi^2(K - t^2) + C\right]\frac{d\Phi^2}{(\gamma-1)^2\Phi^4}\right\}.$$

Pongasi ora

$$\Psi = e^v , \frac{dt}{t} + \frac{dv}{\gamma - 1} = du ,$$

cioè

$$t = e^{u - \frac{v}{\gamma - 1}} ,$$

e risulterà la forma tipica

$$(38^*)\ \overline{ds}^2 = \frac{1}{K^2}\left\{ e^{2\left(u - \frac{v}{\gamma-1}\right)} du^2 + \left[(\gamma - 1) K - \gamma e^{2\left(u - \frac{v}{\gamma-1}\right)} + C e^{-2v} \right] dv^2 \right\} .$$

Calcoliamo ora la relazione (IX) che lega i raggi di curvatura delle superficie Σ dedotte dalla classe di superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare (38*) col metodo di Weingarten. Qui dobbiamo calcolare Ψ in funzione di p, q dalla formola (37*), ciò che dà

$$2q = (\gamma - 1) K \Psi^2 - (\gamma - 1) p^2 + C ,$$

e la (IX) diventa quindi

$$\rho_1 \rho_2 + (\gamma - 1) p (\rho_1 + \rho_2) - (\gamma - 1)(2q - C) = 0.$$

Le superficie Σ integrali di questa equazione d'Ampère hanno a comune colle superficie a curvatura costante l'immagine sferica delle linee di curvatura. Si osserverà che per $\gamma = 0$ esse diventano le superficie Σ considerate al § 302.

2.° caso

$$\gamma = 0 , \quad n = 0 .$$

Essendo $\beta = 0$, $\alpha = -K$, le equazioni del sistema (A*) diventano

$$(D) \qquad \begin{cases} \Phi_{11} = -K E \Phi + n D \\ \Phi_{12} = -K F \Phi + n D' \\ \Phi_{22} = -K G \Phi + n D'' \end{cases}$$

e le formole (32) danno

$$P = \frac{1}{K\Phi} , \ Q = \frac{n}{K\Phi} , \ Q - PW = \frac{n - W}{K\Phi} ,$$

mentre pel valore di $\Delta_1 \Phi$ calcolato dalla (C) abbiamo

$$(39) \qquad \Delta_1 \Phi = -2nW - K\Phi^2 + C .$$

Ora escludendo qui il caso $n = 0$, superiormente trattato, non alteriamo la generalità assumendo $n = 1$, per il che basta cangiare Ψ in $n\Psi$.

In secondo luogo, siccome W è determinato per quadratura dalle (B*) pag. 230 solo a meno di una costante additiva, possiamo disporne in guisa che risulti $C = 0$, indi avremo

$$P = \frac{1}{K\Phi}, \quad Q - PW = \frac{1 - W}{K\Phi}$$

$$\Delta_1 \Phi + W^2 = W^2 - 2W - K\Phi^2. \tag{39*}$$

La formola (31) dà quindi per il $\overline{ds}^2$ della superficie $\overline{S}$:

$$\overline{ds}^2 = \frac{(1 - 2W - K\Phi^2)\, d\Phi^2 + 2\Phi\, d\Phi\, dW + \Phi^2 dW^2}{K^2\Phi^4}. \tag{40}$$

Se poniamo

$$\Phi = \pm \frac{1}{K} e^v, \quad W = u - v,$$

questo assume la forma tipica seguente

$$ds^2 = e^{-2v}\, du^2 + \left\{ 2(v - u)\, e^{-2v} - \frac{1}{K} \right\} dv^2. \tag{40*}$$

Se calcoliamo in fine la corrispondente equazione d'Ampère per le superficie Σ, dobbiamo fare per la (39*)

$$2q = p^2 - 2p - K\Phi^2,$$

onde l'equazione d'Ampère per le attuali superficie Σ si scrive

$$\rho_1 \rho_2 + (1 - p)(\rho_1 + \rho_2) + 2q + 1 = 0. \tag{41}$$

Queste superficie Σ hanno anch'esse a comune colle superficie a curvatura costante l'immagine sferica delle linee di curvatura e la classe di superficie applicabili che il metodo di Weingarten ne fa derivare è definita dall'elemento lineare (40).*

§. 308.

Le quadriche immaginarie d'elemento lineare (38*), (40*).

Abbiamo già visto, al § 298, che le superficie applicabili $\overline{S}$ derivate col metodo dei §§ precedenti dalle superficie d'area minima sono applicabili sopra una quadrica immaginaria tangente al circolo immaginario all'infinito. Vogliamo ora constatare che una proprietà analoga ha luogo per le superficie $\overline{S}$ d'elemento lineare (38*) e (40*) che abbiamo dedotto superiormente dalle superficie a curvatura costante.

Per ciò cominciamo coll'osservare che, secondo i calcoli eseguiti al principio del presente Capitolo, se si pone

$$\xi = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}\,,\quad \eta - \zeta = -\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$\eta + \zeta = 2\,\Phi - 2\,p\,\frac{\partial \Phi}{\partial p} - 2\,q\,\frac{\partial \Phi}{\partial q}\,,$$

il $\overline{ds}^2$ delle nostre superficie $\overline{\mathrm{S}}$ sarà dato da

$$\overline{ds}^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2\,;$$

avremo per ciò una superficie (immaginaria) applicabile sopra $\overline{\mathrm{S}}$, ponendo

$$(42)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\,,\ y - i\,z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} \\ \\ y + i\,z = 2\,p\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial p} + 2\,q\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial q} - 2\,\Phi\,. \end{cases}$$

Ora distinguendo anche qui i due casi trattati separatamente al § precedente, avremo:

1.° caso

$$(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi^2 = 2\,q + (\gamma - 1)\,p^2 - \mathrm{C}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{p}{\mathrm{K}\,\Phi}\,,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{1}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi}$$

$$2\,p\,\frac{\partial \Phi}{\partial p} + 2\,q\,\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{2\,(\gamma - 1)\,p^2 + 2\,q}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi^2} = \frac{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi^2 + (\gamma - 1)\,p^2 + \mathrm{C}}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi}\,,$$

indi

$$x = \frac{p}{\mathrm{K}\,\Phi}\,,\ y - i\,z = \frac{1}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi}$$

$$y + i\,z = \frac{p^2}{\mathrm{K}\,\Phi} + \frac{\mathrm{C}}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}\,\Phi} - \Phi$$

e per ciò

$$(43)\qquad (y + i\,z)\,(y - i\,z) = \frac{x^2}{\gamma - 1} + \mathrm{C}\,(y - i\,z)^2 - \frac{1}{(\gamma - 1)\,\mathrm{K}}\,.$$

Questa superficie è una quadrica immaginaria a centro, che si riconosce essere tangente al circolo all'infinito. E infatti se nell'equazione

della sua conica all'infinito

$$(y + i\,z)\,(y - i\,z) - \frac{x^2}{\gamma - 1} - C\,(y - i\,z)^2 = 0$$

sostituiamo per le coordinate omogenee x, y, z le quantità proporzionali

$$x : y : z = i\,(1 - \lambda^2) : 2\,i\,\lambda : 1 + \lambda^2\,,$$

che danno le coordinate di un punto sul circolo all'infinito espresse razionalmente pel parametro λ, abbiamo per determinare λ l'equazione di 4.° grado

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,(1 - \lambda^2)^2 + C\,(1 - \lambda)^4 = 0\,, \tag{44}$$

le cui radici corrispondono ai punti d'incontro della conica col circolo. Ora la (43) ha la radice doppia $\lambda = 1$, ciò che dimostra appunto quanto abbiamo asserito. Le altre due radici della (44) sono date dalla equazione di 2.° grado

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,(1 + \lambda)^2 + C\,(1 - \lambda)^2 = 0$$

e sono distinte dalla precedente $\lambda = 1$ se $\gamma \neq 0$, come qui supponiamo; sono inoltre distinte fra loro per $C \neq 0$. Quando $C = 0$ invece coincidono e la quadrica (43), che è allora di rotazione, diventa bitangente al circolo all'infinito

2.° caso

Nel secondo caso abbiamo

$$K\,\Phi^2 = p^2 - 2\,p - 2\,q$$

e quindi le (42) diventano

$$\begin{cases} x = \dfrac{p - 1}{K\,\Phi}\,, & y - i\,z = \dfrac{-1}{K\,\Phi} \\ y + i\,z = \dfrac{p^2}{K\,\Phi} - \Phi\,. \end{cases}$$

Di qui abbiamo per l'equazione della superficie

$$(y + i\,z)\,(y - i\,z) + (x - y + i\,z)^2 = \frac{1}{K}\,; \tag{45}$$

questa è una quadrica che *oscula* il circolo immaginario all'infinito, poichè la corrispondente equazione del 4.° grado in λ ha in questo caso la radice tripla $\lambda = 1$ e la radice semplice $\lambda = -3$.

§. 309.

Caso in cui $C = 0$ nella (37*), e relazione coi teoremi di Guichard.

Volgiamoci ora allo studio di un caso particolare dei risultati ottenuti, al caso in cui, la superficie S essendo a curvatura costante, i valori iniziali di

$$\Phi,\ W,\ \frac{\partial \Phi}{\partial u},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

per la coppia (Φ, W) di soluzioni delle equazioni fondamentali, sono scelti in guisa da rendere nulla la costante C nella (37*), cioè da soddisfare all'equazione del primo ordine

$$\Delta_1 \Phi = (\gamma - 1)\, K\, \Phi^2 - \gamma\, W^2. \tag{46}$$

Allora la superficie $\overline{S}$ inviluppo dei piani normali alle linee $\Phi =$ cost.te sulla S è applicabile sopra una superficie di rotazione, poichè la (38), col porre $\Phi = e^v$, diventa

$$\overline{ds}^2 = \frac{1}{(\gamma - 1)\, K^2}\left\{(\gamma - 1)\, dt^2 + 2\, t\, dt\, dv + (K - t^2)\, dv^2\right\} \tag{46*}$$

e pone appunto in evidenza l'elemento lineare di una superficie di rotazione, nella quale le linee $t =$ costante, ossia le $\frac{W}{\Phi} =$ costante sono i paralleli. Prendiamo ora a considerare la superficie S_1 complementare di S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani e siano

$$\overline{M} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),\quad M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$$

due punti corrispondenti di S, S_1. Dimostriamo che questo punto M_1 di S_1 trovasi sulla normale in $M \equiv (x, y, z)$ alla superficie S ed è l'intersezione di questa normale colla congiungente il punto M col centro $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ del circolo del sistema ciclico ortogonale ad S, individuato dalla coppia scelta (Φ, W) di soluzioni delle equazioni fondamentali.

Per ciò osserviamo che si ha

$$\overline{x} = x + P\, \nabla(x, \Phi) + Q\, X, \tag{47}$$

ove, per le (32), P, Q hanno i valori

$$P = -\frac{1}{(\gamma - 1)\, K\, \Phi},\quad Q = -\frac{\gamma\, W}{(\gamma - 1)\, K\, \Phi},$$

e d'altra parte le formole generali al § 273* danno per le coordinate x_0, y_0, z_0 del centro del circolo

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{\Delta_1 \Phi} \nabla (x, \Phi) . \tag{48}$$

Le coordinate x_1, y_1, z_1 del detto punto M_1 d'incontro della normale alla S in M colla $\overline{M}\ M_0$ saranno quindi date da

$$x_1 = \lambda \bar{x} + \mu x_0 , \quad y_1 = \lambda \bar{y} + \mu y_0 , \quad z_1 = \lambda \bar{z} + \mu z_0 ,$$

i moltiplicatori λ, μ essendo scelti in guisa che risulti

$$\lambda + \mu = 1 , \quad \lambda P - \frac{\mu \Phi}{\Delta_1 \Phi} = 0 ;$$

a causa dei valori (47*) di P, Q e della (46) ne deduciamo

$$x_1 = x - \frac{\Phi}{W} X, \; y_1 = y - \frac{\Phi}{W} Y, \; z_1 = z - \frac{\Phi}{W} Z . \tag{48*}$$

Si tratta ora di verificare che la superficie S_1 luogo di questo punto $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ è precisamente la complementare di $\bar{S}$. Intanto la retta $M_1 \overline{M}$ è certamente tangente in $\overline{M}$ alla $\bar{S}$; ma conviene provare che essa ha in $\overline{M}$ la direzione della deformata del meridiano, cioè che è normale alla tangente delle linee $t =$ costante. Ora i coseni di direzione della $M_1 \overline{M}$ sono proporzionali alle differenze

$$x_0 - x_1 , \quad y_0 - y_1 , \quad z_0 - z_1 ,$$

cioè ai binomii

$$W \nabla (x, \Phi) - \Delta_1 \Phi . X , \quad W \nabla (y, \Phi) - \Delta_1 \Phi . Y$$
$$W \nabla (z, \Phi) - \Delta_1 \Phi . Z .$$

D'altra parte le formole (5*) § 296 (pag. 210) dimostrano che i coseni di direzione della tangente alle linee $Q - P W =$ costante sulla $\bar{S}$ sono proporzionali alle tre espressioni

$$\xi = W X + \nabla (x, \Phi) , \quad \eta = W Y + \nabla (y, \Phi)$$
$$\zeta = W Z + \nabla (z, \Phi) ;$$

e poichè si ha identicamente

$$\sum (W X + \nabla (x, \Phi)) (W \nabla (x, \Phi) - \Delta_1 \Phi . X) = 0 ,$$

ne risulta appunto l'asserita ortogonalità.

Verifichiamo in fine che la superficie S_1 luogo di (x_1, y_1, z_1) è precisamente la complementare di S osservando le identità

$$(49)\begin{cases}\sum \xi \frac{\partial x_1}{\partial u} = \sum \left\{ W X + \nabla (x, \Phi) \right\} \times \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} - X \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Phi}{W}\right) - \frac{\Phi}{W} \frac{\partial X}{\partial u} \right\} = 0 \\ \sum \xi \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sum \left\{ W X + \nabla (x, \Phi) \right\} \times \left\{ \frac{\partial x}{\partial v} - X \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Phi}{W}\right) - \frac{\Phi}{W} \frac{\partial X}{\partial v} \right\} = 0 , \end{cases}$$

le quali seguono dalle altre stabilite al § 295:

$$\sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} , \quad \sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

$$\sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u} , \quad \sum \nabla (x, \Phi) \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v} .$$

Le (49) dimostrano che ξ, η, ζ sono proporzionali ai coseni di direzione della normale a S_1 in (x_1, y_1, z_1), e provano quindi che S_1 è la complementare di $\overline{S}$, come si era asserito.

Ora deformando comunque la $\overline{S}$, le osservazioni alla fine del § 305 dimostrano che la congruenza delle normali alla superficie a curvatura costante S, tracciate nei piani tangenti di $\overline{S}$, rimane invariabilmente legata alla $\overline{S}$ in queste deformazioni. D'altra parte anche la superficie complementare S_1, mentre la $\overline{S}$ si deforma, subisce una deformazione e la congruenza delle normali di S esce dai punti di S_1 stessa ed è invariabilmente legata alle sue deformazioni. Gli studi che abbiamo fatto al Cap. XVII sui teoremi di Guichard, e più precisamente i risultati conseguiti nei §§ 258, 259, dimostrano che la S_1 sarà applicabile sopra una superficie di rotazione che potrà offrire cinque forme distinte ivi enumerate, e la congruenza delle normali di S sarà precisamente quella che trovasi, nei teoremi di Guichard, associata alle deformazioni di S_1.

§. 310.

Inversione dei teoremi di Guichard e superficie a curvatura costante derivate.

Le ricerche compiute nei §§ precedenti ci pongono in grado di procedere alla *inversione* dei teoremi di Guichard e di dedurne quindi un importante metodo di trasformazione delle superficie a curvatura costante.

Ad ogni superficie S_1 di rotazione di una delle cinque forme trovate ai §§ 258, 259 i teoremi di Guichard associavano una congruenza di raggi uscente dai punti di S_1 ed invariabilmente legata alle deformazioni di questa in guisa che, in qualsiasi deformazione, la congruenza stessa rimaneva normale ad una superficie S a curvatura costante.

Noi abbiamo ora invertito questo risultato provando che, *data ad arbitrio* una superficie S a curvatura costante, si può sempre considerare la congruenza delle sue normali come uscente dai punti di una superficie S_1 applicabile sopra una delle cinque superficie di rotazione, la giacitura della congruenza rispetto alla S_1 essendo precisamente quella dei teoremi di Guichard. Invero ogni coppia (Φ, W) di soluzioni delle equazioni fondamentali

$$(E)\qquad \begin{cases} \Phi_{11} = (\gamma-1)\,K\,E\,\Phi + \gamma\,D\,W \\ \Phi_{12} = (\gamma-1)\,K\,F\,\Phi + \gamma\,D'\,W \quad (\gamma \text{ costante arbitraria}) \\ \Phi_{22} = (\gamma-1)\,K\,G\,\Phi + \gamma\,D''W \end{cases}$$

$$(E^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{F\,D' - G\,D}{EG - F^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D - E\,D'}{EG - F^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \dfrac{F\,D'' - G\,D'}{EG - F^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D' - E\,D''}{EG - F^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\,, \end{cases}$$

quando i valori iniziali di

$$\Phi,\ W,\ \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

siano scelti in guisa da soddisfare alla condizione

$$(F)\qquad \Delta_1 \Phi = (\gamma-1)\,K\,\Phi^2 - \gamma\,W^2$$

conduce ad una soluzione del problema d'inversione, le formole (48*) dando la superficie S_1 richiesta. Poichè il nostro sistema (E), (E*), (F) è omogeneo, si vede che: *Data una qualunque superficie* S *a curvatura costante, esistono* ∞^3 *superficie* S_1 *corrispondenti che risolvono il problema d'inversione.*

Ricordiamo ora che i teoremi di Guichard associavano ad ogni superficie S_1 non una sola ma due differenti superficie S, S' colla medesima curvatura costante; queste sono le due falde di un inviluppo di sfere coi centri distribuiti sopra S_1 (§§ 258, 259). Troviamo subito le formole che definiscono la nuova superficie a curvatura costante S', seconda falda dell'inviluppo, osservando che ogni punto $M' \equiv (x', y', z')$ di S' è simmetrico del punto corrispondente $M \equiv (x, y, z)$ di S rispetto al piano

tangente in M_1 alla S_1. Osservando che i coseni di direzione della normale a S_1 in (x_1, y_1, z_1) sono proporzionali a

$$\xi\ ,\quad \eta\ ,\quad \zeta\ ,$$

ne deduciamo con un semplice calcolo le formole definitive:

$$(50)\qquad \begin{cases} x' = x - \dfrac{2\,\Phi}{(\gamma-1)\,(K\Phi^2 - W^2)}\,[W\,X + \nabla\,(x,\Phi)] \\ y' = y - \dfrac{2\,\Phi}{(\gamma-1)\,(K\Phi^2 - W^2)}\,[W\,Y + \nabla\,(y,\Phi)] \\ z' = z - \dfrac{2\,\Phi}{(\gamma-1)\,(K\Phi^2 - W^2)}\,[W\,Z + \nabla\,(z,\Phi\,]\ . \end{cases}$$

Si avvertirà subito che, secondo le formole (*c*) al § 273* (pag. 152), questa seconda superficie S′ a curvatura costante K è essa stessa normale ai circoli del sistema ciclico individuato da (Φ, W), la qual cosa segue anche facilmente da considerazioni geometriche.

Così da ogni superficie nota S a curvatura costante K, integrato il sistema delle equazioni fondamentali (E), (E*), deduciamo una tripla infinità di nuove superficie S′ colla medesima curvatura costante date dalle formole (50). Ritorneremo in altro capitolo (Cap. XXV) sugli importanti risultati ora stabiliti.

§. 311.

Calcolo diretto dell'elemento lineare della complementare S_1.

Si è provato al § 309, utilizzando i risultati già stabiliti ai §§ 258, 259, che la superficie S_1 complementare di $\overline{S}$ è applicabile sopra una delle cinque superficie tipiche di rotazione che abbiamo visto figurare nelle ricerche sui teoremi di Guichard. Non sarà inutile constatare direttamente questo fatto partendo dalla forma (46*) dell'elemento lineare di $\overline{S}$ e cercando, colle formole del § 136* (I, pag. 296), l'elemento lineare della complementare S_1. In primo luogo se nella (46*) poniamo

$$v = v_1 - \int \frac{t\,dt}{K - t^2}\ ,$$

ridurremo il $\overline{ds}^2$ alla forma tipica ortogonale

$$\overline{ds}^2 = \frac{(\gamma-1)\,K-\gamma\,t^2}{(\gamma-1)\,K^2\,(K-t^2)}\,dt^2 + \frac{K-t^2}{(\gamma-1)\,K^2}\,dv_1^2\ ,$$

ossia, ponendo

$$r = \sqrt{\frac{K-t^2}{(\gamma-1)\,K^2}}\ , \qquad u = \int \sqrt{\frac{(\gamma-1)\,K-K\,t^2}{(\gamma-1)\,K^2\,(K-t^2)}}\,dt\ ,$$

alla forma normale

$$\overline{ds}^2 = du^2 + r^2\,dv_1^2\ .$$

Di qui deduciamo

$$r' = \frac{dr}{du} = -\frac{t}{\sqrt{(\gamma-1)\,K-K\,t^2}}$$

e quindi, applicando la formola (b^*) del citato § 136*, avremo per l'elemento lineare ds' della complementare S'

$$ds'^2 = \frac{(\gamma-1)\,(K-t^2)}{(\gamma-1)\,K-\gamma\,t^2}\,\frac{dt^2}{t^4} + \frac{(\gamma-1)\,K-\gamma\,t^2}{t^4}\,dv_1^2\ .$$

Se poniamo

$$t = \frac{1}{\tau}\ ,$$

potremo scrivere

$$(51)\qquad ds'^2 = \frac{(\gamma-1)\,(K\,\tau^2-1)}{(\gamma-1)\,K\,\tau^2-\gamma}\,d\tau^2 + [(\gamma-1)\,K\,\tau^2-\gamma]\,dv_1^2\ .$$

Per trovare la superficie di rotazione su cui la S' è applicabile, scrivendone l'elemento lineare sotto la forma ordinaria

$$(52)\qquad ds'^2 = [1+\psi'^2(r)]\,dr^2 + r^2\,dv^2\ ,$$

dovremo identificare la (51) colla (52) ponendo

$$r = \lambda\sqrt{(\gamma-1)\,K\,\tau^2-\gamma}\quad (\lambda \text{ costante})$$

e restando arbitraria la scelta del valore della costante λ. Otteniamo per tal modo

$$(53)\qquad \psi'^2(r) = \frac{\left[\frac{1}{\lambda^2(\gamma-1)}-K\right]r^2 + \left(\frac{1}{\gamma-1}-K\,\gamma\,\lambda^2\right)}{K\,(r^2+\lambda^2\,\gamma)}\ .$$

Conviene ora distinguere secondo che la curvatura costante K di S è positiva o negativa.

1.° caso K positiva.

Poniamo $K = \frac{1}{a^2}$ ed osserviamo che dalla (F) pag. 244:

$$\Delta_1 \Phi = (\gamma - 1) \frac{\Phi^2}{a^2} - \gamma W^2$$

risulta che, volendo restare nel reale, la costante γ, del resto arbitraria, dovrà essere tale che risulti

$$\gamma (\gamma - 1) > 0 .$$

Potremo dunque nella (53) prendere λ in guisa che sia

$$K \gamma \lambda^2 = \frac{1}{\gamma - 1} , \quad \lambda^2 = \frac{a^2}{\gamma (\gamma - 1)} .$$

e l'equazione della curva meridiana diventerà

$$z = \psi (r) = \sqrt{(\gamma - 1) r^2 + a^2} ,$$

cioè

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{\frac{a^2}{\gamma - 1}} = 1 .$$

Siamo così ricondotti all'ellissoide allungato di rotazione o all'iperboloide a due falde del teorema di Guichard (§ 258), e precisamente avremo il primo caso od il secondo, secondo che γ (ovvero $\gamma - 1$) è negativa o positiva. Non sarà inutile osservare che la (F), scritta sotto la forma

$$\Delta_1 \Phi + W^2 = (\gamma - 1) \left(\frac{\Phi^2}{a^2} - W^2 \right) ,$$

dimostra che nel primo caso sarà

$$\frac{\Phi^2}{W^2} < a^2 ,$$

nel secondo invece

$$\frac{\Phi^2}{W^2} > a^2 .$$

2.° caso K negativa

Poniamo $K = -\frac{1}{R^2}$ ed osserviamo che essendo per la (F)

$$\Delta_1 \Phi + W^2 = -(\gamma - 1)\left(\frac{\Phi^2}{R^2} + W^2\right),$$

dovremo assumere $\gamma - 1$ negativa, poniamo

$$\gamma - 1 = -\frac{R^2}{a^2},$$

ed assumendo nella (53)

$$\lambda^2(\gamma - 1) = \frac{1}{K},$$

cioè

$$\lambda^2 = a^2,$$

l'equazione della curva meridiana sarà

$$z = \psi(r) = R\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + a^2 - R^2}}.$$

Questa formola coincide precisamente colla (34) del § 259 (pag. 108) e completa le verifiche proposte.

§. 312.

Applicazioni del metodo di Weingarten alla geometria ellittica.

Da ultimo del nuovo metodo di Weingarten daremo alcune applicazioni alla geometria degli spazi di curvatura costante, che conducono ad interessanti raffronti.

A tale scopo ci serviamo di quella rappresentazione conforme dello spazio a curvatura costante

$$K_0 = \pm 1$$

sullo spazio euclideo che si ottiene assumendo il ds^2 dello spazio curvo sotto la forma al § 159 (I, pag. 345)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \pm \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Consideriamo nello spazio curvo una superficie S le cui curvature totale e media

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \quad H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

siano legate dalla relazione lineare intera a coefficienti costanti

$$a \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + b \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + c = 0 . \tag{54}$$

È facile vedere che la superficie Σ immagine di S nello spazio euclideo apparterrà alla classe considerata da Weingarten, sarà cioè un integrale dell'equazione (IX) d'Ampère (pag. 198)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0 , \tag{55}$$

essendo φ una conveniente funzione di p, q.

Se ricorriamo infatti alle formole del § 222 [(57*) I, pag. 515], che legano le due curvature della superficie obiettiva S con quelle dell'immagine euclidea Σ, ed osserviamo che essendo qui

$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2 \pm \frac{1}{4} = 2q \pm \frac{1}{4} ,$$

si ha

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 2 (x X + y Y + z Z) = 2p ,$$

le citate formole diventano

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1 \rho_2} = \left(2q \pm \dfrac{1}{4} \right)^2 \dfrac{1}{r_1 r_2} - 2p \left(2q \pm \dfrac{1}{4} \right) \left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} \right) + 4p^2 \\ \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \left(2q \pm \dfrac{1}{4} \right) \left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} \right) - 4p . \end{cases}$$

Sostituendo nella (54), troviamo che la Σ è un integrale dell'equazione seguente d'Ampère:

$$a \left(2q \pm \frac{1}{4} \right)^2 \frac{1}{r_1 r_2} + \left(2q \pm \frac{1}{4} \right) (b - 2ap) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + 4ap^2 - 4bp + c = 0 . \tag{56}$$

Questa, ponendo

$$\varphi = \frac{1}{8} \frac{4ap^2 - 4bp + c}{2q \pm \dfrac{1}{4}} , \tag{57}$$

si scrive appunto sotto la forma (55).

Ora dalle superficie integrali della (56), avendo a, b, c valori costanti, il metodo di Weingarten fa derivare una classe di superficie applicabili dello spazio euclideo, delle quali si tratta ora di calcolare l'elemento lineare.

Scindendo per ciò nelle formole superiori le due determinazioni di segno, consideriamo dapprima il caso ellittico; allora si ha dalla (57)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial p} = \dfrac{ap - \dfrac{1}{2}\, b}{2q + \dfrac{1}{4}} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q} = \dfrac{bp - ap^2 - \dfrac{1}{4}\, c}{\left(2q + \dfrac{1}{4}\right)^2}, \end{cases}$$

e l'elemento lineare sarà da calcolarsi dalla formola (VIII) pag. 198

$$(58) \qquad ds^2 = \left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 + 2p \left(d \cdot \frac{\partial p}{\partial p}\right)\left(d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + 2q \left(d\ \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2.$$

Ora cangiamo le variabili p, q in α, β colle formole

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{4} - 2q}{2q + \dfrac{1}{4}}, \quad \beta = \frac{p}{2q + \dfrac{1}{4}},$$

ossia

$$2p = \frac{\beta}{\alpha + 1}, \quad 2q = \frac{1 - \alpha}{4(\alpha + 1)};$$

allora avendosi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial p} = a\beta - b(\alpha + 1) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q} = 2b\beta(\alpha + 1) - a\beta^2 - c(\alpha + 1)^2, \end{cases}$$

la sostituzione nella (58) ci darà:

$$(59) \quad ds^2 = (a\,d\beta - b\,d\alpha)^2 + (b\,d\beta - c\,d\alpha)^2 - [a\beta\,d\beta + c\alpha\,d\alpha - b(\alpha\,d\beta + \beta\,d\alpha)]^2.$$

Questo elemento lineare appartiene al paraboloide immaginario

$$x = a\beta - b\alpha\,,\quad y = b\beta - c\alpha\,,\quad z = \frac{i}{2}\left(a\beta^2 + c\alpha^2 - 2b\alpha\beta\right),$$

ossia

$$z = \frac{i}{2(ac-b^2)}\left[cx^2 - 2bxy + ay^2\right],$$

che può ridursi evidentemente (cangiando gli assi x, y) alla forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz\,, \tag{60}$$

con p, q costanti reali qualunque.

Ne concludiamo: *La determinazione delle superficie dello spazio ellittico appartenenti alla classe* (54) *equivale alla ricerca delle superficie dello spazio euclideo applicabili sul più generale paraboloide* (60) *a parametri puramente immaginari.*

Del resto, siccome ad ogni superficie dello spazio ellittico della classe (54) è parallela una superficie a curvatura costante, non si altera la generalità supponendo $b = 0$. Notevole è il caso in cui inoltre $a = c$: allora la superficie dello spazio ellittico avendo $\frac{1}{\rho_1\rho_2} = 1$ è a curvatura totale nulla e d'altra parte la (59) diventa

$$ds^2 = a^2\left\{(1-\alpha^2)\,d\alpha^2 - 2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta + (1-\beta^2)\,d\beta^2\right\}$$

che, colle sostituzioni

$$\alpha = \rho\cos\theta \qquad \beta = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

assume la nota forma (§ 245 pag. 64)

$$ds^2 = a^2\left\{(1-\rho^2)\,d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2\right\}$$

delle evolute delle superficie W per le quali

$$r_1 - r_2 = \mathrm{sen}\,(r_1 + r_2)\,.$$

Abbiamo già imparato a trovare in termini finiti tutte queste superficie, come pure tutte le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico (Cap. XIV); ora vediamo che i due problemi sono perfettamente equivalenti.

§. 313.

Applicazioni alla geometria iperbolica.

Affatto analogamente si può procedere nel caso iperbolico, ove nella (57) vale il segno superiore. Facendo qui il cangiamento di variabili

$$\alpha = \frac{2q + \frac{1}{4}}{2q - \frac{1}{4}}, \quad \beta = \frac{p}{2q - \frac{1}{4}},$$

da cui

$$2p = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \; 2q = \frac{\alpha + 1}{4(\alpha - 1)},$$

si avrà

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = a\beta - b(\alpha - 1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 2b\beta(\alpha - 1) - a\beta^2 - c(\alpha - 1)^2 \end{cases},$$

e quindi per l'elemento lineare delle superficie derivate si trova con un semplice calcolo:

$$(61)\; ds^2 = (a\,d\beta - b\,d\alpha)^2 - (c\,d\alpha - b\,d\beta)^2 + [c\alpha\,d\alpha + a\beta\,d\beta - b(\alpha\,d\beta + \beta\,d\alpha)]^2.$$

Questo appartiene al paraboloide

$$x = a\beta - b\alpha, \; y = i(c\alpha - b\beta), \; z = c\frac{\alpha^2}{2} + a\frac{\beta^2}{2} - b\alpha\beta,$$

che, se non ci preoccupiamo dell'immaginario, è lo stesso paraboloide come nel caso ellittico.

Ma, ponendoci dal punto di vista reale, consideriamo tre casi particolari notevoli:

1.° Poniamo in primo luogo

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1,$$

sicchè la (54) diventa

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = 1,$$

e le superficie dello spazio iperbolico sono quelle a curvatura totale

nulla. L'elemento lineare (61) diventa

$$ds^2 = (\alpha^2 - 1)\, d\alpha^2 - 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + 1)\, d\beta^2$$

e colle sostituzioni

$$\alpha = \rho \cosh\theta \quad \beta = \rho \operatorname{senh}\theta$$

assume la forma

$$ds^2 = (\rho^2 - 1)\, d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 .$$

Questa appartiene alla superficie complementare del paraboloide di rotazione (§ 246); tutte le superficie di questo elemento lineare sono note e quindi anche tutte le superficie a curvatura nulla dello spazio iperbolico.

2.° Poniamo ora

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -2 ,$$

con che le superficie Σ dello spazio iperbolico diventano quelle colla curvatura media $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2$ e la (61) assume la forma

$$ds^2 = [2\alpha + \beta)^2 - 3]\, d\alpha^2 + 2\,[\alpha\beta + 2\,(\alpha^2 - 1)]\, d\alpha\, d\beta + (\alpha^2 - 1)\, d\beta^2 .$$

Questa colle sostituzioni

$$v = \log(\alpha + \beta), \; 2u = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\log(\alpha + \beta) - 1$$

si traduce nell'altra

$$ds^2 = du^2 + (2u + 2v - e^{2v})\, dv^2 , \tag{62}$$

che abbiamo già incontrato al § 298.

3.° Facciamo in fine

$$a = -2 \quad b = 1 \quad c = 0 ,$$

cioè consideriamo la superficie dello spazio iperbolico per le quali

$$\rho_1 + \rho_2 = 2 .$$

La (61) diventa

$$ds^2 = (1 + \beta^2)\, d\alpha^2 + 2\,\{\alpha\beta + 2\,(1 + \beta^2)\}\, d\alpha\, d\beta + \{(2\beta + \alpha)^2 + 3\}\, d\beta^2 ,$$

che, ponendo

$$v = \log(\alpha + \beta), \; 2u = -\{2\alpha\beta + 2\beta^2 + 2\log(\alpha + \beta) + 1\},$$

assume la forma

$$(62^*) \qquad ds^2 = du^2 + (2u + 2v + e^{v^2})\, dv^2 .$$

Al § 298 abbiamo veduto che si possono determinare in termini finiti tutte le superficie d'elemento lineare (62), (62*). Questo risultato di Weingarten assume adunque nella geometria iperbolica il significato seguente:

Nello spazio iperbolico di curvatura $K = -1$ *si possono trovare in termini finiti tutte le superficie per le quali* $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2$ *e tutte quelle per le quali* $\rho_1 + \rho_2 = 2$.

Capitolo XXI

Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane o sferiche

Superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane. — Loro costruzione geometrica secondo Darboux. — Superficie con un solo sistema di linee di curvatura piane, loro determinazione per quadrature. — Superficie modanate generali. — Superficie modanate a direttrice cilindrica. — Superficie di Joachimsthal. — Superficie a linee di curvatura circolari. — Ciclide di Dupin. — Elementi caratteristici di una superficie a linee di curvatura circolari. — Proprietà generali dei luoghi dei circoli osculatori delle linee di curvatura di una superficie qualunque lungo le linee di curvatura dell'altro o del medesimo sistema. — Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane. — Teorema di Ribaucour. — Superficie d'area minima colle linee di curvatura piane. — Superficie a curvatura costante d'Enneper. — Elicoidi pseudosferiche del Dini. — Superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche. — Teorema di Blutel e determinazione di queste superficie.

§. 314.

Forma dell'elemento lineare sferico riferito ad un sistema doppio ortogonale di circoli.

La classe di superficie, di cui trattiamo nel presente capitolo, ha formato l'oggetto delle ricerche di un gran numero di geometri; noi ci proponiamo qui di far conoscere i principali risultati della teoria, che permettono di riguardare queste superficie come perfettamente note. Cominciamo le nostre ricerche dal caso più semplice, quello delle superficie *con tutte le linee di curvature piane*. Osserviamo dapprima che per le proprietà delle curve evolute, le superficie *sviluppabili* di questa classe sono tutte e sole quelle che hanno per spigolo di regresso un'elica. Lasciando da parte questo caso ovvio, per determinare le nostre superficie ricorreremo alla loro rappresentazione sferica (Cap. V). Per le proprietà di questa rappresentazione è chiaro che l'immagine sferica di una linea di curvatura piana è un circolo (minore) della sfera, giacente in un piano parallelo a quello della linea di curvatura; e viceversa se l'immagine sferica di una linea di curvatura è un circolo, questa giacerà in un piano parallelo a quello del circolo. [1]

---

[1] Si ricordi che le linee di curvatura sono caratterizzate dalla proprietà di avere le loro tangenti parallele a quelle della loro immagine sferica (I, pag. 151).

Le immagini sferiche delle linee di curvatura delle nostre superficie formeranno dunque un doppio sistema ortogonale di circoli. Sappiamo che un tale sistema si ottiene, nel modo più generale, intersecando la sfera con due fasci di piani i cui assi siano rette polari reciproche rispetto alla sfera (V.[1] I, pag. 108), onde risulta intanto: *In ogni superficie con tutte le linee di curvatura piane, i piani delle linee di curvatura dell'un sistema sono paralleli ad una retta, quelli del secondo sistema ad una seconda retta perpendicolare alla prima.*

La prima ricerca che dobbiamo fare è quella di trovare la forma dell'elemento lineare sferico, riferito al detto sistema di circoli. Conviene per ciò distinguere due casi e cioè 1.° le due rette polari rispetto alla sfera sono tangenti coniugate (ortogonali) di questa, 2.° le due rette polari reciproche rispetto alla sfera non sono tangenti a questa.

1.° caso.

Considerando la sfera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

prendiamo per le due tangenti coniugate r, r' quelle condotte pel punto (0, 0, 1) parallelamente agli assi $0y$, $0x$. Le equazioni dei piani dei due fasci si scriveranno

$$x + u(z - 1) = 0$$
$$y + v(z - 1) = 0,$$

indicando con u, v i parametri che individuano ciascun piano nel rispettivo fascio. Le coordinate X, Y, Z del punto (u, v) della sfera si otterranno dalle tre equazioni

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad X + u(Z - 1) = 0, \quad Y + v(Z - 1) = 0,$$

ciò che dà per le formole richieste

$$(1) \qquad X = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad Y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad Z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Queste esprimono le coordinate X, Y, Z in funzione dei parametri u, v del doppio sistema di circoli. Si osserverà che la variabile complessa

$$\tau = u + iv$$

non è altro che la variabile complessa della sfera introdotta al Cap. III

(I, pag. 110); le (1) possono scriversi

$$(2) \qquad X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i}\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1},$$

e danno per l'elemento lineare sferico

$$ds^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2},$$

ovvero

$$(3) \qquad ds^2 = \frac{4\,(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

2.° caso.

Prendiamo per semplicità per asse delle z la normale comune a r, r' e gli assi $0x$, $0y$ rispettivamente paralleli a queste rette. Supponiamo, per fissare le idee, che la retta r sia esterna alla sfera, quindi la r' interna; allora le coordinate dei punti ove r, r' incontrano l'asse z saranno

$$\left(0,\ 0, \frac{1}{a}\right) \quad (0, 0, a),$$

essendo a una costante positiva e < 1. Escludiamo qui il caso in cui sia $a = 0$ perchè allora il doppio sistema di circoli consterebbe di meridiani e paralleli; questo caso è già stato esaminato al § 83 (I, pag. 176) come corrispondente alle superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica.

Le equazioni dei due fasci di circoli si scrivono quindi

$$x - \lambda\,(z - a) = 0$$

$$y - \mu\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0,$$

essendo λ, μ i parametri dei due fasci.

Cangiamo parametri ponendo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}\,\mathrm{tg}\,u, \quad \mu = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\,\mathrm{tgh}\,v, \ (1)$$

e ne deduciamo subito le espressioni di X, Y, Z per le coordinate u, v

(1) Si osservi che solo per $|\mu| < \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$ il piano $y - \mu\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0$ sega realmente la sfera.

colle formole

$$(4)\quad X=\frac{\sqrt{1-a^2}\,\operatorname{sen} u}{\cosh v+a\cos u},\ Y=-\frac{\sqrt{1-a^2}\,\operatorname{senh} v}{\cosh v+a\cos u},\ Z=\frac{\cos u+a\cosh v}{\cosh v+a\cos u}.$$

L'elemento lineare sferico assume conseguentemente la forma

$$(5)\qquad ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(\cosh v+a\cos u)^2}.$$

Si osserverà che, conformemente ai risultati ottenuti al § 97 (I, pag. 211), tanto l'elemento lineare (3) come il (5) hanno la forma

$$(a)\qquad ds^2=\frac{du^2+dv^2}{\lambda^2},$$

ove λ è la somma di due funzioni l'una della sola u, l'altra della sola v.

§. 315.

Generazione geometrica di Darboux per le superficie a linee di curvatura piane.

La ricerca di tutte le superficie con ambedue i sistemi di linee di curvatura piane è ora ridotta a quella delle superficie che hanno per immagine delle linee di curvatura il sistema (u, v) di circoli della sfera corrispondente alla formola (3) o alla (5).

Basterà per ciò applicare il metodo generale che al § 82 (I, pag. 174) abbiamo *dedotto* dalle formole di Weingarten relative alle coordinate tangenziali. Indicando con W la distanza algebrica del piano tangente alla superficie richiesta dall'origine, dovremo determinare W dall'equazione di Laplace relativa alla forma (a) dell'elemento lineare sferico:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v}=0.$$

Ma poichè qui si ha

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}=0,$$

il cangiamento di funzione incognita W

$$W=\frac{W_1}{\lambda}$$

riduce la precedente alla

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial u\,\partial v} = 0\,;$$

la soluzione più generale del problema proposto si ottiene dunque ponendo

$$W = \frac{U + V}{\lambda}\,,$$

indicando con U, V due funzioni arbitrarie di u, v rispettivamente.

Ne risulta che la più generale superficie a linee di curvatura piane, nel caso dell'elemento lineare sferico (3), sarà l'inviluppo del piano

$$2\,u\,x + 2\,v\,y + (u^2 + v^2 - 1)\,z = 2\,(U + V)\,, \tag{6}$$

e nel caso (5) dell'altro

$$\sqrt{1-a^2}\,\operatorname{sen} u\,.\,x - \sqrt{1-a^2}\,\operatorname{senh} v\,.\,y + (\cos u + a\cosh v)\,z = U + V. \tag{6*}$$

Eseguiamo i nostri calcoli nel primo caso, osservazioni perfettamente analoghe valendo nel secondo. Il piano (6) può riguardarsi come il piano radicale delle due sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,u\,x + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right) z = 2\,U \tag{7}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,v\,y - \left(v^2 - \frac{1}{2}\right) z = -2\,V. \tag{8}$$

Al variare del parametro u la (7) ci dà una semplice infinità di sfere, i cui centri sono distribuiti sulla curva del piano $x\,z$

$$x = -u\,,\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - u^2\right),$$

cioè sulla parabola

$$x^2 = 2\left(\frac{1}{4} - z\right), \tag{9}$$

mentre il raggio, essendo U funzione arbitraria di u, varia con legge affatto arbitraria.

Similmente le sfere (8) hanno i centri distribuiti, nel piano $y\,z$, sulla curva

$$y = v\,,\ z = \frac{1}{2}\left(v^2 - \frac{1}{2}\right)$$

cioè sulla parabola

$$y^2 = 2\left(\frac{1}{4} + z\right) \tag{10}$$

ed il raggio della sfera varia ancora con una legge qualunque. Le due parabole (9), (10) giacciono in piani perpendicolari ed hanno ciascuna rispettivamente per vertice e per fuoco il fuoco ed il vertice dell'altra. Esse sono cioè parabole *focali* l'una dell'altra, cioè ciascuna è il luogo dei vertici dei coni rotondi che projettano l'altra.

Le più generali superficie a linee di curvatura piane corrispondenti al primo caso si ottengono dunque nel modo seguente: Prese due serie ∞^1 di sfere, di raggio variabile secondo una legge arbitraria, ed aventi i centri rispettivamente distribuiti sopra due parabole focali, se si associa una sfera qualunque della prima serie ad una sfera qualunque della seconda, il piano radicale delle due sfere inviluppera la superficie richiesta.

Servendoci delle formole in coordinate tangenziali (I, pag. 173) possiamo scrivere le equazioni in termini finiti delle nostre superficie. Ma per proseguire nella interpretazione geometrica val meglio osservare che il punto di contatto del piano inviluppante si ottiene associando alla (6) le due equazioni che ne risultano derivando rapporto ad u e v, cioè

$$x + u z = \mathrm{U}'$$
$$y + v z = \mathrm{V}' .$$

Queste possono anche considerarsi come ottenute dalle (7), (8) rispettivamente derivandole rapporto ad u, v; la prima è quindi l'equazione del piano radicale della sfera (7) e della successiva nella serie (u) e similmente per la seconda. Dunque il punto di contatto del piano inviluppante è il centro radicale delle due sfere (u), (v) e delle loro successive nella rispettiva serie. È chiaro poi che, tenendo fisso u e facendo variare v, questo punto descriverà una linea di curvatura u, giacente nel piano radicale della sfera (u) e della successiva; e similmente dicasi per le linee di curvatura v.

Considerazioni affatto analoghe possono farsi nel secondo caso quando l'equazione del piano inviluppante è la (6*). Soltanto alle serie ∞^1 di sfere (7), (8) sono da sostituirsi le altre due

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1 - a^2}\,\mathrm{sen}\, u \,.\, x + \cos u \,.\, z = \mathrm{U} \tag{7*}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1 - a^2}\,\mathrm{senh}\, v \,.\, y - a \cosh v \, z = -\mathrm{V}\,; \tag{8*}$$

i loro centri sono distribuiti sulle curve

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{sen}\,u\ ,\ z = -\frac{1}{2}\cos u\ ,\ y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{senh}\,v\ ,\ z = -\frac{1}{2}\,a\cosh v\ ,\ x = 0,$$

che sono rispettivamente una ellisse ed un'iperbola, focali l'una dell'altra.

Siamo arrivati per tal modo alla seguente elegantissima costruzione geometrica di Darboux [1] per le più generali superficie a linee di curvatura piane:

Prese due famiglie di sfere i cui centri siano distribuiti sopra due coniche focali e i cui raggi variino con legge arbitraria in ciascuna famiglia, il piano radicale di due sfere qualunque, l'una della prima l'altra della seconda famiglia, inviluppera la più generale superficie richiesta. Associando alle due sfere le loro successive in ciascuna famiglia, il centro radicale delle quattro sfere descriverà la superficie, ed i piani radicali di ciascuna sfera e della successiva saranno i piani delle linee di curvatura dei due sistemi.

È da osservarsi che anche le superficie modanate del § 83 rientrano nella costruzione generale precedente. Esse corrispondono al caso $a = 0$ nella (5), le linee u, v riducendosi ai meridiani e paralleli; allora la ellisse si riduce ad un circolo e l'iperbola focale al suo asse.

A proposito delle superficie ora studiate osserviamo il seguente teorema, che si deduce subito dalle proprietà della rappresentazione sferica: *Se una superficie ha un sistema di linee di curvatura piane e nel secondo sistema ha ancora due linee di curvatura piane, anche tutte le altre saranno piane.*

E infatti le immagini sferiche di queste due linee del secondo sistema saranno due circoli minori della sfera e questi due circoli dovranno essere tagliati ortogonalmente da tutti i circoli immagini delle linee di curvatura del primo sistema. Questi ultimi formano adunque un fascio, ciò che dimostra la proposizione.

---

[1] *Leçons* etc. t. I, pag. 132.

§. 316.

Determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

Passando ora allo studio delle superficie con un solo sistema di linee di curvatura piane, dovremo scegliere sulla sfera rappresentativa una serie ∞^1 di circoli, del resto arbitraria, e presi questi circoli insieme colle loro traiettorie ortogonali a linee coordinate u, v, con che l'elemento lineare sferico assumerà la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \tag{11}$$

dovremo ricercare le superficie che hanno per immagine delle loro linee di curvatura questo sistema sferico (u, v). Ora, supposto che le linee sferiche u siano circoli, la loro curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ sarà funzione di u soltanto, cioè sarà

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = U, \tag{12}$$

essendo U funzione della sola u.

La determinazione delle nostre superficie, in coordinate tangenziali (X, Y, Z, W), dipende (§ 82, I, pag. 174) dalla integrazione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v},$$

la quale per la (12) diventa

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + U\sqrt{E}\,\frac{\partial W}{\partial v}.$$

Il secondo invariante di questa equazione è nullo (Darboux II, pag 23), essa si integra quindi con una prima trasformazione di Laplace. Scrivendola infatti sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - U\sqrt{E}\ .\ W\right) = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\left(\frac{\partial W}{\partial u} - U\sqrt{E}\ .\ W\right),$$

se ne ha immediatamente l'integrale generale con due funzioni arbi-

trarie $\varphi(u)$, $\psi(v)$ colla formola

$$(13) \qquad W = e\int_u^u U\sqrt{E}\,du\left\{\psi(v) + \int_{u_0}^u \varphi(u)\sqrt{E}\,.\,e - \int_{u_0}^u U\sqrt{E}\,\frac{du}{du}\right\},$$

indicando con u_0 un particolare valore della u.

Il nostro problema è dunque ricondotto a riferire la sfera, nel modo più generale possibile, ad un doppio sistema ortogonale nel quale le linee di un sistema siano circoli, dopo di che la (13) ci darà con quadrature le superficie richieste. Per ciò, scelto ad arbitrio sulla sfera un sistema ∞^1 di circoli, dobbiamo determinare le loro traiettorie ortogonali. Mediante projezione stereografica (I, pag. 107) riportiamo il problema dalla sfera sul piano e dimostriamo che la sua risoluzione dipende in generale dalla integrazione di un'equazione di Riccati. Ciò risulta già da quanto abbiamo esposto al Cap. I (I, pag. 44), sulla determinazione delle traiettorie ortogonali di un sistema di sfere, quando si suppone che la curva luogo dei centri sia piana. Per dimostrare la cosa direttamente [1] prendiamo il piano fisso per $x\,y$ e siano

$$x = x(u),\ y = y(u)$$

le equazioni della curva luogo dei centri, u indicando un parametro; sia poi $r = r(u)$ il raggio del circolo. Le coordinate x_1, y_1 di un punto qualunque sopra uno dei nostri circoli saranno

$$x_1 = x + r\cos\theta\,,\quad y_1 = y + r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e per la risoluzione del nostro problema dovremo determinare θ in funzione di u in guisa che si abbia

$$\frac{dx_1}{du} : \frac{dy_1}{du} = x_1 - x : y_1 - y\,,$$

ciò che dà per θ l'equazione del 1.° ordine

$$r\frac{d\theta}{du} = \mathrm{sen}\,\theta\frac{dx}{du} - \cos\theta\frac{dy}{du}\,.$$

Questa, assumendo per incognita $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta$ in luogo di θ, prende appunto la forma di Riccati.

[1] Cf. Darboux I, pag. 118.

Ora, poichè il nostro sistema di circoli deve essere il più generale possibile, potremo darci *a priori* una od anche due delle loro traiettorie ortogonali, dopo di che con due o con una quadratura troveremo tutte le altre.

Così abbiamo ricondotto alle quadrature il problema della determinazione di tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura piane. Rimane ora che studiamo più da vicino le proprietà geometriche di queste superficie, cominciando dalle classi particolari più notevoli.

§. 317.

Superficie modanate generali.

Una prima classe notevole delle nostre superficie si ha supponendo che i piani delle linee di curvatura siano ortogonali alla superficie, cioè queste linee di curvatura siano geodetiche. E poichè inversamente ogni linea di curvatura geodetica è altresì piana (I, pag. 200), possiamo dire che *le superficie attuali sono caratterizzate dall'avere un sistema di linee di curvatura geodetiche*. Le immagini sferiche di queste linee di curvatura sono evidentemente circoli massimi. Analiticamente le superficie richieste si ottengono dunque colle formole del § precedente, ove si ponga $U = 0$.

La determinazione geometrica delle nostre superficie S risulta dalle considerazioni seguenti. I piani delle linee di curvatura geodetiche di S inviluppano una sviluppabile e le linee di curvatura del secondo sistema sono traiettorie ortogonali di quel sistema ∞^1 di piani. Viceversa, presa una serie ∞^1 di piani e la congruenza delle loro traiettorie ortogonali, il luogo di una semplice infinità di queste traiettorie sarà una superficie della classe richiesta, poichè ciascuno dei nostri piani taglia evidentemente ad angolo retto la superficie. Dato il sistema ∞^1 di piani, la determinazione delle loro traiettorie ortogonali si effettua, come si è visto al Cap. I (I, pag. 38), con quadrature; per fissare una delle nostre superficie basterà dare in uno dei piani π la linea di curvatura piana C, che potrà prendersi affatto ad arbitrio. Si osservi ora che per portare π dalla posizione attuale alla successiva basta far rotare π attorno alla generatrice della sviluppabile inviluppata dai piani dell'angolo di torsione $\frac{ds}{T}$, essendo ds l'elemento d'arco dello spigolo di regresso

e $\frac{1}{T}$ la torsione. Con ciò ogni punto di C descrive un arco infinitesimo di cerchio e si trasporta nella linea di curvatura successiva C', che è adunque identica di forma a C. Di qui si conclude che tutte le linee di curvatura geodetiche sono identiche di forma, come anche facilmente si rileva dalle citate formole del Cap. I (pag. 39), od anche dalle formole di Codazzi.[1] Abbiamo dunque il risultato:

Le superficie con un sistema di linee di curvatura geodetiche vengono generate da un profilo piano, invariabile di forma, il cui piano rotoli senza strisciare sopra una superficie sviluppabile.

Diremo queste superficie: *superficie modanate* e sviluppabile direttrice quella su cui rotola il piano del profilo. In particolare se questa sviluppabile è cilindrica, si avranno le particolari superficie modanate già considerate al Cap. V § 83 (I, pag. 176) con un sistema di linee di curvatura in piani paralleli. Osserviamo che le normali di una superficie modanata S toccano la sviluppabile direttrice Σ, la quale è adunque una delle falde dell'evoluta. La seconda falda è evidentemente una nuova superficie modanata, che ha per profilo l'evoluta piana del profilo di S e la medesima sviluppabile direttrice. Viceversa si vedrà subito che: *Le evolventi di una sviluppabile Σ sono superficie modanate che ammettono Σ per sviluppabile direttrice* [2].

§. 318.

Elemento lineare delle superficie modanate.

Vogliamo calcolare l'elemento lineare di una superficie modanata, riferita alle sue linee di curvatura, per la qual cosa ci è utile modificare

---

[1] Se le linee di curvatura v della superficie sono geodetiche, si può fare $E = 1$ e dalla prima formola di Codazzi (I, pag. 278, formola (1)) risulta

$$\frac{1}{r_2} = f(u) ,$$

ovvero $\frac{1}{\rho} = f(u)$ indicando con ρ il raggio di curvatura della linea piana u.

[2] Analiticamente ciò risulta anche dalle formole del Cap. IX relative alla evoluta. Supposto infatti che la prima falda S_1 sia sviluppabile, la formola (12) I, pag. 276 dà $\frac{\partial r_2}{\partial v} = 0$ e quindi la (1) pag. 278:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 .$$

la costruzione data sopra nel modo seguente. Sul piano π, che contiene il profilo della superficie modanata e rotola sulla sviluppabile direttrice Σ, immaginiamo tracciata una retta arbitraria ma fissa. Questa rotolerà sopra una geodetica g di Σ ed in ogni sua posizione π sarà il piano della tangente e della binormale di g; si può dunque generare la superficie modanata nel modo seguente: *Tracciato in un piano π un profilo arbitrario, si facoia rotolare una retta fissa di π sopra una ourva arbitraria g in guisa che π si mantenga costantemente normale alla normale principale di g; il luogo descritto dal profilo sarà la superficie modanata.*

Per definire analiticamente la superficie diamo la curva g, della quale indichiamo con v l'arco, contato da un punto fisso, mantenendo tutte le altre consuete notazioni del Cap. I. Riferiamo poi il profilo nel piano π ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in π, dei quali uno coincida colla retta fissa R; indichiamo con u l'arco del profilo e sia $r = r(u)$ la distanza algebrica di un suo punto arbitrario M dall'asse R, con $\Lambda = \Lambda(u)$ l'altra coordinata, onde sarà

$$r'^2 + \Lambda'^2 = 1 \ .$$

Se x_1, y_1, z_1 indicano le coordinate di un punto mobile sulla superficie modanata, si avrà:

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1 = x - (v + \Lambda)\,\alpha + r\,\lambda \\ x_1 = y - (v + \Lambda)\,\beta + r\,\mu \\ x_1 = z - (v + \Lambda)\,\gamma + r\,\nu \ , \end{cases}$$

da cui derivando

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = r'\,\lambda - \Lambda'\,\alpha \ , \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = r'\,\mu - \Lambda'\,\beta \ , \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = r'\,\nu - \Lambda'\,\gamma$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \left(\frac{r}{T} - \frac{v+\Lambda}{\rho}\right)\xi \ , \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \left(\frac{r}{T} - \frac{v+\Lambda}{\rho}\right)\eta \ , \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \left(\frac{r}{T} - \frac{v+\Lambda}{\rho}\right)\zeta \ ,$$

e quindi per l'elemento lineare della superficie:

$$(15) \qquad ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = du^2 + \left(\frac{r}{T} - \frac{v+\Lambda}{\rho}\right)^2 dv^2 \ .$$

Ciò conferma intanto che le linee v (profili) sono geodetiche e quindi, essendo piane, linee di curvatura. Calcoliamo altresì i raggi principali

di curvatura osservando che i coseni di direzione della normale sono

$$X_1 = -r'\alpha - \Lambda'\lambda \ , \quad Y_1 = -r'\beta - \Lambda'\mu \ , \quad Z_1 = -r'\gamma - \Lambda'\nu \ ,$$

onde, servendoci delle formole di Rodrigues, troviamo:

$$r_1 = \frac{\dfrac{v+\Lambda}{\rho} - \dfrac{r}{T}}{\dfrac{r'}{\rho} + \dfrac{\Lambda'}{T}} \ , \quad r_2 = \frac{\Lambda'}{r'} \ . \tag{16}$$

Applichiamo queste formole al caso in cui la sviluppabile direttrice Σ sia cilindrica, cioè la superficie modanata appartenga alla classe particolare del § 83.

Basterà per ciò supporre che la curva g sia piana (ovvero un'elica). Ponendo $\frac{1}{T} = 0$ avremo dalle (15)

$$ds_1^2 = du^2 + \frac{(v+\Lambda)^2}{\rho^2}\, dv^2 . \tag{17}$$

Sappiamo già dal § 240 (pag. 45) che queste particolari superficie sono le uniche suscettibili di una deformazione continua che conservi le linee di curvatura. Colla (17) risolviamo ora subito il problema di trovare effettivamente queste deformazioni. Supposto invero che per una seconda superficie modanata di questa classe si abbia

$$ds_1^2 = du_1^2 + \frac{(v+\lambda_1)^2}{\rho_1^2}\, dv_1^2 \ ,$$

per identificare i due elementi lineari potremo porre evidentemente

$$u_1 = u \quad v_1 = v_1(v) \ ,$$

onde resterà

$$\frac{\rho}{\rho_1}\frac{dv_1}{dv}(v_1 + \Lambda_1) = v + \Lambda \ .$$

Questa, derivata rapporto ad u, dimostra che $\frac{\rho}{\rho_1}\frac{dv_1}{dv}$ deve essere una costante, che indichiamo con $\frac{1}{k}$; dunque sarà

$$v_1 - kv = k\Lambda - \Lambda_1 = C \ ,$$

C indicando una costante che possiamo rendere nulla contando v_1 in

modo che si annulli con v. Dopo ciò avremo

$$\Lambda_1 = k\Lambda \quad , \quad v_1 = kv \ , \quad \rho_1 = k^2\rho$$

e la prima formola ci dimostra che: *il profilo della superficie modanata si deforma* come se fosse il meridiano di una superficie di rotazione (Cf. § 105, I, pag. 232)

Nello stesso tempo però conviene deformare la sezione retta del cilindro direttore secondo la legge espressa dalla formola

$$\rho_1(v_1) = k^2\rho\left(\frac{v_1}{k}\right),$$

essendo $\rho = \rho(v)$ l'equazione intrinseca di questa sezione retta nella configurazione iniziale.

§. 319.

Superficie modanate a direttrice conica.

Fra le superficie modanate meritano ancora speciale menzione quelle la cui sviluppabile direttrice è un cono.

I piani normali alle linee di curvatura del secondo sistema concorrono in tal caso nel vertice del cono e le curve stesse sono quindi tracciate sopra sfere col centro sul vertice del cono [1].

Viceversa dimostriamo: *Ogni superficie che ha un sistema di linee di curvatura descritte sopra sfere concentriche è una superficie modanata la cui sviluppabile direttrice è un cono col vertice nel centro comune delle sfere.*

Supponiamo infatti che le linee di curvatura u siano tracciate sopra sfere col centro in 0. Consideriamo una linea di curvatura v del secondo sistema ed in ogni suo punto il piano π condotto per la sua tangente e per la normale alla superficie. Questi piani π, essendo normali alle linee u, passano pel centro 0 delle sfere e per conseguenza o inviluppano un cono col vertice in 0, o si riducono ad un unico piano per 0. Ma il primo caso si esclude subito osservando che l'inviluppo di questi piani non è altro che la sviluppabile formata dalle normali alla superficie lungo

---

[1] La dimostrazione analitica di questa proprietà, geometricamente evidente, si ottiene subito osservando che, se i piani normali di una curva Γ passano per l'origine, si avrà nelle solite notazioni

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \ ,$$

e quindi integrando

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{costante} \ .$$

la linea di curvatura v; queste normali concorrerebbero dunque tutte in 0 e la superficie sarebbe una sfera col centro in 0, caso ovvio che trascuriamo. Dunque ha luogo il secondo caso, cioè le linee di curvatura v sono tracciate in piani normali alla superficie, concorrenti in 0 c. d. d.

Si osservi che le attuali superficie sono *caratterizzate* dalla proprietà che ogni sfera col centro in 0 taglia la superficie sotto angolo costante. In particolare si ottengono superficie di questa classe come soluzioni del problema fisico delle superficie egualmente illuminate da una sorgente collocata in un punto fisso. In tal caso il profilo piano generatore della superficie modanata è una lemniscata di Bernoulli col nodo nel punto fisso, il cono direttore restando arbitrario.

§. 320.

Superficie di Joachimsthal.

Fra le superficie con un sistema di linee di curvatura piane consideriamo quelle nelle quali i piani di queste linee passano per una retta fissa; esse diconsi *superficie di Joachimsthal* dal nome del geometra che per primo le considerò.

Se le linee di curvatura (v) giacciono in piani per la retta r e consideriamo una linea di curvatura u dell'altro sistema, le tangenti alle (v) nei punti di questa linea u formano una sviluppabile le cui generatrici si appoggiano tutte alla retta r; questa si riduce dunque necessariamente ad un cono col vertice sopra r. E poichè la linea u taglia ad angolo retto le generatrici del cono, essa è descritta sopra una sfera col centro nel vertice del cono e che taglia ad angolo retto la superficie.

Dunque: *Le linee di curvatura del secondo sistema sono tracciate sopra sfere che tagliano ad angolo retto la superficie ed hanno i centri distribuiti sulla retta r.*

Inversamente dimostriamo: *Se una superficie possiede un sistema di linee* C *di curvatura piane ed il secondo sistema di linee di curvatura sferiche, tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie, essa apparterrà alla classe di Joachimsthal, cioè il luogo dei centri delle sfere sarà una retta, per la quale passeranno tutti i piani delle linee* C.

E infatti una linea Γ di seconda curvatura essendo tracciata sopra una sfera Σ ortogonale alla superficie S, la sviluppabile circoscritta a S lungo Γ è il cono che projetta Γ dal centro di Σ; tutte le generatrici

del cono sono le tangenti alle curve C nei punti di Γ e passano quindi pel centro di Σ. Dunque il luogo dei centri delle sfere Σ trovasi su tutti i piani delle curve C ed è quindi una retta, c. d. d.

Per costruire le superficie di Joachimsthal basta prendere ad arbitrio una serie ∞^1 di sfere coi centri in linea retta e nella congruenza delle loro traiettorie ortogonali (che giacciono evidentemente nei piani per la retta dei centri) scegliere comunque una semplice infinità di queste traiettorie. La superficie loro luogo, essendo tagliata ortogonalmente dalle sfere, ammetterà per linee di curvatura le sue linee d'intersezione con queste sfere; e le linee di curvatura dell'altro sistema saranno quindi le dette traiettorie ortogonali piane.

Dopo ciò è molto facile dare le formole che definiscono le superficie di Joachimsthal. Ricorriamo infatti agli sviluppi del § 22 (I, pag. 44 e seguenti) per la determinazione delle traiettorie ortogonali di un sistema di sfere, supponendo che nelle formole (49) ibid. pag. 45, la curva C si riduca ad una retta, che prendiamo per asse delle z. Applichiamo queste formole ponendo

$$\begin{cases} x = 0 \ , & y = 0 \ , & z = u \\ \alpha = 0 & \beta = 0 & \gamma = 1 \\ \xi = 1 & \eta = 0 & \zeta = 0 \\ \lambda = 0 & \mu = 1 & \nu = 0 \ , \end{cases}$$

indi $\frac{1}{\rho} = 0$, $\frac{1}{T} = 0$ e le (49*) pag. 46 ci daranno

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{R' + 1}{R} \operatorname{sen} \theta \ , \quad \frac{d\varphi}{du} = 0 \ ,$$

cioè

$$\varphi = \text{costante} \ , \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = C R e^{\int \frac{du}{R}}$$

Le traiettorie ortogonali saranno quindi date dalle formole

$$x' = R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \ , \quad y' = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \ ,$$
$$z' = u + R (1 + \cos \theta) \ .$$

Se poniamo adunque

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \Phi R e^{\int \frac{du}{R}} \tag{18}$$

dove Φ è una funzione arbitraria di ρ, le formole

$$(19)\quad x = R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\ ,\quad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ,\quad z = u + R(1+\cos\theta)$$

ci daranno la più generale superficie di Joachimsthal, i parametri u, φ essendo quelli delle linee di curvatura.

§. 321.

Superficie a linee di curvatura circolari.

Veniamo ora a considerare una classe particolare importante di superficie con un sistema di linee a curvatura piane, quella in cui queste linee sono circoli.

Il piano di uno qualunque di questi circoli C taglia la superficie S sotto angolo costante e per ciò le normali alla S lungo C formano un cono circolare retto; la sfera che passa per C ed ha il centro nel vertice del cono toccherà la superficie lungo il circolo. Dunque la superficie S è l'inviluppo di una semplice infinità di sfere; e poichè è chiaro inversamente che l'inviluppo di una semplice infinità di sfere è sempre una superficie a linee di curvatura circolari, possiamo enunciare il risultato: *Le superficie con un sistema di linee di curvatura circolari sono gli inviluppi di una semplice infinità di sfere.*

Per definire una tale superficie basterà dare la curva Γ luogo dei centri delle sfere ed il raggio R della sfera mobile in funzione dell'arco s di Γ. Ritenendo per la curva Γ le solite notazioni ed indicando con X, Y, Z le coordinate correnti, sarà

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = R^2$$

l'equazione della sfera mobile. Il circolo caratteristico C si otterrà associando alla precedente l'equazione che ne risulta per derivazione rapporto ad s, cioè

$$(X-x)\,\alpha + (Y-y)\,\beta + (Z-z)\,\gamma = -\,R\,R'\,,$$

dove $R' = \dfrac{dR}{ds}$.

Dunque l'asse del circolo C sarà la tangente alla curva Γ e per il raggio r del circolo avremo

$$(20)\qquad r = R\sqrt{1-R'^2}\,;$$

indicando poi con σ l'angolo del piano del circolo colla superficie inviluppo S, si avrà evidentemente

$$R' = \cos\sigma \ . \tag{21}$$

Colla (20) risolviamo subito la questione di trovare tutte le superficie della nostra classe sulle quali i circoli di curvatura sono tutti eguali. Chiamando a il raggio comune dei circoli, dobbiamo determinare R dall'equazione differenziale

$$R^2 - R^2 R'^2 = a^2 \ .$$

L'integrale generale è dato da

$$R = \sqrt{(s+c)^2 + a^2} \quad (c \text{ costante}) \ ,$$

e si ha inoltre la soluzione singolare

$$R = a \ .$$

Questa risponde evidentemente alla superficie canali; quanto all'integrale generale, avendosi

$$R\,R' = s + c \ ,$$

le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro del circolo saranno date da

$$x_1 = x - (s+c)\,\alpha \quad , \quad y_1 = y - (s+c)\,\beta$$
$$z_1 = z - (s+c)\,\gamma \ ,$$

cioè questo centro descrive un'evolvente della curva Γ. Dunque le superficie con un sistema di linee di curvatura circolari ed eguali si distinguono in due classi; la prima è formata dalle superficie canali, la seconda da quelle che si ottengono colla costruzione seguente: *Sopra una curva qualunque* Γ *avvolto un filo, svolgiamolo dalla curva in guisa che la sua estremità libera* M *descriva un'evolvente di* Γ; *se la porzione rettilinea di filo svolta porta, all'estremità libera* M, *un circolo col centro in* M, *tracciato nel piano normale al filo, il luogo di questo circolo sarà la superficie della classe richiesta.*

§. 322.

Rappresentazione sferica ed evolute.

Della nostra superficie generale S a linee di curvatura circolari facciamo ora l'immagine sferica di Gauss; i circoli di curvatura C di S

avranno per immagine circoli C_1 della sfera. Ora, se indichiamo con Γ_1 la indicatrice sferica delle tangenti di Γ, è chiaro che il centro sferico del circolo C_1 sarà nel punto M_1 di Γ_1, immagine del punto M di Γ ove l'asse del circolo C tocca questa curva, mentre il raggio sferico di C_1 sarà precisamente $= \sigma$. Da queste semplici considerazioni risulta subito che: *data ad arbitrio una serie* ∞^1 *di circoli della sfera, esistono infinite superficie a linee* di *curvatura circolari, che hanno per immagine sferica i circoli della serie data.*

E infatti si consideri la curva sferica Γ_1 luogo dei loro centri, e sia s_1 l'arco di Γ_1, σ il raggio sferico del circolo; indichino poi α, β, γ le coordinate di un punto mobile sopra Γ_1. Prendasi ora una qualunque curva Γ dello spazio che abbia Γ_1 per indicatrice sferica delle tangenti, pongasi cioè

$$x = \int \alpha f(s_1)\, ds_1 \quad , \quad y = \int \beta f(s_1)\, ds_1 \quad , \quad z = \int \gamma f(s_1)\, ds_1$$

$$ds = f(s_1)\, ds_1 \ ,$$

essendo $f(s_1)$ una funzione arbitraria di s_1. Se consideriamo una serie ∞^1 di sfere coi centri distribuiti sopra Γ e di raggio

$$R = \int \cos\sigma\, ds = \int \cos\sigma\, f(s_1)\, ds_1 \ ,$$

la (21) ci dimostra che la superficie inviluppo di queste sfere avrà per immagine sferica delle sue linee di curvatura circolari i circoli dati. Per questi infiniti inviluppi di sfere è chiaro che le curve Γ luogo dei centri sono trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Combescure (Cap. I, I pag. 40). Si può osservare che fra queste infinite superficie a linee di curvatura circolari, aventi a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura, ve ne ha una con circoli tutti eguali. Per quanto precede basterà infatti prendere $f(s_1)$ in modo che risulti

$$z = a \cot\sigma \ , \ (a \text{ costante})$$

ciò che si ottiene ponendo

$$f(s_1) = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\sigma} \frac{d\sigma}{ds_1} \ .$$

Nella superficie S supponiamo che le linee di curvatura u siano circolari; le normali alla superficie lungo una linea u (circolo) formano un cono rotondo il cui vertice è sulla curva Γ luogo dei centri delle sfere inviluppanti e il cui asse coincide colla tangente a Γ. Si vede adunque che: *la falda dell'evoluta di* S *relativa alle linee di curvatura*

circolari si riduce alla curva Γ *luogo dei centri delle sfere inviluppanti.* Manifestamente poi: *il raggio principale di curvatura* r_1 *della superficie relativo ai circoli u di curvatura è invariabile lungo il circolo stesso, cioè si ha*

$$r_1 = \varphi(u) .$$

È facile vedere che queste due proprietà si equivalgono perfettamente. Ricorrendo infatti alle formole generali del Cap. IX per le evolute, vediamo dalle (8) I, pag. 275, che se $r_1 = \varphi(u)$, ne risulta

$$E_1 = 0 , \quad G_1 = 0 ,$$

e ciò dimostra che la prima falda dell'evoluta si riduce ad una curva. Viceversa, se questo accade, deve aversi

$$E_1 G_1 - F_1^2 = 0$$

e quindi per le formole testè citate

$$\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{\partial r_1}{\partial v} = 0 .$$

Escludendo il caso ovvio della sfera, ne risulta appunto $r_1 = \varphi(u)$.

Dimostriamo ora inversamente che se $r_1 = \varphi(u)$, la superficie ha le linee di curvatura u circolari. E infatti indicando con $\frac{1}{\rho_u}$ la curvatura geodetica delle loro immagini sferiche, abbiamo colle notazioni del § 125 (I, pag. 274)

$$-\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} .$$

Se, avendo riguardo alle (4) del citato §, formiamo la derivata rapporto a v di

$$\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{r_2 - r_1}$$

troviamo

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}\,(r_2 - r_1)} \left\{ \frac{\partial^2 r_1}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial v} \right\} .$$

Ma per ipotesi si ha nel nostro caso $\frac{\partial r_1}{\partial v} = 0$, e quindi risulta

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) = 0\,.$$

Dunque le linee sferiche u, avendo costante la curvatura geodetica, sono circoli, indi le linee di curvatura u di S sono piane. Di più, essendo costante lungo ogni tale linea il raggio corrispondente r_1 di curvatura, la linea stessa è necessariamente un circolo. Dunque: *Le superficie con un sistema di linee di curvatura circolari sono le sole che hanno una delle falde dell'evoluta ridotta ad una curva.* Un'altra conseguenza della formola generale (α) merita di essere notata. Supponiamo che le linee di curvatura u di una superficie S siano piane, e quindi le linee sferiche u siano circoli; si avrà allora

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) = 0\,,$$

e quindi per la (α)

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial r_1}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = 0,$$

da cui integrando risulta

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial r_1}{\partial v} = \mathrm{V}\,,$$

denotando con V una funzione della sola v. Di qui si trae che se per un particolare valore di u, sia $u = u_0$, la $\frac{\partial r_1}{\partial v}$ si annulla, essa sarà sempre nulla, cioè tutte le linee di curvatura u di S saranno circoli. Abbiamo così il teorema dovuto all'Aoust: *Se le linee di curvatura di un sistema di una superficie sono piane, esse saranno tutte circolari se una di esse è un circolo.*

§. 323.

La ciclide di Dupin.

Le considerazioni del § precedente rendono naturale la domanda se esista una superficie con ambedue i sistemi di linee di curvatura circolari. Una tale superficie sarà caratterizzata dalla proprietà che le due falde

dell'evoluta si riducono rispettivamente a due curve Γ, Γ'. Per quanto abbiamo visto, queste due curve dovranno esser tali che ogni cono projettante una di esse da un punto qualunque dell'altra sia un cono rotondo; questa proprietà caratterizza una coppia di coniche focali. Viceversa è facile vedere che la congruenza delle rette appoggiate a due coniche focali è una congruenza normale. E infatti nella congruenza delle rette appoggiate a due curve qualunque Γ, Γ' i due piani focali per ogni raggio M M', che unisce un punto di M di Γ con un punto M' di Γ', sono evidentemente quelli che passano per le rispettive tangenti in M, M' a Γ, Γ'. Ora se F, F' sono due coniche focali questi due piani sono sempre ortogonali fra loro e la congruenza è quindi normale. Dunque: *Le superficie coi due sistemi di linee di curvatura circolari sono quelle ortogonali alla congruenza delle rette appoggiate a due coniche focali.*

Una tale superficie dicesi una *ciclide di Dupin*. Essa è algebrica del 4.° ordine se le due coniche focali sono un'ellisse ed un'iperbola, ed è invece del 3.° ordine quando le due coniche sono parabole. In particolare, se la ellisse diventa un cerchio e quindi l'iperbola focale il suo asse, la ciclide di Dupin diventa un toro (ciclide di rotazione).

La ciclide di Dupin può riguardarsi in doppio modo come inviluppo di una semplice infinità di sfere, le due serie di sfere avendo i centri rispettivamente distribuiti sulle due coniche focali.

È evidente poi che le sfere di una serie saranno tangenti a tutte quelle dell'altra; questa osservazione permette di scrivere subito le equazioni delle due serie di sfere inviluppanti la ciclide [1]. Ne risulta che: *la ciclide di Dupin è l'inviluppo di una sfera mobile che resta costantemente tangente a tre sfere fisse.* E viceversa è facile vedere (p. e. servendosi di un'inversione per raggi vettori reciproci) che, prese comunque tre sfere fisse, l'inviluppo di una sfera mobile tangente a queste tre è una ciclide di Dupin. Analiticamente confermiamo le proprietà precedenti e determiniamo la ciclide come segue. Consideriamo dapprima il caso di un'ellisse ed iperbola focali, che definiamo colle formole

$$x = a\cos u\,, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,u\,, \qquad z = 0$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}\,\cosh v\,, \quad y = 0 \qquad z = b\,\mathrm{senh}\,v\,.$$

---

[1] Vedi DARBOUX II, pag. 268.

Le coordinate di un punto della congiungente il punto

$$(a \cos u\ ,\quad b \operatorname{sen} u\ ,\quad 0)$$

dell'una col punto

$$(\sqrt{a^2-b^2}\cosh v\ ,\quad 0\ ,\quad b \operatorname{senh} v)$$

dell'altra saranno

$$(22)\qquad \begin{cases} x = a\cos u + t\,(a\cos u - \sqrt{a^2-b^2}\cosh v) \\ y = b \operatorname{sen} u\,(1+t) \\ z = -b \operatorname{senh} v\,.\,t, \end{cases}$$

dove t è un parametro. Volendo trovare le superficie ortogonali alle dette congiungenti, dovremo determinare t in funzione di u, v in guisa che si abbia

$$(a\cos u - \sqrt{a^2-b^2}\cosh v)\,dx + b \operatorname{sen} u\,dy - b \operatorname{senh} v\,dz = 0\ .$$

Questa ci dà per t l'equazione a differenziali totali integrabile

$$dt = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{sen} u\,(1+t)\,du + a \operatorname{senh} v\,t\,dv}{\sqrt{a^2-b^2}\cos u - a\cosh v}\ ,$$

il cui integrale è dato da

$$(23)\qquad t = \frac{C - \sqrt{a^2-b^2}\cos u}{\sqrt{a^2-b^2}\cos u - a\cosh v}\ .$$

Sostituendo questo valore di t nelle (22), avremo le coordinate x, y, z di un punto della ciclide espresse pei parametri u, v dei circoli di curvatura. Del tutto analogamente si procede nel caso di parabole focali.

§. 324.

Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari e l'altro di linee piane.

Cerchiamo ora in generale quelle superficie a linee di curvatura tutte piane, per le quali uno dei due sistemi è composto di circoli C. Diciamo l' le linee di curvatura (piane) del secondo sistema. Riguardando i circoli C come tracciati sopra sfere ortogonali alla superficie S, dai risultati del § 320 vediamo che la nostra superficie appartiene necessariamente alla

classe di Joachimsthal, cioè i centri delle dette sfere sono distribuiti sopra una retta, per la quale passano tutti i piani delle curve Γ.

Inversamente prendiamo una serie ∞^1 di sfere coi centri in linea retta; sopra una di queste sfere segniamo ad arbitrio un circolo C_0 e consideriamo quelle traiettorie ortogonali della serie di sfere che escono dai punti di C_0. La superficie loro luogo sarà una superficie di Joachimsthal e, per le proprietà dimostrate al Cap. I (I, pag. 46), le sue curve d'intersezione colle sfere della serie saranno altrettanti circoli. Essa ha questi circoli per linee di curvatura e le linee di curvatura del secondo sistema sono in piani per la retta fissa. Dunque:

La più generale superficie con linee di curvatura tutte piane, e di più circolari in un sistema, si ottiene considerando una serie ∞^1 di sfere coi centri in linea retta e prendendo il luogo di quelle loro traiettorie ortogonali che escono dai punti di un circolo di una di esse.

Volendo invece considerare le superficie attuali come inviluppi di sfere, si osserverà che queste sfere inviluppanti hanno i centri in un piano che passa per la retta fissa r, poichè gli assi dei circoli C, che sono le tangenti alla curva luogo dei centri, si appoggiano alla r. D'altronde ogni piano per r sega la superficie sotto angolo costante, e quindi tutte le sfere sotto il medesimo angolo, onde i raggi di queste sfere sono proporzionali alle distanze dei loro centri da r. Dunque: *Le superficie della classe attuale sono l'inviluppo di una sfera mobile il cui centro percorre una curva piana γ ed il cui raggio varia proporzionalmente alla distanza del centro da una retta r fissa nel piano di γ.*

Inversamente, qualunque sia la curva γ e la retta r fissata nel piano di γ, si vede subito che la superficie inviluppo ha le linee di curvatura del secondo sistema in piani per r, poichè ogni tale piano sega tutte le sfere sotto il medesimo angolo e quindi la superficie inviluppo sotto angolo costante.

§. 325.

Elementi caratteristici di una superficie a linee di curvatura circolari.

In una superficie con un sistema di linee di curvatura circolari consideriamo una linea di curvatura Γ del secondo sistema, cioè una traiettoria ortogonale dei circoli C. Le tangenti ai circoli C nei punti di Γ formano una sviluppabile e per le generatrici di questa passano i piani dei circoli C. Ora vogliamo dimostrare che, per individuare una super-

ficie a linee di curvatura circolari, si possono fissare ad arbitrio i seguenti elementi: 1.° *una linea di curvatura non circolare* Γ', 2.° *i piani dei circoli di curvatura* C, *purchè condotti per le generatrici di una sviluppabile contenente* Γ^{ν} *come traiettoria ortogonale delle generatrici*; 3.° *uno dei circoli* C, *del quale basterà dare il raggio.*

Intanto, se la superficie cercata esiste, verranno fissate le sue normali lungo Γ^{ν}, come ortogonali alla Γ' ed alle generatrici della detta sviluppabile. Queste normali a Γ^{ν} generano alla loro volta una sviluppabile, il cui spigolo di regresso indichiamo con Γ [1]. Indichiamo con u l'arco di Γ e manteniamo per questa curva le solite notazioni del Cap. I. Sia $M \equiv (x\ y\ z)$ un punto dell'evoluta Γ e $M' \equiv (x', y', z')$ il punto corrispondente dell'evolvente Γ'. Contando u da un punto conveniente avremo

$$x' = x - u\alpha \quad , \quad y' = y - u\beta \quad , \quad z' = z - u\gamma \ .$$

Se indichiamo con $\sigma = \sigma(u)$ l'angolo che la traccia del piano assegnato al circolo C, uscente da M', nel piano osculatore in M a Γ, forma colla tangente M' M a Γ, i coseni di direzione di questa traccia saranno

$$\alpha\cos\sigma + \xi\,\mathrm{sen}\,\sigma \quad , \quad \beta\cos\sigma + \eta\,\mathrm{sen}\,\sigma \quad , \quad \gamma\cos\sigma + \zeta\,\mathrm{sen}\,\sigma \ .$$

Denotando dunque con $R = R(u)$ il raggio del circolo C, le coordinate x_0, y_0, z_0 del suo centro M_0 saranno

$$\begin{cases} x_0 = x - u\alpha + R(\alpha\cos\sigma + \xi\,\mathrm{sen}\,\sigma) \\ y_0 = y - u\beta + R(\beta\cos\sigma + \eta\,\mathrm{sen}\,\sigma) \\ z_0 = z - u\gamma + R(\gamma\cos\sigma + \zeta\,\mathrm{sen}\,\sigma) \ . \end{cases}$$

Consideriamo ora la superficie luogo dei circoli C e sia $\overline{M} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto qualunque sul circolo C. Indicando con v l'angolo d'inclinazione del raggio M_0 M sulla detta traccia M_0 M' avremo

$$(24) \quad \bar{x} = x - u\alpha + R(1+\cos v)(\alpha\cos\sigma + \xi\,\mathrm{sen}\,\sigma) + R\,\mathrm{sen}\,v\ .\ \lambda \ ,$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$, e queste ci definiranno la nostra superficie *cer-*

---

[1] Supponiamo che questo spigolo di regresso non si riduca ad un punto, cioè la sviluppabile non sia un cono, caso limite che si potrebbe trattare direttamente in modo analogo.

chiata per mezzo delle coordinate curvilinee u, v. Dalla (24) derivando, col tener conto delle formole di Frenet e indicando con apici le derivate rapporto ad u, troviamo

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left\{ \mathrm{R}' \cos\sigma - \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\sigma \left(\sigma' + \dfrac{1}{\rho}\right) \right\} (1 + \cos v)\ .\ \alpha \\ \qquad + \left\{ \left[\mathrm{R}' \,\mathrm{sen}\,\sigma + \mathrm{R}\cos\sigma \left(\sigma' + \dfrac{1}{\rho}\right)\right] (1 + \cos v) + \dfrac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,v}{\mathrm{T}} - \dfrac{u}{\rho} \right\} \xi + \\ \qquad + \left\{ \mathrm{R}' \,\mathrm{sen}\,v - \dfrac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{T}} (1 + \cos v) \right\} \lambda \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \mathrm{R}\cos v\,\lambda - \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,v\,(\alpha\cos\sigma + \xi\,\mathrm{sen}\,v)\ . \end{cases}$$

Dobbiamo ora ricercare la relazione da cui debbono essere legate le due funzioni R e σ di u, affinchè la nostra superficie S ammetta i circoli C per linee di curvatura. Per ciò le normali alla superficie S lungo C debbono concorrere nel punto M_1 ove l'asse del circolo C uscente da M_0 coi coseni di direzione

$$\alpha\,\mathrm{sen}\,\sigma - \xi\cos\sigma\ ,\quad \beta\,\mathrm{sen}\,\sigma - \eta\cos\sigma\ ,\quad \gamma\,\mathrm{sen}\,\sigma - \zeta\cos\sigma$$

incontra la tangente in M a l'; per le coordinate x_1, y_1, z_1 di questo punto M_1 si trova subito

$$x_1 = x + \left(\frac{\mathrm{R}}{\cos\sigma} - u\right)\alpha\ ,\quad y_1 = y + \left(\frac{\mathrm{R}}{\cos\sigma} - u\right)\beta\ ,\quad z_1 = z + \left(\frac{\mathrm{R}}{\cos\sigma} - u\right)\gamma\ .$$

I coseni di direzione della normale a S saranno dunque proporzionali alle differenze

$$\bar{x} - x_1\ ,\quad \bar{y} - y_1\ ,\quad \bar{z} - z_1$$

e dovranno quindi sussistere le equazioni

$$\sum (\bar{x} - x_1)\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0\quad ,\qquad \sum (\bar{x} - x_1)\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0\ .$$

La seconda è naturalmente un'identità e la prima, facendo uso delle formole precedenti, si traduce semplicemente nella relazione:

$$(26)\qquad \mathrm{R}' + \mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\sigma\left(\sigma' + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{u\,\mathrm{sen}\,\sigma}{\rho} = 0\ .$$

Viceversa basta che sia soddisfatta questa condizione, e la superficie luogo dei circoli C li ammetterà per linee di curvatura.

Applicando questo risultato ai dati del nostro problema, vediamo che, essendo note σ, ρ in funzione di u, con quadrature si avrà R dall'equazione lineare (26) e basterà fissare il valore di R per un particolare valore di u perchè la superficie S ne riesca individuata. Ciò dimostra appunto quanto avevamo asserito, e prova di più che, dati della superficie a linee di curvatura circolari gli elementi caratteristici del teorema, la superficie si determina con quadrature.

Se osserviamo poi che nella (26) non figura affatto la torsione $\frac{1}{T}$ di di Γ, vediamo che si potrà torcere comunque la curva Γ, mantenendole la medesima flessione, senza che i circoli C, invariabilmente legati alla Γ nella sua deformazione, cessino di soddisfare la condizione richiesta. Si può anche pensare i circoli C ortogonali alla sviluppabile delle tangenti di Γ, lungo una traiettoria ortogonale delle generatrici, invariabilmente legati alla sviluppabile in quelle sue flessioni che ne conservano rettilinee le generatrici [1].

§. 326.

Proprietà generali delle linee di curvatura di una superficie qualunque.

Colle superficie a linee di curvatura circolari stanno in relazione alcune proprietà semplici e generali delle linee di curvatura di una superficie qualsiasi S, che andiamo ora a stabilire.

Sulla superficie arbitraria S consideriamo le linee di curvatura (u) (v) dei due sistemi; dimostriamo il teorema A): *Il luogo dei circoli osculatori delle linee u nei punti di una medesima linea* (v) *ammette questi circoli per linee di curvatura.*

Lo proveremo riprendendo le considerazioni geometriche del Cap. IX sulle proprietà dell'evoluta, lasciando al lettore lo sviluppo della facile

---

[1] L'elemento lineare della sviluppabile delle tangenti di una curva Γ di cui u sia l'arco ha infatti la forma

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{(v-u)^2}{\rho^2}\right\} du^2 + dv^2 .$$

Se si torce Γ mantenendo invariata la flessione $\frac{1}{\rho}$, la sviluppabile si flette restando rettilinee le generatrici. La reciproca si vede anche subito.

conferma analitica. Sia Γ una linea qualunque di curvatura del primo sistema (u). Le normali alla S lungo la Γ sono le tangenti di un'evoluta Γ_1 della Γ tracciata sulla prima falda S_1 della evoluta ed i piani normali di Γ sono i piani tangenti alla S_1 lungo Γ_1. Se da un punto M_1 di Γ_1 caliamo la perpendicolare al piano osculatore di Γ nel punto M corrispondente, questa perpendicolare coincide coll'asse del circolo osculatore di Γ e giace nel piano tangente alla S_1 in M_1. Dunque la sfera descritta col centro M_1 e con raggio $= M_1 M$, cioè la sfera che ha il centro nel primo centro di curvatura M_1 e raggio eguale al raggio di curvatura r_1 (sfera principale) passa pel circolo osculatore di Γ in M.

Gli assi dei circoli osculatori di Γ sono tangenti alla S_1 lungo Γ_1 e poichè formano la sviluppabile polare di Γ, hanno le direzioni coniugate alle tangenti di Γ_1. Ora sulla S_1 le linee a tangenti coniugate delle (u) sono le (v) (I, pag. 276); dunque: *gli assi dei circoli osculatori delle linee di curvatura* (u) *sono le tangenti a quelle linee* (v) *della prima falda dell'evoluta, che corrispondono alle linee di curvatura del secondo sistema sull'evolvente.*

Spostiamo ora il centro M_1 della sfera principale lungo una linea (v) di S_1; l'inviluppo di questa sfera sarà una superficie a linee di curvatura circolari. Ora il circolo caratteristico di una tale sfera, che è tangente in M alla S, passa per M e giace nel piano condotto per M normalmente alla direzione dello spostamento del centro. Ma questa direzione, come si è visto, è data dall'asse del circolo osculatore di Γ in M, e però questo circolo osculatore coincide col detto circolo caratteristico. Ciò dimostra appunto il teorema A).

Notiamo poi che se i circoli osculatori delle linee di curvatura u si associano lungo una linea u stessa, anzichè lungo una v, si avrà ancora una superficie a linee di curvatura circolari. E infatti per una curva qualunque Γ sussiste il teorema di quasi immediata evidenza: B) *Il luogo dei circoli osculatori di una curva qualsiasi dello spazio ammette questi circoli per linee di curvatura.* Ciò risulta dall'osservare che questo luogo è altresì l'inviluppo delle sfere osculatrici della curva.

Così adunque: *Per una superficie qualunque, nella congruenza dei circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema sono contenute due serie di superficie che ammettono questi circoli per linee di curvatura; esse si ottengono associando i circoli lungo le linee di curvatura dell'uno o dell'altro sistema.*

§. 327.

Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane.

Ritorniamo ora alle generali superficie con un sistema di linee di curvatura piane per generalizzare i risultati ottenuti al § 324 pel caso particolare che queste linee siano circolari. Di una superficie S con un sistema di linee C di curvatura piane consideriamo una linea di curvatura Γ_0 del secondo sistema ed i circoli osculatori, nei punti di Γ_0, delle curve C. Il luogo di questi circoli è una superficie Σ a linee di curvatura circolari che oscula S lungo Γ_0; la diremo la superficie (a linee di curvatura circolari) osculatrice di S lungo Γ_0. È chiaro che questa superficie osculatrice Σ ha a comune colla S l'immagine sferica delle linee di curvatura. Ciò posto, dimostriamo il teorema:

A') *Per individuare una superficie* S *con un sistema di linee di curvatura piane* C, *basterà fissare ad arbitrio i seguenti elementi:* 1.° *una delle linee di curvatura piane* C_0, 2.° *una linea di curvatura* Γ_0 *del secondo sistema*, 3.° *la superficie a linee di curvatura circolari* Σ_0 *osculante la* S *lungo* Γ_0. *Dati questi elementi, la superficie richiesta* S *si avrà con quadrature.*

Intanto, ad illustrazione dell'enunciato, osserviamo che le due curve date C_0, Γ_0 debbono naturalmente incontrarsi ortogonalmente in un punto P_0. Con ciò viene fissata la normale in P_0 a S e quindi anche le normali lungo C_0 e Γ_0, dovendo queste ciascuna volta formare una sviluppabile. In luogo di dare la superficie osculatrice Σ_0, basterà fissare i piani delle curve C condotti per la serie ∞^1 di normali alla Γ_0 formanti una sviluppabile individuata dalla tangente in P_0 a C_0 come prima normale: allora, per i teoremi del § 325, la superficie osculatrice Σ_0 sarà individuata e si otterrà con quadrature. Per dimostrare la nostra proposizione A') cominciamo dall'osservare che della superficie S da costruirsi conosciamo intanto l'immagine sferica delle linee di curvatura, che è la stessa di quella di Σ_0. Di più se diciamo C'_0, Γ'_0 il circolo sferico e la curva immagini delle date C_0, Γ_0, sarà perfettamente stabilita la corrispondenza fra i punti di C'_0, C_0; Γ'_0, Γ_0, poichè conosciamo le normali ad S lungo C_0, Γ_0. Ora ricorriamo alla determinazione per coordinate tangenziali delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane, quale fu stabilita al § 316, e supponiamo che siano $u = u_0$, $v = v_0$ le rispettive equazioni delle curve sferiche C'_0, Γ'_0.

Conosceremo evidentemente W sia lungo la $u = u_0$, sia lungo $v = v_0$, come funzione di v e di u rispettivamente. Ma la formola (13) (pag. 263) ci dimostra che allora restano perfettamente fissate le funzioni arbitrarie $\phi(v)$, $\psi(u)$ dell' integrale, e ciò in termini finiti. Dunque la superficie S è individuata dagli elementi assegnati. Ma inversamente, dati questi elementi ad arbitrio e determinate le funzioni $\phi(v)$, $\psi(u)$ nel modo anzidetto, si vede subito che la superficie S con un sistema di linee di curvatura piane passerà per le curve assegnate C_0, Γ_0 e le ammetterà per linee di curvatura.

Dalla proposizione A') così dimostrata risulta che: *La più generale superficie con un sistema di linee di curvatura piane dipende da quattro funzioni arbitrarie.*

E infatti la linea di curvatura piana C_0 dipende da una funzione arbitraria e la linea di curvatura Γ_0 del secondo sistema da due tali funzioni. Infine una quarta funzione arbitraria è relativa alla posizione dei piani delle linee C condotti per le normali assegnate alla Γ_0.

Osserviamo ancora che dalla proposizione A') e dai risultati generali del § 326 segue nuovamente il teorema dell'Aoust, dimostrato alla fine del § 327.

§. 328.

Il teorema di Ribaucour.

Supponiamo ora che di una superficie S con un sistema di linee C di curvatura piane sia data soltanto la sviluppabile Σ inviluppo dei piani delle curve C e ricerchiamo le corrispondenti superficie S; saremo così condotti ad un bel teorema di Ribaucour [1], le cui numerose conseguenze furono particolarmente sviluppate dal sig. Rouquet in una tesi del 1882 [2].

Trattiamo il caso generale in cui lo spigolo di regresso Γ della sviluppabile Σ è un'effettiva curva (non si riduce ad un punto); ma sarebbe facile trattare analogamente il caso di una sviluppabile Σ conica o cilindrica con analisi diretta.

Indichiamo con u l'arco di Γ, e teniamo per questa curva le solite notazioni. In ogni piano osculatore di Γ è tracciata una delle nostre

---

[1] *Nouvelle correspondance mathématique de M. Catalon* 1879-1880.

[2] *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes* (Toulouse-Douladoure-Privat).

curve C, che noi riferiamo alla tangente e normale principale di Γ come ad assi coordinati; e siano A, B le relative coordinate di un punto M mobile su C. Intenderemo che A, B siano funzioni di un parametro v che individua i punti della curva C ed inoltre dell'arco u di Γ:

$$A = A(u, v) \ , \quad B = B(u, v).$$

Le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ di un punto M di C saranno quindi

$$(27) \qquad \begin{cases} \bar{x} = x + A\alpha + B\xi \\ \bar{y} = y + A\beta + B\eta \\ \bar{z} = z + A\gamma + B\zeta \ , \end{cases}$$

e queste formole ci definiranno la superficie S luogo delle curve C. Derivando queste formole, otteniamo per le formole di Frenet:

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(1 + \dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{B}{\rho}\right)\alpha + \left(\dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{A}{\rho}\right)\xi - \dfrac{B}{T}\lambda \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \dfrac{\partial A}{\partial v}\alpha + \dfrac{\partial B}{\partial v}\xi, \end{cases}$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$. Per esprimere che le curve C sono linee di curvatura della superficie generata S dobbiamo scrivere che il piano di ogni curva C taglia la S sotto angolo costante. Indicando con φ questo angolo, sarà φ una funzione della sola u, e pei coseni di direzione X, Y, Z della normale alla S avremo

$$(29) \qquad X = \operatorname{sen}\varphi \, \frac{\dfrac{\partial B}{\partial v}\alpha - \dfrac{\partial A}{\partial v}\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial v}\right)^2}} + \cos\varphi \, . \, \lambda,$$

colle analoghe per Y, Z. Ora dovendosi avere $\sum X \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0$, ne risulta l'equazione

$$\frac{\dfrac{\partial B}{\partial v}\left(1 + \dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{B}{\rho}\right) - \dfrac{\partial A}{\partial v}\left(\dfrac{\partial B}{\partial u} + \dfrac{A}{\rho}\right)}{B\sqrt{\left(\dfrac{\partial A}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial B}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\cot\varphi}{T}.$$

Il secondo membro è una funzione della sola u, che indichiamo con U; la precedente si scrive così:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial v}\left(1+\frac{\partial A}{\partial u}-\frac{B}{\rho}\right)-\frac{\partial A}{\partial v}\left(\frac{\partial B}{\partial u}+\frac{A}{\rho}\right)}{B\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial v}\right)^2}}=U\,. \tag{30}$$

Viceversa, se A, B sono tali funzioni di u, v da soddisfare la (30), ponendo

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{T.U}\,, \tag{31}$$

le (29) daranno i coseni di direzione della normale alla superficie S, luogo delle curve piane C, poichè si avrà identicamente:

$$\sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=0\,,\quad \sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=0\,.$$

Ed essendo l'angolo φ funzione di u soltanto, per la (31), la S ammetterà le curve C come linee di curvatura.

Ora supponiamo che si deformi la sviluppabile Σ, mantenendo rettilinee le generatrici, e che le curve C vengano trascinate nei rispettivi piani tangenti restando invariabilmente legate alla superficie. Lo spigolo di regresso l' si deformerà mantenendo la stessa flessione $\frac{1}{\rho}$ e cangiando solo di torsione $\frac{1}{T}$; d'altronde rimanendo A, B le medesime funzioni di u, v sarà sempre soddisfatta la (30) e le curve C continueranno, in ogni configurazione di Σ, a generare una superficie che le ammette per linee di curvatura. Soltanto per ogni flessione di Σ cangierà, secondo la (31), l'angolo φ sotto il quale il piano della curva C taglia la superficie.

Un'altra conseguenza importante deduciamo dalla (28): se con

$$ds^2=E\,du^2+2\,F\,du\,dv+G\,dv^2$$

indichiamo l'elemento lineare della S, vediamo subito che i coefficienti F, G sono affatto indipendenti dalla torsione $\frac{1}{T}$. Ora sulla superficie S l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle curve C ($u=$ cost.^{te}), cioè delle seconde linee di curvatura, è data da

$$F\,du+G\,dv=0\,;$$

dunque questa equazione differenziale rimane la stessa comunque deformando la sviluppabile Σ.

Riassumiamo questi risultatati nel teorema seguente di Ribaucour:

Se una superficie S *ha un sistema di linee di curvatura* C *piane, deformando comunque la sviluppabile* Σ *inviluppo di questi piani, in guisa che le generatrici restino rettilinee, ed ogni piano tangente di* Σ *trascini seco la curva* C, *ivi tracciata:*

1.° *in ogni configurazione di* Σ *il luogo delle curve* C *le ammetterà sempre per linee di curvatura.*

2.° *i punti delle varie curve* C *che si trovavano nella configurazione iniziale sopra una linea di curvatura del secondo sistema, vi rimarranno ancora in ogni altra configurazione.*

In particolare, se distendiamo la sviluppabile Σ in un piano, avremo un doppio sistema ortogonale di curve C e C', ad ogni curva C essendo inoltre coordinata una retta, la corrispondente tangente alla trasformata dello spigolo di regresso. Interpretando geometricamente l'equazione a derivate parziali del primo ordine (30), potremmo stabilire le proprietà geometriche *caratteristiche* di questi sistemi ortogonali, dopo di che la determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane si effettuerebbe con una costruzione di geometria piana. Nella citata memoria di Rouquet il lettore troverà ampiamente sviluppate queste ricerche con eleganti costruzioni geometriche. Noi qui le tralasceremo, tanto più che, per quanto riguarda la determinazione delle nostre superficie, non verremmo in sostanza che a ripetere, sotto altra forma, quanto abbiamo esposto nel paragrafo precedente.

§. 329.

Le superficie d'area minima con linee di curvatura piane.

La determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane, considerate nella loro totalità, si effettua, come si è visto, con quadrature. Quando per altro si vogliano considerare classi speciali di queste superficie, corrispondenti a particolari proprietà geometriche, rimarrà da determinare il sistema di circoli immagini sferiche delle linee di curvatura e le due funzioni arbitrarie che entrano nell'integrale generale (13) (pag. 263) in guisa da soddisfare alle condizioni richieste. Una ricerca di questa specie è quella compiuta nel 1869 dal Dini, che determinò tutte le superficie W (cioè coi raggi di curvatura legati da una

relazione), che hanno al tempo stesso un sistema di linee di curvatura piane. Noi non tratteremo la questione generale; ma ci limiteremo a trovare le classi più interessanti di queste superficie, che sono quelle ad area minima e quelle a curvatura costante.

Cominciando dalle prime, osserviamo che, l'immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie d'area minima essendo in ogni caso un sistema doppio ortogonale isotermo, se le linee sferiche di uno dei due sistemi sono circoli anche le altre sono circoli (I, pag. 211), e quindi: *una superficie minima che abbia piane le linee di curvatura di un sistema avrà piane anche quelle del secondo.*

Viceversa prendiamo sulla sfera un doppio sistema ortogonale di circoli che non può offrire che l'uno o l'altro dei due casi studiati al principio del Capitolo. Esisterà certamente, pei teoremi al § 135 (I, pag. 291), una superficie minima, determinata a meno di un'omotetia, che avrà per immagine delle sue linee di curvatura quel doppio sistema di circoli e possederà quindi linee di curvatura piane. Per scrivere effettivamente le formole relative a queste superficie non resta che a distinguere i due casi del § 314 secondo che la forma dell'elemento lineare sferico è quella assegnata dalla (3) o dalla (5) (pag. 257, 258). Nel primo caso faremo, disponendo del fattore costante d'omotetia:

$$r_2 = 3\,\frac{(u^2+v^2+1)^2}{8}\,,$$

e nel secondo

$$r_2 = (\cosh v + a\cos u)^2\,.$$

Le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla superficie minima si calcoleranno quindi, in funzione dei parametri u, v delle linee di curvatura, colla quadratura

$$x = \int r_2\left(\frac{\partial X}{\partial u}\,du - \frac{\partial X}{\partial v}\,dv\right),$$

ed analoghe per y, z.

Così troviamo per la prima superficie minima le formole

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\,\{3u - u^3 + 3uv^2\} \\ y = \frac{1}{4}\,\{v^3 - 3v - 3u^2v\} \\ z = \frac{3}{4}\,(u^2 - v^2)\,, \end{cases}$$

e per la seconda le altre

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x = a\,u + \operatorname{sen} u \cosh v \\ y = v \quad + a \cos u \operatorname{senh} v \\ z = \sqrt{1 - a^2} \cos u \cosh v\,. \end{cases}$$

La notevole superficie minima (A) è stata trovata da Enneper; essa è algebrica del 9.° ordine. Le sue linee di curvatura (u) (v) sono evidentemente cubiche piane razionali, mentre le linee assintotiche $u - v =$ costante, $u + v =$ costante sono cubiche gobbe. Vediamo cosa diventa la costruzione generale di Darboux (§ 315) per questa speciale superficie a linee di curvatura piane. Siccome qui abbiamo (cangiando il segno di W)

$$W = -(X\,x + Y\,y + Z\,z) = \frac{v^4 + 3\,v^2 - u^4 - 3\,u^2}{4\,(u^2 + v^2 + 1)}\,,$$

paragonando colle formole del § 315, dobbiamo fare

$$2\,U = -\frac{u^4 + 3\,u^2}{4}\,, \quad 2\,V = \frac{v^4 + 3\,v^2}{4}\,.$$

Ora i quadrati dei raggi delle serie di sfere (7), (8) (pag. 259), i cui centri sono distribuiti sulle due parabole focali, sono dati da

$$2\,U + \frac{1}{4}\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{16}$$

$$-2\,V + \frac{1}{4}\left(v^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{16}\,,$$

cioè sono costanti ed eguali. Si ha quindi la seguente costruzione geometrica: *La superficie minima d' Enneper è l' inviluppo dei piani normali nel punto di mezzo delle congiungenti i punti di una parabola coi punti della parabola focale.*

Per le proprietà della ciclide di Dupin (§ 323), si può enunciare questo risultato sotto la forma equivalente: *L'inviluppata media della ciclide del 3.° ordine di Dupin (con parabole focali) è la superficie d' area minima d' Enneper.*

Quanto alla superficie minima (B), osserviamo soltanto che essa è in ogni caso trascendente, e per $a = 0$ si riduce al catenoide.

§. 330.

Superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane.

Volendo ora ricercare le superficie con un sistema di linee di curvatura piane e di curvatura costante, converrà prima che troviamo, secondo i teoremi generali del Cap. IX sulle superficie W, la forma caratteristica che ha l'elemento lineare di una superficie di curvatura costante, riferita alle sue linee di curvatura. Cominciando dal caso delle superficie pseudosferiche, la cui curvatura K si porrà per semplicità $= -1$, osserviamo che, indicando con θ un angolo ausiliario, potremo porre

$$r_1 = -\operatorname{tg}\theta\ , \quad r_2 = \cot\theta$$

ed i teoremi generali al § 134 (I, pag. 289) daranno subito i risultati seguenti, che potrebbero del resto anche dedursi da quelli conseguiti al § 76 (I, pag. 160): *L'elemento lineare di una superficie pseudosferica di raggio* $= 1$, *riferita alle linee di curvatura* u, v, *assume la forma*

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2\ , \tag{32}$$

mentre quello della sua immagine sferica è dato da

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2\ ; \tag{33}$$

la funzione $\theta(u, v)$ *soddisfa all'equazione a derivate parziali caratteristica*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ ^{(1)}. \tag{34}$$

Viceversa ad ogni soluzione θ della (33) corrisponde una superficie pseudosferica pienamente determinata di forma, e la sua determinazione in termini finiti dipenderà, in generale, dall'integrazione di un'equazione di Riccati.

Supponiamo ora che la nostra superficie pseudosferica S debba avere le linee di curvatura v piane; sarà per ciò necessario e sufficiente che le linee sferiche v siano circoli, cioè che la loro curvatura geodetica

$$\frac{1}{\rho'_v} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\frac{\partial\operatorname{sen}\theta}{\partial v} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

---

(1) Questa esprime che la curvatura dell'elemento lineare (32) è $= -1$, ovvero quella di (33) è $= +1$.

sia una funzione della sola v. Questa condizione si traduce nella equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = 0\,, \tag{35}$$

ed il problema proposto si riduce dunque a trovare le soluzioni comuni alle due equazioni del 2.° ordine (34), (35). Ora dalla (35) risulta

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = e^{U+V}\,,$$

essendo U funzione della sola u, V della sola v. Di qui si trae

$$\cos\theta = -\operatorname{tgh}(U+U),\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\cosh(U+V)}$$

e quindi

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(U+V)\,du^2 + \frac{1}{\cosh^2(U+V)}\,dv^2\,.$$

Siccome supponiamo che nè U, nè V siano costanti (ciò che porterebbe alle superficie pseudosferiche di rotazione) potremo prendere U, V per parametri in luogo di u, v e scrivere quindi il nostro ds^2 sotto la forma :

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(u+v)\,\frac{du^2}{U^2} + \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{V^2}\,, \tag{36}$$

indicando di nuovo con U, V due funzioni rispettivamente di u, v. Restano da determinarsi queste funzioni in guisa che la curvatura della (36) sia $K = -1$; ciò dà l'equazione

$$(V'V - U'U)\cosh(u+v) = (V^2 - U^2 + 1)\operatorname{senh}(u+v)\,,$$

dalla quale facilmente determiniamo i valori che debbono avere U, V. Poniamo per ciò

$$U^2 = \varphi(u)\,,\quad V^2 = \psi(v)\,,$$

e la precedente potrà scriversi

$$\psi' - \varphi' = 2(\psi - \varphi + 1)\operatorname{tgh}(u+v)\,, \tag{37}$$

o

$$\psi' - 2\psi\operatorname{tgh}(u+v) - 2\operatorname{tgh}(u+v) = \varphi' - 2\varphi\operatorname{tgh}(u+v)\,.$$

Derivando questa rapporto a v e moltiplicando per $\cosh^2(u+v)$, otteniamo

$$\psi''\cosh^2(u+v) - 2\psi'\operatorname{senh}(u+v)\cosh(u+v) - 2\psi - 2 = -2\varphi. \tag{38}$$

Una nuova derivazione rapporto a v porge

$$\psi''' = 4\,\psi' ;$$

se ne trae

$$\psi(v) = \mathrm{A}\cosh 2v + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2v + \mathrm{C} - 1$$

indicando con A, B, C tre costanti arbitrarie. Sostituendo nella (38), ne deduciamo subito

$$\varphi(u) = \mathrm{C} - \mathrm{A}\cosh 2u + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2u ,$$

col quale valore la (37) è soddisfatta.

Ne concludiamo: *La più generale superficie pseudosferica di raggio* $= 1$, *colle linee di curvatura* v *piane, è definita dalla seguente forma del* ds^2 *riferita alle linee di curvatura* u, v:

$$(\mathrm{C}) \qquad ds^2 = \mathrm{tgh}^2(u+v)\,\frac{du^2}{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cosh 2u + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2u} + \\ + \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{\mathrm{A}\cosh 2v + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2v + \mathrm{C} - 1} ,$$

restando A, B, C *costanti arbitrarie.*

Di più l'elemento lineare sferico rappresentativo della superficie sarà dato dalla formola:

$$(\mathrm{D}) \qquad ds'^2 = \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\,\frac{du^2}{\mathrm{C} - \mathrm{A}\cosh 2u + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2u} + \\ + \mathrm{tgh}^2(u+v)\,\frac{dv^2}{\mathrm{A}\cosh 2v + \mathrm{B}\,\mathrm{senh}\,2v + \mathrm{C} - 1} ,$$

ed i raggi principali di curvatura dalle formole

$$r_1 = \frac{1}{\mathrm{senh}\,(u+v)} , \quad r_2 = -\,\mathrm{senh}\,(u+v) .$$

Osserviamo però subito che le due costanti in apparenza distinte A, B si riducono in effetto ad una sola poichè, se non sono eguali, basta cangiare u, v in $u + k$, $v - k$ (k costante), ciò che non altera $u + v$, e si può allora assumere k in guisa da annullare il nuovo valore di A o quello di B.

Le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane dipendono quindi da due costanti arbitrarie, cioè formano una doppia infinità. Fra esse le più semplici, che erano sfuggite all'analisi di Enneper, e furono avvertite da Kuen, corrispondono all'ipotesi $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

§. 331.

Caso della curvatura $K = +1$.

Passando ora al caso della curvatura $K = +1$, osserviamo che essendo

$$r_1 r_2 = +1 ,$$

potremo porre p. e.

$$r_1 = \coth\theta , \quad r_2 = \operatorname{tgh}\theta ,$$

indicando θ una funzione ausiliaria. Allora, applicando i teoremi generali del § 134 già ricordati, vediamo che: *L'elemento lineare di una superficie colla curvatura costante* $K = +1$, *riferita alle sue linee di curvatura, assume la forma:*

$$(32^*) \qquad ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 ,$$

mentre quello della sua immagine sferica è dato da

$$(33^*) \qquad ds'^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 ;$$

la funzione $\theta(u, v)$ *soddisfa all'equazione caratteristica alle derivate parziali*

$$(34^*) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 .$$

Volendo ora che linee di curvatura v siano piane, cioè le linee sferiche v siano circoli, ne dedurremo

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 ,$$

ossia

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta\right) = 0 ;$$

integrando potremo scrivere

$$\operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{U+V}{2}\right) ,$$

indicando con U, V due funzioni arbitrarie di u, v rispettivamente. Ne deduciamo

$$\operatorname{senh}\theta = \cot(U+V) , \quad \cosh\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}(U+V)} ,$$

e quindi

$$ds^2 = \cot^2(U+V)\,du^2 + \frac{dv^2}{\operatorname{sen}^2(U+V)};$$

cangiando, come al § precedente, le notazioni pei parametri scriviamo

$$ds^2 = \cot^2(u+v)\,\frac{du^2}{U^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{V^2}.$$

Resta solo che determiniamo le due funzioni U, V in guisa che a quest'ultima forma differenziale competa la curvatura $K = +1$. Ciò porta alla equazione

$$(U'U + V'V)\operatorname{sen}(u+v) = (U^2 + V^2 + 1)\cos(u+v).$$

Procedendo in modo affatto analogo come al § precedente, troviamo che i più generali valori di U, V sono dati dalle formole seguenti

$$\begin{cases} U^2 = B\operatorname{sen} 2u - A\cos 2u - C - 1 \\ V^2 = A\cos 2v + B\operatorname{sen} 2v + C, \end{cases}$$

essendo A, B, C costanti arbitrarie. Si vede subito che, senza alterare la generalità, si può fare qui $A = 0$, onde:

La più generale [1] *superficie di curvatura* $K = +1$, *col sistema v di linee di curvatura piane, è definita da*

$$(C^*) \qquad ds^2 = \cot^2(u+v)\,\frac{du^2}{B\operatorname{sen} 2u - C - 1} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u+v)}\,\frac{dv^2}{B\operatorname{sen} 2v + C},$$

con B, C *costanti arbitrarie.*

L'elemento lineare sferico rappresentativo è dato dalla formola

$$(D^*) \quad ds'^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u+v)}\,\frac{du^2}{B\operatorname{sen} 2u - C - 1} + \cot^2(u+v)\,\frac{dv^2}{B\operatorname{sen} 2v + C},$$

essendo

$$r_1 = \frac{1}{\cos(u+v)}, \quad r_2 = \cos(u+v).$$

---

[1] S'intende che ciò vale nell'ipotesi, implicita nelle nostre formole, che sia $r_2 < 1$. Altrimenti bisognerà sostituire alla superficie la sua trasformata di Hazzidakis di cui parleremo più avanti al Cap. XXV.

§. 332.

Le superficie d'Enneper come superficie di Joachimsthal.

Cogli sviluppi dei due §§ precedenti abbiamo dimostrato l'esistenza di una doppia infinità di superficie con una data curvatura costante e con un sistema di linee di curvatura piane. Queste superficie, definite dalle forme (C), (C*) dell'elemento lineare, sono state trovate la prima volta da Enneper [1] e diconsi superficie d'Enneper. Rimane da trovare le loro equazioni in termini finiti; ci limiteremo qui a far vedere che tale determinazione si fa con quadrature che portano, in generale, alle funzioni ellittiche. A questo scopo stabiliremo la seguente notevole proprietà geometrica delle superficie in discorso:

In ogni superficie d'Enneper a curvatura costante i piani delle linee di curvatura del primo sistema passano per una retta fissa, e quindi le linee di curvatura del secondo sistema sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie, coi centri distribuiti sulla retta fissa; ogni superficie d'Enneper appartiene cioè alla classe di Joachimsthal (§ 320).

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che in ogni tale superficie ciascuna linea di curvatura u del secondo sistema è a curvatura geodetica costante. E infatti se prendiamo p. e. il caso pseudosferico, è l'equazione (35) che dà la condizione perchè le linee v siano piane. D'altra parte, l'elemento lineare della superficie essendo dato dalla (32), la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee u è data da

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

ed è quindi per la (35)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho_u}\right) = 0,$$

cioè

$$\frac{1}{\rho_u} = f(u),$$

ciò che dimostra appunto l'osservazione. [2] Ora sussiste il seguente

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, 1868, pag. 258.

[2] Si può anzi osservare inversamente che di qui risulta: *Se le linee di curvatura di un sistema, sopra una superficie di curvatura costante, hanno costante la curvatura geodetica, quelle dell'altro sistema sono piane.*

teorema, dovuto a Brioschi: *Quando una linea* C *di curvatura di una superficie ha costante = a il raggio di curvatura geodetica, essa appartiene ad una sfera di raggio a, che taglia ortogonalmente la superficie.* Rammentando la costruzione di Beltrami pel centro di curvatura geodetica (I, pag. 277), si vede subito infatti che la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo C deve ridursi ad un cono, sul quale la curva C taglia ortogonalmente le generatrici alla distanza a del vertice; la sfera descritta col centro nel vertice del cono e con raggio $= a$ contiene quindi la curva C e taglia ortogonalmente la superficie.

Dopo ciò, siccome le linee di curvatura v della nostra superficie sono piane e quelle u sono descritte sopra sfere ortogonali alla superficie, risulta dal § 320 che i piani delle linee v passano per una retta, sulla quale giacciono i centri delle sfere contenenti le linee u. Così è dimostrata la proprietà geometrica enunciata per le superficie d'Enneper, cioè è provato che:

Le superficie d'Enneper a curvatura costante appartengono alla classe di Joachimsthal.

§. 333.

Equazioni in termini finiti per le superficie d'Enneper.

Delle superficie d'Enneper a curvatura costante conosciamo la forma (C), (C*) dell'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v. Proveremo che le loro equazioni in termini finiti si ottengono con quadrature, dimostrando più in generale il teorema:

Se di una superficie S *di Joachimsthal si conoscono le due forme quadratiche fondamentali*

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$
$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2,$$

riferite alle linee di curvatura u, v, *si otterranno con quadrature le equazioni in termini finiti della superficie.*

Supponiamo che le linee di curvatura v siano piane e le linee u a curvatura geodetica costante, quindi (§. 332) tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie coi centri distribuiti sopra una retta, per la quale passano tutti i piani delle linee v; avremo intanto

$$\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \varphi(v)\,,\quad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \psi(u)\,.$$

Si vede subito quale è il significato geometrico delle funzioni $\psi(u)$, $\varphi(v)$. Intanto la prima $\psi(u)$ dà l'inversa del raggio della sfera che contiene la linea di curvatura u. Quanto alla seconda $\varphi(v)$, indicando con σ l'angolo d'inclinazione del piano della linea v sulla superficie, si ha

$$\cot\sigma = \varphi(v),$$

come si rileva dall'immagine sferica.

Ora si prenda per semplicità la retta fissa per asse delle z e si assumano coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\theta\,,\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\quad z\,;$$

dovremo avere

$$d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2\,. \tag{39}$$

Poichè le linee di curvatura v sono nei piani θ = costante, sarà θ una funzione della sola v, che calcoleremo nel modo seguente. Mantenendo per la superficie S le consuete notazioni (Cf. §. 273, pag. 147), poichè la normale al piano θ ha i coseni di direzione

$$\mathrm{sen}\,\theta\,,\ -\cos\theta\,,\ 0$$

avremo

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{Y}_1\cos\theta = 0 \\ \mathrm{X}_2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{Y}_2\cos\theta = \mathrm{sen}\,\sigma \\ \mathrm{X}_3\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{Y}_3\cos\theta = \cos\sigma\,. \end{cases} \tag{40}$$

Poichè inoltre

$$x\,\mathrm{sen}\,\theta - y\cos\theta = 0\,,$$

derivando questa rapporto a v, otteniamo

$$\sqrt{\mathrm{G}}\,(\mathrm{X}_2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{Y}_2\cos\theta) + (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dv} = 0\,,$$

ossia per la seconda delle (40)

$$\rho\frac{d\theta}{dv} = -\sqrt{\mathrm{G}}\,\mathrm{sen}\,\sigma\,. \tag{41}$$

D'altronde, derivando rapporto a v le (40), coll'aver riguardo alle

formole (α) del citato §. 273 (pag. 147), deduciamo

$$(X_1 \cos\theta + Y_1 \operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{sen}\sigma$$

$$(X_2 \cos\theta + Y_2 \operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dv} = \left(\frac{d\sigma}{dv} + \frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)\cos\sigma$$

$$(X_3 \cos\theta + Y_3 \operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dv} = \left(\frac{d\sigma}{dv} + \frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)\operatorname{sen}\sigma,$$

da cui quadrando e sommando

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dv} + \frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 \operatorname{sen}^2\sigma\,. \tag{42}$$

Naturalmente il secondo membro sarà una funzione della sola v, come si potrebbe verificare. Osservando la (42), la (41) ci dà in termini finiti il valore di ρ, mentre la (42) ci dà θ con una quadratura. Sostituendo i valori trovati nella (39), calcoleremo ds^2 e quindi s con un'altra quadratura.

Applicando queste formole generali al caso delle superficie d' Enneper, che abbiamo definito ai §§. 330, 331 mediante le loro equazioni intrinseche, si vedrà che le quadrature da eseguirsi portano, in generale, alle funzioni ellittiche.

§. 334.

Elicoidi pseudosferiche del Dini.

Eseguiremo i calcoli effettivi per le equazioni in termini finiti delle superficie d' Enneper nel solo caso particolare molto notevole *in cui i piani delle linee di curvatura v tagliano la superficie sotto il medesimo angolo* σ; allora dovrà essere θ costante. Ma nel caso della superficie pseudosferica d' Enneper al §. 330, corrispondente alla forma (C) del ds^2, si ha

$$\cot\sigma = \sqrt{A\cosh 2v + B\operatorname{senh} 2v + C - 1}\,,$$

ed avremo σ = costante solo prendendo

$$A = 0\,, \quad B = 0\,.$$

Dopo di ciò la (C) diventa

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2(u+v)\,.\,\operatorname{sen}^2\sigma\,du^2 + \frac{1}{\cosh^2(u+v)}\operatorname{tg}^2\sigma\,dv^2$$

(con σ costante) ed essendo

$$r_1 = \frac{1}{\operatorname{senh}(u+v)}\,,\quad r_2 = -\operatorname{senh}(u+v)\,,$$

le due forme quadratiche fondamentali della superficie ammettono il gruppo continuo di trasformazioni

$$u = u' + h\,,\quad v = v' - h\,,$$

onde la superficie è necessariamente elicoidale. È evidente poi che le sfere contenenti le linee di curvatura u hanno tutte egual raggio; il calcolo della curvatura geodetica delle linee u conferma questa osservazione e dà pel valore del detto raggio

$$R = \operatorname{sen}\sigma\,.$$

Il profilo meridiano di questa elicoide, essendo traiettoria ortogonale di sfere di raggio R coi centri sull'asse, è una trattrice di tangente costante = R, avente l'asse per assintoto.

Dalle considerazioni precedenti sono già perfettamente definite queste singolari elicoidi pseudosferiche, trovate la prima volta dal Dini.

Volendo scrivere le loro equazioni esplicite, possiamo applicare le formole (41) (42) del § precedente, che danno

$$\frac{d\theta}{dv} = \operatorname{tg}\sigma\,,\quad \rho = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cosh(u+v)}\,,$$

e successivamente per la (39)

$$ds = \operatorname{sen}\sigma\left\{\frac{dv}{\cosh^2(u+v)} - \frac{\operatorname{senh}^2(u+v)}{\cosh^2(u+v)}\,du\right\}.$$

Di qui integrando abbiamo

$$\theta = v\operatorname{tg}\sigma\,,\quad s = \operatorname{sen}\sigma\,\{\operatorname{tg} h(u+v) - u\}$$

e quindi per le equazioni in termini finiti della superficie

$$\begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\cosh\,(u+v)}\cos\,(v\,\operatorname{tg}\sigma) \\ y = \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\cosh\,(u+v)}\operatorname{sen}\,(v\,\operatorname{tg}\sigma) \\ z = \operatorname{sen}\sigma\,\{\operatorname{tgh}\,(u+v) - (u+v)\} + v\operatorname{sen}\sigma\,. \end{cases}$$

Queste rappresentano appunto un'elicoide di parametro $m = \cos\sigma$, avente per profilo meridiano la trattrice di tangente costante $= \operatorname{sen}\sigma$, coll'asse elicoidale per assintoto.

Si osserverà infine che le proprietà descritte delle elicoidi del Dini dimostrano altresì che le linee di curvatura sferica $u =$ costante sono *lossodromiche* delle rispettive sfere, e ne tagliano i meridiani nei piani per l'asse sotto l'angolo σ.

Nella classe delle superficie d'Enneper a curvatura positiva (§. 331) non esistono superficie *reali* di natura così semplice. E infatti in questo caso l'ipotesi di σ costante darebbe nella (C*) $B = 0$; ma allora evidentemente la corrispondente superficie è immaginaria.

§. 335.

Superficie a linee di curvatura sferiche in un sistema.

Vogliamo ora brevemente occuparci delle superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche, nella qual cosa ci limiteremo all'esposizione di alcuni risultati fondamentali, che permettono di dedurre queste superficie da quelle già note con un sistema di linee di curvatura piane.

La prima ricerca che faremo a questo scopo sarà diretta a risolvere la questione seguente: *Dato sulla sfera di Gauss un sistema doppio ortogonale di linee* (u, v), *stabilire i criterii per riconoscere se esistono superficie, che ammettano il sistema dato* (u, v) *come immagini delle linee di curvatura, e nelle quali le linee di un sistema, p. e. le* v, *siano sferiche.* Seguiremo la via tenuta dal Dini nella sua memoria del 1869: *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche;* [1] le formole date dal Dini in questa memoria si prestano invero con molta facilità a stabilire anche gli ultimi risultati conseguiti dai geometri in questa teoria.

---

[1] Memorie della Società dei XL. Serie III^a. T. II. P. 1^a.

Sia

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 \tag{43}$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico, riferito al dato sistema ortogonale u, v, ove con X, Y, Z abbiamo indicato, nel modo consueto, le coordinate di un punto mobile sulla sfera. Ponendo

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v},$$

abbiamo le formole

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}X_2 - \sqrt{e}\,X, \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}X_1, \dfrac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{e}\,X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}X_2, \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}X_1 - \sqrt{g}\,X, \dfrac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{g}\,X_2. \end{cases}$$

Supponiamo ora che esista una superficie S avente le linee u, v per immagini sferiche delle linee di curvatura, e le linee v sulla S siano inoltre sferiche. Consideriamo una qualunque di queste linee v sopra S ed un suo punto $M \equiv (x, y, z)$; sia C il centro della sfera che contiene la linea. Il piano normale in M alla v contiene la normale M N alla superficie e passa pel centro C della sfera, e notiamo che l'angolo $C\,M\,N = \sigma$ è costante, pel teorema di Joachimsthal, lungo tutta la linea v. Se nel detto piano assumiamo come assi le due direzioni ortogonali

$$(X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2),$$

e indichiamo con

$$\alpha, \beta$$

le relative coordinate del centro C, avremo

$$\alpha = R\cos\sigma, \quad \beta = R\,\mathrm{sen}\,\sigma,$$

essendo R il raggio della sfera, e per l'osservazione ora fatta saranno α, β funzioni di v soltanto. Ora, dando ad α, β i segni convenienti, saranno

$$x - \alpha X - \beta X_2, \quad y - \alpha Y - \beta Y_2, \quad z - \alpha Z - \beta Z_2$$

le coordinate assolute del centro C, le quali sono alla loro volta tre funzioni della sola v, che indicheremo con

$$V_1, V_2, V_3.$$

Dunque: *Le coordinate di un punto x, y, z mobile sulla superficie* S *saranno date dalle formole*

$$(45)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \beta X_2 + V_1 \\ y = \alpha Y + \beta Y_2 + V_2 \\ z = \alpha Z + \beta Z_2 + V_3 , \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, V_1, V_2, V_3$ *sono cinque funzioni della sola* v.

§. 336.

Ricerca delle condizioni perchè le linee v siano sferiche.

Bisogna ora ricercare le condizioni alle quali debbono soddisfare il sistema sferico dato (u, v) e le funzioni

$$\alpha, \beta, V_1, V_2, V_3$$

affinchè le (45) definiscano una superficie S della specie voluta. Basterà per ciò che la superficie rappresentata da queste equazioni abbia X, Y, Z per coseni di direzione della normale, poichè avendosi per le (45)

$$(\alpha)\qquad (x - V_1)^2 + (y - V_2)^2 + (z - V_3)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(\beta)\qquad X\frac{x - V_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + Y\frac{y - V_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + Z\frac{z - V_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} ,$$

ogni linea v della superficie sarà descritta per la (α) sopra una sfera col centro in (V_1, V_2, V_3) e di raggio $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ed inoltre per la (β) questa sfera taglierà la superficie sotto un angolo che, avendo per coseno $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, sarà costante lungo la detta linea v. Dunque le linee v saranno linee di curvatura, e le altre saranno quindi le u come corrispondenti alle traiettorie ortogonali delle v sulla sfera.

Ciò premesso osserviamo che derivando le (45) otteniamo per le (44):

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\alpha\sqrt{e} + \beta\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\beta\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} X_1 + (\beta' + \alpha\sqrt{g})\, X_2 + (\alpha' - \beta\sqrt{g})\, X + V'_1 , \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, ove cogli accenti indichiamo derivazione rapporto a v. Esprimiamo che X, Y, Z sono i coseni di direzione della normale scrivendo le due condizioni

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \ , \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \ .$$

Di queste la prima è identicamente soddisfatta, e la seconda ci dà l'equazione di condizione richiesta:

$$\text{(E)} \qquad \alpha' + V'_1 X + V'_2 Y + V'_3 Z = \beta \sqrt{g} \ .$$

Una prima risposta alla nostra questione si ha dunque nel teorema: *Dato un sistema ortogonale sferico* (u, v), *affinchè esistano superficie* S *che lo ammettano come immagine delle linee di curvatura e nelle quali le linee* v *siano sferiche, è necessario e sufficiente che possano determinarsi cinque funzioni*

$$\alpha, \beta, V_1, V_2, V_3$$

della sola v *tali che ne risulti soddisfatta la* (E).

Due osservazioni vengono subito suggerite dalla forma di questa condizione (E). La prima è questa che siccome in essa le funzioni

$$\alpha, V_1, V_2, V_3$$

figurano solo per le loro derivate, si possono aggiungere costanti arbitrarie ad α, V_1, V_2, V_3 e la superficie S definita dalle (45) avrà sempre sferiche le linee di curvatura v. L'aggiunta di costanti a V_1, V_2, V_3 non fa che imprimere una traslazione alla S, mentre una costante aggiunta ad α fa passare dalla S ad una superficie parallela; ed è ovvio geometricamente che superficie parallele hanno sferiche insieme le linee di curvatura di un sistema.

Una seconda osservazione molto semplice ma di grande importanza è questa che, essendo la (E) omogenea in

$$\alpha', V'_1, V'_2, V'_3, \beta,$$

se essa è soddisfatta per un certo sistema di queste funzioni di v, lo sarà egualmente alterandole tutte per un fattore comune *funzione arbitraria di* v. Questa osservazione dà subito il teorema di Blutel:

Se una superficie S *ha sferiche le linee di curvatura* v, *esistono infinite altre superficie, della medesima specie, dipendenti da una funzione arbitraria, ed aventi a comune con* S *l'immagine sferica delle linee di curvatura.*

§. 337.

Altre forme delle equazioni di condizione.

La condizione trovata (E) si può porre sotto altre forme equivalenti, che conviene osservare. Supposta la (E) soddisfatta, le (45) ci danno una superficie S con linee v di curvatura sferiche, e il confronto delle (46) colle formole di Rodrigues

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X}{\partial u} = r_2 \sqrt{e} \, . \, X_1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X}{\partial v} = r_1 \sqrt{g} \quad X_2$$

ci dà pei raggi principali di curvatura della S le formole

$$r_2 = \alpha + \beta \frac{1}{\sqrt{e\,g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}$$

$$r_1 = \alpha + \frac{\beta'}{\sqrt{g}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum V'_1 X_2 \; ;$$

con questi valori di r_1, r_2 verranno soddisfatte le equazioni di Codazzi

$$\begin{cases} (r_1 - r_2) \dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} - \dfrac{\partial r_2}{\partial v} = 0 \\ (r_1 - r_2) \dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} + \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = 0 \; . \end{cases}$$

Inversamente dimostriamo che: *Se il ds^2 sferico è tale che si possano soddisfare le equazioni di Codazzi con un valore di r_2 della forma*

$$\text{(F)} \qquad r_2 = \alpha + \beta \frac{1}{\sqrt{e\,g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \, ,$$

essendo α, β funzioni di v soltanto, e con un conveniente valore di r_1, la corrispondente superficie S definita per quadrature dalle formole

$$x = \int \left(r_2 \frac{\partial X}{\partial u} \, du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v} \, dv \right)$$

avrà sferiche le linee di curvatura v.

E infatti avremo per la (F)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\alpha\sqrt{e} + \beta\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)X_1 ,$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\alpha X + \beta X_2) ,$$

onde integrando avremo

$$x = \alpha X + \beta X_2 + V_1 ,$$

indicando V_1 un'altra funzione della sola v. Analogamente procedendo per y, z, vediamo che sussistono le (45), e per ciò le linee di curvatura v sono sferiche.

È bene osservare un'altra forma, utile per le applicazioni, sotto cui si può porre questo risultato, cioè il teorema: *Se una superficie* S *è riferita alle sue linee di curvatura* u, v, *la condisione necessaria e sufficiente perchè le linee di curvatura* v *siano sferiche è che il relativo raggio principale di curvatura* r_2 *abbia un'espressione della forma*

$$(F) \qquad r_2 = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} ,$$

ove e, g *sono i coefficienti dell'elemento lineare sferico ed* α, β *sono funzioni della sola* v.

§. 338.

Determinazione di tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche.

Abbiamo già dedotto, alla fine del §. 336, dalla condizione (E) del Dini il teorema di Blutel. Ora riprendiamo ed invertiamo queste considerazioni, le quali portano facilmente alla determinazione completa di tutte le superficie dell'attuale classe.

Supponiamo *data* una superficie S col sistema v di linee di curvatura sferiche e, per rendere più breve la discussione, escludiamo i due casi già studiati: 1.° che le sfere contenenti le linee v siano concentriche (§ 319), 2.° che le linee v siano circoli (§§ 321 e segg).

Potremo rappresentare la nostra superficie S mediante le formole (45) e le funzioni

$$\alpha, \beta, V_1, V_2, V_3$$

soddisferanno alla condizione (E)

$$\alpha' + V'_1 X + V'_2 Y + V'_3 Z = \beta \sqrt{g} .$$

Cerchiamo ora di determinare *tutte* le superficie $\overline{S}$ aventi a comune con S le immagini sferiche delle linee di curvatura e per le quali le linee v sono ancora sferiche. Indicando con

$$\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3$$

le funzioni di v che per la $\overline{S}$ sono le analoghe a quelle introdotte per la S, dovremo avere

$$\overline{\alpha'} + \overline{V'}_1 X + \overline{V'}_2 Y + \overline{V'}_3 Z = \overline{\beta} \sqrt{g} .$$

Ponendo

$$\overline{\beta} = \lambda \beta ,$$

sarà λ una funzione della sola v, ed il paragone delle due condizioni (E) sopra scritte ci dà

$$\overline{\alpha'} - \lambda \alpha' + (\overline{V'}_1 - \lambda V'_1) X + (\overline{V'}_2 - \lambda V'_2) Y + (\overline{V'}_3 - \lambda V'_3) Z = 0 .$$

Ora questa è un'equazione lineare in X, Y, Z con coefficienti funzioni della sola v e, se non fosse un'identità, le linee sferiche v sarebbero circoli contro l'ipotesi. Dunque si dovrà avere

$$\frac{V'_1}{\overline{V'}_1} = \frac{\overline{V'}_2}{\overline{V'}_2} = \frac{\overline{V'}_3}{\overline{V'}_3} = \frac{\overline{\beta}}{\beta} = \frac{\overline{\alpha'}}{\alpha'} ;$$

la soluzione più generale del problema è quindi quella già osservata al §. 336.

Osserviamo che l'eguaglianza dei tre primi rapporti ha il seguente significato geometrico: *Le due curve* $\overline{\Gamma}$, Γ *luogo dei centri delle sfere che per le rispettive superficie* $\overline{S}$, S *contengono le linee di curvatura* v *sono trasformate di Combescure l'una dell'altra.*

Viceversa, presa una trasformata qualunque $\overline{\Gamma}$ di Combescure della curva primitiva Γ, e dette $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ le coordinate di un punto mobile su $\overline{\Gamma}$, si avrà

$$\overline{V'}_1 = \lambda V'_1 \quad , \quad \overline{V'}_2 = \lambda V'_2 \quad , \quad \overline{V'}_3 = \lambda V'_3 ,$$

essendo λ una funzione di v. Basterà allora determinare le funzioni $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ di v dalle formole

$$\overline{\alpha} = \int \lambda \alpha' \, dv \quad , \quad \overline{\beta} = \lambda \beta$$

e le relative formole (45)

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{\alpha}\,X + \bar{\beta}\,X_2 + \bar{V}_1 \\ \bar{y} = \bar{\alpha}\,Y + \bar{\beta}\,Y_2 + \bar{V}_2 \\ \bar{z} = \bar{\alpha}\,Z + \bar{\beta}\,Z_2 + \bar{V}_3 \end{cases}$$

ci definiranno una superficie $\bar{S}$ colle linee di curvatura v sferiche, avente a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura. Diremo per brevità che la $\bar{S}$ è una trasformata di Combescure della S.

Ora facilmente vediamo che sussiste il teorema: *Fra le trasformate di Combescure di una data superficie* S, *con un sistema v di linee di curvatura sferiche, ve ne sono infinite per le quali le sfere contenenti le linee di curvatura v passano per un punto fisso dello spazio.*

E infatti se vogliamo che per la superficie $\bar{S}$ le sfere contenenti le linee v passino per l'origine, siccome l'equazione di una di queste sfere è

$$(x - \bar{V}_1)^2 + (y - \bar{V}_2)^2 + (z - \bar{V}_3)^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2,$$

converrà porre fra $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ e le $\bar{V}$ la relazione

$$\bar{V}_1^2 + \bar{V}_1^2 + \bar{V}_3^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2,$$

ossia

$$(47)\quad \left(\int \lambda V'_1\,dv\right)^2 + \left(\int \lambda V'_2\,dv\right)^2 + \left(\int \lambda V'_3\,dv\right)^2 = \left(\int \lambda \alpha'\,dv\right)^2 + \lambda^2 \beta^2.$$

Disponendo convenientemente della funzione arbitraria $\lambda(v)$, si può sempre fare in guisa che la precedente condizione sia soddisfatta, e ciò in infiniti modi; poichè la successiva derivazione della (47) permette di eliminare gli integrali che vi figurano e di costruire una corrispondente equazione differenziale per λ. [1]

Ora quando una superficie $\bar{S}$ ha un sistema di linee di curvatura tracciate sopra sfere che passano per un punto fisso O, un'inversione per raggi vettori reciproci con questo centro la cangia in una superficie Σ con un sistema di linee di curvatura piane. Si ottiene così il risultato finale: *Per ottenere tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche si prenda la più generale superficie con un sistema di linee di curvatura piane e se ne costruisca la trasformata* S *per inversione: le trasformate di Combescure della* S *daranno tutte le superficie richieste.*

---

[1] Vedi per l'effettiva costruzione Darboux *l. c.* T. IV pag. 250.

Capitolo XXII.

Le superficie d'area minima

Cenno storico. — Formole di Weierstrass. — Superficie minime algebriche. — Superficie doppie. — Deformazioni delle superficie minime per le quali si conservano ad area minima. — Superficie minime associate. — Superficie coniugate in applicabilità. — Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione. — Elicoidi ad area minima. — Formole di Schwarz. — Costruzione di una superficie minima assegnatane una striscia analitica. — Criterio per riconoscere se una superficie può ridursi per flessione una superficie minima. — Relazione delle superficie minime colle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione. — Inversione del teorema di Guichard. — Le congruenze W di Thybaut con falde focali ad area minima. — Le superficie d'area minima negli spazi di curvatura costante.

§. 339.

Cenno storico.

La teoria delle superficie d'area minima forma oggidì uno dei capitoli più completi ed estesi della geometria infinitesimale. Le sue molteplici relazioni colla teoria delle funzioni di variabile complessa, in particolare con quella delle equazioni differenziali lineari, e col calcolo delle variazioni danno a questo studio un grande interesse. Noi ci dovremo limitare ad esporre i risultati fondamentali e rimanderemo il lettore, che desideri approfondire l'argomento, alle belle lezioni di Darboux (t. I) ove troverà un'esposizione completa. Ivi pure, e nella memoria di Beltrami [1], troverà ampie notizie storiche intorno allo sviluppo della teoria. Pel nostro scopo ci atterremo specialmente, nel presente capitolo alla breve esposizione data da Schwarz nelle *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen.*

Solo ritorneremo brevemente sulle relazioni, stabilite dal primo teorema di Guichard (Cap. XVII, §. 257), fra le superficie d'area minima e le superficie applicabili sul paraboloide di rotazione e daremo ancora un cenno sulle superficie d'area minima negli spazî di curvatura costante.

---

[1] *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* (Memorie dell'Accademia di Bologna, t. VII, 1868).

I principii della teoria delle superficie minime rimontano alla celebre memoria di Lagrange ove sono posti i fondamenti del calcolo delle variazioni[1]. Consideriamo nello spazio un contorno chiuso C ed una superficie connessa S terminata a questo contorno; la S dicesi *ad area minima*, se essa ha la più piccola area rispetto a tutte le superficie infinitamente vicine terminate al medesimo contorno C.

Se l'equazione ordinaria della S è $z = f(x, y)$, l'area di S è data dall'integrale doppio

$$\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy ,$$

e basta applicare i principii del calcolo delle variazioni per ottenere l'equazione a derivate parziali per z:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0 ,$$

ovvero

$$(1 + q^2)\, r - 2\, p\, q\, s + (1 + p^2)\, t = 0 . \qquad (1)$$

L'interpretazione geometrica della (1) è stata data da Meusnier (1776), il quale osservò che essa esprime la proprietà della S di avere in ogni punto i raggi principali di curvatura eguali e di segno contrario. A tutte le superficie che soddisfano a quest'ultima condizione si dà il nome di superficie d'area minima, o superficie minime. La denominazione è in effetto giustificata da ciò che a ciascuna di esse, per un contorno convenientemente scelto, compete la proprietà di minimo da cui siamo partiti.

A Meusnier è pure dovuta la scoperta delle due prime superficie d'area minima che si conobbero, e cioè del catenoide e dell'elicoide rigata; esse si ottengono immediatamente, cercando le soluzioni della (1) della forma

$$z = f(x^2 + y^2), \quad \text{o} \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Monge fu il primo a dare l'integrale completo della (1) (1784); ma la forma poco appropriata alle applicazioni, sotto cui le equazioni integrali eran date, per lungo tempo non permise di conoscere altre super-

---

[1] Miscellanea Taurinensia, t. II. 1760-61.

ficie minime reali oltre le due citate di Meusnier. Nel 1834 Scherk trovò le superficie minime elicoidali e la superficie di traslazione [1]

$$z = \frac{1}{a}\left\{\log\cos(a\,x) - \log\cos(a\,y)\right\}.$$

I progressi più importanti della nostra teoria datano di poi dalla pubblicazione dei lavori di O. Bonnet (1853-60), il quale riconobbe la proprietà fondamentale delle superficie minime che la loro rappresentazione sferica è una rappresentazione conforme, e diede le equazioni integrali sotto una forma, che permetteva di ottenere tutte le superficie minime reali e infinite superficie minime algebriche.

Nel 1866 comparvero le importanti memorie di Weierstrass, ove le formole di Monge vengono poste sotto una forma semplice ed elegante, che permette di risolvere varie questioni fondamentali. In queste memorie vengono pure enunciati importanti risultati relativi al così detto problema di Plateau (vedi capitolo seguente). Questo celebre problema è pure trattato in una memoria postuma di Riemann e in una serie di importantissimi lavori di Schwarz, ora raccolti nel primo volume delle opere di questo geometra.

In un altro ordine di ricerche ci restano da menzionare fra le più importanti pubblicazioni sull'argomento quelle di Lie [2] (1877-78), il quale si è occupato specialmente delle superficie minime algebriche.

§. 340.

Formole di Weierstrass.

Cominciamo dallo stabilire le formole di Weierstrass fondandoci sul risultato del § 135 (I, pag, 291) secondo il quale ad ogni forma isoterma dell'elemento lineare sferico corrisponde una superficie minima, che si ottiene per quadrature.

Sia (u, v) un sistema ortogonale isotermo sulla sfera e indichiamo con

$$ds'^2 = \frac{1}{r_2}(du^2 + dv^2) \tag{2}$$

---

[1] Questa notevole superficie minima si trova subito, cercando le soluzioni della (1) della forma

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

[2] Archiv for Mathematik og Naturvidenskab t. II e III. Mathematische Annalen, t. XIV.

la forma dell'elemento lineare. Note le coordinate X, Y, Z di un punto della sfera in funzione di u, v, si avranno per quadrature le coordinate x, y, z del punto corrispondente della superficie minima S dalle formole

$$(3)\qquad \begin{cases} dx = r_2 \left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial X}{\partial v}\, dv \right) \\ dy = r_2 \left(\dfrac{\partial Y}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial Y}{\partial v}\, dv \right) \\ dz = r_2 \left(\dfrac{\partial Z}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial Z}{\partial v}\, dv \right), \end{cases}$$

indi per l'elemento lineare di S si avrà

$$(4)\qquad ds^2 = r_2 \, (du^2 + dv^2)$$

e i raggi principali di curvatura di S saranno

$$r_2 \ , \quad r_1 = - r_2 \ .$$

Riferiamo ora la sfera, nel solito modo, ai meridiani ed ai paralleli ponendo

$$X = \operatorname{sen}\theta \cos\omega \ , \qquad Y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \ , \qquad Z = \cos\theta \, ,$$

e introduciamo la variabile complessa τ sulla sfera (o sul piano dell'equatore):

$$\tau = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{i\omega}$$

insieme colla coniugata

$$\tau_0 = \cot\frac{\theta}{2}\, e^{-i\omega} \quad \text{(Cf. § 51, I, pag. 107)} \ .$$

Esprimendo X, Y, Z per τ, τ_0, abbiamo come al § 314 (pag. 257)

$$(5)\qquad X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1} \ , \quad Y = \frac{1}{i}\,\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1} \ , \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}$$

e per l'elemento lineare sferico ds'

$$(6)\qquad ds'^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2} \ .$$

Ora la variabile complessa

$$\sigma = u + i\, v$$

è una funzione di τ ovvero della coniugata τ_0, ma l'un caso non differisce essenzialmente dall'altro, e potremo per ciò supporre σ *funzione di* τ, indi σ_0 di τ_0. La (2)

$$ds'^2 = \frac{1}{r_2}\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,d\tau\,d\tau_0\,,$$

confrontata colla (6), dà quindi

$$r_2 = \frac{(\tau\,\tau_0+1)^2}{4}\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}$$

e la (4) diventa

$$ds^2 = \frac{(\tau\,\tau_0+1)^2}{4}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau\,d\tau_0\,.$$

Ora esprimiamo le (3) per τ, τ_0, osservando che per una funzione qualunque $\Phi(u,v)$, considerata come funzione di τ, τ_0, si hanno le formole

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma}{d\tau}\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \dfrac{d\sigma}{d\tau}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau_0} \\ \dfrac{d\sigma}{d\tau}\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = \dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau}\,, \end{cases}$$

e otterremo:

$$(6^*)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{1}{4}(1-\tau^2)\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \dfrac{1}{4}(1-\tau_0^2)\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0 \\ dy = \dfrac{i}{4}(1+\tau^2)\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau - \dfrac{i}{4}(1+\tau_0^2)\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0 \\ ds = \dfrac{1}{2}\tau\left(\dfrac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \dfrac{1}{2}\tau_0\left(\dfrac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0\,. \end{cases}$$

Ora ponendo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \mathrm{F}(\tau)\,,$$

e introducendo il simbolo $\mathrm{R}\,\psi$ per indicare la parte reale di una quantità complessa ψ, avremo le formole

$$(7)\quad x = \mathrm{R}\int(1-\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad y = \mathrm{R}\int i\,(1+\tau^2)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,\quad s = \mathrm{R}\int 2\,\tau\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,,$$

nelle quali gli integrali dei secondi membri s'intendono presi lungo lo stesso cammino curvilineo sul piano complesso τ.

Sono queste le formole di Weierstrass. Viceversa si vede subito che presa per $F(\tau)$ una funzione della variabile complessa τ, le (7) danno per quadrature una corrispondente superficie minima S. L'elemento lineare della S ed il raggio principale di curvatura (positivo) r_1 sono dati dalle formole

$$ds^2 = (\tau\tau_0 + 1)^2 F(\tau) F_0(\tau_0) d\tau d\tau_0 \tag{8}$$

$$r_1 = \frac{(\tau\tau_0 + 1)^2}{2} \sqrt{F(\tau) F_0(\tau_0)} . \tag{9}$$

Le linee di curvatura u, v si ottengono poi, eguagliando a costanti la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario dell'integrale

$$\sigma = \int \sqrt{2 F(\tau)}\, d\tau ;$$

esse hanno cioè per equazioni

$$R \int \sqrt{F(\tau)}\, d\tau = \text{cost}^{te} , \quad R \int i \sqrt{F(\tau)}\, d\tau = \text{cost}^{te} . \tag{10}$$

§. 341.

Superficie minime algebriche.

Alle formole (7) di Weierstrass si può dare un'altra forma molto utile specialmente per la ricerca delle superficie minime algebriche. Consideriamo per ciò la $F(\tau)$ come la derivata terza $\varphi'''(\tau)$ di una funzione $\varphi(\tau)$, che resterà essa stessa arbitraria, e le (7), liberate da ogni segno di quadratura, diventeranno:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\left[(1-\tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau)\right] \\ y &= R\left[i(1+\tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) - 2i\varphi(\tau)\right] \\ z &= R\left[2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau)\right] . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ora se si suppone che $\varphi(\tau)$ sia una funzione *algebrica* di τ, è chiaro che queste formole ci definiscono una superficie minima algebrica. Ma è importante osservare che inversamente ogni superficie minima algebrica si ottiene in questo modo. Weierstrass dimostra la proprietà enun-

ciata come segue. Sia

$$w = u + i\,v = f(x + i\,y)$$

una funzione della variabile complessa $x+iy$; allora *se in un determinato campo sussiste una relazione algebrica fra x, y e la parte reale u di w, sarà w funzione algebrica di $x+iy$.*

Nell'intorno di un punto, che per semplicità situiamo in $x=0, y=0$, sia w sviluppato in serie di Taylor

$$w = a_0 + i\,b_0 + (a_1 + i\,b_1)(x + i\,y) + (a_2 + i\,b_2)(x + i\,y)^2 + \ldots,$$

essendo le a e le b costanti reali, e sia r il raggio del cerchio di convergenza; avremo u sviluppata per potenze di x, y colla formola

$$(12) \qquad u = a_0 + \frac{1}{2}(a_1+ib_1)(x+iy) + \frac{1}{2}(a_2+ib_2)(x+iy)^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2}(a_1-ib_1)(x-iy) + \frac{1}{2}(a_2-ib_2)(x-iy)^2 + \ldots.$$

Per ipotesi si ha

$$(13) \qquad G(u, x, y) = 0\ ,$$

essendo G funzione razionale intera di u, x, y.

Sviluppando quest'ultima relazione per potenze di x, y, i coefficienti di ogni singolo termine saranno identicamente nulli e rimarranno nulli se in luogo di x, y poniamo quantità complesse $\bar{x}, \bar{y}$, purchè dopo la sostituzione lo sviluppo rimanga convergente. Ora, per il modo di convergenza delle serie di potenze, ciò avviene certamente della serie (12) per u se i moduli di $\bar{x}, \bar{y}$ rimangono inferiori a $\frac{r}{2}$. Poniamo adunque

$$\bar{x} = \frac{x + iy}{2}\ ,\quad \bar{y} = \frac{x + iy}{2i}\ ,$$

dopo di che la (12) diventa

$$\bar{u} = a_0 + \frac{1}{2}(w - w_0)\ ,\quad w_0 = a_0 + i\,b_0$$

e la (13) si cangia in una relazione algebrica fra w e $x+iy$ c. d. d.

Ciò premesso, se si suppone che la superficie minima definita dalle (11) sia algebrica, fra le quantità

$$\frac{X}{1-Z} = \frac{\tau + \tau_0}{2}\ ,\ \frac{Y}{1-Z} = \frac{\tau - \tau_0}{2i}$$

e ciascuna delle quantità x, y, z sussisteranno relazioni algebriche, e pel

teorema dimostrato ciascuna delle tre funzioni

$$f_1(\tau) = (1-\tau^2)\,\varphi''(\tau) + 2\,\tau\,\varphi'(\tau) - 2\,\varphi(\tau)$$
$$f_2(\tau) = i\,(1+\tau^2)\,\varphi''(\tau) - 2\,i\tau\varphi'(\tau) - 2\,i\varphi(\tau)$$
$$f_3(\tau) = 2\,\tau\,\varphi''(\tau) - 2\,\varphi'(\tau)$$

sarà quindi funzione algebrica di τ, e però anche

$$\frac{1}{4}(\tau^2-1)\,f_1(\tau) - \frac{i}{4}(\tau^2+1)\,f_2(\tau) - \frac{1}{2}\tau\,f_3(\tau) = \varphi(\tau)$$

sarà funzione algebrica di τ.

Abbiamo dunque il risultato:

Tutte le superficie minime algebriche si ottengono dalle (11), *ponendovi per* $\varphi(\tau)$ *una funzione algebrica di* τ.

Le formole (7) o (11) di Weierstrass stabiliscono nel modo più semplice il legame fra le funzioni di variabile complessa e le superficie minime, dimostrando che ad ogni funzione $F(\tau)$ di variabile complessa corrisponde una superficie minima determinata, a meno di una traslazione nello spazio. Però, come ora si vedrà, ad una medesima superficie minima corrispondono in generale due diverse forme della funzione $F(\tau)$.

Osserviamo prima un semplice teorema, che risulta subito dalla forma lineare delle (7) rapporto a $F(\tau)$. Sostituiamo nelle (7) per $F(\tau)$ successivamente due funzioni $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ indi la funzione

$$\frac{m\,\varphi_2(\tau) + n\,\varphi_1(\tau)}{m+n}\ (m,\ n \text{ costanti}).$$

Avremo il risultato osservato da Weierstrass:

Se fra i punti di due superficie minime S, S′ *si stabilisce una corrispondenza al modo di Gauss, colla legge di parallelismo delle normali in due punti* P, P′ *corrispondenti, e su ciascun segmento* P P′ *si sceglie un punto* M *che lo divida nel rapporto costante* $\frac{m}{n}$, *il luogo del punto* M *sarà una nuova superficie minima, che corrisponderà alle* S, S′ *per parallelismo delle normali.*

§. 342.

Superficie minime doppie.

Esaminiamo ora la questione sopra indicata, se ad una medesima superficie minima corrispondono una o più forme per la $F(\tau)$. Siano $F(\tau)$, $f(\tau)$ due funzioni di τ che danno luogo a due superficie minime coinci-

denti e siano τ, τ' i valori degli argomenti per F, f che corrispondono al medesimo punto della superficie. La direzione della normale corrispondente a τ o coincide con quella della normale corrispondente a τ' o coll'opposta, e in conseguenza si ha

$$\tau' = \tau$$

nel primo caso e

$$\tau' = -\frac{1}{\tau_0}$$

nel secondo, come risulta subito dall'osservare che, per le (5), X, Y, Z cangiano di segno mutando τ in $-\frac{1}{\tau_0}$. Nella prima ipotesi le formole (7) di Weierstrass danno

$$f(\tau) = \mathrm{F}(\tau)$$

e nella seconda

$$\mathrm{F}(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} f_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{(1)},$$

ovvero

$$f(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} \mathrm{F}_0\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Si vede adunque che le due funzioni in generale diverse

$$\mathrm{F}(\tau)\ ,\quad -\frac{1}{\tau^4} \mathrm{F}_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

danno, sostituite nelle formole di Weierstrass, la medesima superficie minima, giacchè i differenziali delle coordinate risultano nei due casi gli stessi.

Particolarmente interessante è il caso in cui le due funzioni

$$\mathrm{F}(\tau)\ ,\quad -\frac{1}{\tau^4} \mathrm{F}_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

coincidano; allora, per quanto precede, la regione della superficie nell'intorno del punto $-\frac{1}{\tau_0}$ o è congruente per traslazione con quella dell'intorno di τ o coincide assolutamente con questa. Nel 1.° caso la superficie, ammettendo una traslazione in sè medesima, è di necessità

---

(1) Essendo $f(\tau)$ una funzione *analitica* di τ, definita inizialmente da una serie di potenze, convergente entro un certo cerchio, denotiamo con $f_0(\tau)$ la funzione analitica definita dalla serie che si ottiene, cangiando nella primitiva i coefficienti nei loro coniugati, serie che ha il medesimo cerchio di convergenza. La relazione fra $f(\tau)$, $f_0(\tau)$ è indipendente dalla serie iniziale scelta.

periodica quindi trascendente; ciò sarà p. e. senz'altro escluso se la superficie è algebrica. Nel 2.° caso, segnando sulla sfera rappresentativa un cammino che dal punto τ conduca al punto diametralmente opposto $-\frac{1}{\tau_0}$, il cammino corrispondente sulla superficie parte da un punto P di questa e vi ritorna, ma al ritorno il senso della normale si è cambiato con continuità nell'opposto. Si può dunque passare con continuità sulla superficie da una faccia di essa all'opposta; la superficie è cioè ad una sola faccia o, secondo la denominazione di Lie, una *superficie minima doppia*.

Come esempio citeremo la superficie minima di Henneberg, che corrisponde al valore $F(\tau)$

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$$

ed è evidentemente algebrica e doppia.

È questa la più semplice superficie minima doppia; essa è della 5.ª classe e del 15° ordine.

§. 343.

Superficie minime applicabili.

Ogni superficie ad area minima è suscettibile di una deformazione continua, nella quale si conserva ad area minima. Per ricercare queste interessanti deformazioni, facciamo uso delle considerazioni seguenti. Siano S, S′ due superficie d'area minima applicabili l'una sull'altra: nei punti corrispondenti la curvatura dell'una eguaglia la curvatura dell'altra e però i valori assoluti dei corrispondenti raggi principali di curvatura sono eguali. Ne risulta che le due immagini sferiche di S, S′ saranno eguali direttamente o inversamente. Ma il secondo caso si riduce al primo, cangiando il senso positivo della normale ad una delle due superficie, e resta d'altronde escluso, se dalla configurazione S si passa alla configurazione S′ per deformazione continua. Possiamo quindi muovere una delle due superficie, p. e. S′, nello spazio in guisa che le due immagini sferiche si sovrappongano e però i punti corrispondenti di S, S′ siano dati da un medesimo valore di τ. Ciò premesso, siano $F(\tau)$, $f(\tau)$ i corrispondenti valori della funzione F nelle formole di

Weierstrass. Gli elementi lineari delle due superficie dovendo essere eguali, si avrà dalla (8)

$$F(\tau)\ F_0(\tau_0) = f(\tau)\ f_0(\tau_0)\ ,$$

cioè

$$\operatorname{mod}\frac{f(\tau)}{F(\tau)} = 1$$

e quindi $\frac{f(\tau)}{F(\tau)}$ sarà una costante col modulo eguale a 1. Avremo dunque

$$f(\tau) = e^{i\alpha}\ F(\tau)$$

con α costante reale: siccome poi la (8) ci dimostra inversamente che l'elemento lineare non varia se si cangia $F(\tau)$ in $e^{i\alpha}\ F(\tau)$, qualunque valore si attribuisca alla costante reale α, abbiamo il risultato:

La deformazione più generale di una superficie ad area minima, per cui si conserva ad area minima, si ottiene cangiando nelle formole (7) *di Weierstrass* $F(\tau)$ *in* $e^{i\alpha}\ F(\tau)$, *con* α *costante arbitraria reale.*

Così da una superficie minima si ottiene, per deformazione continua, una serie ∞^1 di superficie minime; queste prendono il nome di superficie minime *associate.*

Esaminiamo ora più da vicino le proprietà di queste deformazioni. Le equazioni delle linee di curvatura per la S sono

$$u = \text{costante}\quad ,\quad v = \text{costante}\ ,$$

posto

$$\sigma = u + iv = \int \sqrt{2\,F(\tau)}\,d\tau\ (\S\ 340)\ .$$

Per la superficie minima associata S_α, corrispondente al valore α del parametro, le linee di curvatura hanno quindi le equazioni

$$R\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\sigma\right) = \text{costante}\quad ,\quad R\left(i\,e^{\frac{i\alpha}{2}}\sigma\right) = \text{costante}\ ,$$

cioè

$$u\cos\frac{\alpha}{2} - v\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \text{costante}\quad ,\quad u\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2} = \text{costante}\ ;$$

dunque: *Alle linee di curvatura della superficie minima* S_α *associata alla* S *corrispondono su questa le traiettorie isogonali sotto l'angolo* $\frac{\alpha}{2}$ *delle antiche linee di curvatura.*

Particolarmente interessante è il caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$; allora le linee di curvatura della S si cangiano sulla $S_{\frac{\pi}{2}}$ in linee assintotiche e inversamente le assintotiche di S nelle linee di curvatura di $S_{\frac{\pi}{2}}$. Due tali superficie minime associate si dicono, secondo Bonnet, che per primo studiò queste deformazioni, *superficie coniugate in applicabilità.*

Indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate dei punti della superficie coniugata in applicabilità colla S, avremo dalle (7), cangiando $F(\tau)$ in $i\,F(\tau)$:

$$(14)\quad x_0 = R\int i(1-\tau^2)F(\tau)\,d\tau,\quad y_0 = -R\int(1+\tau^2)F(\tau)\,d\tau,\quad z_0 = R\int 2i\tau F(\tau)\,d\tau$$

Facendo variare α con continuità, la superficie si deformerà con continuità e indicando con x_α, y_α, z_α le coordinate del punto (x, y, z) dopo la deformazione, avremo evidentemente

$$(15)\quad x_\alpha = x\cos\alpha + x_0\,\mathrm{sen}\,\alpha,\quad y_\alpha = y\cos\alpha + y_0\,\mathrm{sen}\,\alpha,\quad z_\alpha = z\cos\alpha + z_0\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Se si prendono gli integrali nelle (7), (14) fra gli stessi limiti 0 e τ, rimarrà fisso durante la deformazione il punto (0, 0, 0) della superficie e il piano tangente in esso: ciascun punto (x, y, z) descriverà durante la deformazione una ellisse col centro nel punto fisso.

Se esprimiamo, per mezzo delle (15), che l'elemento lineare della S_α eguaglia quello della S, otteniamo la relazione

$$(16)\qquad dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0\ ,$$

che è facile verificare direttamente. Essa esprime che: *Due superficie minime coniugate in applicabilità si corrispondono altresì per ortogonalità d'elementi.*

Nello stesso tempo le due superficie sono associate nel senso del Cap. XV. Si osserverà che, corrispondentemente a questa doppia relazione della superficie minima S colla coniugata in applicabilità, si avranno della S due deformazioni infinitesime, nella prima delle quali S conserva invariati i suoi raggi principali di curvatura e nella seconda le sue linee di curvatura (cap. XV).

Si osservi in fine che l'angolo formato da due elementi lineari corrispondenti della superficie minima S e della associata S_α è costante eguale ad α.

§. 344.

Proprietà caratteristiche delle superficie minime associate.

Due superficie minime associate sono applicabili e godono inoltre delle due proprietà seguenti: 1.ª nei punti corrispondenti hanno normali parallele; 2.ª due elementi lineari corrispondenti formano fra loro un angolo costante. Dimostriamo inversamente che, se per due superficie applicabili si presenta l'una o l'altra delle descritte proprietà, esse sono necessariamente superficie minime associate [1].

Per dimostrare la prima cosa ricorriamo alle formole generali di rappresentazione sferica (cap. V) e indicando con S, S_0 le due superficie applicabili, osserviamo che S, S_0 hanno per ipotesi la medesima immagine sferica, quindi per la formola (2) al principio del Cap. V (I, pag. 149), si ha

$$H\,(D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2) = H_0\,(D_0\,du^2 + 2\,D'_0\,du\,dv + D''_0\,dv^2)\,,$$

indicando coll'indice 0 le quantità relative a S_0. Ne segue subito che si avrà

$$H = H_0 = 0\,,$$

cioè S, S_0 saranno superficie minime associate, ovvero risulterà

$$D_0 = \lambda D\,,\quad D'_0 = \lambda D'\,,\quad D''_0 = \lambda D''\,,\quad \lambda = \frac{H}{H_0}\,.$$

Ma la condizione $K = K_0$ dà immediatamente (escluso il caso delle superficie sviluppabili che è facile trattare direttamente)

$$\lambda = \pm 1\,;$$

quindi S, S_0 sono eguali o simmetriche.

Per dimostrare anche la seconda parte del teorema enunciato, cominciamo dal provare che: *Se due superficie applicabili si corrispondono altresì per ortogonalità d'elementi, esse sono superficie minime coniugate in applicabilità.* Ricorriamo per ciò alle formole del cap. XV e precisamente a quelle del §. 226. Se S, S_0 sono a curvature opposte riferiamole alle loro linee assintotiche ed osserviamo le (10) del §. 226 pag. 10. Avendo S, S_0 eguale elemento lineare, ne segue

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = (1-\varphi^2)\,e\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (1-\varphi^2)\,f\,,\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = (1-\varphi^2)\,g\,,$$

---

[1] DARBOUX t. I, pag. 326, ss.

indi $\varphi = \pm 1$ e però, per la (9) pag. 10, S è una superficie minima, quindi S_0 la coniugata in applicabilità. Quanto al caso che le S, S_0 siano a curvatura positiva, resta subito escluso dalle formole del §. 226 giacchè ne seguirebbe

$$\varphi = \pm 1 \quad , \quad e + g = 0 \ .$$

Dimostrato il teorema in questo caso particolare, risulta altresì dimostrato nel caso generale; e invero, se si suppone

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dx_0\, dx + dy_0\, dy + dz_0\, dz = \cos\alpha\, (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

con α costante, ponendo

$$\bar{x} = \frac{x_0 - x\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \ , \quad \bar{y} = \frac{y_0 - y\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \ , \quad \bar{z} = \frac{z_0 - z\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \ ,$$

ne risultano le formole

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$d\bar{x}\, dx + d\bar{y}\, dy + d\bar{z}\, dz = 0 \ .$$

§. 345.

Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione.

Risolviamo ora il problema di trovare tutte le superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione. Facciamo perciò uso delle considerazioni seguenti dovute a Schwarz. Sia S una superficie minima applicabile sopra una superficie di rotazione; essa ammette una deformazione continua in sè stessa, in particolare una deformazione infinitesima, nella quale le linee L deformate dei paralleli scorrono sopra sè stesse. L'immagine sferica di S resta congruente a sè medesima (§. 343) e, durante la detta deformazione, subisce una rotazione infinitesima attorno a un diametro della sfera. Se ne deduce che le immagini sferiche delle L sono circoli in piani perpendicolari all'asse di rotazione ed anche per una deformazione *finita* di S in sè medesima la sua immagine sferica ruoterà attorno allo stesso asse [1]. Prendiamo questo asse per asse z; una

[1] Se restasse qualche dubbio riguardo alla esattezza di questa conclusione, si consideri invece una deformazione finita di S in sè medesima e sia α l'ampiezza della rotazione sferica corrispondente; α varierà con continuità al variare

rotazione attorno ad esso equivale a cangiare τ in $e^{i\alpha}\tau$, essendo α l'ampiezza della rotazione; e poichè

$$ds^2 = (\tau\tau_0 + 1)^2 F(\tau) F_0(\tau_0) d\tau d\tau_0$$

non deve variare per questo cangiamento, risulterà

$$\mod F(\tau) = \mod f(\tau e^{i\alpha}) .$$

cioè

$$(a) \qquad F(\tau e^{i\alpha}) = e^{i\beta} F(\tau) ,$$

con β costante reale. Derivando logaritmicamente, si ottiene

$$(b) \qquad \tau e^{i\alpha} \frac{F'(\tau e^{i\alpha})}{F(\tau e^{i\alpha})} = \tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)} ;$$

la funzione $\tau \dfrac{F'(\tau)}{F(\tau)}$ essendo quindi costante lungo ogni circolo nel piano complesso τ col centro in $\tau = 0$ è necessariamente una costante.

Si ha dunque

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = \frac{k}{\tau} , \quad F(\tau) = C\tau^k ,$$

dove C, k sono due costanti, delle quali la seconda reale a causa della (a). Ne concludiamo:

Le superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione si ottengono dalle formole (7) di Weierstrass, ponendo

$$F(\tau) = C\tau^k ,$$

dove k è una costante reale e C una costante qualunque.

Se si osserva che per le superficie ora trovate si ha

$$\sigma = \sqrt{2} \int \tau^{\frac{k}{2}} d\tau ,$$

---

continuo della deformazione e potremo quindi scegliere una tale deformazione che α sia in rapporto *incommensurabile con* 2π. Si proceda allora come nel testo e si otterrà la formola (b) stessa, ove α avrà un valore fisso incommensurabile con 2π. Se la funzione $\tau \dfrac{F'(\tau)}{F(\tau)}$ non fosse costante essa riprenderebbe quindi nell'intorno di ogni punto del piano infinite volte lo stesso valore il che è assurdo.

se ne deduce che, *escluso il caso* $k = -2$, risulta

$$\sigma = u + iv = \sqrt{2}\,\frac{\tau^{\frac{k}{2}} + 1}{\frac{k}{2} + 1},$$

quindi per l'elemento lineare si ha

$$(b) \qquad ds^2 = f(u^2 + v^2)\,(du^2 + dv^2)\,.$$

Considerando ora che per le superficie associate le linee di curvatura sono

$$\begin{cases} u\cos\frac{\alpha}{2} - v\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \text{costante} \\ u\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2} = \text{costante}\,, \end{cases}$$

mentre colle sostituzioni

$$\begin{cases} u' = u\cos\frac{\alpha}{2} - v\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} \\ v' = u\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

l'elemento lineare (*b*) non muta, vediamo che le superficie in considerazione sono identiche di forma alle loro associate. Queste se ne ottengono, come facilmente si vede, facendo rotare la superficie primitiva attorno all'asse.

In particolare si osservi che facendo $k = 0$, cioè $F(\tau) = C$, si ottiene la superficie minima d'Enneper colle linee di curvatura piane (§. 329). Questa superficie è dunque applicabile sopra una superficie di rotazione ed è identica di forma colle proprie associate.

Nel caso escluso $k = -2$, si ottiene

$$x = \mathrm{R}\left\{\mathrm{C}\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)\right\}\,,\quad y = \mathrm{R}\left\{i\,\mathrm{C}\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)\right\}\,,\quad z = -\mathrm{R}\left\{2\,\mathrm{C}\log\tau\right\}$$

e siccome, mutando τ in $\tau\,e^{i\alpha}$, z aumenta di una costante e x, y si cangiano in

$$x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,\quad x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha\,,$$

si vede che queste superficie sono elicoidi, aventi l'asse z per asse.

Risulta altresì dalle nostre considerazioni che esse sono le uniche superficie minime elicoidali, giacchè una tale superficie è applicabile sopra una superficie di rotazione e non coincide di forma colle sue associate [1].

Dunque: *Le superficie minime elicoidali si ottengono, ponendo nelle formole di Weierstrass* $F(\tau) = \frac{C}{\tau^3}$.

Per scrivere esplicitamente le formole relative alle elicoidi minime, poniamo

$$C = \frac{m}{2} e^{i\beta}, \quad \tau = e^{-v+i\omega},$$

indicando con $\frac{m}{2}$, e^{-v} i moduli e con β, ω gli argomenti di C e τ; troveremo:

$$(17) \quad \begin{cases} x = m(\cos\beta \cosh v \cos\omega + \operatorname{sen}\beta \operatorname{senh} v \operatorname{sen}\omega) \\ y = m(\cos\beta \cosh v \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\beta \operatorname{senh} v \cos\omega) \\ z = m(v\cos\beta + \omega \operatorname{sen}\beta). \end{cases}$$

La superficie corrispondente a $\beta = 0$ è il *catenoide* e la sua coniugata in applicabilità, corrispondente a $\beta = \frac{\pi}{2}$, l'elicoide rigata ad area minima (Cf. §. 107, I, pag. 236):

$$z = m \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Aggiungiamo in fine che: *L'unica superficie rigata ad area minima è questa elicoide* (teorema di Catalan). Infatti in una tale superficie rigata le traiettorie ortogonali delle generatrici sono assintotiche e le loro normali principali coincidono quindi colle generatrici stesse. Tale proprietà, come si è visto al §. 24 (I, pag. 51) è caratteristica appunto della superficie delle normali principali dell'elica circolare.

§. 346.

Nuove formole di Weierstrass.

Alle formole (7) di Weierstrass si può dare un'altra forma, che importa notare. Ponendo

$$u = \int (1-\tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad v = i\int (1+\tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad w = \int 2\tau F(\tau)\, d\tau,$$

---

[1] In caso contrario la superficie non cangierebbe di linee di curvatura deformandosi.

e cangiando la variabile complessa τ col porre $\tau = \varphi(t)$, saranno u, v, w funzioni di t legate dalla relazione

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0 , \tag{18}$$

e le formole di Weierstrass diventano

$$x = \mathrm{R}(u) , \quad y = \mathrm{R}(v) , \quad z = \mathrm{R}(w) . \tag{19}$$

Inversamente: *Se u, v, w sono funzioni della variabile complessa t legate dalla relazione* (18), *le* (19) *daranno una superficie minima* [1].

E invero, cangiando convenientemente la variabile t, si torna alle formole di Weierstrass.

Ciò del resto si verifica anche subito colle osservazioni seguenti, che possono inversamente servire a stabilire in modo diretto le formole attuali.

Scindendo t, u, v, w nelle loro parti reali ed immaginarie col porre

$$t = \alpha + i\beta$$

$$u = x + i x_1 , \quad v = y + i y_1 , \quad w = z + i z_1 ,$$

ed osservando le formole

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_1}{\partial \beta} , \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} ,$$

che per le (18) danno

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 , \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 ,$$

segue

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2) , \quad \lambda = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 .$$

La formola di Beltrami (A) §. 69, I, pag. 146, dimostra allora che la superficie (19) è ad area minima.

---

[1] Queste formole si possono scrivere

$$x = \frac{1}{2}(u + u_0) , \quad y = \frac{1}{2}(v + v_0) , \quad z = \frac{1}{2}(w + w_0)$$

e la superficie minima può quindi riguardarsi come una superficie di traslazione, che ha per curve generatrici la curva immaginaria (curva minima)

$$x = \frac{1}{2}u(t) , \quad y = \frac{1}{2}v(t) , \quad z = \frac{1}{2}w(t)$$

e la sua coniugata. È questa la proprietà che serve di base ai citati lavori di Lie.

Ricordiamo che la proprietà, caratteristica per le superficie minime, data dalla formola citata si enuncia: *In ogni superficie minima le sezioni fatte con una serie di piani paralleli appartengono ad un sistema isoterno; la distanza di un piano variabile della serie da un piano fisso è parametro d'isometria.*

Sopra ciascuno dei piani complessi u, v, w abbiamo una rappresentazione conforme della superficie (19) ad area minima e poichè

$$ds^2 = \frac{1}{2}(du\,du_0 + dv\,dv_0 + dw\,dw_0),$$

dove u_0, v_0, w_0 sono le coniugate di u, v, w, si vede che il quadrato dell'elemento lineare della superficie eguaglia la semisomma dei quadrati degli elementi lineari corrispondenti sui piani u, v, w. Riemann ne ha dedotto un'interessante conseguenza, osservando che in una rappresentazione conforme le aree elementari stanno fra loro appunto come i quadrati degli elementi lineari. Ne risulta il teorema:

L'area di una porzione di superficie minima (19) *è eguale alla semisomma delle aree corrispondenti sui piani complessi* u, v, w.

§. 347.

Formole di Schwarz.

Dalle formole del §. precedente Schwarz ha dedotto altre formole importanti, nel modo che andiamo ad indicare. Posto come sopra

$$u = x + i x_1\,, \quad v = y + i y_1\,, \quad w = z + i z_1\,,$$

si ha

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

e inoltre

$$\mathrm{X}\,dx_1 + \mathrm{Y}\,dy_1 + \mathrm{Z}\,dz_1 = 0\,,$$

onde

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = \mathrm{Z}\,dy - \mathrm{Y}\,dz : \mathrm{X}\,dz - \mathrm{Z}\,dx : \mathrm{Y}\,dx - \mathrm{X}\,dy\,.$$

Essendo poi

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

ne segue

$$dx_1 = \pm(\mathrm{Z}\,dy - \mathrm{Y}\,dz)\,, \quad dy_1 = \pm(\mathrm{X}\,dz - \mathrm{Z}\,dx)\,, \quad dz_1 = \pm(\mathrm{Y}\,dx - \mathrm{X}\,dy).$$

L'incertezza del segno si toglie, ricorrendo alle espressioni di u, v, w per τ e alle formole (5) pag. 311; invero si ha

$$du = (1-\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau\ , \quad dv = i\,(1+\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau\ , \quad dw = 2\,\tau\,F(\tau)\,d\tau$$

$$dx = \frac{1}{2}(du_0+du)\ , \qquad dy = \frac{1}{2}(dv_0+dv)\ , \quad dz = \frac{1}{2}(dw_0+dw)$$

$$dx_1 = \frac{i}{2}(du_0-du)\ , \qquad dy_1 = \frac{i}{2}(dv_0-dv)\ , \quad dz_1 = \frac{i}{2}(dw_0-dw)$$

e se si forma p. e. l'espressione

$$Y\,dx - X\,dy\ ,$$

si trova che coincide con dz_1. Abbiamo dunque le formole

$$dx_1 = Z\,dy - Y\,dz\ , \quad dy_1 = X\,dz - Z\,dx\ , \quad dz_1 = Y\,dx - X\,dy\ ^{(1)}\ ,$$

per cui i valori di u, v, w possono scriversi

$$(20)\qquad \begin{cases} u = x + i\int (Z\,dy - Y\,dz) \\ v = y + i\int (X\,dz - Z\,dx) \\ w = z + i\int (Y\,dx - X\,dy)\ . \end{cases}$$

Sono queste le formole di Schwarz che si applicano nel modo più elegante alla risoluzione del problema seguente: *Costruire la superficie minima, che passa per una curva* C *data ed ha lungo di essa normali assegnate.*

Osserviamo che gli elementi dei piani tangenti lungo la curva data C costituiscono una *striscia* della superficie e possiamo enunciare il problema proposto così: *Costruire una superficie minima, conoscendone una striscia.* Questo non è che un caso particolare del problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine; nel caso attuale, sotto le condizioni che ora diremo, esso si risolve per quadrature.

Supponiamo che la striscia assegnata sia *analitica*, cioè lungo di essa

$$x, y, z\ ;\quad X, Y, Z$$

siano funzioni analitiche della variabile *reale* t, ossia estendibili anche ai valori complessi di t. Eseguiamo le quadrature nelle (20) ed esten-

---

(1) Esprimendo che $Y\,dx - X\,dy$ è un differenziale esatto, si trova nuovamente l'equazione a derivate parziali (1) delle superficie minime (§. 399).

diamo le funzioni u, v, w nel piano complesso; esse saranno costantemente legate dalla relazione

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0 ,$$

che ha luogo lungo l'asse reale. Le (19) ci definiscono quindi una superficie minima la quale, come subito si vede, passa per la curva assegnata ed ha ivi i piani tangenti prescritti [1].

Ora è importante osservare che la superficie ad area minima, definita da una sua striscia, è unica e determinata. Se infatti introduciamo nuovamente la variabile complessa (§. 340)

$$\tau = \cot\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\omega} = \frac{X + iY}{1 - Z} ,$$

mentre il punto mobile percorre la curva C assegnata, la sua immagine sferica τ percorrerà sulla sfera complessa una curva C′ perfettamente determinata dalla direzione prescritta della normale. Lungo C′ le (20) danno u, v, w a meno di costanti additive e queste funzioni non possono quindi continuarsi sulla sfera complessa che in un sol modo. Dunque: *Una superficie minima è individuata da una sua striscia.*

Due casi particolari di questo teorema meritano speciale attenzione e cioè:

1.° *Ogni retta giacente sopra una superficie minima è asse di simmetria per la superficie.*

E infatti se si fa girare di π intorno a questa retta la superficie, nella nuova posizione avrà lungo questa retta le medesime normali e coinciderà quindi colla superficie primitiva.

Questa interessante proposizione risulta direttamente dalle formole (20), prendendo la retta supposta per asse delle z e ponendo quindi

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = t$$
$$X = \cos\sigma \ , \quad Y = \operatorname{sen}\sigma \ , \quad Z = 0 \ ,$$

ove σ è funzione (analitica) di t, Avremo allora per le (20)

$$u = -i\int \operatorname{sen}\sigma\, dt \ , \quad v = i\int \cos\sigma\, dt \ , \quad w = t$$

---

[1] E infatti per t reale le parti reali di u, v, w si riducono alle coordinate dei punti di C e i coefficienti degli immaginari a

$$\int (Z\,dy - Y\,dz) \ , \quad \int (X\,dz - Z\,dx) \ , \quad \int (Y\,dx - X\,dy) \ .$$

e poichè le funzioni u, v sono puramente immaginarie per t reale, per valori coniugati di t avranno eguali le parti immaginarie ed eguali ma di segno contrario le parti reali: ne segue che ad ogni punto (x, y, z) situato sulla superficie ne corrisponde uno simmetrico $(-x, -y, z)$ rispetto all'asse z.

La seconda conseguenza importante del teorema generale, che volevamo notare, è la seguente:

2.° *Se un piano taglia ortogonalmente una superficie minima, esso è piano di simmetria per la superficie.*

§. 348.

Casi particolari.

Applichiamo le formole generali di Schwarz ad alcuni casi particolari.

a) Supponiamo che di una superficie minima sia assegnata una linea geodetica C. Ritenendo per questa curva le solite notazioni del capitolo I, porremo

$$t = s\ ,\quad \mathrm{X} = \xi\ ,\quad \mathrm{Y} = \eta\ ,\quad \mathrm{Z} = \zeta$$

e le formole di Schwarz (20) ci daranno

$$(21)\quad u = x + i\int \lambda\, ds\ ,\quad v = y + i\int \mu\, ds\ ,\quad w = z + i\int \nu\, ds\ .$$

Se consideriamo la curva C′ corrispondente della superficie minima coniugata in applicabilità, avremo

$$x' = \int \lambda\, ds\ ,\quad y' = \int \mu\, ds\ ,\quad z' = \int \nu\, ds\ .$$

Queste formole, secondo i risultati del §. 25 (I, pag. 53), dimostrano che la C′ ha in ogni punto la prima e seconda curvatura eguali rispettivamente alla seconda e prima curvatura della C, cioè: *Se si considerano due linee geodetiche corrispondenti sopra due superficie minime coniugate in applicabilità, la prima curvatura di una di esse in ogni punto è eguale alla seconda curvatura dell'altra nel punto corrispondente* [1].

---

[1] È facile dimostrare che le superficie minime sono le uniche che ammettono una deformazione, per la quale risultano invertite le due curvature di ogni linea geodetica.

Più in generale, se si osserva che

$$x = \int \alpha \, ds \ , \quad y = \int \beta \, ds \ , \quad z = \int \gamma \, ds \ ,$$

si vedrà che in ogni deformazione della superficie minima, che la lascia ad area minima, le due curvature rimangono funzioni lineari omogenee delle curvature iniziali.

Se la curva C è piana e si prende il suo piano per piano xy, dovremo fare

$$z = 0 \ , \quad \lambda = 0 \ , \quad \mu = 0 \ , \quad \nu = 1 \ ,$$

e le (21) diventano semplicemente

$$u = x \ , \quad v = y \ , \quad w = is \ .$$

Per valori coniugati di s le parti reali di

$$u \ , \quad v \ ,$$

conservano il medesimo valore e però la superficie è simmetrica rispetto al piano $\hat{xy}$, come è stato osservato anche alla fine del numero precedente.

b) Se la curva assegnata C in luogo che geodetica dovesse essere assintotica, avremmo

$$X = \lambda \ , \quad Y = \mu \ , \quad Z = \nu$$

e però le formole di Schwarz diventerebbero

$$u = x - i \int \xi \, ds \ , \quad v = y - i \int \eta \, ds \ , \quad w = z - i \int \zeta \, ds \ .$$

§. 349.

Superficie applicabili sopra superficie minime.

Ci proponiamo ora di risolvere il problema seguente: *Riconoscere se una superficie data può per flessione ridursi ad area minima.*

La risposta risulta molto semplicemente dall'osservare che l'elemento lineare di una superficie minima, riferita alle sue linee di curvatura, è dato da

$$ds^2 = \lambda \, (du^2 + dv^2) \ ,$$

mentre per la curvatura K si ha

$$K = - \frac{1}{\lambda^2} \ ,$$

e però la forma differenziale

$$\sqrt{-K}\, ds^2 = du^2 + dv^2$$

è a curvatura nulla. Viceversa supponiamo che per una superficie (a curvature opposte) il cui elemento lineare sia

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 ,$$

la forma differenziale

$$\sqrt{-K}\,(E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2) ,$$

risulti a curvatura nulla, talchè si abbia per convenienti variabili α, β (che si troveranno con quadrature)

$$\sqrt{-K}\,(E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2) = d\alpha^2 + d\beta^2 .$$

Ponendo $K = -\frac{1}{\lambda^2}$, risulterà

$$E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2) \tag{22}$$

e però (I, pag. 93)

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \beta^2}\right) ,$$

cioè

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \beta^2} = \frac{2}{\lambda} .$$

L'elemento lineare

$$\frac{1}{\lambda}\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

appartiene in conseguenza alla sfera e quindi l'elemento lineare (22) ad una superficie d'area minima che, note le coordinate X, Y, Z di un punto della sfera in funzione di α, β, si avrà con quadrature. Dunque: *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè una superficie sia applicabile sopra una superficie minima, è che la forma differenziale, che ne rappresenta il quadrato dell'elemento lineare, moltiplicata per* $\sqrt{-K}$, *ove* K *è la curvatura della superficie, dia una forma a curvatura nulla.*

In altro modo possiamo esprimere la stessa condizione colla formola

$$\Delta_2 \log (-K) = 4\, K .$$

Sotto questa forma venne data dal Ricci, che primo osservò il risultato ora indicato.

Come esempio, cerchiamo se vi sono superficie rigate applicabili sopra superficie d'area minima. Ponendo l'elemento lineare della superficie rigata sotto la forma (I, pag. 259).

$$ds^2 = du^2 + \{(u-\alpha)^2 + \beta^2\}\, dv^2,$$

si ha

$$K = -\frac{\beta^2}{\{(u-\alpha)^2+\beta^2\}^2}$$

e la condizione superiore si verifica solo per α, β costanti, onde si vede che le uniche superficie rigate della classe richiesta sono quelle applicabili sull'elicoide rigata d'area minima, cioè le superficie luogo delle binormali delle curve a torsione costante.

§. 350.

Inversione del primo teorema di Guichard.

Riprendiamo ora lo studio delle relazioni fra le superficie ad area minima e le superficie applicabili sul paraboloide di rotazione, che abbiamo iniziato nel Cap. XVII (§. 257, pag. 99) collo stabilire il teorema di Guichard. Da ogni superficie S_0 applicabile sul paraboloide di rotazione il teorema di Guichard fa derivare due superficie d'area minima che sono le due falde dell'inviluppo di sfere coi centri distribuiti sopra S_0 e di raggio eguale alla corrispondente distanza focale. Nel Cap. XX (§§. 304 e seguenti) abbiamo poi stabilite le formole fondamentali per l'inversione del teorema: presa cioè una qualunque superficie minima S, abbiamo dimostrato che essa dà luogo ad ∞^3 superficie S_0 applicabili sul paraboloide. Vogliamo ora riprendere queste formole per dedurne alcune notevoli conseguenze geometriche.

Essendo S una qualunque superficie d'area minima, colle due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \\ D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2, \end{cases}$$

consideriamo il sistema delle equazioni simultanee (§. 304, pag. 230)

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \beta\,E\,W + (W-\beta\,\Phi)\,D \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \beta\,F\,W + (W-\beta\,\Phi)\,D' \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \beta\,G\,W + (W-\beta\,\Phi)\,D'' \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{F\,D'-G\,D}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D-E\,D'}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial W}{\partial v} = \dfrac{F\,D''-G\,D'}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{F\,D'-E\,D''}{E\,G-F^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\,, \end{cases}$$

dove β *indica una costante arbitraria* e Φ, W due funzioni incognite di u, v. Il sistema (A), (B) è illimitatamente integrabile, e si ha (§. 306) formola (35) pag. 235

$$\Delta_1\Phi = 2\,\beta\,\Phi\,W - W^2 + \text{costante}\,.$$

Disponendo dei valori iniziali di

$$\Phi,\ W\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial u}\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial v}\,,$$

possiamo far sì che la costante del secondo membro si annulli e si abbia quindi

$$(C)\qquad \Delta_1\Phi = 2\,\beta\,\Phi\,W - W^2\,.$$

Scelte le funzioni Φ, W in guisa da soddisfare le (A), (B), (C), se riportiamo sopra ogni normale di S un segmento

$$T = -\frac{\Phi}{W}\,,$$

il luogo dell'estremo $M_0 \equiv (x_0\,y_0\,z_0)$ sarà una superficie S_0 applicabile sul paraboloide di rotazione di parametro $p=\beta$ e la relazione fra S, S_0 sarà precisamente quella data dal primo teorema di Guichard (Cf. §§. 306, 309).

Così le formole

$$(28) \qquad x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X \ , \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y \ , \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z$$

fanno derivare dalla superficie data ad area minima S una tripla infinità di superficie S_0 applicabili sul paraboloide. La seconda falda $\overline{S}$ dell' inviluppo di sfere coi centri su S_0 e tangenti ad S è una nuova superficie minima e secondo le formole (*c*) §. 273* (pag. 152) le coordinate del punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ di S corrispondente a (x, y, z) sopra S (cioè simmetrico di questo rispetto al piano tangente di S_0) sono date dalle formole

$$(24) \qquad \overline{x} = x - \frac{1}{\beta W} \left\{ \nabla (x, \Phi) + W X \right\} .$$

Pei coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}$ si ha poi (pag. 152 formole (*d*))

$$(25) \qquad \overline{X} = \left(1 - \frac{W}{\beta \Phi}\right) X - \frac{1}{\beta \Phi} \nabla (x, \Phi) \ ,$$

Ricordiamo poi che le formole (32*) del §. 305 (pag. 233)

$$(26) \quad \xi = W X + \nabla (x, \Phi) \ , \quad \eta = W Y + \nabla (y, \Phi) \ , \quad \zeta = W Z + \nabla (z, \Phi)$$

definiscono una superficie Σ luogo del punto (ξ, η, ζ), che ha a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura e i cui raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 soddisfano, nelle notazioni di Weingarten, alla relazione (§. 306, pag. 236)

$$(27) \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{2q}{p} \ .$$

§. 351.

Le congruenze di Thybaut.

Se della superficie ad area minima S prendiamo la coniugata in applicabilità S_1 (§. 343), la superficie Σ data dalle (26) corrisponde alla superficie minima S_1 per parallelismo delle normali ed alle linee assintotiche di S_1 corrisponde sopra Σ un sistema coniugato, e precisamente quello delle linee di curvatura. Dunque S_1, Σ sono *associate* in una de-

formazione infinitesima (§. 225); la funzione caratteristica della deformazione infinitesima corrispondente della S_1 è precisamente la W. Ora costruiamo per la S_1 la corrispondente congruenza W conducendo pei punti di S_1 i raggi tangenti alla S_1 e normali alla direzione dello spostamento. Dimostreremo che ha luogo questa notevole proprietà che la seconda falda $\bar{S}_1$ di questa congruenza W è ancora una superficie minima e precisamente essa è la coniugata in applicabilità della superficie $\bar{S}$. Stabiliamo cioè il teorema seguente: *Si consideri una qualunque superficie* S_0 *applicabile sul paraboloide di rotazione ed il sistema* ∞^2 *di sfere aventi i centri sopra* S_0 *e raggio eguale alla corrispondente distanza focale. Le due falde* $S_1, \bar{S}$ *dell' inviluppo di sfere sono, secondo il teorema di Guichard, due superficie d'area minima: se delle superficie minime* $S, \bar{S}$ *prendiamo le coniugate in applicabilità* $S_1, \bar{S}_1$ *queste, convenientemente collocate nello spazio, sono le due falde di una congruenza* W.

Per dimostrare il teorema riferiremo la superficie minima S alle sue linee di curvatura u, v, con che avremo:

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

$$r_1 = -e^{2\theta}, \quad r_2 = e^{2\theta}$$

$$D = -1, \quad D' = 0, \quad D'' = 1,$$

dove θ è una soluzione dell'equazione di Liouville

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}.$$

Il sistema (A), (B) diventa

$$(A^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \beta e^{2\theta} W + \beta\Phi - W \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \beta e^{2\theta} W - \beta\Phi + W \end{cases}$$

$$(B^*)\quad \frac{\partial W}{\partial u} = e^{-2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -e^{-2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

mentre la (C) prende la forma

$$(C^*) \qquad e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}=2\beta\,\Phi\,W-W^2.$$

Scrivendo per la superficie S le solite formole fondamentali (Cf. §. 254 formole (1) pag. 91), abbiamo

$$(27)\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=e^{\theta}X_1\,,\quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_2-e^{-\theta}X\,,\quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u}=\dfrac{\partial\theta}{\partial v}X_1\,,\quad \dfrac{\partial X}{\partial u}=e^{-\theta}X_1\,,\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=e^{\theta}X_2\,,\quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v}=\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_2\,,\quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial u}X_1+e^{-\theta}X\,,\quad \dfrac{\partial X}{\partial v}=-e^{-\theta}X_2\,.\end{cases}$$

Indicando ora con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto che sulla superficie minima S_1 coniugata in applicabilità della S corrisponde a (x, y, z), abbiamo

$$(28)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial v}\,,\qquad \frac{\partial x_1}{\partial v}=-\frac{\partial x}{\partial u}$$

e pei coefficienti D_1, D'_1, D''_1 della seconda forma fondamentale di S_1 risulta

$$(28^*)\qquad D_1=D''_1=0\quad,\quad D'_1=1\,.$$

Le formole (24), (25) che definiscono la seconda superficie minima $\overline{S}$ del teorema di Guichard e la sua normale diventano

$$(29)\qquad \begin{cases}\overline{x}=x-\dfrac{1}{\beta}\left\{X+\dfrac{e^{-\theta}}{W}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}X_1+\dfrac{e^{-\theta}}{W}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}X_2\right\}\\ \overline{X}=\left(1-\dfrac{W}{\beta\Phi}\right)X-\dfrac{e^{-\theta}}{\beta\,\Phi}\left\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}X_1+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}X_2\right\}.\end{cases}$$

Per la superficie minima $\overline{S_1}$ coniugata in applicabilità della $\overline{S}$ avremo, con notazioni analoghe alle precedenti:

$$(30)\qquad \frac{\partial\overline{x_1}}{\partial u}=\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}\quad,\quad \frac{\partial\overline{x_1}}{\partial v}=-\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}\,.$$

Ora ci conviene provare che, disponendo delle costanti additive in x_1, y_1, z_1; $\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1}$ lasciate arbitrarie dalle (28), (30), possiamo fare in guisa che $S_1, \overline{S_1}$ riescano le due falde focali della congruenza che ne unisce i punti corrispondenti. Il raggio variabile di questa congruenza

dovrà per ciò essere normale ad ambedue le direzioni

$$(X, Y, Z) \quad , \quad (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$$

ed avrà quindi coseni di direzione proporzionali alle differenze

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_2 \, , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} Y_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} Y_2 \, , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} Z_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} Z_2 \, .$$

Indicando adunque con ρ un fattore di proporzionalità, poniamo

$$\overline{x_1} - x_1 = \rho\, e^{-\theta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_2 \right)$$

$$\overline{y_1} - y_1 = \rho\, e^{-\theta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} Y_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} Y_2 \right)$$

$$\overline{z_1} - z_1 = \rho\, e^{-\theta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} Z_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} Z_2 \right) .$$

Tutto si riduce a provare che, prese x_1, y_1, z_1 in guisa che le (28) siano soddisfatte, si può assumere per ρ una tale funzione di u, v che le $\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1}$ vengano a soddisfare le (30), cioè che si abbia

$$\frac{\partial(\overline{x} - x)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\rho\, e^{-\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 - \rho\, e^{-\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_2 \right]$$

$$\frac{\partial(\overline{x} - x)}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial v} \left[\rho\, e^{-\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 - \rho\, e^{-\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_2 \right] .$$

Tenendo conto delle formole precedenti, facilmente si trova che occorre e basta per ciò assumere

$$\rho = \frac{1}{\beta W} \, .$$

Così le formole

$$\overline{x_1} = x_1 + \frac{e^{-\theta}}{\beta W} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} X_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial u} X_2 \right) \tag{31}$$

e le analoghe per $\overline{y_1}, \overline{z_1}$ stabiliscono fra le due superficie minime $S_1, \overline{S_1}$ la relazione geometrica indicata nel teorema. Queste singolari congruenze W, le cui falde focali sono superficie minime, furono scoperte da Thybaut. Sulle due superficie minime focali $S_1, \overline{S_1}$ si corrispondono non solo i sistemi coniugati ma ben anche i sistemi ortogonali, cioè: *la corrispon-*

densa fra le due falde focali è una corrispondenza conforme. Tale infatti è la corrispondenza fra le loro coniugate in applicabilità S, $\overline{S}$ del teorema di Guichard (§. 263). Si osserverà in particolare che: *le linee di curvatura si corrispondono sopra* S_1, $\overline{S_1}$. Per questa proprietà le congruenze di Thybaut si ravvicinano evidentemente alle congruenze pseudosferiche.

Inversamente si potrebbe dimostrare che tutte le congruenze W le cui falde focali sono superficie minime si ottengono nel modo descritto. Tale proposizione inversa risulta dalle ricerche di Thybaut (l. c.), il quale ha determinato direttamente queste congruenze, partendo dalle formole di Weierstrass. Noi ci limitiamo qui ad osservare che, secondo i risultati stabiliti: *Qualunque superficie ad area minima appartiene come falda focale ad* ∞^3 *congruenze di Thybaut.*

§. 352.

Le superficie d'area minima in geometria ellittica ed iperbolica.

Daremo da ultimo un breve cenno sulle superficie d'area minima negli spazi a curvatura costante [1]. Non ci tratteniamo qui a dimostrare che anche in questi spazî le superficie rispondenti al minimo d'area, per un assegnato contorno, sono caratterizzate dall'aver nulla la curvatura media, ciò che si fa in modo perfettamente analogo come per lo spazio euclideo.

Questa proprietà vale anzi più in generale per uno spazio qualunque a tre dimensioni, cioè: *In qualunque spazio curvo a tre dimensioni le superficie d'area minima hanno nulla la curvatura media.* (Vedi nota in fondo al volume).

Già al §. 218 (I, pag. 505) ci siamo occupati delle superficie minime dello spazio a curvatura costante K_0, riferite alle loro linee assintotiche. Riferendole alle linee di curvatura u, v abbiamo il risultato seguente:

L'elemento lineare di una superficie ad area minima dello spazio a curvatura costante K_0, *riferita alle linee di curvatura u, v, assume la forma*

$$ds^2 = e^{2\theta}\,(du^2 + dv^2)\,, \tag{32}$$

i raggi principali di curvatura r_1, r_2 *essendo dati da*

$$r_1 = e^{2\theta}\,, \quad r_2 = -e^{2\theta} \tag{33}$$

---

[1] Le prime ricerche su queste superficie furono esposte nella mia memoria del 1888 (Atti dei Lincei serie 4.ª vol. IV). Posteriormente se ne occuparono Darboux ed altri geometri francesi (vedi Darboux *Leçons* t. III pag. 471 e segg.)

e la funzione $\theta(u, v)$ *soddisfacendo all'equazione caratteristica a derivate parziali*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta} - K_0 e^{2\theta} \,. \tag{34}$$

Viceversa a qualunque soluzione della (34) corrisponde una superficie minima dello spazio ellittico od iperbolico. La forma di questa equazione (34) suggerisce subito l'osservazione seguente. Operando sulle variabili u, v una sostituzione ortogonale

$$\begin{cases} u = u_1 \cos\alpha - v_1 \operatorname{sen}\alpha \\ v = u_1 \operatorname{sen}\alpha + v_1 \cos\alpha \,, \end{cases}$$

dove α è un angolo costante arbitrario, la funzione $\theta(u, v)$ si cangia in una funzione

$$\theta_1(u_1, v_1) \,,$$

che soddisfa evidentemente alla equazione

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial v_1^2} = e^{-2\theta_1} - K_0 e^{2\theta_1} \,.$$

Per ciò l'elemento lineare

$$ds_1^2 = e^{2\theta_1}(du_1^2 + dv_1^2)$$

appartiene ad una nuova superficie minima S_1, le cui linee di curvatura sono le u_1, v_1. La superficie S_1 ha lo stesso elemento lineare e gli stessi raggi principali di curvatura della S; le sue linee di curvatura tagliano le antiche sotto l'angolo costante α. Ne deduciamo:

In qualunque spazio a curvatura costante, come nello spazio euclideo, ogni superficie ad area minima è suscettibile di una deformazione continua nella quale si conservano invariati i singoli raggi di curvatura; le nuove linee di curvatura sono ogni volta traiettorie sotto angolo costante delle antiche linee di curvatura.

In particolare quando questo angolo è di 45°, le linee di curvatura si cangiano in assintotiche e reciprocamente, sicchè abbiamo anche qui le superficie coniugate in applicabilità del Bonnet.

Separiamo ora i due casi dello spazio ellittico ed iperbolico. Nel primo caso se facciamo $K_0 = +1$, l'equazione caratteristica (34) diventa

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + 4 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta = 0 \,;$$

questa, con cangiate notazioni, coincide colla (34*) §. 331 (pag. 293) dalla quale abbiamo visto dipendere la ricerca delle superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo. Così: *La ricerca delle superficie ad area minima dello spazio ellittico equivale a quella delle superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo.*

Facciamo ancora le osservazioni seguenti. Nello spazio ellittico le superficie minime si presentano a coppie di superficie parallele distanti fra loro di un quadrante (superficie polari). Se consideriamo le superficie medie fra le due, cioè le superficie parallele distanti da queste di $\frac{\pi}{4}$, ponendo

$$r_1 = \operatorname{tg} w_1 ,$$

per il raggio ρ_1 principale di curvatura della parallela considerata avremo

$$\rho_1 = \operatorname{tg}\left(w_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$$

e analogamente

$$\rho_2 = \frac{1 + r_2}{1 - r_2} = \frac{1 - r_1}{1 + r_1}$$

onde $\rho_1 \rho_2 = 1$. Dunque: *Nello spazio ellittico di curvatura* $K_0 = +1$ *le due superficie parallele ad una superficie minima e distante da questa di* $\frac{\pi}{4}$ *hanno la curvatura assoluta costante, positiva ed* $= 2$.

Nel caso dello spazio iperbolico, facendo $K_0 = -1$, la (84) diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 2 \operatorname{cosh} 2\theta .$$

Ci contenteremo qui di questi brevi cenni sulle superficie minime negli spazî a curvatura costante, rimandando il lettore alla memoria del T. IV Serie III^a degli Annali [1], ove si stabilisce l'estensione a questi spazî dei teoremi di Guichard e la conseguente teoria delle trasformazioni delle superficie minime.

---

[1] Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante.

Capitolo XXIII.

Il problema di Plateau e la superficie minima di Schwarz

Enunciato del problema di Plateau.— Considerazioni fondamentali relative alle due rappresentazioni conformi della superficie minima sulla sfera di Gauss e sul piano della variabile complessa σ.— Caso di un contorno a tratti rettilinei o più in generale di un contorno di Schwarz.— Caso del quadrilatero sghembo formato da due coppie di spigoli opposti di un tetraedro regolare (superficie di Schwarz).— Rete ottaedrica sulla sfera.— Rappresentazione analitica del gruppo di 21 rotazioni della rete ottaedrica.— Determinazione di $F(\tau)$ per la superficie di Schwarz: $F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}$.— Verifiche relative al contorno.— Studio del gruppo di movimenti dello spazio che lascia invariata la superficie di Schwarz.— Proprietà della continuazione analitica.— Superficie coniugate in applicabilità e gruppo corrispondente di movimenti.— Teoremi di Schwarz sulla variazione seconda dell'area di una porzione di superficie minima.

§. 353.

Considerazioni fondamentali sul problema di Plateau.

Formuliamo la questione fondamentale, che ha dato origine alla teoria delle superficie minime, nel modo preciso seguente;

Dato un contorno chiuso, costruire una porzione continua di superficie minima terminata a questo contorno e priva nell'interno di punti singolari.

Sono celebri le esperienze di Plateau, colle quali questo fisico ha risoluto sperimentalmente il problema immergendo il contorno, realizzato fisicamente, nel liquido che porta il suo nome. La lamina fluida, che resta sospesa al contorno, si conforma appunto a superficie d'area minima.

L'analisi è ben lungi dal saper risolvere in generale il *problema di Plateau;* però, nel caso in cui il contorno è formato da tratti rettilinei e in un altro caso più generale, che verrà fra breve indicato, si conosce una serie di importanti risultati dovuti a Riemann, Weierstrass e Schwarz.

Noi ci limiteremo qui ad esporre un primo metodo, che si offre spontaneamente in questa ricerca ed è fondato sulla teoria delle rappresentazioni conformi; questo metodo è sufficiente nei casi più semplici, in particolare nel caso della superficie minima di Schwarz limitata al

quadrilatero sghembo formato da quattro costole, due a due opposte, di un tetraedro regolare. Allo studio di questo caso particolare, tanto interessante sotto molti rapporti, è principalmente dedicato il presente capitolo.

Il metodo delle rappresentazioni conformi basta del resto, come sopra è avvertito, solo in alcuni casi più semplici. Il lettore potrà vedere nel libro di Darboux (t. I, p. 453 ss.) l'esposizione di un secondo metodo più generale e di molto maggiore efficacia, che qui siamo costretti a menzionare soltanto.

Consideriamo una porzione A di superficie minima limitata ad un contorno chiuso C e la sua immagine sferica B che, per la proprietà fondamentale delle superficie minime, dà una rappresentazione conforme dell'area A. Ammettiamo inoltre che quest'area sferica B sia ad un solo strato. Riprendendo poi per la superficie minima S le notazioni del capitolo precedente, introduciamo nuovamente la variabile complessa

$$\sigma = \int \sqrt{2\,F(\tau)}\, d\tau\ ,$$

la cui parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario dànno, eguagliate a costanti, le linee di curvatura di S (§. 340).

Se, come supporremo, la funzione σ è finita continua e monodroma sull'area A, distendendo i valori di σ nel suo piano complesso, avremo dell'area A una nuova immagine conforme B′. Così l'area sferica B e l'area piana B′ saranno rappresentate in modo conforme l'una sull'altra e, nota la legge di corrispondenza dei loro punti, si conoscerà completamente la superficie S in quanto, essendo allora nota σ in funzione di τ, conosceremo la funzione di Weierstrass

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2\ ,$$

che individua la superficie.

Ove dunque il contorno assegnato C sia tale che ne risulti determinata tanto l'area sferica B quanto l'area piana B′, il problema di Plateau si ridurrà, per quel contorno, al ben noto problema di analisi di rappresentare in modo conforme un'area data sopra un'altra.

La circostanza ora accennata si presenta appunto, almeno con un certo grado di indeterminazione, quando il contorno C si compone di tratti rettilinei. Riguardo all'immagine sferica B, avremo infatti che ad

ogni tratto rettilineo r del contorno C corrisponderà nel contorno di B un arco di cerchio massimo in un piano normale ad r, quindi l'area sferica B sarà un poligono sferico, il cui contorno verrà costituito da archi di circolo massimo perfettamente individuati di posizione. In secondo luogo se consideriamo l'area piana B′, siccome ogni tratto rettilineo del contorno C è un'assintotica per la superficie, il corrispondente tratto del contorno di B′ sarà pure rettilineo e parallelo all'una o all'altra delle bisettrici

$$u - v = 0 \quad , \quad u + v = 0$$

degli assi coordinati sul piano B′. Il problema di Plateau si convertirà quindi nel caso considerato nell'altro. *Rappresentare in modo conforme il poligono sferico* B *sul poligono piano rettilineo* B′.

§. 354.

Caso di un contorno di Schwarz.

Le considerazioni stesse valgono ancora in un caso più generale, formulato da Schwarz nelle *Fortgesetzte Untersuchungen über Minimalflächen* [1], nel modo seguente:

Sia data una catena continua chiusa formata di tratti rettilinei e di piani; si vuole determinare una porzione semplicemente connessa di superficie minima limitata dai tratti rettilinei e dai piani della catena, in guisa che la superficie tagli ad angolo retto questi ultimi.

I tratti rettilinei del contorno C sono assintotiche e i tratti curvilinei linee di curvatura in piani normali alla superficie. Le immagini sferiche di questi ultimi tratti sono quindi ancora archi di circolo massimo in piani paralleli ai piani della catena. Sul piano τ la loro immagine è perciò un tratto rettilineo parallelo all'uno o all'altro degli assi coordinati. Anche in questo caso generale la soluzione del problema di Plateau dipende adunque dalle formole, che dànno la rappresentazione conforme di un poligono sferico sopra un poligono piano rettilineo.

Consideriamo p. e. il caso più semplice in cui la catena sia costituita da due tratti rettilinei A B, A C terminati in B, C ad un piano, che la superficie debba tagliare ortogonalmente. Il settore A B C di superficie minima, come viene realizzato dall'esperienza, ha per immagine

---

[1] *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1772 — Werke Band. I, p. 126 ss.

sulla sfera un triangolo sferico perfettamente determinato. La sua immagine piana B′ è un triangolo rettangolo isoscele coll'ipotenusa parallela ad uno degli assi coordinati.

Il corrispondente problema di rappresentazione conforme si risolve, come è ben noto, per mezzo delle serie ipergeometriche.

Supponiamo ora di essere riusciti a risolvere per un assegnato contorno di Schwarz il problema di Plateau. La porzione Σ di superficie minima richiesta si otterrà dalle formole di Weierstrass, facendo muovere la variabile complessa τ entro il poligono sferico B; ma esaminiamo, servendoci dei teoremi di simmetria dimostrati alla fine del §. 347, ciò che accade quando si consideri la continuazione analitica di questa porzione di superficie, continuando analiticamente la funzione $F(\tau)$. Se τ traversa un lato l del poligono B, cui corrisponda un tratto rettilineo r del contorno di Schwarz, sulla superficie passeremo dalla porzione Σ alla sua simmetrica rispetto al tratto rettilineo r e in questa rimarremo, finchè τ resta entro il poligono sferico simmetrico di B rapporto al lato l. Se al lato l di B corrisponde un tratto curvilineo del contorno di Schwarz, in un piano della catena normale a Σ, la conclusione è del tutto simile; si passa allora da Σ a una nuova porzione Σ' simmetrica rapporto a questo piano. Così, nella continuazione analitica della superficie minima, alla porzione Σ di superficie troviamo aderenti per ciascun lato altrettante nuove porzioni simmetriche di Σ.

Su ciascuna di queste può ripetersi il ragionamento stesso e la continuazione analitica della nostra superficie consterà di infinite porzioni, alternatamente simmetriche e congruenti. In generale avverrà che una regione finita di spazio conterrà infinite di quelle porzioni. Per convincersene basta considerare il caso in cui due tratti rettilinei del contorno si taglino sotto un angolo incommensurabile con π. La questione qui toccata si collega coll'altra dei *gruppi di movimenti* e può trattarsi senza la effettiva conoscenza della porzione di superficie minima limitata al contorno assegnato di Schwarz. Basta infatti osservare se i ribaltamenti attorno ai lati rettilinei del contorno e le simmetrie rapporto ai piani generano un gruppo continuo o discontinuo [1].

Il più semplice caso, in cui la superficie minima corrispondente presenta una regolare diffusione per lo spazio, è quello appunto che pas-

---

[1] Veggansi gli sviluppi del testo ai §§. seguenti relativi alla superficie di Schwarz.

siamo ormai a trattare, ove il contorno di Schwarz è un quadrilatero sghembo formato da quattro spigoli due a due opposti di un tetraedro regolare.

Dei sei spigoli di un tetraedro regolare A B C D sopprimiamone due opposti A D, B C e consideriamo la porzione Σ di superficie minima limitata al quadrilatero sghembo A B D C.

Questa superficie, come viene realizzata nella corrispondente esperienza di Plateau, è simmetrica rispetto ai piani condotti per gli spigoli soppressi A D, B C normalmente allo spigolo opposto B C o A D; essa giace tutta nell'interno del tetraedro fondamentale A B C D. I piani tangenti nei quattro vertici sono appunto le faccie del tetraedro e le loro pagine positive sono quelle interne per due vertici opposti e quelle esterne per gli altri due.

Ne risulta che l'immagine sferica di Σ è un quadrilatero sferico A′ B′ C′ D′ cogli angoli di 120°. Per ottenere un tale quadrilatero sulla sfera, basta inscrivere in questa il cubo e i quattro vertici di una faccia del cubo dànno appunto i vertici del detto quadrilatero. Ora osserviamo che il piano bisettore del triedro B C, tagliando normalmente Σ, la scinde in due settori simmetrici A B C, D B C, che hanno per immagine sferica i due triangoli sferici A′ B′ C′, D′ B′ C′, in cui la diagonale B′ C′ scinde il quadrilatero sopra considerato.

Possiamo dunque sostituire al nostro problema l'altro più semplice della determinazione del settore minimo A B C, limitato da due tratti rettilinei A B, A C e dalla curva B C in un piano normale alla superficie. L'immagine sferica di questo settore è il triangolo sferico A′ B′ C′ con angoli di 120°, 60°, 60° in A′, B′, C′ rispettivamente. Ora l'immagine piana sul piano complesso σ del medesimo settore è un triangolo rettangolo isoscele $a\,b\,c$ coll'ipotenusa $b\,c$ parallela ad uno degli assi sul piano σ.

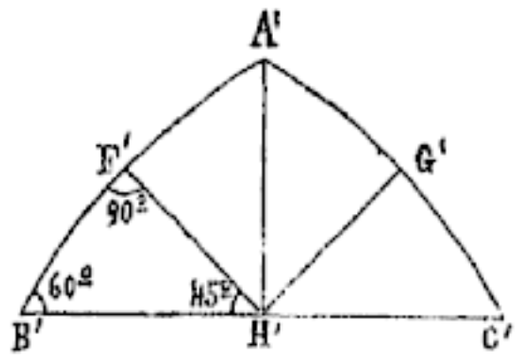


FIG. 7.ª

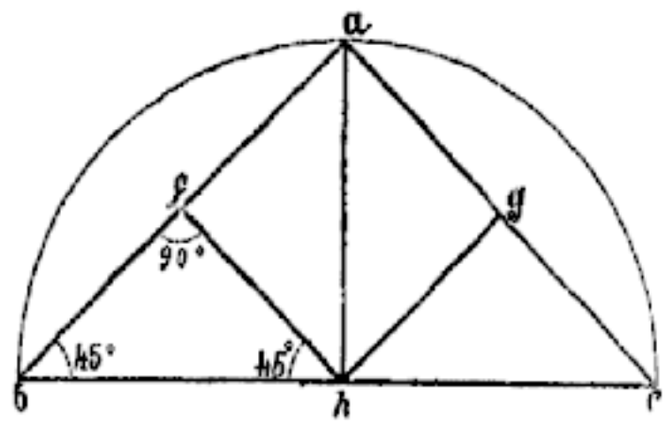


Fig. 8.ª

Per trovare la funzione F (τ) di Weierstrass, conveniente alla nostra superficie, bisogna adunque esprimere σ in funzione di τ, in guisa che il triangolo sferico A′ B′ C′ venga rappresentato in modo conforme sul triangolo piano *a b c*. Ora caliamo da A′ l'altezza A′ H′, dividendo così il triangolo A′ B′ C′ in due triangoli simmetrici A′ B′ H′, A′ C′ H′ e decomponiamo nuovamente ciascuno di questi due mediante le rispettive altezze H′ F′, H′ G′ calate da H′ in due triangoli simmetrici minori.

Se una decomposizione del tutto analoga effettuiamo sul triangolo piano *a b c*, è chiaro che basterà rappresentare in modo conforme il triangolo sferico B′ H′ F′ coi rispettivi angoli di 60°, 45°, 90° sul triangolo piano *b h f* cogli angoli di 45°, 45°, 90° rispettivamente, in guisa che i vertici si corrispondano nell'ordine indicato. La funzione σ (τ) che dà questa rappresentazione, rappresenta altresì, estesa a tutto il triangolo A′ B′ C′, questo triangolo sopra *a b c*.

Per effettuare questa rappresentazione, noi rappresenteremo l'uno e l'altro triangolo B′ F′ H′, *b f h* in modo conforme sul semipiano di una variabile complessa ausiliaria ε, in guisa che al contorno di ciascuno corrisponda l'asse reale. In ciò potremo ancora fissare arbitrio i tre punti dell'asse reale sul piano ε, che corrispondono ai vertici, e noi converremo di fissare che si abbia

$$\varepsilon = 0 \text{ in } B', b$$

$$\varepsilon = 1 \text{ in } F', f$$

$$\varepsilon = \infty \text{ in } H', h .$$

§. 355.

Rete ottaedrica sulla sfera.

La funzione $s(\tau)$, che dà la rappresentazione del triangolo sferico B′ F′ H′ sul semipiano s, è semplicemente una funzione razionale τ di 24° grado; la sua inversa $\tau(s)$ è la così detta *irrazionalità dell'ottaedro*. Noi andiamo rapidamente a stabilire quelle formole fondamentali relative alla irrazionalità dell'ottaedro che servono al nostro scopo, rimandando per uno studio più dettagliato al libro di Klein *Ueber das Ikosaeder*.

Inscriviamo nella sfera complessa l'ottaedro regolare e proiettiamo le faccie di questo sulla sfera dal centro; avremo così la sfera decomposta in 8 triangoli sferici trirettangoli. Decomponiamo poi ciascuno di questi triangoli colle tre mediane in 6 triangoli parziali, ciascuno dei quali si dirà un *triangolo elementare*.

La sfera è così decomposta in una rete di 48 triangoli elementari alternativamente simmetrici e congruenti; ciascuno di essi, come il triangolo B′ H′ F′ del numero precedente, ha gli angoli di 60°, 45°, 90°.

Diremo questa rete la *rete ottaedrica* e, per distinguere la congruenza diretta dall'inversa, immagineremo *tratteggiati* i 24 triangoli della rete, che sono inversamente congruenti a quello da cui partiamo.

Conviene ora che diamo alla rete ottaedrica un'orientazione fissa sulla sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \ .$$

Poniamo due vertici dell'ottaedro ai poli $(0, 0, \pm 1)$ e situiamo il quadrato, formato sul piano dell'equatore $\zeta = 0$ dagli altri quattro vertici, coi lati paralleli agli assi $O\xi$, $O\eta$. Proiettiamo stereograficamente dal polo $\tau = \infty$ la rete ottaedrica sul piano dell'equatore tratteggiando i triangoli piani che sono immagini dei triangoli tratteggiati della rete, otterremo la figura qui appresso:

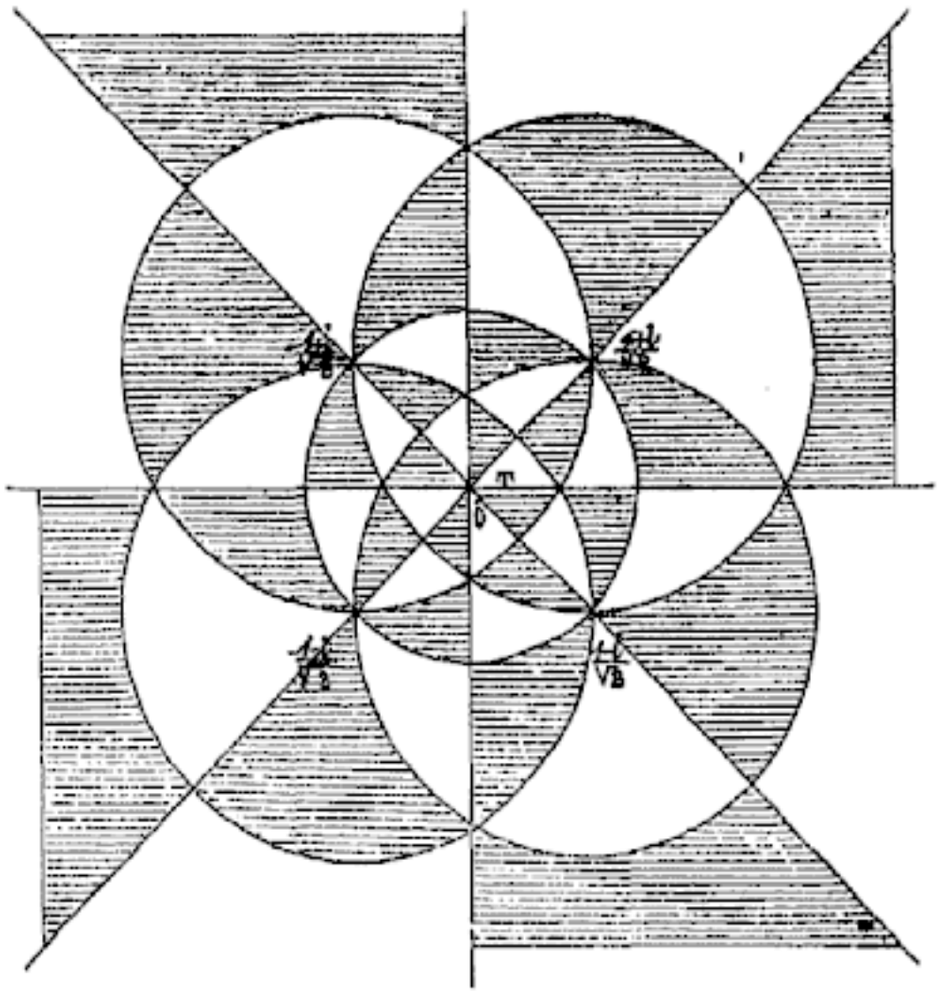


FIG. 9.ª — (Rete ottaedrica).

I triangoli (tratteggiati) della rete ottaedrica si riuniscono quattro a quattro attorno ai vertici dell'ottaedro, tre a tre attorno ai punti medii delle faccie (proiettati sulla sfera) e due a due attorno ai punti medii delle costole. La considerazione diretta, o una semplice ispezione della figura, dimostra subito che i valori della variabile complessa τ in questi punti sono:

$a)$ $\tau = \infty \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}} \ldots$ nei vertici dell'ottaedro

$b)$ $\tau = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \, , \, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}} i \, , \, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}} i \ldots$ nei punti medii delle faccie

$c)$ $\tau = \pm 1 \, , \, \pm i \, , \, (1 \pm \sqrt{2}) \frac{1+i}{\sqrt{2}} \, , \, (1 \pm \sqrt{2}) \frac{1-i}{\sqrt{2}} \, , \, -(1 \pm \sqrt{2}) \frac{1+i}{\sqrt{2}} \, , \, -(1 \pm \sqrt{2}) \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ nei punti medii delle costole.

Costruiamo ora tre polinomii in τ dei rispettivi gradi 5, 8, 12, dei quali il primo ω si annulli del primo ordine nei punti a) eccetto in $\tau = \infty$, il secondo w nei punti b) e il terzo χ nei punti c). Troviamo subito, col calcolo effettivo:

$$(1)\quad \omega = \tau(1+\tau^4)\ ,\ w = 1 - 14\tau^4+\tau^8\ ,\ \chi = 1 + 33\tau^4 - 33\tau^8 - \tau^{12}.$$

§. 356.

Irrazionalità dell'ottaedro.

Ciò premesso, supponiamo che la funzione $s(\tau)$ dia la rappresentazione conforme del triangolo elementare T della nostra rete, che ha i vertici nei punti (v. figura):

$$\tau = 0\ ,\quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \tau = (\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}\ ,$$

coi rispettivi angoli di

$$45^0\ ,\quad 60^0\ ,\quad 90^0\ ,$$

sul semipiano (positivo) s in guisa che, mentre τ percorre il perimetro del detto triangolo, s percorra l'asse reale, ai valori scritti di τ nei vertici corrispondendo ordinatamente

$$s = \infty\ ,\quad s = 0\ ,\quad s = 1\ .$$

Estendiamo s a tutto il piano complesso τ o meglio a tutta la sfera complessa τ, secondo le note leggi della continuazione analitica, fissando quanto segue. Ogni punto τ' della sfera complessa appartiene ad uno dei 48 triangoli della rete; a τ' corrisponde nel triangolo fondamentale un punto omologo τ e per valore di s in τ' dobbiamo assumere il valore stesso che ha in τ, o il valore coniugato, secondo che il triangolo in cui trovasi τ' è direttamente o inversamente congruente col fondamentale. La funzione $s(\tau)$ è così estesa a tutta la sfera complessa, sulla quale è uniforme, ed ha unicamente per punti singolari i punti a) (vertici dell'ottaedro) che sono per $s(\tau)$ poli del quarto ordine. La $s(\tau)$ è quindi razionale in τ e poichè i suoi infinitesimi sono negli 8 punti b) ove si annulla w, e sono del 3.° ordine, si deduce subito

$$s = C\frac{w^3}{\omega^4}\ ,$$

ove C è un fattore costante. Il valore di C si ottiene immediatamente osservando che per $\tau = 1$ si ha

$$w = -12 \quad , \quad \omega = 2 \quad , \quad \varkappa = 1 \, ,$$

onde

$$C = -\frac{1}{2^2 3^3} = -\frac{1}{108}$$

e però la formola richiesta sarà

$$\varkappa = -\frac{(1 - 14\tau^4 + \tau^8)^3}{108\,\tau^4(1+\tau^4)^4} = -\frac{w^3}{108\,\omega^4} \, . \tag{2}$$

Conviene inoltre osservare le formole seguenti. La funzione $\varkappa - 1$ diventa infinita come $\varkappa$ e s'annulla del secondo ordine nei punti c) ove $\chi = 0$; si ha per conseguenza

$$\varkappa - 1 = C' \frac{\chi^2}{\omega^4} \, ,$$

ove C' è una costante. Confrontando colla (2), si ha l'identità

$$108\,\omega^6 + w^3 + 108\,C'\chi^2 = 0 \, ,$$

dalla quale, facendo p. e. $\tau = 0$, risulta

$$C' = -\frac{1}{108}$$

e però fra i polinomii (1) ω, w, χ ha luogo l'identità

$$108\,\omega^4 + w^3 - \chi^2 = 0 \, , \tag{3}$$

che si verifica anche subito direttamente. Abbiamo dunque la formola

$$\varkappa - 1 = -\frac{(1 + 33\tau^4 - 33\tau^8 - \tau^{12})^2}{108\,\tau^4(1+\tau^4)^4} = -\frac{\chi^2}{108\,\omega^4} \, . \tag{4}$$

Le formole (2), (4) dimostrano che la derivata di $\varkappa$

$$\frac{d\varkappa}{d\tau}$$

diventa infinitesima del secondo ordine ove $w = 0$ e del primo ove $\chi = 0$ e, poichè essa è infinita del quinto ordine ove $\omega = 0$ e del terzo per $\tau = \infty$, non ha altri infinitesimi che quelli indicati. Ne risulta, a meno di un fattore costante A:

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = A\,\frac{\chi\, w^2}{\omega^5} \, .$$

Per determinare A, si osservi che dalla (2) segue

$$\lim_{\tau = 0} \left(\tau^5 \frac{dz}{d\tau} \right) = \frac{1}{3^3}$$

e però $A = \frac{1}{27}$. Si ha adunque

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{27} \frac{\chi w^3}{\omega^5} , \tag{5}$$

la quale formola si constata subito direttamente, osservando l' identità

$$4 w \frac{d\omega}{d\tau} - 3 \omega \frac{dw}{d\tau} = 4 \chi .$$

§. 357.

Verifiche relative alla rappresentazione conforme.

Ottenuta la formola (2) per la nostra rappresentazione, potremo facilmente verificare che essa dà la rappresentazione conforme voluta.

È utile per ciò premettere le considerazioni seguenti. La rete ottaedrica può portarsi a coincidere con sè medesima, sovrapponendo un triangolo elementare della rete ad uno qualunque dei 23 triangoli ad esso congruenti. Ciascuna di queste rotazioni della sfera complessa in sè medesima è analiticamente rappresentata, per la formola di Cayley (cap. III, I, pag. 111), da una sostituzione lineare sulla variabile complessa τ. Le 24 sostituzioni lineari, compresa l' identità, corrispondenti alle rotazioni che riportano in sè medesima la rete ottaedrica, formano evidentemente un *gruppo;* questo dicesi il gruppo dell'ottaedro (o cubo). Determiniamo in primo luogo le effettive espressioni delle sostituzioni del gruppo. Osserviamo anzitutto la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ attorno al diametro dell'ottaedro che congiunge i punti $\tau = 0$, $\tau = \infty$ (asse polare); essa ha l'espressione

$$\tau' = i \tau$$

e ripetuta dà luogo alle 4 sostituzioni (compresa l' identità):

$$\tau' = i^r \tau , \quad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Il ribaltamento dell'ottaedro attorno all'asse $O\xi$ permuta fra loro i

punti $\tau = 0$, $\tau = \infty$ e lascia fissi i due punti $\tau = +1$, $\tau = -1$; esso è rappresentato per ciò dalla sostituzione

$$\tau' = \frac{1}{\tau},$$

la quale, combinata colle quattro precedenti, dà luogo alle 8 sostituzioni

$$\tau' = i^r \tau \quad , \quad \tau' = \frac{i^r}{\tau} \ (r = 0, 1, 2, 3),$$

che nel gruppo dell'ottaedro formano un sottogruppo (del diedro). Consideriamo poi una rotazione d'ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ attorno alla congiungente i punti medii di due faccie (parallele) opposte dell'ottaedro, rotazione che appartiene evidentemente al gruppo. Scegliamo ad esempio quella rotazione di questa specie, che scambia fra loro ciclicamente i tre vertici dell'ottaedro

$$\tau = \infty \ , \quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \ , \quad \tau = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

nell'ordine indicato, e quindi i diametralmente opposti

$$\tau = 0 \ , \quad \tau = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \ , \quad \tau = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} .$$

Scrivendo la sua espressione analitica secondo la formola di Cayley

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{-\beta_0\tau + \alpha_0} \ , \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1 \ ,$$

troviamo subito

$$\alpha = \frac{-1+i}{2} \ , \quad \beta = \frac{i}{\sqrt{2}} \ ,$$

onde

$$\tau' = \frac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\tau - (1-i)} .$$

Combinando questa colle 8 precedenti, si hanno le 24 sostituzioni

del gruppo dell'ottaedro sotto la forma normale:

$$(6)\quad \begin{cases} \tau' = i^r \tau,\ \tau' = \dfrac{i^r}{\tau},\ \tau' = i^r \dfrac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\tau - (1-i)},\ \tau' = i^r \dfrac{(1-i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\tau - (1+i)} \\ \tau' = i^r \dfrac{\sqrt{2}\tau - (1-i)}{(1+i)\tau + \sqrt{2}},\quad \tau' = i^r \dfrac{\sqrt{2}\tau - (1+i)}{(1-i)\tau + \sqrt{2}} \\ r = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ . \end{cases}$$

Verifichiamo ora direttamente che la formola (2) ci dà la rappresentazione conforme domandata. Per ciò osserviamo in primo luogo che questa funzione $s(\tau)$ rimane invariata, effettuando sull'argomento τ una qualunque delle 24 sostituzioni (6) del gruppo dell'ottaedro [1]. Ad ogni valore di s corrispondono quindi 24 valori di τ legati ad uno di essi dalle sostituzioni (6) del gruppo; la funzione algebrica $\tau(s)$, i cui 24 rami si deducono da uno fisso colle sostituzioni lineari (6), prende, secondo Klein, il nome di *irrazionalità dell'ottaedro*.

Sul contorno di ogni triangolo elementare la funzione $s(\tau)$ è reale, il che basterà verificare per un determinato triangolo, sul contorno di ogni altro riprendendo $s(\tau)$ gli stessi valori. Ora sui due lati rettilinei del triangolo fondamentale T coi vertici in

$$(a)\quad \tau = 0\ ,\quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \tau = (\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$s(\tau)$ è evidentemente, reale, essendo già τ' reale. Sul terzo lato curvilineo, $s(\tau)$ prende gli stessi valori che sul lato rettilineo da $\tau = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ a $\tau = 1$ del triangolo omologo, coi vertici in

$$\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \tau = 1\ ,\quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\ ,$$

---

[1] Ciò risulta dal calcolo diretto, la proprietà enunciata essendo evidente per le prime 8 sostituzioni (6) e per l'altra

$$\tau' = \frac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - (1-i)}$$

verificandosi facilmente; ma risulta anche semplicemente dall'osservare che le dette sostituzioni permutano fra loro i vertici dell'ottaedro, come pure i punti medii delle faccie.

e però è ancora reale. Percorrendo τ il contorno del triangolo T, nel senso positivo, z percorre l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$ sempre nello stesso senso, poichè altrimenti ad un valore reale di z corrisponderebbero più di 24 valori per τ. Facciamo ora muovere τ nell'*interno* di T; z si muoverà nell'*interno* di uno dei due semipiani, e poichè inversamente ad ogni valore di z corrisponde, o nel triangolo T, o nel suo simmetrico rapporto all'asse reale, un valore di τ [1], si vede che ad ogni punto z in quel semipiano E corrisponde un punto τ nel triangolo T. Poichè inoltre, per la (5), $\frac{dz}{d\tau}$ non s'annulla mai nè diventa infinita in T, salvo nei vertici, si vede che la rappresentazione di T sopra E è appunto conforme [2].

§. 358.

Determinazione della superficie minima di Schwarz.

Per determinare la superficie minima di Schwarz, rimane ora da rappresentare in modo conforme il triangolo rettangolo isoscele $b\,f\,h$ (§. 354) nel piano z coll'ipotenusa $b\,h$ parallela ad uno degli assi, supponiamo all'asse reale, sul semipiano positivo z, in guisa che si abbia

$$z = 0 \text{ in } b \quad , \quad z = 1 \text{ in } f \quad , \quad z = \infty \text{ in } h \ .$$

La nota formola di Schwarz-Christoffel per la rappresentazione conforme di un poligono rettilineo sopra un mezzo piano dà

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = \frac{C}{z^{\frac{3}{2}}\,(z-1)}$$

e poichè, per z reale negativo, deve essere $\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2$ reale positivo, risulta

$$C = i\,A^2 \ ,$$

---

[1] Invero dei 24 indici di τ, che corrispondono a un valore di z, se ne trova uno in ciascuno dei 24 triangoli congruenti della rete ottaedrica.

[2] Il semipiano E è quello in cui il coefficiente dell'immaginario in z è positivo, giacchè, percorrendo l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$, deve restare alla sinistra.

essendo A reale; dunque [1]

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = i\,A^2\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}(z-1)}\,,\quad \sigma = A\,e^{\frac{\pi i}{4}}\int\frac{dz}{(z-1)^{\frac{1}{2}}\,z^{\frac{3}{4}}}\,.$$

La funzione F (τ) di Weierstrass per la superficie minima di Schwarz si otterrà dalla formola

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \frac{i\,A^4}{2}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}(z-1)}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\,,$$

nella quale, sostituendo a

$$z\,,\quad z-1\,,\frac{dz}{d\tau}$$

i loro valori in funzione di τ dati dalle formole (2), (4), (5) otteniamo, a meno di un fattore costante reale [2], che influisce solo sulla grandezza assoluta della superficie:

$$F(\tau) = \frac{1}{w^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,.$$

La superficie minima di Schwarz è dunque definita dalle formole

$$(7)\qquad x = R\int\frac{1-\tau^2}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,d\tau\,,\quad y = R\int\frac{i\,(1+\tau^2)}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,d\tau\,,$$

$$z = R\int\frac{2\,\tau\,d\tau}{\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}}\,.$$

---

[1] Ponendo $z = t^2$, si ha

$$\sigma = 2\,A\sqrt{i}\int\frac{dt}{\sqrt{t^4-i}}\,.$$

La quadratura porta alle funzioni ellittiche lemniscatiche e precisamente, nelle notazioni di Weierstrass, si ha

$$t = \wp\left(\frac{a\,\sigma}{\sqrt{i}}\right)$$

con a costante reale, gli invarianti g_2, g_3 di $\wp$ avendo i valori

$$g_2 = 4\,,\quad g_3 = 0\,.$$

[2] Si osservi, che se τ percorre il tratto rettilineo da $\tau = 0$ a $\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, sono reali tanto $\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2$ quanto $\sqrt{1-14\,\tau^4+\tau^8}$.

Ed ora andremo appunto a verificare che, se manteniamo l'indice di τ sulla sfera complessa entro uno dei 6 quadrilateri sferici con angoli di 120°, che corrispondono alle faccie del cubo inscritto, avremo una porzione di superficie minima, limitata a quattro spigoli due a due opposti di un tetraedro regolare.

Il terzo integrale, che figura nelle formole (7), si riduce subito ad un integrale ellittico (di 1.ª specie) colla sostituzione

$$\tau^2 = t;$$

gli altri due sono apparentemente iperellittici, ma si riducono nuovamente a integrali ellittici con convenienti sostituzioni, come ora vedremo.

Conviene anzi tutto per ciò girare gli assi coordinati attorno all'asse z di 45° e ciò faremo, sostituendo a

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

nuovamente x, y; avremo pel tal modo

$$x = \mathrm{R}\int \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1-i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\, d\tau\,, \quad y = \mathrm{R}\int \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1+i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\, d\tau\,,$$

$$z = \mathrm{R}\int \frac{2\tau\, d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\,.$$

Inoltre fisseremo che τ si muova entro il quadrilatero sferico con angoli di 120° che ha i vertici nei punti corrispondenti ai valori di τ

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad b = i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad c = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad d = -i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},$$

e fisseremo altresì il limite inferiore comune dei tre integrali nel punto

$$c = -a = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,,$$

talchè le formole che definiscono la porzione di superficie minima, sulla quale dovremo fare le indicate verifiche sono le seguenti:

$$(8)\quad x = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1-i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\, d\tau, \quad y = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1+i\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\, d\tau,$$

$$z = \mathrm{R}\int_{-a}^{\tau} \frac{2\tau\, d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}\, d\tau.$$

Converrà nello stesso tempo tener presente che, avendo rotato attorno all'asse x di 45°, le formole (5) §. 340 (pag. 311) danno pei coseni di direzione della normale alla superficie

$$(8^{*}) \qquad X = \frac{\tau + \tau_0 + i(\tau - \tau_0)}{\sqrt{2}\,(\tau\tau_0 + 1)}\,, \quad Y = \frac{\tau + \tau_0 - i(\tau - \tau_0)}{\sqrt{2}\,(\tau\tau_0 + 1)}\,, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}\,.$$

Da queste formole, limitando nel modo anzidetto il corso di τ, ogni ambiguità è sparita, se fissiamo il valore del radicale in un punto e noi, ponendo

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}\,,$$

fisseremo senz'altro che sia

$$F(0) = +1\,.$$

Notiamo poi che gli 8 punti di diramazione del radicale essendo nei vertici del cubo

$$\pm a\,, \quad \pm\frac{1}{a}\,, \quad \pm ia\,, \quad \pm\frac{i}{a}\,,$$

basterà eseguire nel piano complesso τ quattro tagli da a fino ad $\frac{1}{a}$, da $-a$ fino a $-\frac{1}{a}$, da ia fino a $\frac{i}{a}$ e infine da $-ia$ fino a $-\frac{i}{a}$ e

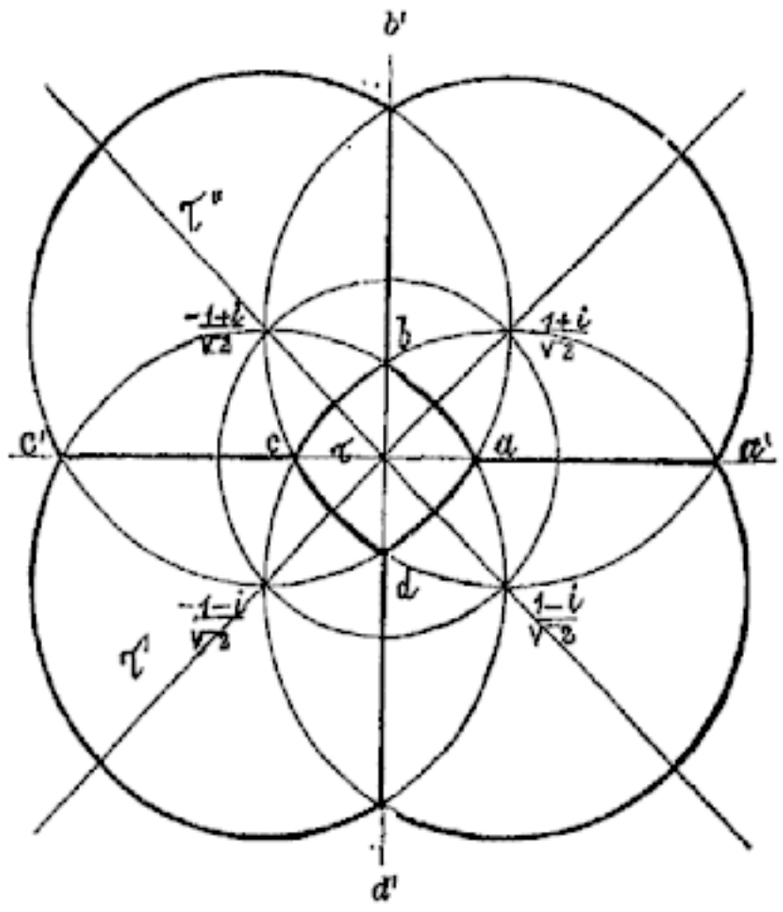


FIG. 10.ª

nel piano così tagliato la $F(\tau)$ diventerà una funzione continua e monodroma, dappertutto finita salvo che agli 8 punti indicati.

§. 359.

Verifiche relative al contorno.

Cominciamo le nostre verifiche dal ricercare le linee, che corrispondono sulla porzione di superficie minima considerata all'asse reale ed immaginario del piano τ ed alle loro bisettrici.

1.° Indichiamo con ρ una variabile reale; avremo lungo l'asse reale

$$\tau = \rho \ , \quad -a \leqq \rho \leqq a,$$

indi

$$(8) \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{\rho} (1-\rho^2)\, F(\rho)\, d\rho \ , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{\rho} (1-\rho^2)\, F(\rho)\, d\rho \ ,$$

$$z = \int_{-a}^{\rho} 2\rho\, F(\rho)\, d\rho,$$

e però

$$x - y = 0 \ .$$

D'altronde, lungo questa linea, si ha per le (8*)

$$X - Y = 0 \, ;$$

dunque: *il piano $x = y$ taglia normalmente Σ, cioè è un piano di simmetria per Σ.*

2.° Lungo l'asse immaginario è

$$\tau = i\rho \quad , \quad d\tau = i\, d\rho$$

e indicando con x_0, y_0, z_0 i valori di x, y, z in $\tau = 0$, mentre τ percorre l'asse immaginario, avremo

$$(9^*) \quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^{\rho} (1-\rho^2)\, F(\rho)\, d\rho \\ y - y_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^{\rho} (1-\rho^2)\, F(\rho) \quad -a \leqq \rho \leqq a \\ z - z_0 = -\displaystyle\int_0^{\rho} 2\rho \,.\, F(\rho)\, d\rho \end{cases}$$

e però

$$x + y = x_0 + y_0 .$$

Lungo questa linea di Σ, è. per le (8*), $X + Y = 0$, cioè il piano $x + y = x_0 + y_0$ è piano di simmetria per Σ.

3.° Lungo la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi, si ha

$$\tau = \sqrt{i}\,\rho \quad , \quad d\tau = \sqrt{i}\,d\rho ,$$

intendendo per $\sqrt{i}$ il valore

$$\sqrt{i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} ,$$

e risulta quindi

$$x = x_0 + \int_0^{\rho} \frac{(1 + \rho^8)\,d\rho}{\sqrt{1 + 14\,\rho^4 + \rho^8}} \quad , \quad y = y_0 \quad , \quad z = z_0 ,$$

per ρ compreso fra $-a$ e $+a$. Il punto corrispondente sulla superficie descrive un tratto rettilineo parallelo all'asse Ox.

4.° Lungo la seconda bisettrice si ha

$$\tau = \sqrt{-i}\,\rho \quad , \quad \sqrt{-i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}} ,$$

indi

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0 + \int_0^{\rho} \frac{(1 - \rho^8)\,d\rho}{\sqrt{1 + 14\,\rho^4 + \rho^8}} , \quad z = z_0$$

e il punto (x, y, z) descrive un tratto rettilineo parallelo all'asse Oy. La porzione Σ di superficie minima possiede adunque intanto i due piani di simmetria

$$x - y = 0 \quad , \quad x + y = x_0 + y_0$$

e due assi di simmetria, che sono le parallele condotte per (x_0, y_0, z_0) agli assi Ox, Oy.

Poniamo

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{0} (1 - \rho^8)\,F(\rho)\,d\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a (1 - \rho^8)\,F(\rho)\,d\rho ,$$

$$B = \int_{-a}^{0} 2\,\rho\,F(\rho)\,d\rho = -\int_0^a 2\,\rho\,F(\rho)\,d\rho ,$$

ed avremo

$$x_0 = y_0 = A \quad , \quad z_0 = B .$$

Risulterà poi dal seguente §: $B = -A$; per ora osserviamo che le (9), (9*) permettono di calcolare i valori di x, y, z ai quattro vertici a, b, c, d in funzione di A, B. Designando questi valori coll'apposizione degli indici a, b, c, d, troviamo infatti

$$(10) \qquad \begin{cases} x_a = 2A \ , & y_a = 2A \ , & z_a = 0 \\ x_b = 2A \ , & y_b = 0 \ , & z_b = 2B \\ x_c = 0 \ , & y_c = 0 \ , & z_c = 0 \\ x_d = 0 \ , & y_d = 2A \ , & z_d = 2B . \end{cases}$$

§. 360.

Riduzione a integrali ellittici.

Come abbiamo avvertito, i due primi integrali nelle formole (8) si possono ridurre essi pure ellittici e precisamente, come ora vedremo, alla forma stessa del terzo. Osserviamo per ciò dapprima in generale che il differenziale

$$\frac{a + b\tau + c\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau ,$$

essendo a, b, c costanti, ove si operi una delle 24 sostituzioni

$$\tau = \frac{\alpha\tau' + \beta}{\gamma\tau' + \delta}$$

del gruppo dell'ottaedro (§. 357), si trasforma nel differenziale omologo

$$\frac{a' + b'\tau' + c'\tau'^2}{\sqrt{1 - 14\tau'^4 + \tau'^8}} d\tau' ,$$

dove il polinomio $a' + b'\tau' + c'\tau'^2$, eguagliato a zero, ha per radici i valori di τ' che corrispondono, secondo la sostituzione eseguita, alle radici di

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0 .$$

Ora nei due differenziali

$$\sqrt{-i} \cdot \frac{1 - i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau \quad , \quad \sqrt{i} \ \frac{1 + i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau$$

le radici dei numeratori, eguagliati a zero, sono in ciascuno gli indici di

due vertici opposti dell'ottaedro che, con convenienti sostituzioni del gruppo dell'ottaedro, possiamo trasportare in 0, ∞, onde il primo e secondo integrale nelle (8) si ridurranno (salvo un fattore) al terzo. Scegliamo per prima sostituzione quella che produce sui vertici dell'ottaedro le permutazioni circolari

$$(0, -\sqrt{i}\,, -\sqrt{-i}) \quad , \quad (\infty\,, \sqrt{i}\,, \sqrt{-i}) \ ^{(1)}$$

e per la seconda l'inversa di questa. Avremo per la prima sostituzione

$$(11) \qquad \tau = \frac{\sqrt{-i}\,\tau' + 1}{\tau' - \sqrt{i}} \ , \ \tau' = \frac{\sqrt{i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{-i}} \ ,$$

e quindi per la seconda

$$(11^*) \qquad \tau = \frac{\sqrt{i}\,\tau'' + 1}{\tau'' - \sqrt{-i}} \ , \ \tau'' = \frac{\sqrt{-i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{i}} \ .$$

Per queste rispettive sostituzioni risulta, eseguendo il calcolo:

$$\sqrt{-i}\,\frac{(1 - i\,\tau^2)\,d\tau}{\sqrt{1 - 14\,\tau^4 + \tau^8}} = \frac{2\,\tau'\,d\tau'}{\sqrt{1 - 14\,\tau'^4 + \tau'^8}}$$

$$\sqrt{i}\,\frac{(1 + i\,\tau^2)\,d\tau}{\sqrt{1 - 14\,\tau^4 + \tau^8}} = \frac{2\,\tau''\,d\tau''}{\sqrt{1 - 14\,\tau''^4 + \tau''^8}} \ ,$$

ove soltanto rimarrà ben da fissare quale è il ramo del radicale da scegliersi nel secondo membro.

Se l'indice di τ resta, come sopra, nel quadrilatero $a\,b\,c\,d$, gli indici di τ', τ'' si muoveranno rispettivamente nei quadrilateri adiacenti $c\,d\,d'\,c'$, $c\,b\,b'\,c'$ (fig. 10ª). Avendo ora $F(\tau')$, $F(\tau'')$ il significato preciso del § 358 importa decidere quale è il segno da scegliersi nelle formole

$$(a) \begin{cases} \sqrt{-i}\,(1 - i\,\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \pm 2\,\tau'\,F(\tau')\,d\tau' \\ \sqrt{i}\,(1 + i\,\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \pm 2\,\tau''\,F(\tau'')\,d\tau'' \ . \end{cases}$$

---

(1) S'intende sempre che $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$ abbiano i significati

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \ , \ \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \ .$$

Basta per ciò osservare quello che accade nell'intorno del punto $\tau = 0$, trascurando le potenze superiori di τ. Abbiamo

$$\tau = 0 \quad , \quad \tau' = -\sqrt{i}$$

$$F(0) = +1 \quad , \quad F(-\sqrt{i}) = +\frac{1}{4} \text{ (1)}$$

$$d\tau' = -2i\,d\tau\,,$$

onde risulta

$$\sqrt{-i}\,(1 - i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \sqrt{-i}\,d\tau$$

$$2\tau'\,F(\tau)\,d\tau' = i\sqrt{i}\,d\tau = -\sqrt{-i}\,d\tau.$$

Similmente

$$\tau'' = -\sqrt{-i} \quad , \quad F(\tau'') = +\frac{1}{4} \quad , \quad d\tau'' = 2i\,d\tau$$

$$\sqrt{i}\,(1 + i\tau^2)\,F(\tau)\,d\tau = \sqrt{i}\,d\tau$$

$$2\tau''\,F(\tau'')\,d\tau = -\sqrt{i}\,d\tau,$$

e però in ambedue le formole vale il segno inferiore. Le formole (8), che definiscono Σ, possono quindi scriversi nel modo seguente:

$$(12)\quad x = -R\int_{-a}^{\tau'} 2\tau'\,F(\tau)\,d\tau \quad , \quad y = -R\int_{-a}^{\tau''} 2\tau''\,F(\tau'')\,d\tau \quad ,$$

$$z = R\int_{-a}^{\tau} 2\tau\,F(\tau)\,d\tau \quad ,$$

ove s'intende che τ si muova entro il quadrilatero $a\,b\,c\,d$, partendo dal punto c, e τ', τ'' seguano i cammini corrispondenti nei quadrilateri adiacenti $c\,c'\,d'\,d$, $c\,c'\,b'\,b$.

Indicando con τ'_0, τ''_0 le coniugate di τ', τ'', scriviamo le (12) così:

$$(12^*)\qquad \begin{cases} x = -\displaystyle\int_{-a}^{\tau'} \tau'\,F(\tau')\,d\tau' - \int_{-a}^{\tau'_0} \tau'_0\,F_0(\tau'_0)\,d\tau'_0 \\ y = -\displaystyle\int_{-a}^{\tau''} \tau''\,F(\tau'')\,d\tau'' - \int_{-a}^{\tau''_0} \tau''_0\,F_0(\tau''_0)\,d\tau''_0 \\ z = \displaystyle\int_{-a}^{\tau} \tau\,F(\tau)\,d\tau + \int_{-a}^{\tau_0} \tau_0\,F_0(\tau_0)\,d\tau_0\,. \end{cases}$$

---

(1) E invero sul tratto rettilineo da 0 a $-\sqrt{i}$, $F(\tau)$ è sempre reale e non s'annulla.

Possiamo ora vedere facilmente quale è il contorno di Σ, corrispondente al contorno $a\,b\,c\,d$ del quadrilatero, in cui si muove τ. E infatti, se τ descrive il tratto $\overline{c\,b}$, vediamo che

$$\begin{aligned}
&\tau_0 \ldots . \text{ descrive } \overline{c\,d}\\
&\tau' \ldots . \quad \overline{c\,d}\\
&\tau'_0 \ldots . \quad \overline{c\,b}\\
&\tau'' \ldots . \quad \overline{c\,d}\\
&\tau''_0 \ldots . \quad \overline{c\,d} .
\end{aligned}$$

Ora F (τ) è puramente immaginario lungo $\overline{c\,d}$ e però dalle (12*) risulta

$$y = 0 , \quad x + z = 0 \quad \text{lungo } \overline{c\,b} .$$

Similmente si vede che si ha

$$x = 0 , \quad y + z = 0 \quad \text{lungo } \overline{c\,d} .$$

I due tratti corrispondenti del contorno di Σ sono dunque due segmenti rettilinei d'uguale lunghezza, inclinati l'uno sull'altro di 60°.

Basta ora riferirsi alle proprietà di simmetria osservate al §. 359, per concluderne che il contorno di Σ è formato da quattro segmenti rettilinei d'eguale lunghezza, inclinati ciascuno sui due adiacenti di 60°. Inoltre segue dal numero citato che Σ contiene altre due rette, cioè le congiungenti i punti medii dei lati opposti; queste sono normali fra loro e si tagliano nel centro del tetraedro regolare. Poichè inoltre, per quanto precede, si ha:

$$x_b + z_b = 0 , \quad y_d + z_d = 0 ,$$

dalle (10) risulta, come si era affermato:

$$B = - A ;$$

la lunghezza l degli spigoli del tetraedro è quindi data da

$$l = 2\,A\,\sqrt{2} .$$

L'integrale

$$\int_{-a}^{\tau} 2\,\tau\,F(\tau)\,d\tau ,$$

dal quale dipende la nostra superficie, colla sostituzione

$$\tau^2 = t$$

si riduce all'integrale ellittico

$$u = \int_{2-\sqrt{3}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1-14\,t^2+t^4}},$$

ovvero

$$u = \int_{2-\sqrt{3}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{[(2-\sqrt{3})^2-t^2]\,[(2+\sqrt{3})^2-t^2]}},$$

che definisce t come funzione ellittica di u col modulo

$$k = (2-\sqrt{3})^2;$$

invero risulta

$$t = (2-\sqrt{3})\,\mathrm{sn}\,[(2+\sqrt{3})\,u + \mathrm{K}].$$

§. 361.

Continuazione analitica della superficie di Schwarz.

Introducendo così nelle (12) le funzioni ellittiche, possono studiarsi varie interessanti questioni relative alla superficie minima di Schwarz, in particolare quelle che ne riguardano la continuazione analitica. Noi rimandiamo per questo studio alla memoria di Schwarz, dalla quale abbiamo tolto gli sviluppi precedenti [1], e qui ci limitiamo soltanto a constatare come i teoremi di simmetria relativi alle superficie minime, insieme a considerazioni elementari sui *gruppi di movimenti*, permettano di seguire la continuazione analitica, in particolare di osservare la tripla periodicità della superficie di Schwarz nelle direzioni dei tre assi coordinati.

La continuazione analitica di Σ si ottiene ribaltando successivamente Σ attorno a ciascuno dei suoi lati, e medesimamente operando sulle porzioni contigue ottenute.

Ora, proponendoci di studiare la costituzione del gruppo G di movimenti dello spazio, che lascia invariata, nella sua totalità, la superficie di Schwarz, osserviamo che per ogni tale movimento la porzione fondamentale Σ andrà in una congruente Σ', alla quale possiamo pure arrivare per successivi ribaltamenti attorno ai lati di porzioni congruenti a Σ, via via contigue. Per ciò il movimento più generale del gruppo G, che porta Σ

---

[1] *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche*, Werke, Band. I, pag. 6, ss.

in Σ', si ottiene combinando il movimento ottenuto per gli indicati ribaltamenti con un movimento che trasforma Σ in sè medesima. Questi ultimi movimenti sono evidentemente (oltre l'identità) tre soltanto e cioè i ribaltamenti attorno alle tre congiungenti i punti medii delle costole opposte del tetraedro regolare da cui siamo partiti.

Ricordiamo ora che due *movimenti* dello *spazio* A, *B si compongono* in un terzo movimento, che indichiamo con

$$A\,B\,,$$

ponendo a sinistra quello eseguito prima. Se con A^{-1} indichiamo il movimento inverso di A, il movimento

$$B' = A^{-1}\,B\,A$$

dicesi *il trasformato di* B *per mezzo di* A e, secondo un teorema di Jordan, esso non è altro che il movimento stesso B, eseguito attorno all'asse, in cui si trasporta l'asse centrale di B pel movimento A.

Il gruppo G si genera adunque, combinando i ribaltamenti elementari attorno ai lati del quadrilatero, che limita Σ, coi tre ribaltamenti sopra indicati. Una proprietà essenziale di questo gruppo, che ora andremo a riscontrare, è quella di essere *discontinuo*, cioè di non contenere movimenti infinitesimi [3]. Esso contiene, come sottogruppo invariante d'indice 24, un gruppo di traslazioni, generato da tre traslazioni elementari di eguale ampiezza secondo tre direzioni ortogonali.

Prendiamo il quadrilatero fondamentale *a b c d*, appunto orientato

---

[3] JORDAN. — *Sur les groupes de mouvements* (Annali di matematica, serie II, t. II, pag. 167).

Ricordiamo brevemente la dimostrazione di questo teorema essenziale pel nostro scopo. — Sia r l'asse centrale di A, r' quello di B ed r'' la posizione che r' acquista, dopo eseguito A. Essendo P un punto qualunque dello spazio, P' la nuova posizione di P dopo eseguito A, e Q il punto ove P si trasporta pel movimento B, osserviamo l'effetto di $A^{-1}\,B\,A$ sopra P' che è evidentemente un punto arbitrario dello spazio. Pel movimento $A^{-1}\,B$ il punto P' si trasporta in Q e se consideriamo i due punti P, Q e l'asse r', vediamo che A trasporta P in P', r' in r'' e Q in un punto Q' che giace rapporto a P', r'' come Q rapporto a P, r'. Ora si passa da P a Q col movimento elicoidale B attorno all'asse centrale r' e però lo stesso movimento, eseguito attorno a r'', trasporta P' in Q'.

[4] I gruppi discontinui di movimenti sono stati studiati da Schönfliess (*Math. Annalen*, Bd. 28, 29).

come risultava nel § 359, talchè ponendo

$$k = 2\,A = -\,2\,B\,,$$

per le coordinate dei vertici avremo

$$a \equiv (k, k, 0)\ ,\quad b \equiv (k, 0, -k)\ ,\quad c \equiv (0, 0, 0)\ ,\quad d \equiv (0, k, -k)\ .$$

Numerando poi i lati $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$ successivamente con 1, 2, 3, 4, indichiamo con S_1, S_2, S_3, S_4 i movimenti dello spazio che consistono in un ribaltamento attorno ai lati 1, 2, 3, 4. Di più indichiamo con S_5, S_6 i rispettivi ribaltamenti attorno alle congiungenti i punti medii dei lati opposti $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, e $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ del quadrilatero, infine con S_7 il ribaltamento che risulta dal combinare S_5, S_6, ribaltamento che avviene attorno alla congiungente i punti medii dei due spigoli soppressi $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ del tetraedro.

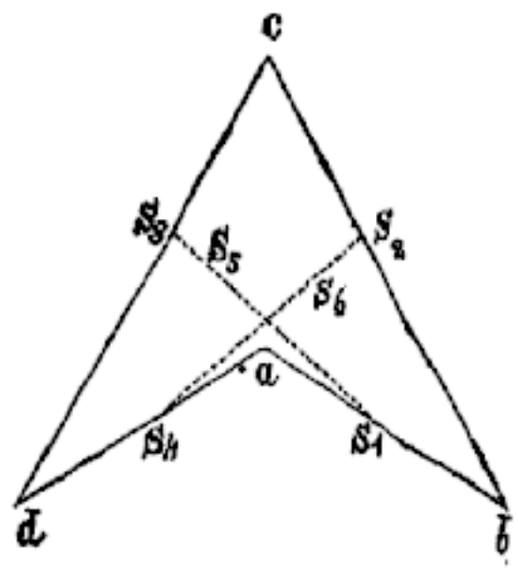


FIG. 11.ª

Le sostituzioni elementari del gruppo G saranno appunto

$$S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3\ ,\ S_4\ ,\ S_5\ ,\ S_6\ ,\ S_7$$

e, per le loro espressioni analitiche, troveremo

$$\begin{aligned}
S_1)\ & x' = 2k - x\ ,\ & y' &= k + z\ ,\ & z' &= -k + y\\
S_2)\ & x' = -z\ ,\ & y' &= -y\ ,\ & z' &= -x\\
S_3)\ & x' = -x\ ,\ & y' &= -z\ ,\ & z' &= -y\\
S_4)\ & x' = k + z\ ,\ & y' &= 2k - y\ ,\ & z' &= -k + x\\
S_5)\ & x' = x\ ,\ & y' &= k - y\ ,\ & z' &= -k - z\\
S_6)\ & x' = k - x\ ,\ & y' &= y\ ,\ & z' &= -k - z\\
S_7)\ & x' = k - x\ ,\ & y' &= k - y\ ,\ & z' &= z\ ,
\end{aligned}$$

dove ogni volta, x, y, z indicando le coordinate di un punto P qualunque dello spazio, con x', y', z' si denotano quelle del punto P', in cui va P dopo il corrispondente movimento.

Ciò premesso, consideriamo i due movimenti del gruppo G:

$$T = S_3 S_1 S_5 \quad , \quad T' = S_2 S_4 S_6 \; ;$$

per le loro espressioni analitiche troviamo

$$T = S_3 S_1 S_5) \quad x' = x + 2k \; , \quad y' = y \qquad , \quad z' = z$$
$$T' = S_2 S_4 S_6) \quad x' = x \qquad , \quad y' = y + 2k \; , \quad z' = z \; ,$$

onde si vede che T, T' sono due traslazioni d'ampiezza $2k$ parallele rispettivamente agli assi Ox, Oy. Formiamo inoltre la sostituzione (a periodo 3)

$$U = S_1 S_2) \quad x' = k - y \; , \quad y' = -k - z \; , \quad z' = x - 2k$$

e la sua inversa

$$U' = S_2 S_1) \quad x' = 2k + z \; , \quad y' = k - x \; , \quad z' = -k - y \; ,$$

e trasformiamo T per mezzo di U, cioè consideriamo il movimento

$$T'' = U^{-1} T U \; .$$

Vediamo che T'' ha l'espressione

$$T'') \quad x' = x \; , \quad y' = y \; , \quad z' = z + 2k \; ,$$

cioè T'' è una traslazione della medesima ampiezza $2k$ parallela all'asse delle z. Le tre traslazioni T, T', T'' generano il gruppo *di traslazioni*, che indicheremo con Γ, le cui operazioni hanno la forma generale

$$x' = x + 2mk \; , \quad y' = y + 2nk \; , \quad z' = z + 2pk \; ,$$

dove m, n, p sono numeri interi qualunque positivi o negativi.

Il gruppo Γ è evidentemente un sottogruppo di G; di più esso *è invariante* in G, cioè permutabile con tutte le operazioni di G, il che si constata subito osservando che ciascuna delle operazioni elementari

$$S_1 \; , \quad S_2 \; , \; \ldots \; . \; S_7$$

di G trasforma una traslazione di Γ in un'altra traslazione di Γ.

§. 362.

Discontinuità del gruppo G della superficie di Schwarz.

Vogliamo ora dimostrare che l'indice di Γ rapporto a G è finito e precisamente eguale a 24, dopo di che la discontinuità di G sarà accertata.

Per ciò introduciamo, per brevità di linguaggio, alcune denominazioni; diciamo che due operazioni A, B di G sono *equivalenti* rapporto a Γ, se si ha

$$A = B t ,$$

indi

$$B = A t^{-1} ,$$

essendo t una traslazione in Γ, e per significare questa equivalenza scriviamo

$$A \equiv B .$$

Ora osserviamo che, se fra quattro movimenti di G hanno luogo le relazioni d'equivalenza

$$A \equiv B \quad , \quad A' \equiv B' ,$$

per la permutabilità di Γ con ogni operazione di G, risulterà

$$A A' \equiv B B' .$$

Ciò premesso, e posto come sopra

$$U = S_1 S_2 \quad , \quad U^{-1} = S_2 S_1 ,$$

consideriamo le 12 operazioni di G

$$\alpha) \quad \begin{cases} 1 \ , & S_5 \ , & S_6 \ , & S_7 \\ U \ , & S_5 U \ , & S_6 U \ , & S_7 U \\ U^{-1} \ , & S_5 U^{-1} \ , & S_6 U^{-1} \ , & S_7 U^{-1} , \end{cases}$$

due qualunque delle quali non sono equivalenti rapporto a 1, come ci accertiamo costruendo le loro espressioni effettive, che sono le seguenti:

$$\begin{cases} 1) \ x' = x & , \ y' = y & , \ z' = z \\ S_5) \ x' = x & , \ y' = k - y & , \ z' = -k - z \\ S_6) \ x' = k - x & , \ y' = y & , \ z' = -k - z \\ S_7) \ x' = k - x & , \ y' = k - y & , \ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{U})\ x' \equiv k-y & , \quad y' \equiv -k-x & , \quad z' \equiv -2k+z \\ \text{S}_5\text{U})\ x' \equiv y & , \quad y' \equiv x & , \quad z' \equiv -2k+z \\ \text{S}_6\text{U})\ x' \equiv k-y & , \quad y' \equiv x & , \quad z' \equiv -k-z \\ \text{S}_7\text{U})\ x' \equiv y & , \quad y' \equiv -k-x & , \quad z' \equiv -k-z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{U}^{-1})\ x' \equiv 2k+x & , \quad y' \equiv k-z & , \quad z' \equiv -k-y \\ \text{S}_5\text{U}^{-1})\ x' \equiv k-x & , \quad y' \equiv k-z & , \quad z' \equiv -2k+y \\ \text{S}_6\text{U}^{-1})\ x' \equiv k-x & , \quad y' \equiv z & , \quad z' \equiv -k-y \\ \text{S}_7\text{U}^{-1})\ x' \equiv 2k+x & , \quad y' \equiv z & , \quad z' \equiv -2k+y . \end{cases}$$

Al contrario, se componiamo due qualunque delle 12 operazioni di questa tabella, il loro prodotto risulta equivalente ad una delle 12 operazioni stesse, ciò che si vede semplicemente osservando le equivalenze elementari:

$$\text{U}\,\text{S}_5 \equiv \text{S}_6\,\text{U} \quad , \quad \text{U}\,\text{S}_6 \equiv \text{S}_7\,\text{U} \quad , \quad \text{U}\,\text{S}_7 \equiv \text{S}_5\,\text{U}$$

$$\text{U}^{-1}\text{S}_5 \equiv \text{S}_7\,\text{U}^{-1} \quad , \quad \text{U}^{-1}\text{S}_6 \equiv \text{S}_5\,\text{U}^{-1} \quad , \quad \text{U}^{-1}\text{S}_7 \equiv \text{S}_6\,\text{U}^{-1}.$$

Ora l'operazione S_2 di G non ha la sua equivalente nel quadro superiore e però, costruendo le 12 operazioni di G

$$\beta) \qquad \begin{cases} \text{S}_2 & , \quad \text{S}_5\,\text{S}_2 & , \quad \text{S}_6\,\text{S}_2 & , \quad \text{S}_7\,\text{S}_2 \\ \text{U}\,\text{S}_2 & , \quad \text{S}_5\,\text{U}\,\text{S}_2 & , \quad \text{S}_6\,\text{U}\,\text{S}_2 & , \quad \text{S}_7\,\text{U}\,\text{S}_2 \\ \text{U}^{-1}\text{S}_2 & , \quad \text{S}_5\,\text{U}^{-1}\text{S}_2 & , \quad \text{S}_6\,\text{U}^{-1}\text{S}_2 & , \quad \text{S}_7\,\text{U}^{-1}\text{S}_2 , \end{cases}$$

esse non saranno equivalenti fra loro nè con le 12 α), mentre il prodotto di una α) per una β) è equivalente ad una β) e il prodotto di due β) ad una α), come risulta dalle equivalenze elementari

$$\text{S}_2\,\text{S}_5 \equiv \text{S}_7\,\text{S}_2 \quad , \quad \text{S}_2\,\text{S}_6 \equiv \text{S}_5\,\text{S}_2 \quad , \quad \text{S}_2\,\text{U} \equiv \text{U}^{-1}\,\text{S}_2 .$$

Ogni operazione di G è equivalente ad una (ed una sola) delle 24 operazioni α), β). Per dimostrarlo, basta provare la cosa per le sostituzioni elementari di G; ora si ha

$$\text{S}_1 \equiv \text{U}\,\text{S}_2 \quad , \quad \text{S}_3 \equiv \text{S}_5\,\text{U}\,\text{S}_2 \quad , \quad \text{S}_4 \equiv \text{S}_6\,\text{S}_2 ,$$

ciò che prova la proprietà enunciata.

Ogni sostituzione di G si ottiene quindi prendendo una delle 24 sostituzioni α), β) e aggiungendo ai secondi membri della sua espressione

analitica multipli arbitrarii di $2k$. Così adunque è dimostrato il teorema enunciato:

Il gruppo di movimenti G *è discontinuo e contiene come sottogruppo invariante d'indice* 24 *il gruppo di traslazioni* F.

§. 363.

La superficie completa di Schwarz.

Conosciuta per tal modo la costituzione del gruppo G di movimenti, che lasciano invariata la superficie di Schwarz, è facile formarsi un'idea del modo come la primitiva porzione Σ si continua analiticamente dando luogo all'intera superficie di Schwarz. Questa ammette, come si è visto, tre traslazioni elementari in sè medesima nel senso delle tre congiungenti i punti medii di due costole opposte nel tetraedro regolare primitivo, e di ampiezza eguale al doppio di questa minima distanza k fra due costole opposte. Immaginando lo spazio diviso in infinite celle cubiche contigue di lato $= 2k$, è chiaro che basterà conoscere della superficie di Schwarz la porzione compresa entro uno di questi cubi, in ogni altro cubo essendovi una porzione della superficie congruente per traslazione alla iniziale.

Consideriamo, come cubo iniziale, quello compreso fra i quattro piani

$$x = \pm k \quad , \quad y = \pm k \quad , \quad z = \pm k .$$

Il tetraedro regolare, coi vertici nei punti (§. 361)

$$c \equiv (0, 0, 0) \ , \quad a \equiv (k, k, 0) \quad , \quad b \equiv (k, 0, -k) \ , \quad d \equiv (0, k, -k) \ ,$$

ha i tre vertici a, b, d nei punti medii delle costole del cubo, concorrenti nel vertice $(k, k, -k)$ di questo, e il quarto vertice c nel centro del cubo stesso. Soppressi i due spigoli $\overline{ca}$, $\overline{bd}$ del tetraedro, consideriamo la porzione Σ di superficie di Schwarz limitata al quadrilatero $a\,b\,c\,d$. Ribaltiamo Σ attorno al lato $\overline{cd}$ in Σ_1, indi Σ_1 attorno alla nuova posizione di $\overline{ca}$ in Σ_2, indi Σ_2 attorno alla nuova posizione di $\overline{cd}$ e così di seguito. Otteniamo così 6 porzioni di superficie di Schwarz (Σ compresa) interne al cubo, tutte fra loro congruenti che si riuniscono attorno al vertice comune c, ove hanno lo stesso piano tangente, mentre gli altri loro vertici sono tutti in punti medii delle costole del cubo [4]. Gli effettivi valori delle coor-

[4] Per riconoscere chiaramente le circostanze geometriche indicate nel testo, sarà utile al lettore un modello solido degli spigoli del cubo, nel quale mediante fili si potranno inserire i 6 quadrilateri, che limitano le porzioni considerate della superficie di Schwarz.

dinate dei vertici di queste 6 porzioni sono i seguenti:

$\Sigma)$ $(0, 0, 0)$, $(k, 0, -k)$, $(k, k, 0)$, $(0, k, -k)$

$\Sigma_1)$ $(0, 0, 0)$, $(-k, k, 0)$, $(-k, 0, -k)$, $(0, k, -k)$

$\Sigma_2)$ $(0, 0, 0)$, $(-k, k, 0)$, $(0, k, k)$, $(-k, 0, k)$

$\Sigma_3)$ $(0, 0, 0)$, $(0, -k, k)$, $(-k, -k, 0)$, $(-k, 0, k)$

$\Sigma_4)$ $(0, 0, 0)$, $(0, -k, k)$, $(k, 0, k)$, $(k, -k, 0)$

$\Sigma_5)$ $(0, 0, 0)$, $(k, 0, -k)$, $(0, -k, -k)$, $(k, -k, 0)$.

Ora, se si prende uno qualunque dei 6 quadrilateri curvi Σ_i, la sua continuazione analitica lungo un lato uscente da c è evidentemente fra le Σ stesse; la continuazione analitica di Σ_i lungo un lato uscente dal vertice opposto a c, si ottiene invece per traslazione d'ampiezza $2k$ da una delle altre 6 porzioni Σ_i. Per verificarlo basterà considerare la porzione Σ, le altre 5 trovandosi nelle medesime condizioni. Il ribaltamento di Σ attorno ad $\overline{ab}$ dà in effetto la porzione Σ_1 traslata di $2k$ nel senso dell'asse delle x e il ribaltamento di Σ attorno ad $\overline{ad}$ dà medesimamente la porzione Σ_3, traslata di $2k$ parallelamente all'asse delle y.

Così adunque l'intera regione di superficie di Schwarz interna al cubo è formata dalle 6 porzioni Σ_i; indi la superficie si riproduce periodicamente negli altri cubi, diffondendosi regolarmente per tutto lo spazio.

§. 364.

La superficie coniugata in applicabilità.

Diciamo ora brevemente della superficie coniugata in applicabilità, egualmente considerata da Schwarz, che gode anch'essa di proprietà notevoli, affatto analoghe a quelle della superficie studiata nei paragrafi precedenti [1]. In particolare vedremo che anche questa nuova superficie minima S' si divide in infiniti quadrilateri curvi congruenti, a contorno rettilineo, e in ogni porzione finita dello spazio entra soltanto un numero finito di questi quadrilateri. Consideriamo sulla superficie S primitiva due dei quadrilateri curvi adiacenti a uno spigolo A B; i quattro piani di simmetria dei due quadrilateri limitano sull'esagono formato dalla loro riunione un nuovo quadrilatero, i cui lati sono archi di geo-

[1] Le sue equazioni si ottengono dalle (8) § 358 prendendo degli integrali nei secondi membri i coefficienti dell'immaginario anzichè le parti reali.

detiche piane di eguale lunghezza e i cui angoli sono di 60° per due vertici opposti e di 90° per gli altri due. Ora sulla superficie S' coniugata in applicabilità questo quadrilatero si muta in un quadrilatero a contorno rettilineo e però: *La superficie minima* S' *contiene infiniti quadrilateri curvi a contorno rettilineo, i cui lati hanno eguale lunghezza, con due angoli di 60° in due vertici opposti e gli altri due di 90°* [1].

Partendo da questa osservazione, possiamo, affatto analogamente come nei paragrafi precedenti, determinare il gruppo di movimenti dello spazio, che riproduce la superficie S' e studiare quindi la continuazione analitica di ogni quadrilatero curvo di S'.

Sia A B C D un tale quadrilatero, gli angoli in A, C essendo di 60° e quelli in B, D di 90°, e numerando i lati A B, B C, C D, D A con 1, 2, 3, 4, indichiamo con

$$S_1 \ , \ S_2 \ , \ S_3 \ , \ S_4$$

i ribaltamenti attorno a questi rispettivi lati.

Combinando questi movimenti elementari, possiamo passare da questo quadrilatero ad ogni altro sulla superficie. Per avere le operazioni elementari del gruppo G, che lascia invariata la superficie, basterà dunque associarvi i movimenti, che lasciano invariato il quadrilatero A B C D.

Ora questi consistono soltanto nel ribaltamento attorno alla congiungente i punti medii di A C, B D, ribaltamento che indicheremo con S_5.

Se con $k\sqrt{2}$ indichiamo la lunghezza comune dei quattro spigoli, si vedrà subito che, situando convenientemente il quadrilatero A B C D rispetto agli assi, per le coordinate dei vertici si avranno le espressioni

$$A \equiv (0, 0, 0) \ , \quad B \equiv (k, 0, k) \ , \quad C \equiv (0, 0, 2k) \ , \quad D \equiv (0, k, k) \ .$$

Ne segue che le operazioni elementari del gruppo G sono rappresentate analiticamente dalle formole:

$$\begin{aligned}
&S_1)\ x' = x \quad , \quad y' = -y \quad , \quad z' = z \\
&S_2)\ x' = 2k - x \quad , \quad y' = -y \quad , \quad z' = 2k - z \\
&S_3)\ x' = -x \quad , \quad y' = 2k - y \quad , \quad z' = 2k - z \\
&S_4)\ x' = -x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \\
&S_5)\ x' = y \quad , \quad y' = x \quad , \quad z' = 2k - z \ .
\end{aligned}$$

---

[1] Per ottenere un tale quadrilatero, basta riunire due faccie di un ottaedro regolare aderenti per uno spigolo e sopprimere lo spigolo comune.

Se si osservano poi le relazioni

$$S_3\ S_2\ S_3 = S_4 \quad , \quad S_6\ S_2\ S_6 = S_1 \ ,$$

si vede che: *L'intero gruppo* G *si genera colle tre sostituzioni elementari* S_1, S_2, S_3.

Ora consideriamo le due sostituzioni di G

$$H = S_3 S_1 \quad , \quad K = S_6 S_2 \ ,$$

che hanno le espressioni analitiche

$$H)\ x' = 2k - z \ , \quad y' = -x \quad , \quad z' = y$$
$$K)\ x' = z \quad , \quad y' = -x \quad , \quad z' = 2k - y \ ;$$

le loro terze potenze sono le traslazioni

$$H^3)\ x' = 2k + x \quad , \quad y' = -2k + y \quad , \quad z' = -2k + z$$
$$K^3)\ x' = 2k + x \quad , \quad y' = -2k + y \quad , \quad z' = 2k + z \ .$$

La trasformata di H^3 per mezzo di S_2 è la nuova traslazione

$$S_2 H^3 S_2)\ x' = 2k + x \quad , \quad y' = 2k + y \quad , \quad z' = -2k + z$$

e combinando questa colle precedenti, si vede che esistono in G le due traslazioni

$$x' = x + 4k \ , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$
$$x' = x \quad , \quad y' = y + 4k \ , \quad z' = z \ ,$$

Inoltre la trasformata di K^3 per S_1 essendo

$$S_1 K^3 S_1 \ , \quad x' = 2k + x \ , \quad y' = 2k + y \ , \quad z' = 2k + z \ ,$$

risulta che anche la traslazione

$$x' = x \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z + 4k$$

appartiene a G.

Dunque il gruppo G contiene tutte le traslazioni della forma

$$x' = x + 2mk \ , \quad y' = y + 2nk \ , \quad z' = z + 2pk \ ,$$

dove m, n, p sono numeri interi tutti pari o tutti dispari, soggetti cioè alla condizione

$$m \equiv n \equiv p \pmod 2 \ .$$

Le traslazioni della forma precedente formano evidentemente un sottogruppo Γ di G, e, come ora vedremo, in G non vi sono altre trasla-

zioni [1]. Intanto verifichiamo facilmente che Γ è invariante in G, poichè le operazioni elementari S_1, S_2, S_5 di G trasformano Γ in sè medesimo. Come al §. 362, ripartiamo le operazioni di G in classi di operazioni equivalenti rispetto a Γ. Se poniamo

$$S_3 = S_2 S_1 ,$$

le tre sostituzioni S_1, S_2, S_6 coll'identità formano un gruppo quadrinomio *(Vierergruppe)*. Ponendo poi

$$U = S_4 S_1 . \quad U^{-1} = S_1 S_4 ,$$

e costruendo le 24 operazioni

$$\left\{\begin{array}{llll} 1 & , S_1 & , S_2 & , S_6 \\ U & , S_1 U & , S_2 U & , S_6 U \\ U^{-1} & , S_1 U^{-1} & , S_2 U^{-1} & , S_6 U^{-1} \\ S_5 & , S_1 S_5 & , S_2 S_5 & , S_6 S_5 \\ U S_5 & , S_1 U S_5 & , S_2 U S_5 & , S_6 U S_5 \\ U S_2 & , S_1 U S_2 & , S_2 U S_2 & , S_6 U S_2 , \end{array}\right.$$

si vedrà che esse formano un sistema completo di operazioni non equivalenti rispetto a Γ, onde risulta:

Il gruppo G *contiene come sottogruppo invariante d'indice* 24 *il gruppo di traslazioni* Γ.

In particolare ne risulta la discontinuità del gruppo G, quindi la proprietà della superficie minima S′ di diffondersi regolarmente, in modo triplamente periodico, nello spazio.

§. 365.

Variazione seconda di un pezzo di superficie minima.

Chiuderemo questi studi sulle superficie d'area minima, ritornando al problema di minimo da cui siamo partiti, per far conoscere nei loro tratti fondamentali le importanti ricerche di Schwarz sulla *variazione*

---

[1] Per traslazioni *elementari* di Γ possono prendersi evidentemente le tre seguenti:

$$\begin{array}{lll} x' = x + 4k , & y' = y , & z = z \\ x' = x , & y' = y + 4k , & z' = z \\ x' = x + 2k , & y' = y + 2k , & z' = z + 2k . \end{array}$$

seconda dell'area di un pezzo di superficie minima[1], dalle quali risulta in particolare che se una superficie ha in ogni punto nulla la somma dei raggi principali di curvatura, ogni sua porzione convenientemente ristretta gode, rispetto al contorno mantenuto fisso, della proprietà di minimo che ha servito a definirla.

Essendo S una superficie minima, riferita alle sue linee di curvatura u, v, sia

$$ds^2 = \lambda\ (du^2 + dv^2)$$

il suo elemento lineare, indi

$$ds'^2 = \frac{1}{\lambda}\ (du^2 + dv^2)$$

quello della sfera rappresentativa, e

$$r_2 = \lambda\ ,\quad r_1 = -\lambda .$$

i suoi raggi principali di curvatura.

Consideriamo una porzione di S limitata ad un contorno C e una superficie S′ infinitamente vicina a S, limitata allo stesso contorno. Sopra ogni normale di S la S′ staccherà un segmento infinitesimo che indicheremo con

$$\varepsilon\psi\ ,$$

essendo ε una costante infinitesima e ψ una funzione di u, v, che riterremo finita e continua insieme alle sue derivate parziali prime in tutta la porzione di S considerata e assoggettata soltanto ad annullarsi lungo il contorno C.

Paragoniamo l'area di S racchiusa da C con quella corrispondente di S′, tenendo conto soltanto dei termini colla prima e seconda potenza di ε. Per le coordinate x', y', z' del punto P′ di S′, corrispondente a un punto P di S, abbiamo evidentemente

$$x' = x + \varepsilon\psi X\ ,\quad y' = y + \varepsilon\psi Y\ ,\quad z' = z + \varepsilon\psi Z\ .$$

Calcolando i coefficienti E′, F′, G′ dell'elemento lineare di S′, osservando le formole

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial v}\ ,$$

---

[1] Werke Bd. I, pag. 151 ss.

otteniamo

$$\begin{cases} E' = \lambda \left\{ 1 + 2\,\frac{\varepsilon\,\psi}{\lambda} + \varepsilon^2\,\frac{\psi^2}{\lambda^2} \right\} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ F' = \varepsilon^2\,\frac{\partial \psi}{\partial u}\,\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ G' = \lambda \left\{ 1 - 2\,\frac{\varepsilon\,\psi}{\lambda} + \varepsilon^2\,\frac{\psi^2}{\lambda^2} \right\} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 , \end{cases}$$

onde

$$\sqrt{E'\,G' - F'^2} = \lambda \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\,\psi^2}{\lambda} \right\} \right] .$$

La differenza $\delta S = S' - S$ delle due aree è data quindi, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al 2.°, da

$$\delta S = \frac{\varepsilon^2}{2} \int\int \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\,\psi^2}{\lambda} \right\} du\,dv , \tag{13}$$

l'integrale doppio essendo esteso alla regione di S considerata, o, ciò che è lo stesso, alla regione sferica corrispondente. È questa la forma data da Schwarz alla variazione (seconda) dell'area di una superficie minima, dalla quale si traggono, mediante alcune considerazioni ausiliarie, le notevoli conseguenze che passiamo ad esporre.

§. 366.

Proprietà effettiva di minimo.

Consideriamo un'altra superficie minima arbitraria, che si faccia corrispondere a S per parallelismo delle normali e sia Σ la regione di questa nuova superficie corrispondente a quella considerata di S; le due regioni sono per conseguenza rappresentate sulla medesima regione della sfera, che indicheremo con σ. Se W indica la distanza del piano tangente a Σ dall'origine, W è una soluzione dell'equazione (I, pag. 174)

$$\Delta'_2\,W + 2\,W = 0 , \tag{14}$$

essendo $\Delta'_2\,W$ il parametro differenziale secondo di W calcolato per l'elemento lineare sferico.

Supponiamo ora che questa soluzione W dell'equazione (14), ossia

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{2\,W}{\lambda} = 0 , \tag{14*}$$

non si annulli in nessun punto della regione sferica σ nè al contorno, il che equivale a dire che nessun piano tangente in un punto della regione Σ passi per l'origine. Potremo porre allora la quantità sotto il segno integrale nella (13) sotto la forma:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-\frac{2\psi^2}{\lambda}=\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right),$$

talchè l'integrale (13) si scinderà in tre parti, delle quali le due ultime sono identicamente nulle, come si vede integrando per parti e ricordando che ψ al contorno si annulla. Resta adunque

$$\delta S=\frac{\varepsilon^2}{2}\int\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right]du\,dv$$

e poichè, per qualsiasi scelta della funzione ψ, l'integrale del secondo membro risulta essenzialmente positivo [1], ne segue che ogni superficie S' infinitamente vicina a S e limitata al medesimo contorno ha effettivamente un'area maggiore di S. Possiamo enunciare questo risultato sotto la forma data da Schwarz:

Una porzione di superficie a curvatura media nulla possiede certamente l'area minima fra tutte le superficie infinitamente vicine ad essa, limitate al medesimo contorno, se esiste una porzione M *di superficie della stessa specie corrispondente per parallelismo delle normali alla primitiva e tale che nessun piano tangente in punti di* M *passi per un punto fissato nello spazio.*

In particolare, se per la nuova superficie minima si prende la superficie stessa, si vede che la porzione considerata di S godrà effettivamente della proprietà di minimo se, guardata da un punto conveniente dello spazio, presenterà per contorno apparente una linea tutta esterna alla regione considerata.

Riferendoci invece alla rappresentazione sferica σ, potremo dire che la proprietà di minimo avrà sicuramente luogo se esiste una soluzione W

---

[1] L'integrale potrebbe infatti soltanto annullarsi per

$$\psi=c\,W \quad (c \text{ costante});$$

ma allora ψ non si annullerebbe al contorno.

della (14*) positiva in tutta la regione τ, incluso il contorno. Ora, osservando p. e. che della (14*) sono soluzioni particolari

$$X\ ,\quad Y\ ,\quad Z\ ,$$

vediamo in particolare che se la regione τ è tutta interna a una mezza sfera, la condizione precedente è soddisfatta e conseguentemente ogni regione di superficie a curvatura media nulla, la cui immagine sferica sia interna a una metà dalla sfera, godrà della proprietà del minimo di area.

Osserviamo in fine che della (14*) si può dare l'integrale generale, introducendo la variabile complessa

$$\tau = \alpha + i\beta$$

sulla sfera (§. 340), dopo di che essa prende la forma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{8\,W}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2} = 0\ . \tag{15}$$

Ora, essendo W la distanza del piano tangente di una superficie minima dall'origine, supponendo espresse le coordinate del punto di contatto colle formole (11) §. 341 di Weierstrass, e calcolando

$$W = X\,x + Y\,y + Z\,z\ ,$$

troveremo per l'integrale generale della (15), omettendo il fattore numerico 2:

$$W = R\left[f'(\tau) - \frac{2\,\tau_0}{\tau\,\tau_0 + 1} f(\tau)\right],$$

ove $f(\tau)$ indica una funzione arbitraria della variabile complessa τ.

Capitolo XXIV.

Le superficie pseudosferiche e la trasformazione di Bäcklund

Problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante. — Esistenza della superficie pseudosferica con due assegnate linee assintotiche di diverso sistema. — Deformazioni di una superficie pseudosferica con un'assintotica rigida. — Le congruenze pseudosferiche e la trasformazione di Bäcklund. — La trasformazione complementare. — Deformazioni infinitesime delle due falde di una congruenza pseudosferica. — Le evolute delle superficie pseudosferiche. — Il problema di Tchebychef e le reti corrispondenti sulle superficie a curvatura costante. — Movimenti delle reti sulla superficie nei quali ogni punto si trasporta a distanza geodetica costante. — Nuova interpretazione geometrica della trasformazione di Bäcklund e conseguenze. — Teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund e sue applicazioni. — Superficie complementari delle superficie pseudosferiche di rotazione e delle superficie d' Enneper. — Composizione di due trasformazioni (reali) opposte di Bäcklund. — Relazione colle superficie applicabili sulla logaritmica di rotazione e sul catenoide accorciato. — La trasformazione di Ide e le sue relazioni colle trasformazioni complementari e di Bäcklund.

§. 367.

Il problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante.

Volgendoci ora allo studio delle superficie a curvatura costante, cominciamo da alcune osservazioni generali relative al problema di Cauchy, cioè al problema di determinare una tale superficie, assegnata che ne sia una *striscia analitica* [1].

Se con $z = z(x, y)$ indichiamo l'equazione ordinaria della superficie, e adottiamo per le derivate parziali di z le consuete notazioni di Monge, per esprimere che la curvatura della superficie è la costante K abbiamo (I, pag. 144) l'equazione del secondo ordine

$$(1) \qquad rt - s^2 = K(1 + p^2 + q^2)^2 .$$

Assegnare una curva C per la quale la superficie S debba passare e lungo di essa i piani tangenti equivale a dare lungo C

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q$$

come funzioni, che si suppongono analitiche, di un parametro, p. e. dell'arco s di C.

---

[1] Cf. al § 347 la trattazione del problema analogo per le superficie minime.

I teoremi generali di Cauchy [1] assicurano che esiste una ed una sola soluzione analitica della (1), che soddisfa alle condizioni iniziali imposte, salvo il caso eccezionale in cui lungo C risulti

$$dx\ dp + dy\ dq = 0\ . \tag{2}$$

Ora questa esprime che le normali assegnate lungo C coincidono colle binormali della curva stessa, come si vede osservando che ritenendo per la curva C le solite notazioni si ha

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0$$

e questa differenziata, con riguardo alla (2), dà

$$p\xi + q\eta - \zeta = 0\ .$$

Abbiamo dunque intanto il risultato:

Esiste una ed una sola superficie analitica colla curvatura costante assegnata K, *che contiene una striscia analitica prefissata ad arbitrio. Fa eccezione il caso in cui i piani tangenti della striscia coincidono coi piani osculatori della curva.*

Esaminiamo ora il caso escluso. La teoria generale ci dice allora che il problema proposto è impossibile se insieme alla (2) non sussiste l'altra

$$dp\ dq - \mathrm{K}\,(1 + p^2 + q^2)^2\ dx\ dy = 0\ ,$$

che per la (2) stessa equivale alla

$$dq^2 + \mathrm{K}\,(1 + p^2 + q^2)^2\ dx^2 = 0\ , \tag{3}$$

ed è invece indeterminato se sussistono insieme la (2) e la (3). Se K è positiva, la (3) è manifestamente assurda, come risulta anche geometricamente dall'osservare che, per le condizioni del problema, la curva C dovrebbe risultare un'assintotica della superficie.

Quando K è negativa, poniamo

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2}\ ,$$

la (3) esprime che la torsione della curva C deve essere costante $= \frac{1}{\mathrm{R}}$, come risulta altresì dal teorema d'Enneper. Essendo infatti

$$p = -\frac{\lambda}{\nu}\ ,\quad q = -\frac{\mu}{\nu}\ ,$$

---

[1] Vedi p. e. GOURSAT. *Leçons sur les équations aux derivées partielles*, pag. 22.

differenziando, col tener conto delle formole di Frenet, si trova appunto dalla (3)

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Volendo occuparci nel presente capitolo particolarmente delle superficie pseudosferiche, cominciereno dal precisare in questo caso il grado d'indeterminazione del problema, dimostrando che si può assegnare ancora ad arbitrio una seconda linea assintotica dell'altro sistema.

§. 368.

Superficie pseudosferiche con due assegnate assintotiche.

Il teorema ora accennato fu già indicato da Lie nelle sue ricerche sulle superficie pseudosferiche e formulato poi da Bäcklund che ne ha dato altresì una dimostrazione fondata su considerazioni infinitesimali [1]. Precisando anche i segni delle torsioni, il teorema si enuncia:

Date due curve C, C′ *con torsioni costanti eguali e di segno contrario, che escono da un medesimo punto dello spazio avendovi lo stesso piano osculatore, ma tangenti distinte, esiste una superficie pseudosferica di raggio eguale al raggio comune di torsione, che contiene* C, C′ *come curve assintotiche.*

Facendo per semplicità il raggio R delle superficie pseudosferiche = 1, ricordiamo (§. 76, I, pag. 161) che l'elemento lineare della superficie pseudosferica riferita alle assintotiche α, β assume la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2, \tag{4}$$

dove la funzione $\omega(\alpha, \beta)$ soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \operatorname{sen}\omega; \tag{5}$$

e viceversa ad ogni soluzione ω della (5) corrisponde una superficie pseudosferica determinata.

Ora osserviamo che le curvature geodetiche $\frac{1}{\rho_\alpha}$, $\frac{1}{\rho_\beta}$ delle linee assintotiche α, β, le quali coincidono salvo il segno colle curvature assolute, sono date, per la forma (4) dell'elemento lineare, dalle formole:

$$\frac{1}{\rho_\alpha} = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad \frac{1}{\rho_\beta} = -\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}.$$

---

[1] *Om. ytor* ecc. pag. 19.

Se supponiamo che le assintotiche assegnate C, C' siano rispettivamente le $\beta = 0$, $\alpha = 0$, l'assegnare queste assintotiche, cioè il loro raggio di prima curvatura in funzione dell'arco, equivarrà a dare

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)_{\beta=0}$$

in funzione di σ, e

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{\alpha=0}$$

in funzione di β. Poichè inoltre conosciamo il valore iniziale ω_0 di ω per $\alpha = \beta = 0$, sarà nota ω tanto lungo la $\beta = 0$, che lungo la $\alpha = 0$. Dovendo poi ω soddisfare alla (5), vediamo che il teorema enunciato equivale, mutate le notazioni, al seguente teorema d'analisi:

L'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z \tag{6}$$

ammette una soluzione z, che per $y = 0$ si riduce ad una funzione data $\varphi(x)$ della x, e per $x = 0$ ad una funzione data $\psi(y)$ della y, supposto $\varphi(0) = \psi(0)$.

Dimostreremo questo teorema adoperando il metodo delle approssimazioni successive di Picard, raggiungendo così una generalità molto maggiore di quella che consentirebbero i metodi generali, nei quali si presuppongono funzioni analitiche. Ci basterà infatti supporre che le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, arbitrariamente date, siano finite e continue ed ammettano derivate prime $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ pure finite e continue.

§. 369.

Applicazione del metodo delle approssimazioni successive.

Dimostreremo l'esistenza della soluzione cercata z in un campo qualunque *finito* per le due variabili indipendenti x, y, nel quale le condizioni enunciate per $\varphi(x)$, $\psi(y)$ siano soddisfatte.

Prendiamo dapprima la funzione

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0),$$

che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(z_1)_{y=0} = \varphi(x), \quad (z_1)_{x=0} = \psi(y),$$

ed inoltre alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0 \ .$$

Indi costruiamo la funzione z_2 che soddisfa alle medesime condizioni iniziali ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z_1 \ ;$$

avremo

$$z_2 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_1 \, dx\, dy \ .$$

Poi da z_2 deduciamo nel medesimo modo una nuova funzione

$$z_3 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_2 \, dx\, dy \ ,$$

che soddisfa alle condizioni iniziali ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z_2 \ .$$

Così continuiamo indefinitamente, costruendo la serie infinita di funzioni

$$(\alpha) \qquad z_1 \, , \ z_2 \, , \ z_3 \ldots . \ z_n \ldots . \ ,$$

ove il termine generale

$$z_n = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_{n-1} \, dx\, dy \ ,$$

soddisfa alle condizioni iniziali ed all'equazione

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z_{n-1} \ .$$

Ora asseriamo che: *La serie*

$$(7) \qquad z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

converge in egual grado in ogni campo finito per x, y e rappresenta la solusione cercata della (6).

Per dimostrarlo cominciamo dall'osservare che essendo $|\operatorname{sen} z_1| < 1$, si ha

$$(\gamma) \qquad |z_2 - z_1| < |x\,y| \ .$$

Ora

$$z_3 - z_2 = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen}\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \cos\left(\frac{z_2 + z_1}{2}\right) dx\, dy ,$$

e poichè

$$\left| \cos\left(\frac{z_2 + z_1}{2}\right) \right| < 1$$

mentre per la (γ)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) < \frac{|x\,y|}{2} ,$$

avremo

$$(\delta) \qquad |z_3 - z_2| < \int_0^{|x|} \int_0^{|y|} |x\,y|\, dx\, dy < \frac{(x\,y)^2}{(1\ .\ 2)^2} .$$

In generale, se si suppone verificata la diseguaglianza

$$(\varepsilon) \qquad |z_n - z_{n-1}| < \frac{|x\,y|^{n-1}}{(1\ .\ 2 \ldots (n-1))^2} ,$$

si avrà

$$z_{n+1} - z_n = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen}\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{2}\right) \cos\left(\frac{z_n + z_{n-1}}{2}\right) dx\, dy$$

e però

$$|z_{n+1} - z_n| < \frac{1}{(1\ .\ 2 \ldots (n-1))^2} \int_0^{|x|} \int_0^{|y|} |x\,y|^{n-1}\, dx\, dy ,$$

cioè

$$|z_{n+1} - z_n| < \frac{|x\,y|^n}{(1\ .\ 2\ .\ 3 \ldots n)^2} ;$$

dunque la diseguaglianza (ε) sussiste in generale.

Dopo ciò la convergenza in egual grado della serie (7) risulta evidente dal confronto colla serie

$$\xi + \frac{\xi^2}{(1\ .\ 2)^2} + \frac{\xi^3}{(1\ .\ 2\ .\ 3)^2} + \ldots + \frac{\xi^n}{(1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n)^2} + \ldots$$

Ora, la somma dei primi n termini della (7) essendo z_n, possiamo dire che z_n, al crescere di n, converge in egual grado per tutti i punti del campo verso z. La funzione z, sempre finita e continua, soddisfa alle condizioni iniziali

$$(z)_{y=0} = \varphi(x) , \quad (z)_{x=0} = \psi(y) ;$$

resta a provare che soddisfa la (6). Ora ciascun termine della serie (7)

ammette la derivata seconda rapporto ad x, y e, a causa della (β), la serie delle derivate è

$$(8)\quad \operatorname{sen} z_1 + (\operatorname{sen} z_2 - \operatorname{sen} z_1) + (\operatorname{sen} z_3 - \operatorname{sen} z_2) + \ldots + (\operatorname{sen} z_n - \operatorname{sen} z_{n-1}) + \ldots$$

La somma dei primi n termini di questa è sen z_n, ed al crescere di n all'infinito converge *in egual grado* verso sen z, come z_n verso z. La (8) è dunque alla sua volta convergente in egual grado e la sua somma è sen z. Dunque la funzione z rappresentata dalla (7) ammette la derivata seconda mista e si ha

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} z\,,\ \text{c. d. d.}$$

§. 370.

Caso analitico.

Col metodo delle approssimazioni successive abbiamo riconosciuta l'esistenza di *una* superficie pseudosferica con due assegnate assintotiche in un caso di grande generalità. Però non possiamo assicurare che la soluzione trovata sia l'unica possibile del problema.

Ma poniamoci ora nel caso consueto della teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine, cioè nel caso analitico, e dimostriamo il teorema:

Se le due curve assintotiche assegnate C, C′ *sono analitiche, vi ha una ed una sola superficie pseudosferica analitica che le contiene.*

Supponiamo infatti che, essendo $\varphi(x)$, $\psi(y)$ funzioni analitiche assegnate di x, y, cioè sviluppabili in serie di Taylor per potenze di x, y rispettivamente, sia z una soluzione analitica della equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z\,,$$

che soddisfi alle condizioni iniziali

$$z = \varphi(x) \quad \text{per } y = 0$$
$$z = \psi(y) \quad \text{per } x = 0\,.$$

Queste condizioni iniziali, insieme colla $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} z$ e le equazioni che ne provengono per successiva derivazione, determinano completamente, nel punto iniziale $x = 0$, $y = 0$, i valori di tutte le derivate

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n}\,,$$

e risultano quindi determinati in modo unico tutti i coefficienti $a_{m,n}$ dello sviluppo di z

$$(\Omega) \qquad z = \sum_{m}^{0\ldots\infty} \sum_{n}^{0\ldots\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$$

per serie doppia di Taylor. Ciò dimostra intanto l'unicità della soluzione analitica z, supposta esistente. Ma viceversa, determinati i coefficienti $a_{m,n}$ nel modo ricorrente anzidetto, un teorema generale di Goursat [1] ci assicura che la serie costruita è convergente in un certo campo finito, onde risulta la verità della proposizione [2].

Nel caso speciale nostro possiamo raggiungere più semplicemente lo scopo paragonando l'equazione proposta

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z$$

con quella di Liouville

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = e^z ,$$

il cui integrale generale è notoriamente dato da

$$(\gamma) \qquad e^z = \frac{2\, X'\, Y'}{(X + Y)^2} ,$$

essendo X, Y funzioni arbitrarie di x, y rispettivamente.

Per fissare le idee si supponga che $z_0 = \varphi(0) = \psi(0)$ sia positivo; se si costruiscono i due sviluppi in serie (Ω) per la proposta e per l'equazione di Liouville, si vede subito che i coefficienti $a'_{m,n}$ per la seconda sono tutti positivi e si ha

$$|a_{m,n}| < a'_{m,n} .$$

Ma il secondo sviluppo è convergente, perchè dalla forma esplicita (γ) dell'integrale generale dell'equazione di Liouville risulta direttamente l'esistenza dell'integrale regolare cercato; dunque anche l'altro sviluppo è convergente c. d. d.

---

[1] Vedi *Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. T. I pag. 184 (§. 82).

[2] Nella prima edizione del presente libro, come pure nella traduzione tedesca, l'esistenza della soluzione analitica si conclude dal metodo stesso delle approssimazioni successive. Al rigore della dimostrazione manca la prova della convergenza in egual grado dei corrispondenti sviluppi in un campo *complesso* per x, y.

Un caso particolare merita speciale attenzione. Supponiamo che le funzioni assegnate $\varphi(x)$, $\psi(y)$ si riducano alla medesima costante a. Allora si vede facilmente che sono nulle, per $x = 0$, $y = 0$, tutte le derivate

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

quando $m \neq n$, e per ciò z è funzione del prodotto xy. Posto

$$\tau = xy \ , \quad z = f(\tau) \ ,$$

abbiamo per $f(\tau)$ l'equazione differenziale ordinaria del 2.° ordine

$$\tau f'' + f' = \operatorname{sen} f \ ,$$

che possiede dunque uno ed un solo integrale regolare nell'intorno di $\tau = 0$, che nel punto si riduce ad un valore prefissato f_0. Quale è il significato geometrico di questa soluzione? Se si ricordano le osservazioni al §. 368, si vede subito che le due assintotiche assegnate C, C′ si riducono in questo caso a due rette che s'incrociano, onde risulta: *Due rette che si tagliano individuano una ed una sola superficie pseudosferica analitica che le contiene.* Queste singolari superficie pseudosferiche dipendono da una costante arbitraria, l'angolo delle due rette.

§. 371.

Deformazioni con un'assintotica rigida.

Applichiamo il teorema generale dimostrato nei §§. precedenti a verificare per le superficie pseudosferiche la proprietà generale indicata alla fine del §. 110 (I, pag. 243), secondo la quale la superficie, supposta flessibile ed inestendibile, può deformarsi ancora in infiniti modi mantenendo rigida una linea assintotica.

Sulla superficie pseudosferica S, individuata dalle due assintotiche C, C′ e colla forma (4) dell'elemento lineare, consideriamo un sistema di linee geodetiche parallele (nel senso non euclideo) spiccate dai punti della assintotica C, la cui equazione sia $\beta = 0$. Applicando le formole (c) §. 182 (I, pag. 406) ed indicando con θ l'angolo d'inclinazione di queste geodetiche sulla $\beta = 0$, avremo lungo questa curva C la formola

$$\frac{\partial(\omega - \theta)}{\partial x} = \operatorname{sen} \theta \ ,$$

ossia

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = -\frac{1}{\rho_0} - \operatorname{sen}\theta, \tag{10}$$

essendo $\frac{1}{\rho_0}$ la curvatura geodetica (od assoluta) della linea C. Viceversa, se θ soddisfa la (10), le geodetiche uscenti dai punti della $\beta = 0$, nella direzione assegnata da θ, saranno parallele.

Ciò posto, tengasi fissa la C e si faccia variare C′ ad arbitrio: la funzione di α data da $\frac{1}{\rho_0}$ rimarrà sempre la stessa, e per ciò si soddisferà alla (10) conservando a θ il medesimo valore. Dunque per due diverse configurazioni S, S′ della superficie pseudosferica la stessa funzione θ definirà per l'una e per l'altra superficie un sistema di geodetiche parallele. Applicando la S sulla S′ in guisa da sovrapporre i due sistemi di geodetiche parallele considerati ed un punto della $\beta = 0$ sopra S al corrispondente della $\beta = 0$ sopra S′, si vede subito che l'intera assintotica $\beta = 0$ dell'una si sovrapporrà alla $\beta = 0$ dell'altra. Ne concludiamo: *Le deformazioni di una superficie pseudosferica* S, *per le quali resta rigida un'assintotica* C, *si ottengono semplicemente quando delle due assintotiche* C, C′ *che individuano la superficie, si tenga fissa la* C *e si faccia variare arbitrariamente di forma la seconda* C′. Conformemente alla teoria generale, vediamo che queste deformazioni dipendono da una funzione arbitraria, dalla flessione di C′ alla quale è da aggiungersi, come costante arbitraria, l'angolo ω_0 sotto cui C, C′ s'incontrano.

Osserviamo ancora che, tenendo fisso ω_0, non solo $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$ ma ω stesso non varierà lungo C; e siccome i raggi principali di curvatura della superficie sono

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\ ,\quad -\cot\frac{\omega}{2}\ ,$$

vediamo che: *Una superficie pseudosferica può deformarsi ancora in infiniti modi restando rigida un'assintotica e lungo di essa conservando invariati i raggi principali di curvatura.*

Ritornando alle deformazioni generali che lasciano rigida un'assintotica, vediamo che una tale deformazione è definita se si assegna sulla superficie S una curva Γ, uscente da un punto di C, che dopo la deformazione debba trasformarsi in assintotica Γ′. Conosceremo infatti di Γ′ la flessione, che eguaglia la curvatura geodetica di Γ e la torsione

come $= -1$. È chiaro inversamente che questa curva Γ può darsi ad arbitrio. In particolare se la Γ è un circolo geodetico dopo la deformazione che la rende assintotica diventerà un'elica circolare; più in particolare ancora se Γ è geodetica, dopo la deformazione si rettifica.

In fine osserviamo la facile conseguenza delle considerazioni precedenti: *Tracciate ad arbitrio sulla superficie pseudosferica due curve uscenti da un medesimo punto, esiste una deformazione della superficie che le rende ambedue assintotiche.*

§. 372.

Trasformazione di Bäcklund.

I teoremi sviluppati nei §§. precedenti assicurano l'esistenza di superficie pseudosferiche corrispondenti a date condizioni ai limiti; ma per trovare le effettive forme di queste superficie nello spazio non ci danno altro modo che quello di sviluppi in serie. I progressi più importanti nella teoria delle superficie a curvatura costante in generale, e di quelle pseudosferiche in particolare, sono stati ottenuti mediante speciali metodi di trasformazione che permettono di dedurre da una superficie nota a curvatura costante infinite nuove superficie della medesima natura, e ciò con operazioni analitiche che richieggono al massimo quadrature e, sotto certe condizioni che appariranno nel seguito della nostra trattazione, si riducono a semplici operazioni algebriche e di derivazione.

La prima e più semplice trasformazione delle superficie pseudosferiche che si conobbe deriva dal teorema già segnalato al §. 136 (I, pag. 294), che enunciamo ora sotto la forma seguente:

Sopra una superficie pseudosferica S *di raggio* R *si tracci un sistema* ∞^1 *di linee geodetiche parallele e sulle loro tangenti, a partire dal punto di contatto e nel senso stesso del parallelismo, si porti un segmento costante* $=$ R; *il luogo degli estremi di questi segmenti è una nuova superficie pseudosferica* S′ *del medesimo raggio* R.

La superficie pseudosferica S′ è dunque la *complementare* della S rispetto ad un sistema di geodetiche parallele; per questa ragione diremo questa la *trasformazione complementare.*

Ogni superficie pseudosferica ha ∞^1 trasformate complementari, che sono le traiettorie ortogonali dei circoli di raggio R tracciati nei piani tangenti di S, col centro nel punto di contatto (§. 272, pag. 146) Per poter applicare alla superficie pseudosferica S la trasformazione complementare basta conoscere sopra la S le linee geodetiche.

La trasformazione complementare fu notevolmente generalizzata da Bäcklund per mezzo di una trasformazione che porta il suo nome. L'esistenza e le proprietà di questa trasformazione furono già stabilite in varii luoghi del presente trattato, in particolare al Cap. X §. 150 (I, pag. 323) dove sono state definite le congruenze pseudosferiche e stabilite le loro proprietà fondamentali ed al Cap. XVI §. 250 (pag. 76), ove è dimostrata l'esistenza di ∞^2 congruenze pseudosferiche di cui sia assegnata la prima falda focale S. Riassumiamo i risultati quivi ottenuti col teorema: *Data una superficie pseudosferica di raggio* R *e scelto un angolo costante arbitrario* ϑ, *esistono* ∞^1 *congruenze pseudosferiche di cui* S *è una falda focale, la distanza focale sopra ogni raggio essendo* $= R\cos\vartheta$ *e quella dei punti limiti* $= R$. *La seconda falda* S′ *è una nuova superficie pseudosferica di raggio* R; *sopra* S, S′ *si corrispondono le linee di curvatura e le assintotiche, e gli archi corrispondenti di assintotiche sono eguali.*

Diremo che si passa dalla superficie pseudosferica S alla S′ mediante una *trasformazione di Bäcklund*. In particolare quando $\sigma = 0$ la trasformazione di Bäcklund diventa una trasformazione complementare.

Così ogni superficie pseudosferica S ammette ∞^2 trasformate di Bäcklund; per individuare una di queste trasformate basta assegnare un raggio della congruenza pseudosferica (una tangente di S) e il secondo piano focale per questo raggio.

§. 373.

Le formole della trasformazione di Bäcklund.

Riferendo la superficie pseudosferica S alle sue linee di curvatura u, v, andiamo ora a stabilire le formole effettive per la trasformazione di Bäcklund. Potremmo dedurle dalle formole più generali stabilite al §. 250; qui preferiamo stabilirle direttamente appoggiandoci sulle proprietà già note della trasformazione.

Indicando con R il raggio della superficie pseudosferica, per il ds^2 riferito alle linee di curvatura abbiamo (Cf. §. 330, pag. 290)

$$ds^2 = R^2(\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2), \tag{11}$$

i raggi principali di curvatura essendo dati da

$$r_1 = -R\operatorname{tg}\theta\ , \quad r_2 = R\cot\theta\,, \tag{12}$$

e $\theta(u, v)$ soddisfacendo all'equazione caratteristica a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta. \tag{13}$$

Osserviamo ancora la forma dell'elemento lineare sferico rappresentativo

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2. \tag{14}$$

Colle solite notazioni della teoria generale delle superficie (Cf. §. 254), abbiamo le formole riassunte nella tabella seguente:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = R\cos\theta\, X_1, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\theta\, X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_1, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta\, X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = R\operatorname{sen}\theta X_2, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_2, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_1 + \cos\theta\, X_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta\, X_2, \end{cases}$$

alla quale dobbiamo ricorrere nei nostri calcoli.

Sia S' una trasformata di Bäcklund della S; il segmento M M' che unisce due punti corrispondenti ha la lunghezza costante

$$\overline{MM'} = R\cos\sigma,$$

essendo $\frac{\pi}{2} - \sigma$ l'angolo dei due piani focali, cioè l'angolo delle due normali nei punti corrispondenti M, M'. Prendiamo come incognita l'angolo φ d'inclinazione del segmento MM' sulla linea di curvatura v, cioè sulla direzione (X_1, Y_1, Z_1); i coseni di direzione del segmento M M' sono dati da

$$\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2, \ \cos\varphi\, Y_1 + \operatorname{sen}\varphi\, Y_2, \ \cos\varphi\, Z_1 + \operatorname{sen}\varphi\, Z_2,$$

e quindi le coordinate x', y', z' di M' da

$$x' = x + R\cos\sigma\,(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2), \tag{15}$$

colle analoghe per y', z'.

Dobbiamo ora determinare la funzione $\varphi(u, v)$ in guisa che la congruenza generata dai raggi MM' sia pseudosferica, e la superficie S' luogo di M' sia la seconda falda della superficie focale. Per questo dob-

biamo semplicemente esprimere che la normale in M′ alla S′ è normale al raggio M M′ e forma colla normale in M alla S l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Indicando con X'_3, Y'_3, Z'_3 i coseni di direzione della normale alla S′, vediamo che, cangiando se occorre σ in $-\sigma$, possiamo porre

$$X'_3 = \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2) \cdots \operatorname{sen}\sigma\, X_3 \tag{16}$$

con formole analoghe per Y′, Z′. Esprimiamo ora tutte le condizioni del problema scrivendo le due condizioni

$$\sum X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum X'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0 \, . \tag{17}$$

Ma dalle (15), derivando con riguardo alle (A), deduciamo

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left\{ R\cos\theta - R\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right\} X_1 + R\cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) . X_2 - \\ \qquad\qquad - R\cos\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, X_3 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -R\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) X_1 + \left\{ R\operatorname{sen}\theta + R\cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\} X_2 + \\ \qquad\qquad + R\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, X_3 \, , \end{cases}$$

e le (17) calcolate ci danno per l'incognita φ le due equazioni simultanee:

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \, ; \end{cases}$$

queste sono le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare φ.

Se si forma la condizione d'integrabilità per le due equazioni simultanee (B) (che possiamo riguardare come un'equazione ai differenziali totali per φ), si trova subito che essa si riduce appunto alla (13) che è soddisfatta da θ. Il sistema (B) è dunque illimitatamente integrabile, come del resto sapevamo già dal §. 250; nella soluzione più generale φ entra una costante arbitraria, che risulta fissata dando il valore iniziale φ_0 di φ in un punto M_0 di S.

§. 374.

Verifiche delle proprietà della trasformazione di Bäcklund.

Andiamo ora a verificare, mediante le formole ottenute (B), le altre proprietà già note della trasformazione.

Le (17), avendo riguardo alle (B), diventano

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \mathrm{R}\cos\varphi \Big\{ (\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,\mathrm{X}_1 + \\ \qquad (\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,\mathrm{X}_2 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{X}_3 \Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi \Big\{ (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,\mathrm{X}_1 + \\ \qquad (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,\mathrm{X}_2 + \cos\sigma\cos\theta\,\mathrm{X}_3 \Big\} \end{cases}$$

e per l'elemento lineare ds' di S' danno

$$(20)\qquad ds'^2 = \mathrm{R}^2(\cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2)\,.$$

Ora, se deriviamo la prima delle (B) rispetto ad u, la seconda rispetto a v, e sottragghiamo osservando le (B) stesse, troviamo che φ soddisfa alla sua volta, come θ, l'equazione (13)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

onde risulta confermato che la superficie S' è pseudosferica di raggio R.

D'altronde, derivando le (16) e confrontando colle (19), si deducono le formole:

$$(19^*)\qquad \frac{\partial \mathrm{X}'_3}{\partial u} = \frac{1}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{\partial x'}{\partial u}\,,\qquad \frac{\partial \mathrm{X}'_3}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\cot\varphi\cdot\frac{\partial x'}{\partial v}\,.$$

Queste ci dicono che anche sulla S' le linee u, v sono linee di curvatura, e i raggi principali di curvatura di S' sono

$$r'_1 = -\,\mathrm{R}\operatorname{tg}\varphi\,,\qquad r'_2 = \mathrm{R}\cot\varphi\,.$$

L'angolo φ ha dunque per la superficie pseudosferica S' lo stesso significato che l'angolo θ per la primitiva S; esso eguaglia in ogni punto la metà dell'angolo delle assintotiche.

Le assintotiche sulla S′ hanno come sulla S le equazioni

$$u - v = \text{costante} \quad , \quad u + v = \text{costante} \ ,$$

cioè le assintotiche si corrispondono sopra S, S′. Inoltre dalle (18), (20) risulta subito che gli archi corrispondenti di assintotica sono eguali.

Così risultano direttamente confermate tutte le proprietà delle congruenze pseudosferiche già osservate al Cap. X (I, pag. 323). Ed ora aggiungiamo le osservazioni seguenti. Se manteniamo all'angolo σ un valore fisso, l'integrazione delle (B) fa derivare da S una semplice infinità di superficie pseudosferiche trasformate S′; le diremo le trasformate di S mediante la trasformazione di Bäcklund B_σ. Prendendo per incognita nelle (B) in luogo di φ la funzione

$$\Lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \ ,$$

queste assumono la forma di un'equazione ai differenziali totali per Λ del tipo di Riccati. Basterà dunque conoscerne una soluzione particolare per ottenere tutte le altre con quadrature; così: *se di una superficie pseudosferica* S *si conosce una trasformata di Bäcklund per la trasformazione* B_σ, *tutte le altre si avranno con quadrature.*

La nota proprietà delle equazioni del tipo di Riccati, che il rapporto anarmonico di quattro soluzioni particolari è una costante, si traduce poi qui geometricamente nel teorema:

Quattro superficie derivate da una pseudosferica S *per trasformazione di Bäcklund* B_σ *tagliano tutti i circoli di raggio* $R \cos\sigma$ *descritti nei piani tangenti di* S, *col centro nel punto di contatto, in un gruppo di quattro punti di rapporto anarmonico costante.*

Si noti ancora che questi circoli sono traiettorie isogonali, sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$, delle superficie S′ trasformate. Volendo applicare ad una delle superficie S′ derivate la medesima trasformazione di Bäcklund B_σ, è da osservarsi che conosciamo già una delle trasformate della S′, cioè la primitiva S; con quadrature si troveranno dunque le altre.

A questo punto vediamo già che l'applicazione successiva ed illimitata della medesima trasformazione B_σ alle nuove superficie via via ottenute si potrà eseguire con sole quadrature. Ma fra breve, per mezzo

del teorema di permutabilità, potremo notevolmente perfezionare il metodo di trasformazione, come già è stato indicato al §. 251 per un caso più generale.

§. 375.

Caso della trasformazione complementare.

Si è già osservato che per $\sigma = 0$ la trasformazione di Bäcklund diventa la trasformazione complementare B_0. Allora la S ed una sua trasformata S′ sono le due falde dell'evoluta di una superficie W, i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione

$$r_1 - r_2 = R \ .$$

Le formole del §. 373 si semplificano in questo caso nel modo seguente. Le (B) diventano

$$(B^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \ , \end{cases}$$

formole che furono date la prima volta da Darboux come espressione analitica della trasformazione complementare.

Le linee inviluppate sopra S dai raggi della congruenza formano un sistema di geodetiche parallele ed hanno per equazione differenziale

$$(21) \qquad \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, du - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, dv = 0 \ ;$$

l'equazione differenziale delle loro traiettorie ortogonali, cioè degli oricicli paralleli, è quindi

$$(22) \qquad \cos\theta \cos\varphi \, du + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv = 0 \ .$$

In virtù delle (B*) il primo membro di questa è un differenziale esatto; dunque colla quadratura

$$(23) \qquad \psi = \int (\cos\theta \cos\varphi \, du + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv)$$

si avrà l'equazione in termini finiti

$$\psi = \text{costante}$$

dei detti oricicli.

Essendo poi

$$\Delta_1 \psi = 1 \qquad \Delta_2 \psi = -1 \ ,$$

i parametri differenziali essendo calcolati rispetto all'elemento lineare (18) di S, risulta dal §. 47 (I, pag. 100) che sarà e^{ψ} un fattore integrante del primo membro della (21), come del resto facilmente si verifica. Ora se si pone

$$\tau = \int e^{\psi} (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, du - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, dv) \ , \tag{24}$$

dalle (23), (24) risulta subito

$$\cos^2\theta \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, dv^2 = d\varphi^2 + e^{-2\psi} \, d\tau^2 ,$$

formola che mostra l'elemento lineare di S ridotto alla forma geodetica della pseudosfera.

Sulla superficie complementare S' l'equazione differenziale delle geodetiche parallele inviluppate dai raggi della congruenza è invece:

$$\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, du - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv = 0$$

ed ammette $e^{-\psi}$ come fattore integrante. Ponendo

$$\tau_1 = \int e^{-\psi} (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, du - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv) \ ,$$

ne segue

$$\cos^2\varphi \, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi \, dv^2 = d\psi^2 + e^{2\psi} \, d\tau_1^2 ,$$

formola del tutto analoga alla precedente.

Osserviamo in fine che se con ξ, η, ζ si indicano i coseni di direzione del raggio della congruenza pseudosferica, dati da

$$\xi = \cos\varphi \, X_1 + \operatorname{sen}\varphi \, X_2 \quad \text{ecc.} \ ,$$

si ha

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi \, X_1 + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, X_2 - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, X_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, X_1 - \operatorname{sen}\theta \cos^2\varphi \, X_2 + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, X_3 \ ,$$

e quindi

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, du - \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, dv)^2 + (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \, du - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv)^2 ,$$

cioè

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = e^{-2\psi} \, d\tau^2 + e^{2\psi} \, d\tau_1^2 \ . \tag{25}$$

Questa formola ci dà l'elemento lineare sferico rappresentativo della congruenza pseudosferica normale riferito alle immagini r, r_1 delle sviluppabili; queste linee dividono la sfera in rettangoli infinitesimi d'area costante. Viceversa tutti i sistemi ortogonali sferici di questa specie si ottengono nel modo superiore (Cf. la nota al §. 150, I, pag. 324).

§. 376.

Le deformazioni infinitesime delle due falde di una congruenza pseudosferica.

Una congruenza pseudosferica essendo una congruenza W, ciascuna falda della superficie focale è suscettibile di una deformazione infinitesima in cui ciascun punto si muove nella direzione parallela alla normale nel punto corrispondente dell'altra falda (§§. 242, 243). Ne risulta:

Ogni superficie pseudosferica è suscettibile di ∞^1 deformazioni infinitesime, nelle quali la direzione dello spostamento di ciascun punto è inclinata di un angolo costante σ prefissato sulla superficie.

Per fissare perfettamente la deformazione basterà assegnare per un punto della superficie la direzione dello spostamento. Facilmente poi si vedrebbe che le uniche deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche in cui le direzioni degli spostamenti dei punti sono inclinate sulla superficie di un angolo costante si ottengono nel modo descritto dalle congruenze pseudosferiche.

Utilizzando le formole dei §§. precedenti, determiniamo ora l'ampiezza ρ dello spostamento che subisce ciascun punto della superficie pseudosferica S parallelamente alla normale (X'_3, Y'_3, Z'_3) della trasformata S' di Bäcklund nella deformazione infinitesima considerata. Le condizioni

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial v} = 0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial u} = 0$$

danno concordemente, a causa delle (19) (19*):

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} = - \dfrac{\cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} = - \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\varphi}{\cos\sigma} \end{cases}.$$

La condizione d'integrabilità è identicamente soddisfatta a causa delle (B), e si ha di qui ρ con una quadratura.

Calcolando similmente l'ampiezza dello spostamento nella deformazione infinitesima che ricevono i punti della seconda falda S' parallelamente alle normali della S, si trova subito che essa è l'inversa della primitiva, cioè $= \frac{1}{\rho}$.

Un'altra notevole proprietà di queste deformazioni infinitesime si rileva calcolando, secondo la formola (2*) §. 224 (pag. 5):

$$\Phi = \frac{1}{2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \left\{ \sum \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{\partial (\rho X'_3)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right\},$$

la funzione caratteristica Φ della deformazione. Si trova infatti dalle formole precedenti $\Phi = -\rho$, cioè: *Nelle deformazioni infinitesime considerate delle superficie pseudosferiche l'ampiezza dello spostamento eguaglia la componente secondo la normale della rotazione subita dall'elemento superficiale.*

§. 377.

Evoluta di una superficie pseudosferica.

Applichiamo le ricerche fatte fin qui sulle superficie pseudosferiche alla considerazione delle loro evolute che, secondo il teorema di Weingarten, costituiscono la classe completa delle superficie non rigate applicabili sul catenoide (I, pag. 293).

Considerando la superficie pseudosferica S definita dalle formole al §. 373, ed indicando con x_1, y_1, z_1 le coordinate del primo centro di curvatura di S, abbiamo

$$x_1 = x - r_1 X_3 = x + R \operatorname{tg}\theta X_3 ,$$

da cui derivando otteniamo per le formole (A) pag. 391

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{R}{\cos\theta} X + \dfrac{R}{\cos^2\theta} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_2 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{R}{\cos^2\theta} \dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_3 , \end{cases}$$

e quindi per l'elemento lineare ds_1 della prima falda S_1 dell'evoluta

abbiamo

$$ds_1^2 = R^2 \left\{ \frac{d\theta^2}{\cos^4\theta} + \frac{du^2}{\cos^2\theta} \right\},$$

e ponendo

$$R \operatorname{tg} \theta = \rho ,$$

si ha

$$ds_1^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + R^2)\, du^2 ,$$

che è la forma tipica dell'elemento lineare del catenoide.

Ora ricordiamo che alle assintotiche della evolvente pseudosferica S corrispondono ancora sulla evoluta S_1 le assintotiche (I, pag. 282), come si potrebbe anche subito constatare colle formole precedenti. Ciò posto, prendiamo un'assintotica della S, p. e. la $u = v$, e consideriamo le normali alla S lungo di essa. Queste formano una superficie rigata Σ luogo delle binormali alla curva di torsione costante $u = v$; la Σ tocca la S_1 lungo l'assintotica $u = v$, che è dunque assintotica anche sopra Σ. D'altronde la Σ è applicabile sopra S_1, e vogliamo ora constatare questa notevole circostanza che: *nell' applicabilità di* Σ *sopra* S_1 *i punti dell' assintotica comune* $u = v$ *corrispondono a sè stessi*. Indicando infatti coll'apice zero le quantità prese sopra S lungo la $u = v$, per le coordinate ξ, η, ζ di un punto qualunque di Σ abbiamo

$$\xi = x^{(0)} + t\, X_3^{(0)} , \quad \eta = y^{(0)} + t\, Y_3^{(0)} , \quad \zeta = z^{(0)} + t\, Z_3^{(0)} ,$$

essendo t la lunghezza di generatrice che intercede fra $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ e (ξ, η, ζ). Prendendo a variabili indipendenti sopra Σ la u e la t, abbiamo

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = (R\cos\theta + t \operatorname{sen}\theta)\, X_1^{(0)} + (R \operatorname{sen}\theta - t\cos\theta)\, X_2^{(0)}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = X_3^{(0)},$$

e quindi

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dt^2 + (R^2 + t^2)\, du^2 ,$$

che si identifica con (28) ponendo

$$t = \rho = R \operatorname{tang} \theta_0 ,$$

onde risulta dimostrata la nostra asserzione.

§. 378.

Le quattro falde della evoluta nella trasformazione di Bäcklund.

Siano ora due superficie pseudosferiche S, S′ trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Bäcklund ed essendo M, M′ due punti cor-

rispondenti di S, S', consideriamo sulle due rispettive normali in M, M' le coppie corrispondenti dei relativi centri principali di curvatura che indichiamo con

$$(M_1, M_2), \quad (M'_1, M'_2),$$

I luoghi di questi quattro punti sono le quattro falde delle evolute di S, S', che indicheremo con

$$S_1, \quad S_2; \quad S'_1, \quad S'_2.$$

Darboux ha fatto l'osservazione interessante [1] che le congiungenti $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$ toccano rispettivamente in questi punti le falde $S_1 S'_1$; S_2, S'_2, cioè le dette rette generano due congruenze W che hanno rispettivamente le coppie (S_1, S'_1) $(S_2 S'_2)$ per falde focali.

Per dimostrarlo si indichino con $x_1 y_1 z_1$ le coordinate di M_1, con x'_1, y'_1, z'_1 quelle di M'_1; avremo

$$x_1 = x + R\, tg\, \theta\, X_3$$
$$x'_1 = x' + R\, tg\, \varphi\, X'_3$$

ossia per le (15), (16)

$$x'_1 = x + \frac{R \cos \sigma}{\cos \varphi} X_1 - R \operatorname{sen} \sigma \operatorname{tg} \varphi\, X_3$$

e quindi

$$x'_1 - x_1 = \frac{R}{\cos\theta \cos\varphi} \left\{ \cos\sigma \cos\theta\, X_1 - (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\varphi)\, X_3 \right\}.$$

Ora, siccome la normale in M_1 alla S_1 ha per coseni di direzione X_2, Y_2, Z_2 e si ha

$$\sum X_2 (x'_1 - x_1) = 0,$$

si vede intanto che la $M_1 M'_1$ tocca in M_1 la S_1. Similmente i coseni di direzione della normale in M'_1 alla S_1 sono

$$X'_2, \quad Y'_2, \quad Z'_2,$$

dove per le (19)

$$X'_2 = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\varphi)\, X_1 +$$
$$+ (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\varphi)\, X_2 + \cos\sigma \cos\theta\, X_3,$$

onde si deduce anche

$$\sum X'_2 (x'_1 - x_1) = 0.$$

dunque la $M_1 M'_1$ tocca inoltre in M'_1 la S'_1.

---

[1] *Leçons*, t. III, pag. 438.

Come si vede, i quattro lati del quadrilatero $M_1 M_2 M'_2 M'_1$ generano quattro congruenze W le cui falde focali sono i luoghi dei vertici. È questo dunque un caso particolare del teorema dimostrato al § 248, presentandosi qui di più la notevole circostanza che le due congruenze W generate dai lati opposti $M_1 M_2$, $M'_1 M'_2$ sono congruenze normali.

§. 379.

Il problema di Tchebychef.

Due superficie pseudosferiche S, S', trasformate di Bäcklund l'una dell'altra, avendo la medesima curvatura costante, sono certamente applicabili l'una sull'altra in ∞^3 modi diversi. Ora fra queste ∞^3 applicabilità di S sopra S' ve ne ha una notevole, che si può costruire geometricamente quando sopra una delle due superficie siano note le linee geodetiche. Per stabilire questo risultato siamo condotti a riguardare la trasformazione di Bäcklund sotto un nuovo aspetto, che si collega al così detto problema di *Tchebychef* [1].

Data una superficie qualunque S esistono, come ora dimostreremo, infiniti sistemi doppî di curve (α, β) che danno all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta \, . \, d\alpha \, d\beta + d\beta^2 . \tag{29}$$

Ogni quadrilatero curvilineo racchiuso da quattro curve coordinate

$$\alpha = \alpha_0 , \quad \alpha = \alpha_1 ; \quad \beta = \beta_0 , \quad \beta = \beta_1$$

ha evidentemente i lati opposti di eguale lunghezza e diremo anche per ciò con Voss [2] che le linee (α, β) formano su S un sistema di curve equidistanti. Se si fanno crescere α e β per incrementi infinitesimi costanti, la superficie è ricoperta dalla rete (α, β) a maglie parallelogrammiche, che diciamo una *rete di Tchebychef*. Immaginiamo lungo le linee (α, β) disteso un doppio sistema di fili, che pensiamo perfettamente flessibili ed inestendibili: questa rete (o stoffa) potrà deformarsi restando fissi sui fili i loro punti d'intersezione, ma variando ad arbitrio l'angolo sotto cui si incontrano. Così p. e. potremo trasformare la rete in un reticolo

---

[1] Vedi DARBOUX t. III, pag. 183 e 206.

[2] *Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen* (Catalog der mathem. Ausstellung zu Nürnberg, 1892).

piano cartesiano. Il problema di Tchebychef di costruire sopra una superficie data S i sistemi di linee (α, β) che danno all'elemento lineare la forma (29) può dunque dirsi il problema di *rivestire* la data superficie.

La risoluzione del problema di Tchebychef dipende da un'equazione a derivate parziali del 2.° ordine, che Darboux forma (l. c.) nel modo semplice seguente. In primo luogo introducendo a linee coordinate u, v, in luogo delle α, β, le loro curve *diagonali*

$$\alpha + \beta = \text{costante} \ , \quad \alpha - \beta = \text{costante} \ ,$$

e precisamente ponendo

$$\alpha + \beta = u \ , \quad \alpha - \beta = v \ ,$$

la (29) diventa

$$ds^2 = \cos^2\theta \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, dv^2 \ , \tag{30}$$

e viceversa da questa forma del ds^2 si ritorna alla (29). Ora prendendo i parametri differenziali rispetto al ds^2 di S, dato sotto qualunque forma

$$ds^2 = a_{11} \, dx_1^2 + 2 \, a_{12} \, dx_1 \, dx_2 + a_{22} \, dx_2^2 \ ,$$

si ha dalla (30)

$$\Delta_1 u = \frac{1}{\cos^2\theta} \ , \quad \Delta_2 u = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \cos^3\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u} \ , \quad \nabla(u, \Delta_1 u) = \frac{2 \operatorname{sen}\theta}{\cos^5\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u} \ ,$$

da cui:

$$2 \, \Delta_2 u \, (\Delta_1 u - 1) = \nabla(u, \Delta_1 u) \ . \tag{31}$$

Per la funzione incognita u di x_1, x_2 è questa l'annunciata equazione a derivate parziali del 2.° ordine. Viceversa se u soddisfa a questa equazione, prendendo a linee coordinate sulla S le linee $u =$ costante e le loro traiettorie ortogonali $v =$ costante, si potrà dare all'elemento lineare, disponendo del parametro v, la forma (30).

E infatti, supposto

$$ds^2 = \mathrm{E} \, du^2 + \mathrm{G} \, dv^2 \ ,$$

la (31) ci dà

$$\frac{1}{\mathrm{G}} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} + \frac{1}{1 - \mathrm{E}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = 0 \ ,$$

e quindi integrando

$$\mathrm{G} = (1 - \mathrm{E}) \, \mathrm{V}^2 \ ,$$

indicando con V una funzione della sola v. Cangiando il parametro v, si può fare $\mathrm{V} = 1$ e si ha quindi la (30).

Venendo ora al problema di Tchebychef pel caso particolare delle superficie a curvatura costante, vediamo che nel caso della curvatura nulla il problema è immediatamente risoluto (Cf. §. 219, I, pag. 507). Disegnate infatti nel piano due curve arbitrarie C, F, uscenti da un punto P, si otterrà la più generale rete di Tchebychef, costituita da curve congruenti per traslazione rispettivamente a C e F.

Per una superficie pseudosferica ogni rete di Tchebychef è una rete di *assintotiche virtuali* della superficie, cioè ogni tale rete, per una deformazione ordinaria perfettamente determinata della superficie, diventa la rete delle assintotiche.

Per la sfera ogni rete di Tchebychef è costituita dalle immagini delle assintotiche di una superficie pseudosferica. (Cf. §. 76, I, pag. 160).

In ciò che precede ci siamo riferiti alle forme delle superficie pseudosferiche ed alla loro immagine sferica nell'ordinario spazio euclideo. Ma se consideriamo più in generale le superficie a curvatura costante K in uno spazio di curvatura costante K_0, possiamo enunciare sotto forma unica il teorema (Cf. §. 218, I, pag. 505): *Una rete di Tchebychef sopra una superficie a curvatura costante* K, *immaginando la superficie immersa in uno spazio di curvatura costante* $K_0 > K$, *è una rete di assintotiche virtuali.*

In fine, riguardo al problema generale di Tchebychef, osserviamo ancora che si può riguardare come intuitivo che per individuare sopra una superficie data una tale rete, è lecito assegnare ad arbitrio due curve su S uscenti da un medesimo punto, sulle quali debbano distendersi due fili prefissati della rete. Per le superficie a curvatura costante, positiva o negativa, noi abbiamo dimostrato in tutto rigore la proprietà nei §§. 368, 369; per il piano la cosa è immediatamente evidente (Cf. sopra).

§. 380.

Scorrimenti delle reti di Tchebychef sulla sfera.

Premesse queste osservazioni sul problema di Tchebychef, riprendiamo la considerazione di due superficie pseudosferiche S, S′ derivate l'una dall'altra per trasformazione di Bäcklund B_σ. Le immagini delle loro assintotiche danno sulla sfera due reti di Tchebychef, applicabili l'una sull'altra, in guisa che due punti corrispondenti delle due reti si trovano a distanza (sferica) geodetica costante $= \frac{\pi}{2} - \sigma$. Vediamo

dunque che: *sopra una superficie a curvatura costante positiva una rete di Tchebychef si può trasportare per flessione sulla superficie in guisa che tutti i punti si spostino sulla superficie di un tratto geodetico costante.* In generale diremo *scorrimento* di una rete di Tchebychef uno spostamento per flessione della rete sulla sfera (o su qualunque superficie applicabile) quando sia dotato di quella proprietà.

Andiamo ora a dimostrare il teorema inverso: *Se due reti di Tchebychef sulla sfera sono applicabili l'una sull'altra e i loro punti corrispondenti hanno distanza sferica costante, esse sono le immagini sferiche delle assintotiche di due superficie pseudosferiche* S, S′, *trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Bäcklund.*

In altre parole noi veniamo a dimostrare così che: *se due superficie pseudosferiche* S, S′ *d'egual raggio si corrispondono punto a punto in guisa che siano soddisfatte le condizioni seguenti:* 1.° *le assintotiche si corrispondano ad archi eguali,* 2.° *le normali in punti corrispondenti facciano angolo costante, con una conveniente traslazione di una delle due superficie si potranno rendere focali di una congruenza pseudosferica.*

Per la dimostrazione, in luogo delle curve delle due reti, considereremo le loro curve diagonali (u, v). Quelle della prima rete saranno le immagini sferiche delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica S, per la quale varranno le formole del §. 273, e si avrà pel corrispondente ds'^2 sferico

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2 .$$

Indicando con (X'_3, Y'_3, Z'_3) il punto della seconda rete corrispondente al punto (X_3, Y_3, Z_3) della prima, potremo prendere per X'_3, Y'_3, Z'_3 le espressioni (16), essendo φ un angolo ausiliario, e σ un angolo costante.

Ora dalle (16), derivando, si ha per le (A):

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X'_3}{\partial u} = \left\{ -\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta + \cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right\} X_1 + \\ \qquad + \cos\sigma\ \operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) X_2 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, X_3 \\ \dfrac{\partial X'_3}{\partial v} = \cos\sigma\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) + \\ + \left\{ \operatorname{sen}\sigma\cos\theta + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\} X_2 - \cos\sigma\cos\theta\cos\varphi\, X_3, \end{cases}$$

e ponendo

$$dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2 = E'\,du^2 + 2\,F'\,du\,dv + G'\,dv^2\ ,$$

esprimiamo le condizioni necessarie sufficienti cui deve soddisfare φ colle due equazioni

$$F' = 0\ , \quad E' + G' = 1\ .$$

Calcolandole effettivamente per mezzo delle (32), troviamo:

$$\left\{\cos\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right\}\times\left\{\cos\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right\} =$$

$$= -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,.\,\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$\left\{\cos\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right\}^2+\left\{\cos\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right\}^2 =$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\,,$$

e quindi le formole

$$(a)\qquad \begin{cases} \cos\sigma\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi = \pm\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\sigma\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = \mp\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,, \end{cases}$$

o le altre

$$(b)\qquad \begin{cases} \cos\sigma\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi = \pm\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\sigma\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = \mp\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,. \end{cases}$$

Senza alterare la generalità possiamo prendere sì nelle (a) che nelle (b) il segno superiore, il caso opposto equivalendo a cangiare σ in $\pi + \sigma$, ciò che per le (16) ha per effetto di sostituire alla seconda rete la diametralmente opposta. Le formole (a) coincidono allora colle formole (B) pag. 392 della trasformazione B_3 di Bäcklund, onde le due reti sferiche di Tchebychef saranno appunto nella relazione enunciata.

Quanto al caso (b) esso è impossibile, come si vede subito formando la condizione d'integrabilità rispetto a φ delle due equazioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,,$$

ciò che, tenendo conto della (13)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta\ ,$$

dà l'equazione assurda

$$(1 + \operatorname{sen}\sigma)^2 + \cos^2\sigma = 0\ .$$

§. 381.

Scorrimenti delle reti di Thebychef sulle superficie pseudosferiche.

Il risultato ottenuto al §. precedente rende naturale la domanda se anche sulle altre superficie a curvatura costante, negativa o nulla, le reti di Tchebychef ammettono scorrimenti. Lasciamo da parte il caso della curvatura nulla [1], che non ha qui per noi interesse e del resto si tratta in modo perfettamente analogo e volgiamoci al caso di una superficie pseudosferica. Prendiamo per semplicità = 1 il raggio R della superficie pseudosferica e, trattandosi di studiare proprietà inerenti alla geometria sulla superficie, riguardiamo questa come un piano non euclideo (iperbolico), servendoci degli sviluppi ai §§. 183 e seguenti (I pag. 407).

Supposto di avere una prima rete di Tchebychef nel piano non euclideo, sia

$$ds^2 = \cos^2\theta\ du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\ dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare del piano riferito alle curve diagonali della rete (§. 379).

Indichino ora (§. 183)

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2$$

le coordinate di Weierstrass di un punto del piano e

$$\xi_i = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x_i}{\partial u}\ ,\ \eta_i = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

le coordinate delle rette tangenti nel punto (u, v) alle linee coordinate

---

[1] Sul piano è evidente che le reti di Tchebychef ammettono in primo luogo come scorrimenti le ∞^2 traslazioni del piano. Oltre a questi vi ha un'altra serie ∞^2 di scorrimenti, che possono per es. farsi corrispondere alle trasformazioni di Bäcklund per le superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico (Cf. il Cap. XIV e la mia memoria nel t.° XXIV degli *Annali di matematica*).

u, v. Per le formole della tabella (A*) alla fine del Cap. XII (I pag. 412), avremo

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = \cos\theta\,\xi_i, \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\eta_i + \cos\theta\, x_i\,, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\xi_i \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta\,\eta_i, \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\eta_i\,, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\xi_i + \operatorname{sen}\theta\, x_i\,. \end{cases}$$

Essendo ora φ una conveniente funzione di u, v, e δ una lunghezza costante, conduciamo per ogni punto $(x_0\, x_1\, x_2)$ un segmento $= \delta$ inclinato dell'angolo φ sulle linee v; per le coordinate x'_i dell'estremo avremo (§. 183, formole (22), I, pag. 410):

$$(34)\qquad x'_i = \cosh\delta\, x_i + \operatorname{senh}\delta\,(\cos\varphi\,\xi_i + \operatorname{sen}\varphi\,\eta_i)\,.$$

Di qui derivando, coll'osservare le (33), si trae

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_i}{\partial u} = \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\cos\theta\, x_i + \left\{\cosh\delta\cos\theta - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\right\}\xi_i + \\ \qquad\qquad + \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\cdot\eta_i \\ \dfrac{\partial x'_i}{\partial v} = \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\, x_i - \operatorname{senh}\delta\operatorname{sen}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\xi_i + \\ \qquad\qquad + \left\{\cosh\delta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{senh}\delta\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\}\eta_i\,. \end{cases}$$

Esprimiamo ora che mentre il punto $(x_0\, x_1\, x_2)$ descrive la rete di Tchebychef

$$u - v = \text{costante}\quad,\quad u + v = \text{costante}\,,$$

il punto $(x'_0\, x'_1\, x'_2)$ descrive una seconda rete di Tchebychef applicabile sulla prima. Per ciò calcolando dalle (35)

$$ds'^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 - dx'^2_0 = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\,\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2\,,$$

dobbiamo scrivere le due condizioni

$$\mathrm{F}' = 0\quad,\quad \mathrm{E}' + \mathrm{G}' = 1\,.$$

Ma dalle (35), ricordando che si ha

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1\,,\quad \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_0^2 = 1\,,\quad \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_0^2 = 1\,,$$

deduciamo;

$$(35^*)\quad\begin{cases} F' = \operatorname{senh}^2\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) \\ \quad -\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)-\operatorname{senh}^2\delta\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ E' = \operatorname{senh}^2\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2-2\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) \\ \quad -\operatorname{senh}^2\delta\cos^2\theta\cos^2\varphi+\cosh^2\delta\cos^2\theta \\ G' = \operatorname{senh}^2\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2+2\operatorname{senh}\delta\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) \\ \quad -\operatorname{senh}^2\delta\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi+\cosh^2\delta\operatorname{sen}^2\theta\ , \end{cases}$$

e quindi le richieste condizioni si esprimono colle due equazioni

$$\left\{\operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)-\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right\}\times$$

$$\times\left\{\operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right\}=-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

$$\left\{\operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)-\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\right\}^2+$$

$$+\left\{\operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right\}^2=\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Queste, risolute, danno le formole:

$$(\alpha)\quad\begin{cases} \operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)-\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi=\pm\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi=\mp\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \end{cases}$$

ovvero le altre

$$(\beta)\quad\begin{cases} \operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)-\cosh\delta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi=\pm\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\ . \\ \operatorname{senh}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)+\cosh\delta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi=\mp\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\ . \end{cases}$$

L'ultimo caso si esclude subito, le corrispondenti equazioni per φ

essendo incompatibili (cf. la fine del § precedente), e nel primo caso ponendo

$$\cos\sigma = \operatorname{tgh}\delta\ , \quad \operatorname{sen}\sigma = \pm\frac{1}{\cosh\delta}\ ,$$

veniamo ad identificare le formole (α) precisamente colle (B) §. 373 (pag. 392) che ci davano l'espressione analitica della trasformazione di Bäcklund. D'altronde le formole (35*), essendo soddisfatta la (α), danno subito

$$(37) \qquad ds'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 - dx_3'^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2\ .$$

Così è dimostrato, come si voleva, che anche sulle superficie pseudosferiche una rete di Tchebychef è suscettibile di ∞^2 scorrimenti, e si vede subito che uno scorrimento è individuato appena sia fissato il punto della superficie nel quale si trasporta un determinato punto della rete.

§. 382.

Applicabilità delle due falde di una congruenza pseudosferica.

Dopo queste ricerche riesce molto facile pervenire alla costruzione geometrica, già accennata al principio del §. 379, per stabilire una relazione d'applicabilità fra le due falde S, S′ di una congruenza pseudosferica, cioè fra due superficie pseudosferiche derivate l'una dall'altra per trasformazione di Bäcklund. Si ricordi infatti (§§. 373, 374) che, essendo θ, φ legati dalle formole (B) sopra citate, gli elementi lineari della S, S′ sono rispettivamente

$$ds^2 = R^2\,(\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2)$$
$$ds_1^2 = R^2\,(\cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2)\ .$$

Se nelle formole del §. precedente in luogo di porre $R = 1$, lasciamo questo raggio indeterminato, le (36), (37) si scrivono

$$(36^*) \qquad \cos\sigma = \operatorname{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right)\ , \quad \operatorname{sen}\sigma = \pm\frac{1}{\cosh\left(\frac{\delta}{R}\right)}$$

$$(37^*) \qquad ds'^2 = R^2\,(\cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2)\ ,$$

e quest'ultima combina precisamente col ds_1^2 della S′. Se si osserva poi che φ ha il medesimo significato nelle formole al §. 373 come in quelle

del §. precedente e quindi l'arco geodetico che sopra S va dal punto $(x_0\, x_1\, x_2)$ al punto $(x'_0\, x'_1\, x'_2)$ è tangente in $M \equiv (u, v)$ al raggio $M\,M'$ della congruenza pseudosferica, mentre per la (36*) $R\cos\sigma = R\,\mathrm{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right)$ ha il segno stesso di δ, si può formulare il seguente teorema:

Siano S, S′ *due superficie pseudosferiche di raggio* R, *derivate l'una dall'altra per trasformazione di Bäcklund* B_σ, *e sia* $M\,M'$ *una coppia di punti corrispondenti sopra* S, S′. *Si prolunghi il raggio* $M\,M'$ *geodeticamente sopra* S, *nel senso stesso da* M *verso* M′, *e su questo prolungamento geodetico del raggio si stacchi, a partire da* M, *un segmento* $M\,M_1 = \delta$ *costante e tale che si abbia*

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{tgh}\left(\frac{\delta}{R}\right) = \cos\sigma\ .$$

Così ogni punto M′ *di* S′ *darà un punto* M_1 *sopra* S; *la superficie* S′ *è allora applicabile sulla* S *in guisa che ogni punto* M′ *viene a coincidere per l'applicabilità col corrispondente* M_1.

Osserviamo subito che se la costruzione si fa sulla superficie S′ invece che sulla S, si viene ancora a stabilire una relazione d'applicabilità fra S e S′; ma questa non differisce dalla precedente, come risulta dal significato simmetrico dei due angoli θ, φ.

È poi notevole che la relazione fra σ e δ data dalla (A) coincide precisamente colla formola che in geometria non euclidea lega l'angolo σ di parallelismo e la distanza δ del punto da cui sono spiccate le due parallele ad una retta (I, pag. 397). Nel caso della trasformazione complementare si ha $\sigma = 0$, indi $\delta = \infty$, e la costruzione diventa illusoria.

Un notevole corollario della proposizione dimostrata è il teorema seguente:

Se di una superficie pseudosferica S *si conoscono le linee geodetiche ed il loro arco, sopra qualunque sua trasformata di Bäcklund* S′ *per una trasformazione* B_σ *(con* $\sigma \neq 0$*) si conosceranno altresì, in termini finiti, le linee geodetiche.*

E infatti, note le geodetiche di S (ed il loro arco), colla costruzione data sopra si stabiliscono le formole di una delle applicabilità di S sopra S′, e da queste si hanno, in termini finiti, le geodetiche di S′, corrispondenti, nell'applicabilità, alle geodetiche di S.

Pel caso invece di una trasformata complementare S_0 sappiamo soltanto che bastano quadrature per ottenere le linee geodetiche di S_0. Si conosce infatti sopra S_0 un sistema di oricicli paralleli, come corrispon-

denti agli oricicli paralleli di S normali ai raggi della congruenza, con una quadratura si trovano le geodetiche ortogonali (Cf. §. 182, I, pag. 405). In fine osserviamo che, mediante le considerazioni sulle reti di Tchebychef, abbiamo dato alla trasformazione di Bäcklund un significato inerente puramente alla geometria sulla superficie. Ricordando le osservazioni alla fine del §. 379, è facile concluderne che non solo nello spazio euclideo, ma in qualunque spazio di curvatura costante, esistono le trasformazioni di Bäcklund per le superficie di curvatura costante, purchè la loro curvatura relativa sia negativa.

§. 383.

Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund.

Un importante perfezionamento dei metodi di trasformazione delle superficie pseudosferiche si ottiene facendo uso della proposizione che ho chiamato *il teorema di permutabilità* e che già trovasi esposto nel presente trattato al §. 251 (pag. 80), pel caso più generale delle superficie della classe

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

Vogliamo ora svilupparne le conseguenze pel caso speciale delle superficie pseudosferiche. In primo luogo torniamo ad enunciare il teorema nel caso attuale sotto la forma seguente:

Se di una superficie pseudosferica S *si conoscono due diverse superficie pseudosferiche derivate* S_1, S_2, *per trasformazioni di Bäcklund* B_{σ_1}, B_{σ_2}, *a costanti* σ_1, σ_2 *differenti, esiste una quarta superficie pseudosferica* S_3, *perfettamente determinata, che è legata rispettivamente a* S_1, S_2 *da due trasformazioni di Bäcklund* B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, *colle costanti invertite* σ_2, σ_1.

Questa quarta superficie S_3 è deducibile in termini finiti dalle S, S_1, S_2 supposte note, e noi andiamo ora a stabilire direttamente le formole relative che potremmo anche dedurre, come caso particolare, da quelle al §. 251.

Siano M, M_1, M_2, M_3 quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3 ed indichino

$$(x, y, z), \quad (x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

le loro rispettive coordinate. Questi quattro punti segnano i vertici di un quadrilatero sghembo, di cui due lati opposti hanno la lunghezza

costante $R\cos\sigma_1$ e gli altri due la lunghezza $R\cos\sigma_2$. Il quadrilatero, serbando inalterate le lunghezze dei lati, si muove nello spazio in guisa che i quattro vertici descrivono le quattro superficie pseudosferiche e i due lati concorrenti in ogni vertice giacciono nel piano tangente della corrispondente superficie (Cf. §. 251). Indichiamo qui, nelle rispettive trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2}, definite dalle formole del §. 378, con θ_1, θ_2 i valori che assume φ per le rispettive superficie S_1, S_2; avremo

$$(38)\qquad \begin{cases} x_1 = x + R\cos\sigma_1(\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2) \\ x_2 = x + R\cos\sigma_2(\cos\theta_2 X_1 + \operatorname{sen}\theta_2 X_2), \end{cases}$$

e saranno θ_1, θ_2 legati a θ dalle rispettive formole (B) pag. 392

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1}{\cos\sigma_1} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\sigma_1} \end{cases}$$

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2}{\cos\sigma_2} \\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\sigma_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\sigma_2}. \end{cases}$$

Indichiamo ora con

$$X_1^{(1)},\quad X_2^{(1)},\quad X_3^{(1)}$$

le quantità che per la S_1 sono le analoghe delle

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3$$

per S, e analogamente con

$$X_1^{(2)},\quad X_2^{(2)},\quad X_3^{(2)}$$

le quantità relative alla S_2. Per la (16) pag. 392 abbiamo

$$(41)\qquad \begin{cases} X_3^{(1)} = \cos\sigma_1(\operatorname{sen}\theta_1 X_1 - \cos\theta_1 X_2) - \operatorname{sen}\sigma_1 X_3 \\ X_3^{(2)} = \cos\sigma_2(\operatorname{sen}\theta_2 X_1 - \cos\theta_2 X_2) - \operatorname{sen}\sigma_2 X_3\ . \end{cases}$$

Ora volendo cercare le coordinate $x_3\,y_3\,z_3$ di M_3, osserviamo che questo punto si trova sulla retta uscente da M che è l'intersezione dei due

piani tangenti in M_1, M_2 a $S_1 S_2$, I coseni di direzione di questa retta sono proporzionali ai minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_3^{(1)} & Y_3^{(1)} & Z_3^{(1)} \\ X_3^{(2)} & Y_3^{(2)} & Z_3^{(2)} \end{matrix} \right\|,$$

ossia, per le (41), alle tre quantità α, β, γ date dalla formola:

$$(42) \qquad \alpha = (\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\theta_1 - \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\theta_2) X_1 +$$

$$+ (\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\theta_1 - \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\theta_2) X_2 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) X_3,$$

colle analoghe per β, γ.

Indicando dunque con Λ una conveniente funzione incognita di u, v, avremo

$$(43) \qquad x_3 = x + \Lambda\alpha, \quad y_3 = y + \Lambda\beta, \quad z_3 = z + \Lambda\gamma,$$

e Λ sarà da determinarsi in guisa che ne risulti, come sappiamo esser possibile:

$$\sum (x_3 - x_1)^2 = R^2 \cos^2\sigma_2, \qquad \sum (x_3 - x_2)^2 = R^2 \cos^2\sigma_1,$$

in modo cioè che M_3 si trovi rispettivamente distante da M_1, M_2 delle lunghezze

$$R\cos\sigma_2, \qquad R\cos\sigma_1.$$

Le due equazioni precedenti si scrivono

$$\sum \left\{ \Lambda\alpha - (x_1 - x) \right\}^2 = R^2 \cos^2\sigma_2$$

$$\sum \left\{ \Lambda\alpha - (x_2 - x) \right\}^2 = R^2 \cos^2\sigma_1.$$

Sommandole, coll'osservare che si ha

$$\sum (x_1 - x)^2 = R^2 \cos^2\sigma_1, \qquad \sum (x_2 - x)^2 = R^2 \cos^2\sigma_2,$$

si ottiene

$$(44) \qquad \Lambda \sum \alpha^2 = \sum \alpha (x_1 - x) + \sum \alpha (x_2 - x).$$

Ma dalle (42) e (38) segue

$$\sum \alpha^2 = \cos^2\sigma_1 \operatorname{sen}^2\sigma_2 + \cos^2\sigma_2 \operatorname{sen}^2\sigma_1 + \cos^2\sigma_1 \cos^2\sigma_2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$- 2\cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\sum \alpha (x_1 - x) + \sum \alpha (x_2 - x) =$$

$$= R\left\{ \cos^2\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 - \cos^2\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 + \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 (\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\};$$

queste possono anche scriversi

$$\sum \alpha^2 = 1 - \left[\operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 + \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^2$$

$$\sum \alpha (x_1 - x) + \sum \alpha (x_2 - x) =$$

$$= R (\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1) \left\{ 1 + \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 + \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\}.$$

e la (44) da quindi per Λ il valore

$$(45) \qquad \Lambda = R \frac{\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 + \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1}.$$

Sostituendo questo valore di Λ nelle (43) si hanno così, in termini finiti, le equazioni relative alla quarta superficie pseudosferica S_3 del teorema di permutabilità.

§. 384.

Calcoli relativi alla S_3 e verifiche.

Indichiamo ora con θ_3 l'angolo d'inclinazione del segmento $M_1 M_3 = R \cos\sigma_2$ tracciato nel piano tangente in M_1 alla S_1 sulla linea (di curvatura) $v =$ costante di S_1; avremo

$$x_3 = x_1 + R \cos\sigma_2 (\cos\theta_3 X_1^{(1)} + \operatorname{sen}\theta_3 X_2^{(1)}),$$

e paragonando colle (43)

$$\frac{\Lambda}{R} \alpha = \cos\sigma_1 (\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2) +$$

$$+ \cos\sigma_2 (\cos\theta_3 X_1^{(1)} + \operatorname{sen}\theta_3 X_2^{(1)}),$$

colle analoghe per β, γ. A queste possiamo sostituire le tre equivalenti

$$\frac{\Lambda}{R}\sum \alpha X_1 = \cos\sigma_1\cos\theta_1 + \cos\sigma_2\left\{\cos\theta_3\sum X_1 X_1^{(1)} + \operatorname{sen}\theta_3\sum X_1 X_2^{(1)}\right\}$$

$$\frac{\Lambda}{R}\sum \alpha X_2 = \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\sigma_2\left\{\cos\theta_3\sum X_2 X_1^{(1)} + \operatorname{sen}\theta_3\sum X_2 X_2^{(1)}\right\}$$

$$\frac{\Lambda}{R}\sum \alpha X_3 = \cos\sigma_2\left\{\cos\theta_3\sum X_3 X_1^{(1)} + \operatorname{sen}\theta_3\sum X_3 X_2^{(1)}\right\} .$$

Ma, per le formole (19) pag. 393, abbiamo

$$X_1^{(1)} = (\cos\theta\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1)X_1 + (\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1)X_2 - \\ - \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta X_3$$

$$X_2^{(1)} = (\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1)X_1 + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\cos\theta_1)X_2 + \\ + \cos\sigma_1\cos\theta X_3 ,$$

onde, avendo riguardo agli effettivi valori (42) di α, β, γ, deduciamo le tre formole:

$$\frac{\Lambda}{R}(\cos\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\cos\theta_1 - \cos\sigma_2\operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta_2) =$$

$$= \cos\sigma_1\cos\theta_1 + \cos\sigma_2\left\{\cos\theta_1\cos(\theta_3-\theta) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(\theta_3-\theta)\right\} ,$$

$$\frac{\Lambda}{R}(\cos\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\theta_1 - \cos\sigma_2\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1) =$$

$$= \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\sigma_2\left\{\operatorname{sen}\theta_1\cos(\theta_3-\theta) - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta_1\operatorname{sen}(\theta_3-\theta)\right\} ,$$

$$-\frac{\Lambda}{R}\cdot\cos\sigma_1\cos\sigma_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = \cos\sigma_1\cos\sigma_2\operatorname{sen}(\theta_3-\theta) .$$

Moltiplicando le due prime per $\cos\theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_1$ e sommando, abbiamo

$$\frac{\Lambda}{R}\left\{\cos\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\sigma_2\operatorname{sen}\sigma_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right\} = \cos\sigma_1 + \cos\sigma_2\cos(\theta_3-\theta) ,$$

mentre la terza ci dà

$$-\frac{\Lambda}{R}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = \operatorname{sen}(\theta_3-\theta) .$$

Sostituendo in queste due formole per $\frac{\Lambda}{R}$ il valore (45), ne deduciamo:

$$(46)\quad \begin{cases} \cos(\theta_3-\theta) = \dfrac{\cos\sigma_1\cos\sigma_2 + (\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2-1)\cos(\theta_2-\theta_1)}{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2-1} \\ \operatorname{sen}(\theta_3-\theta) = \dfrac{(\operatorname{sen}\sigma_1-\operatorname{sen}\sigma_2)\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)}{\cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2-1} , \end{cases}$$

e, come conferma del calcolo, si osserverà che la somma dei quadrati dei secondi membri è identicamente = 1. Formando dalla prima di queste i valori di

$$1 \pm \cos(\theta_3 - \theta) ,$$

se ne trae la formola di notevole semplicità

$$\text{(C)} \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) .$$

È da notarsi la simmetria di questa formola, come delle (46), rispetto a S_1, S_2, poichè non vengono alterate scambiando (σ_1, σ_2), (θ_1, θ_2). Ciò dimostra che l'angolo θ_3 misura altresì l'inclinazione del segmento $M_2 M_3$ sulla linea v di S_2.

Ed ora derivando la (C) rapporto ad u, v, e tenendo conto delle (39), (40), si verifica facilmente che θ_3 è legato alla sua volta a θ_1, θ_2 dalle relazioni

$$\text{(39*)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_3 + \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_3}{\cos\sigma_2} \\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_3 + \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_3}{\cos\sigma_2} \end{cases}$$

$$\text{(40*)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3 + \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3}{\cos\sigma_1} \\ \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3 + \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_3}{\cos\sigma_1} . \end{cases}$$

Queste non sono altro appunto che le formole delle trasformazioni di Bäcklund B'_{σ_2}, B'_{σ_1} a costanti σ_2, σ_1 invertite.

Così sono verificate direttamente le proprietà contenute nel teorema di permutabilità, ed è chiaro che per l'elemento lineare ds_3 della quarta superficie pseudosferica S_3 avremo

$$ds_3^2 = R^2 (\cos^2\theta_3 \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3 \, dv^2) .$$

§. 385.

Applicazione successiva della trasformazione di Bäcklund.

Sviluppiamo ora le conseguenze del teorema di permutabilità per l'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni di Bäcklund (Cf. §. 251).

Supponiamo che della superficie pseudosferica S, corrispondente alla soluzione θ dell'equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

si conoscano *tutte* le trasformate di Bäcklund, cioè si sappia integrare, per ogni valore della costante σ, il sistema (B) pag. 392

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}. \end{cases}$$

Conosceremo così una soluzione

$$\varphi = \varphi(u, v, \sigma, C)$$

colle due costanti arbitrarie σ, C dell'equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\ ;$$

ora dimostriamo: *Per ciascuna superficie pseudosferica* S_1, *derivata da* S *con una trasformazione* $B\sigma_1$, *si potranno determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione tutte le trasformate di Bäcklund.*

Indichi infatti

$$\theta_1 = \varphi(u, v, \sigma_1, C_1)$$

la soluzione dell'equazione fondamentale corrispondente a S_1, e sia Σ una trasformata contigua di S_1 per la trasformazione generica $B\sigma$. Se con Θ denotiamo la soluzione corrispondente a Σ, dalla formola (C) del teorema di permutabilità abbiamo

$$(47)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\Theta-\theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1+\sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}\right)} \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1 - \varphi(u, v, \sigma, C)}{2}\right),$$

e questa ci fa conoscere *in termini finiti* la cercata trasformata Σ di S_1, se dapprima si esclude il caso $\sigma = \sigma_1$, ove il denominatore del secondo membro si annulla. Ma, considerando il caso ora escluso come caso limite, è facile trovare anche per esso la formola corrispondente. Immaginiamo per ciò che nella funzione

$$\varphi(u, v, \sigma, C)$$

si faccia convergere σ verso σ_1 e si assuma per C una funzione arbitraria di σ che si riduca a C_1 per $\sigma = \sigma_1$. Al limite per $\sigma = \sigma_1$ il secondo membro della (47) si presenta sotto forma indeterminata, ma se al quoziente

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1 - \varphi(u, v, \sigma, C)}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right)},$$

che assume la forma $\frac{0}{0}$, si sostituisce il quoziente delle derivate rapporto a σ, facendo poi $\sigma = \sigma_1$, si ottiene

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \cos\sigma_1 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial\sigma}\right]_{\sigma=\sigma_1},$$

ossia

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Theta - \theta}{2}\right) = \cos\sigma_1 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + C'\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right]_{\sigma=\sigma_1} \tag{47*}$$

con C' nuova costante arbitraria. Ed è ora facile verificare direttamente che questa formola ci dà appunto le ∞^1 trasformate della S_1 per mezzo della B_{σ_1}. Basta per ciò derivare le (B) rispetto a σ facendovi poi $\sigma = \sigma_1$, e confrontare le formole così ottenute con quelle che risultano derivando la (47*) rapporto ad u, v.

Il risultato conseguito si può enunciare dicendo che: *Nella applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni di Bäcklund ad una superficie pseudosferica ed alle sue successive derivate, basta avere integrata la prima equazione di Riccati, relativa alla trasformazione generica* B_σ, *e le successive equazioni di Riccati che si presentano saranno senz'altro integrate colla prima.*

§. 386.

Le geodetiche sulle superficie derivate.

Restando ferma l'ipotesi fatta al principio del §. precedente, dimostriamo ora che: *Sopra ogni superficie pseudosferica* S_n *del gruppo derivato*

si può determinare in termini finiti l'equazione delle linee geodetiche.

Si osserverà che questo teorema discende già in parte dal risultato alla fine del §. 382. E infatti, supposto che il teorema valga per la superficie S_{n-1} precedente nel gruppo, che cioè della S_{n-1} si conoscano le geodetiche, conosceremo altresì le geodetiche di S_n quando questa provenga da S_{n-1} per una trasformazione di Bäcklund B_σ a costante σ non nulla. Rimarrebbe invece incertezza quando questa trasformazione fosse complementare; ma allora la dimostrazione risulta completata dalle considerazioni che nel §. precedente ci hanno condotto alla formola limite (47*). Risulta infatti da queste ricerche che in ogni caso sapremo determinare in termini finiti tutte le trasformate di Bäcklund e complementari della S_n. Indicando con θ_n il valore di θ corrispondente alla S_n, conosceremo in particolare l'integrale generale φ delle equazioni della trasformazione complementare

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta_n}{\partial v} = \cos\theta_n \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta_n}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta_n\cos\varphi ; \end{cases}$$

sia $\varphi(u, v, C)$ quest'integrale con una costante arbitraria C. Se derivando φ rispetto alla costante arbitraria C poniamo

$$\psi = \log\frac{\partial\varphi}{\partial C},$$

derivando le (48) rispetto a C otteniamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \cos\theta_n\cos\varphi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta_n\operatorname{sen}\varphi .$$

Dunque la funzione ψ, che contiene la costante *non additiva* C, è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\Delta_1\psi = 1,$$

il parametro differenziale primo $\Delta_1\psi$ essendo calcolato rapporto alla prima forma fondamentale

$$ds_n^2 = \cos^2\theta_n\,du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_n\,dv^2$$

della superficie S_n. Basta allora applicare i teoremi generali sulla integrazione della equazione delle geodetiche (§. 93, I, pag. 203) per con-

cluderne che l'equazione in termini finiti delle geodetiche sopra S_n sarà

$$\frac{\partial \psi}{\partial C} = C',$$

essendo C' una seconda costante arbitraria, ossia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C^2} = C' \frac{\partial \varphi}{\partial C}.$$

§. 387.

Applicazione alle elicoidi del Dini ed alla superficie complementare della pseudosfera.

Applichiamo i risultati generali ottenuti a far conoscere un gruppo infinito di superficie pseudosferiche, le coordinate correnti di un cui punto si esprimono per funzioni ordinarie, circolari ed iperboliche, dei parametri u, v delle linee di curvatura.

Otteniamo questo gruppo di superficie nel modo più semplice partendo dalla soluzione evidente $\theta = 0$ della equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta .$$

Se ricordiamo gli sviluppi relativi alla trasformazione di Bäcklund (§. 373 e seguenti), vediamo che essi saranno ancora applicabili per $\theta = 0$ quando si assumano

$$x, y, z; \quad X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; \quad X_3, Y_3, Z_3$$

in guisa da soddisfare le equazioni fondamentali (A) §. 373 (pag. 391); ciò si ottiene ponendo

$$(49) \quad \begin{cases} x = 0 , & y = 0 , & z = Ru \\ X_1 = 0 & Y_1 = 0 & Z_1 = 1 \\ X_2 = \operatorname{sen} v , & Y_2 = -\cos v & Z_2 = 0 \\ X_3 = \cos v & Y_3 = \operatorname{sen} v & Z_3 = 0 , \end{cases}$$

onde si vede che la superficie S corrispondente si riduce all'asse z.

Essendo $\theta = 0$, le formole (B) pag. 392 della trasformazione B_0 di Bäcklund diventano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \sigma} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \varphi ;$$

queste integrate danno

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = Ce^{\frac{u - v\,\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}}$$

e la costante C d'integrazione si può fare = 1 senza alterare la generalità.

Esaminiamo ora le superficie pseudosferiche corrispondenti. Ponendo per brevità

$$\tau = \frac{u - v\,\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma},$$

abbiamo

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\cosh\tau}, \quad \cos\varphi = -\operatorname{tgh}\tau,$$

e le formole (15) pag. 391 ci danno per le superficie derivate, osservando le (49):

$$x' = \frac{R\cos\sigma}{\cosh\tau}\operatorname{sen} v, \; y' = -\frac{R\cos\sigma}{\cosh\tau}\cos v, \; z' = R(u - \cos\sigma\operatorname{tgh}\tau)$$

$$\tau = \frac{u - v\,\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}.$$

Queste superficie pseudosferiche non sono altro che le elicoidi del Dini già trovate al §. 334 (pag. 300), dove soltanto sono leggermente cangiate le notazioni. In particolare per $\sigma = 0$ abbiamo la pseudosfera

$$x' = \frac{R\operatorname{sen} v}{\cosh u}, \; y' = -\frac{R\cos v}{\cosh u}, \; z' = R(u - \operatorname{tgh} u).$$

I teoremi generali dimostrati ci assicurano che: *L'applicazione del processo illimitato di trasformazioni di Bäcklund alle elicoidi pseudosferiche del Dini, in particolare alla pseudosfera non richiederà alcun calcolo d'integrazione.*

Così se prendiamo una particolare elicoide del Dini corrispondente alla formola

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = e^{\tau_1}, \quad \tau_1 = \frac{u - v\,\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1},$$

ne otterremo colla (47) la trasformata generica di Bäcklund a costante σ colla formola

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right)}\,\frac{e^{\tau_1} - e^{\tau}}{1 + e^{\tau + \tau_1}}.$$

Nel caso particolare $\sigma = \sigma_1$ dovremo invece ricorrere alla (47*) che dà

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{u \operatorname{sen}\sigma_1 - v + C'}{\cos\sigma_2 \cosh\tau_1} .$$

Se facciamo in questa $\sigma_1 = 0$ avremo la superficie complementare della pseudosfera ove, senza alterare la generalità, potremo fare $C' = 0$, indi

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = -\frac{v}{\cosh u}$$

$$\operatorname{sen}\Theta = -\frac{2v\cosh u}{\cosh^2 u + v^2} , \quad \cos\Theta = \frac{\cosh^2 u - v^2}{\cosh^2 u + v^2} .$$

Applicando le formole dei §§. precedenti troviamo che la nostra superficie è rappresentata dalle equazioni:

$$(50) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2\,R\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\left\{\operatorname{sen} v - v\cos v\right\} \\ y = -\dfrac{2\,R\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\left\{\cos v + v\operatorname{sen} v\right\} \\ z = R\left\{u - \dfrac{2\operatorname{senh} u\cosh u}{\cosh^2 u + v^2}\right\} . \end{cases}$$



FIG. 12.ª

Avendosi

$$x(\cos v + v\operatorname{sen} v) + y(\operatorname{sen} v - v\cos v) = 0 ,$$

si vede che le linee di curvatura v di questa superficie sono in piani per l'asse r e la superficie stessa non è quindi che un caso particolare delle superficie d'Enneper (§. 330).

I raggi principali di curvatura della superficie sono

$$r_1 = -R\operatorname{tg}\Theta = \frac{2Rv\cosh u}{\cosh^2 u - v^2}$$

$$r_2 = R\cot\Theta = -R\frac{\cosh^2 u - v^2}{2v\cosh u} ,$$

e la superficie ha quindi le due linee singolari

$$v = 0 \ , \quad v = \cosh u \ ,$$

che sono per la superficie linee cuspidali. La prima è una curva piana che si ottiene dalla trattrice meridiana della pseudosfera, staccando sulla tangente a partire dal punto di contatto, nel verso che si allontana dall'assintoto, un segmento = R e prendendo il luogo degli estremi; la seconda linea cuspidale è una curva gobba. In fine osserviamo, senza sviluppare i calcoli, che secondo i risultati del teorema di reciprocità si compiono con sole derivazioni, che l'elemento lineare della superficie dato da

$$ds^2 = R^2 \left\{ \frac{(\cosh^2 u - v^2)^2}{(\cosh^2 u + v^2)^2} du^2 + \frac{4 v^2 \cosh^2 u}{(\cosh^2 u + v^2)^2} dv^2 \right\}$$

si riduce alla forma tipica

$$ds^2 = R^2 (d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2)$$

ponendo

$$\alpha = \log \frac{\cosh u}{\cosh^2 u + v^2} \ , \quad \beta = u - v^2 \operatorname{tgh} u \ .$$

§. 388.

Complementari delle superficie pseudosferiche di rotazione e delle superficie d'Enneper.

Si è visto sopra che la complementare della pseudosfera è una particolare superficie d'Enneper. È facile dimostrare che anche le superficie di rotazione degli altri due tipi ellittico ed iperbolico hanno per complementari delle superficie d'Enneper [1]. Sia S una superficie pseudosferica di rotazione; le sue complementari Σ sono le traiettorie ortogonali dei circoli C tracciati nei piani tangenti di S col centro nel punto di contatto e con raggio = R (§. 272). Le ∞^1 superficie Σ (che sono tutte congruenti per rotazione attorno all'asse) fanno parte di un sistema triplo ortogonale nel quale le superficie degli altri due sistemi sono i luoghi dei circoli C lungo le linee di curvatura di S, cioè lungo i meridiani ed i paralleli.

---

[1] Queste superficie d'Enneper sono state studiate dal dott. Bolke nella sua tesi d'abilitazione *Die Complementärflächen der pseudosphärischen Rotationsflächen* (Halle. A. S. 1901).

Ora le superficie del secondo sistema sono evidentemente sfere col centro sull'asse, e per ciò la Σ ha le linee di curvatura di un sistema sopra sfere che tagliano ad angolo retto la superficie ed hanno il centro sull'asse. Dunque le linee di curvatura dell'altro sistema sono in piani per l'asse e la superficie, che appartiene alla classe di Joachimsthal (§. 320), è una superficie d'Enneper (§. 332).

Arriviamo al medesimo risultato, ed anzi dimostriamo di più il teorema inverso: *Se tutte le complementari di una superficie pseudosferica* S *sono superficie d'Enneper, la superficie* S *è di rotazione* procedendo nel modo seguente.

La superficie pseudosferica S sia definita da

$$ds^2 = R^2 (\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2)$$

e le sue complementari Σ da

$$ds_1^2 = R^2 (\cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2) ,$$

essendo φ la soluzione generale, con una costante arbitraria, delle equazioni (B*) pag. 395

$$(B^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \ . \end{cases}$$

Supponiamo che su *tutte* le Σ le linee di curvatura v siano piane; dovremo avere (§. 330):

$$(51) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0,$$

e questa dovrà sussistere per tutte le soluzioni φ del sistema (B*). Sviluppando la (51), osservando le (B*) e la relazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta ,$$

otteniamo

$$(52) \qquad \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \ .$$

Questa, nella nostra ipotesi, deve essere un'identità in φ e perciò sarà necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0,$$

ossia $\theta = f(u)$; dunque la S è una superficie di rotazione e precisamente i paralleli sono le linee u.

Col medesimo metodo possiamo risolvere la questione seguente: *Quando accade che tutte le complementari* Σ *di una superficie pseudosferica* S *abbiano sferiche le linee di curvatura di un sistema?*

Secondo il risultato finale del §. 337 (pag. 305), le superficie Σ avranno le linee di curvatura v sferiche quando si abbia

$$\cot\varphi = \alpha + \beta \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

dove α, β sono funzioni di v soltanto. Derivando la precedente rispetto ad u, otteniamo la formola equivalente

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0 . \tag{53}$$

Dovendo questa coesistere con quella che ne risulta per una nuova derivazione rispetto ad u, otteniamo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right) & \dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \end{vmatrix} = 0 . \tag{54}$$

Questa sarà sostituibile alla (53) quando non sia zero $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$, cioè quando le linee v non siano piane. Dunque la (54) esprime che linee di curvatura v sono o piane o sferiche.

Ciò posto, se sviluppiamo la (54) sostituendo per $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ i valori tratti dalle (B*), otteniamo l'equazione

$$A\cos\varphi + B\operatorname{sen}\varphi + C = 0 , \tag{55}$$

dove A, B, C hanno i valori seguenti:

$$\begin{cases} A = \operatorname{sen}\theta\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\dfrac{\partial\theta}{\partial v} + \cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} \\ B = \cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \cos\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v^2} + \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} \\ C = \operatorname{sen}^2\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^3 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} . \end{cases}$$

La (55) dovendo essere per ipotesi identica rispetto a φ, dovremo avere

$$A = 0 \ , \quad B = 0 \ , \quad C = 0 \ .$$

Ora se si lascia da parte il caso, già sopra considerato, che la S sia di rotazione, sarà $\frac{\partial\theta}{\partial u} \neq 0$ e la condizione $A = 0$ ci dà

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \ ,$$

la quale esprime che sulla S le linee di curvatura u sono piane. D'altronde si vedrà subito che, insieme alla $A = 0$, sono soddisfatte anche le altre due condizioni $B = 0$, $C = 0$, e perciò le Σ avranno le linee di curvatura v o piane o sferiche. Per quanto si è visto sopra, il primo caso non può aver luogo per una Σ qualunque, se la S non è di rotazione; dunque: *Le complementari di una superficie pseudosferica* S *avranno sferiche le linee di curvatura v solo quando le linee u di* S *siano piane.*

Dunque le complementari di una superficie S d'Enneper hanno sferiche le linee di curvatura corrispondenti a quelle sferiche di S, mentre quelle che corrispondono alle linee di curvatura piane non sono, *in generale*, nè piane nè sferiche. Però è facile vedere che fra queste ∞^1 complementari ve ne sono due e due sole (reali od immaginarie) per le quali le dette linee di curvatura sono piane. Infatti pel calcolo fatto al principio del §. le linee di curvatura v della complementare Σ di S saranno piane se φ soddisfa la (52). Ora questa è un'equazione di 2.° grado in $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ [1] e due al massimo sono quindi le complementari richieste. Supposto d'altronde che la S stessa abbia le linee v di curvatura piane, avremo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} \ ,$$

e derivando la (52) rapporto ad u e v si vedrà facilmente che φ soddisfa in effetto alle (B*). Dunque: *Ogni superficie d'Enneper possiede due altre superficie d'Enneper (reali od immaginarie) contigue per trasformazione*

---

[1] Escludiamo il caso già trattato avanti, che la (52) sia un'identità; allora la S è una superficie di rotazione.

complementare; le altre complementari hanno soltanto sferiche le linee di curvatura di un sistema. [1]

§. 389.

Composizione di due trasformazioni complementari.

Le ultime ricerche sulle trasformazioni (reali) di Bäcklund alle quali ora ci accingiamo hanno per iscopo di collegare a queste trasformazioni i risultati del Cap. XVII sulla deformazione delle congruenze e in particolare i risultati dell'ultimo §. di questo capitolo (pag. 129). Risolviamo per ciò la questione preliminare seguente:

Essendo S_1, S_2 *due superficie pseudosferiche derivate da una medesima* S *per trasformazioni di Bäcklund* B_{σ_1}, B_{σ_2}, *quando accade che le normali in due punti corrispondenti qualunque* M_1, M_2 *di* S_1, S_2 *si incontrano?*

Ritenendo le notazioni del §. 383, sarà per ciò necessario e sufficiente che si annulli il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ X_3^{(1)} & Y_3^{(1)} & Z_3^{(1)} \\ X_3^{(2)} & Y_3^{(2)} & Z_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

ossia per le (38), (41) che si abbia:

$$\begin{vmatrix} \cos\sigma_1\cos\theta_1 - \cos\sigma_2\cos\theta_2 , & \cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1 - \cos\sigma_2\operatorname{sen}\theta_2 , & 0 \\ -\cos\sigma_1\operatorname{sen}\theta_1 , & \cos\sigma_1\cos\theta_1 , & \operatorname{sen}\sigma_1 \\ -\cos\sigma_2\operatorname{sen}\theta_2 , & \cos\sigma_2\cos\theta_2 , & \operatorname{sen}\sigma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando si ottiene

$$(\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma_2).\left\{1 - \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\sigma_1\cos\sigma_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right\} = 0,$$

e quindi, siccome il secondo fattore non può annullarsi, dovremo avere

$$\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma_2 = 0$$

cioè $\sigma_2 = -\sigma_1$. *Dunque la circostanza domandata avviene solo quando le due trasformazioni* B_{σ_1}, B_{σ_2} *hanno costanti* σ *eguali e di segno contrario.*

---

[1] Le equazioni in termini finiti di tutte le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura sferiche furono stabilite dal Dobriner (Acta mathem. T. 9); esse dipendono dalle funzioni θ di due variabili. Le complementari delle superficie d'Enneper considerate nel testo non ne sono che un caso particolare più semplice.

Supponiamo adunque che sia $\sigma_2 = -\sigma_1$; il punto d'incontro M_0 delle due normali in M_1, M_2 descriverà una superficie S_0, della quale andiamo a ricercare l'elemento lineare, per constatare che essa è in ogni caso applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione quando $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$ ed invece sul catenoide accorciato quando $\sigma_2 = -\sigma_1 \neq 0$.

Cominciamo dall'esaminare geometricamente il primo caso. Siano dunque S_1, S_2 complementari di una medesima superficie pseudosferica S e siano M_1, M_2, M tre loro punti corrispondenti. I raggi delle due congruenze pseudosferiche normali $M M_1$, $M M_2$ sono rispettivamente tangenti a due sistemi di geodetiche parallele sopra S. Consideriamo quella geodetica g di S che appartiene ad ambedue i sistemi, cioè è parallela in un senso alle geodetiche del primo sistema e nel senso opposto a quelle del secondo. Se con u indichiamo la distanza geodetica sopra S del punto M da g, potremo dare all'elemento lineare di S la forma iperbolica (I, pag. 261)

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2 \tag{56}$$

e per l'angolo α di parallelismo relativo al punto M ed alla geodetica g avremo (I, pag. 397)

$$\cos\alpha = \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Se nel piano $M_1 M M_2$, tangente in M alla S, conduciamo le normali in M_1, M_2 ai raggi $M M_1$, $M M_2$, queste saranno le normali ad S_1, S_2 e si incontreranno in un punto M_0 tale che

$$M M_0 = \frac{R}{\cos\alpha} = R \coth\left(\frac{u}{R}\right).$$

Ora nella forma (56) dell'elemento lineare la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee u è appunto

$$\frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{R} \operatorname{tgh}\left(\frac{u}{R}\right),$$

onde si vede che il punto M_0 è precisamente il centro di curvatura geodetica di quella linea u che passa per M, e per ciò: *Il luogo del punto* M_0 *è la superficie* S_0 *complementare di* S *rispetto alle geodetiche normali alla* g. Pei teoremi stabiliti al §. 136 (I, pag. 295) la S_0 è quindi applicabile sulla superficie di rotazione che ha per meridiano la trattrice allungata. Ma possiamo prendere egualmente come superficie tipica di

rotazione la superficie logaritmica, E infatti l'elemento lineare della S_0 è (§. 186)

$$ds_0^2 = \coth^4\left(\frac{u}{R}\right) du^2 + \frac{R^2\, dv^2}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{R}\right)},$$

che ponendo

$$r = \frac{R}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{R}\right)}$$

si scrive

$$ds_0^2 = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) dr^2 + r^2\, dv^2$$

ed appartiene alla superficie di rotazione che ha per meridiano la curva logaritmica

$$s = R \log r .$$

Osserviamo poi che le sfere descritte col centro in M_0 e con raggio $= M_0 M_1 = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{R}\right)}$ toccano in M_1, M_2 le due superficie pseudosferiche S_1, S_2. Il raggio di queste sfere eguaglia dunque il raggio del parallelo della superficie logaritmica, e l'inviluppo del sistema ∞^2 di sfere è composto delle due superficie pseudosferiche S_1, S_2. Così abbiamo invertito i teoremi del §. 259 (Cf. anche §. 310).

§. 390.

Composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund B_σ, $B_{-\sigma}$.

Supponiamo ora $\sigma \neq 0$. Essendo S_1, S_2 derivate da S per le trasformazioni B_σ, $B_{-\sigma}$, esisterà pel teorema di permutabilità (§. 383) una quarta superficie pseudosferica S_3 legata alla S_1 da una trasformazione $B_{-\sigma}$ ed alla S_2 da una B_σ. Il quadrilatero $M M_1 M_3 M_2$ del teorema di permutabilità avrà qui i quattro lati eguali ed in ragione della sua simmetria, le normali in (M, M_3), (M_1, M_2) alle superficie opposte (S, S_3), (S_1, S_2) si incontreranno rispettivamente in due punti M_0, M'_0. Cerchiamo le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0: ponendo

$$\overline{M M_0} = T ,$$

avremo

$$x_0 = x + T X_3 , \quad y_0 = y + T Y_3 , \quad z_0 = z + T Z_3 .$$

Per calcolare T basta osservare che la $M_0 M_3$ dovendo essere la normale in M_3 alla S_3, sarà in particolare normale alla $M_3 M_1$ e si avrà quindi

$$\sum (x_0 - x_3)(x_3 - x_1) = 0 ,$$

Di qui, avendo riguardo alle formole del §. 383, si trova facilmente

$$T = R \operatorname{sen} \sigma \cot \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) ;$$

e quindi ponendo

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\Omega$$

si avrà

$$(57) \quad x_0 = x + R \operatorname{sen} \sigma \cot \Omega X_3 , \quad y_0 = y + R \operatorname{sen} \sigma \cot \Omega Y_3 ,$$
$$z_0 = z + R \operatorname{sen} \sigma \cot \Omega Z_3$$

Se si pone altresì

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\Phi$$

le formole (39), (40) della trasformazione di Bäcklund diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} = \dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\Omega}{\cos\sigma} \cos\Phi \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\Omega}{\cos\sigma} \operatorname{sen}\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta \cos\Omega - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma} \operatorname{sen}\Phi \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \cos\Omega + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\Omega}{\cos\sigma} \cos\Phi . \end{cases}$$

Ponendo in fine

$$(58) \quad \begin{cases} A = \cos\theta \operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\Omega \\ B = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\Omega , \end{cases}$$

le precedenti si scrivono

$$(59) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} = \dfrac{A}{\cos\sigma} \cos\Phi , \quad \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} = \dfrac{B}{\cos\sigma} \operatorname{sen}\Phi \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{1}{\cos\sigma} \dfrac{\partial A}{\partial \Omega} \operatorname{sen}\Phi , \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\dfrac{1}{\cos\sigma} \dfrac{\partial B}{\partial \Omega} \cos\Phi . \end{cases}$$

Ora le (57), derivate rapporto ad u, v, danno per le (A) pag. 391

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = R\left\{\frac{A}{\operatorname{sen}\Omega}X_1 - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}^2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial u}X_3\right\}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = R\left\{\frac{B}{\operatorname{sen}\Omega}X_2 - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}^2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial v}X_3\right\},$$

e quindi per l'elemento lineare della superficie S_0 luogo di M_0

$$(60)\qquad ds_0^2 = R^2\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^4\Omega}d\Omega^2 + \frac{A^2du^2 + B^2dv^2}{\operatorname{sen}^2\Omega}\right\}.$$

Ma si ha per le prime (59)

$$(\alpha)\qquad A\cos\Phi\,du + B\operatorname{sen}\Phi\,dv = \cos\sigma\,d\Omega\,,$$

e d'altra parte dalle (59) risulta subito che anche l'espressione

$$A\operatorname{sen}\Phi\,du - B\cos\Phi\,dv$$

è un differenziale esatto. Ponendo

$$(\beta)\qquad A\operatorname{sen}\Phi\,du - B\cos\Phi\,dv = \cos\sigma\,d\Psi\,,$$

e quadrando la (α) (β) e sommando, si ha

$$A^2du^2 + B^2dv^2 = \cos^2\sigma\,(d\Omega^2 + d\Psi^2)\,,$$

dopo di che la (60) diventa

$$(61)\qquad ds_0^2 = R^2\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^4\Omega}d\Omega^2 + \frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}^2\Omega}d\Psi^2\right\},$$

che pone in evidenza l'elemento lineare di una superficie di rotazione [1], Per equazione della curva meridiana si può prendere come subito si vede;

$$r = R\operatorname{sen}\sigma\cosh\left(\frac{z}{R}\right)$$

ove si ponga

$$\cot\Omega = \operatorname{senh}\left(\frac{z}{R}\right).$$

La superficie S_0 è dunque applicabile sul catenoide accorciato (§. 259).

---

[1] Si osserverà che, facendo in questa formola $\sigma = 0$, si ritorna alla superficie logaritmica di rotazione.

Le sfere descritte col centro in M_0 e con raggio

$$M_0 M = T = R \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \left(\frac{z}{R}\right)$$

hanno per inviluppo le due superficie pseudosferiche S, S_3 (Cf. §. 259). Riepiloghiamo i risultati ottenuti col teorema:

Se due superficie pseudosferiche S_1, S_2 *sono legate ad una medesima* S *da due trasformazioni opposte* B_σ, $B_{-\sigma}$ *di Bäcklund, le normali in due punti corrispondenti di* S_1, S_2 *s'incontrano in un punto, che descrive una superficie applicabile sul catenoide accorciato o sulla superficie logaritmica di rotazione, secondo che* $\sigma \gtrless 0$ *ovvero* $\sigma = 0$.

Inversamente risulta dalle osservazioni alla fine del §. 266 (pag. 129) che se si considera una *qualunque* deformata S_0 della superficie logaritmica di rotazione o del catenoide accorciato, e le due falde a curvatura costante negativa del corrispondente inviluppo di sfere coi centri sopra S_0 (§. 259), queste due superficie S_1, S_2 sono contigue per trasformazioni opposte di Bäcklund ad una medesima superficie pseudosferica S e quindi ad una seconda S_3.

§. 391.

La trasformazione di Lie.

Da ultimo veniamo a considerare, insieme alla trasformazione complementare e di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, una trasformazione di diversa natura: *la trasformazione di Lie*. Riferendoci alle linee assintotiche α, β di una superficie pseudosferica, ricordiamo che ogni tale superficie corrisponde ad una soluzione θ dell'equazione a derivate parziali (5) § 368 (pag. 381)

$$\frac{\partial^2 (2\theta)}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \operatorname{sen} (2\theta) . \tag{62}$$

La trasformazione di Lie si fonda sull'osservazione evidente che da una soluzione $\theta(\alpha, \beta)$ della (62) se ne ottiene una nuova $\Theta(\alpha, \beta)$ con una costante arbitraria k, ponendo

$$\Theta(\alpha, \beta) = \theta\left(k\,\alpha, \frac{\beta}{k}\right)^{(1)} .$$

---

(1) È evidente che l'osservazione del testo vale per tutte le equazioni delle forma

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = F(\theta) .$$

Alla soluzione $\theta(\alpha, \beta)$ corrispondeva una superficie pseudosferica S ; alla nuova Θ corrisponderà una nuova superficie pseudosferica Σ perfettamente determinata di forma, che si dirà *la trasformata di Lie* della S. Per ottenere la Σ converrà integrare un'equazione di Riccati onde ridurre effettivamente l'elemento lineare sferico alla forma

$$ds'^2 = d\alpha^2 - 2\cos(2\Theta)\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 .$$

Mentre la trasformazione complementare e di Bäcklund corrispondono ad una costruzione geometrica, la trasformazione di Lie sembra avere un puro significato analitico. Nonostante essa si lega in un modo notevole, osservato da Lie, alle due nominate trasformazioni. Per vederlo poniamo la costante k della trasformazione di Lie sotto la forma

$$k = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} ,$$

sicchè la trasformazione stessa consiste nel passaggio dalla soluzione $\theta(\alpha, \beta)$ dell'equazione fondamentale all'altra

$$\Theta(\alpha, \beta) = \theta\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\alpha, \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\beta\right) .$$

Indichiamo la trasformazione stessa col simbolo L_σ e la trasformazione *inversa* L_σ^{-1}, che corrisponde al passaggio da Θ a θ, sarà semplicemente la $L_{-\sigma}$. Ora prendiamo le formole (B) §. 373 (pag. 392) della trasformazione B_σ di Bäcklund e cangiamole in coordinate assintotiche α, β ponendo

$$u - v = 2\alpha , \quad u + v = 2\beta ;$$

esse diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi - \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\varphi + \theta) \\ \dfrac{\partial(\varphi + \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\varphi - \theta) . \end{cases}$$

Supponiamo che si passi da θ a φ con una trasformazione complementare B_0, e si abbia quindi

$$\frac{\partial(\varphi - \theta)}{\partial\alpha} = \operatorname{sen}(\varphi + \theta) , \quad \frac{\partial(\varphi + \theta)}{\partial\beta} = \operatorname{sen}(\varphi - \theta) .$$

Colla trasformazione L_σ di Lie passiamo dalle soluzioni θ, φ alle due

$$\Theta = \theta\left(\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\alpha\,,\ \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\beta\right)$$
$$\Phi = \varphi\left(\frac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\alpha\,,\ \frac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\beta\right);$$

si vede subito che Θ, Φ saranno legate dalle formole della trasformazione B_σ di Bäcklund

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Phi-\Theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\Theta+\Phi) \\ \dfrac{\partial(\Phi+\Theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\Phi-\Theta)\,. \end{cases}$$

Ora da Θ si passa a θ colla $L_\sigma^{-1} = L_{-\sigma}$, da θ a φ colla B_0 e in fine da φ a Φ colla L_σ; dunque da Θ si passa a Φ colla trasformazione composta

$$L_\sigma^{-1}\, B_0\, L_\sigma\,,$$

onde possiamo scrivere simbolicamente

$$B_\sigma = L_\sigma^{-1}\, B_0\, L_\sigma\,,$$

ossia in parole: *La trasformazione* B_σ *di Bäcklund è la trasformata della complementare* B_0 *per mezzo di una trasformazione* L_σ *di Lie.*

Sotto forma diversa possiamo enunciare il risultato anche così: *Qualunque congruenza pseudosferica si ottiene applicando ad una congruenza pseudosferica normale una trasformazione di Lie.*

Osserviamo in fine che vi ha una classe di superficie pseudosferiche le quali godono della proprietà che la trasformazione di Lie le cangia in sè stesse. Queste superficie corrispondono a quelle soluzioni θ dell'equazione fondamentale che sono funzioni del prodotto $\tau = \alpha\beta$. Nelle notazioni del §. 370, esse dipendono dall'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$\tau f'' + f' = \operatorname{sen} f\,.$$

In particolare appartengono a questa classe le superficie pseudosferiche considerate alla fine del §. 370, che contengono due rette; esse corrispondono a quegli integrali dell'equazione precedente che sono regolari nell'intorno di $\tau = 0$.

Capitolo XXV.

Le superficie a curvatura costante in generale e le loro trasformazioni

Superficie a curvatura costante positiva e trasformazione involutoria di Hazzidakis. — Superficie a curvatura media costante. — Trasformazione di Bonnet-Lie. — Superficie a curvatura media costante applicabili sopra superficie di rotazione. — Le nuove trasformazioni reali delle superficie pseudosferiche. — Loro composizione mediante due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund. — Riduzione, mediante una trasformazione di Lie, al caso puramente immaginario. — La superficie luogo del punto d'incontro di due normali corrispondenti è applicabile sul sinusoide iperbolico. — Trasformazioni immaginarie di Bäcklund per le superficie a curvatura costante positiva. — Loro composizione in una trasformazione reale. — Caso in cui le normali in due punti corrispondenti di due superficie trasformate S, S_1 si incontrano. — Il luogo del punto d'incontro come deformata dell'ellissoide o dell'iperboloide di rotazione di Guichard. — La permutabilità delle nuove trasformazioni colla trasformazione di Hazzidakis. — Applicazione successiva delle nuove trasformazioni. — Esempi.

§. 392.

Le superficie applicabili sulla sfera e la trasformazione di Hazzidakis.

Nel presente capitolo ci proponiamo di estendere le ricerche ed i metodi di trasformazione svolti nel precedente capitolo per le superficie pseudosferiche, alle superficie a curvatura costante in generale, tanto positiva che negativa. Cominciamo dall'esporre alcune proprietà fondamentali delle superficie a curvatura costante positiva $K = +\frac{1}{R^2}$, cioè delle superficie applicabili sulla sfera. Sia S una tale superficie, che riferiamo alle sue linee di curvatura u, v. Essendo

$$r_1 r_2 = R^2 ,$$

supposto che sia $r_1 > R, r_2 < R$, potremo porre, indicando con θ una funzione reale di u, v:

$$r_1 = R \coth \theta , \quad r_2 = R \operatorname{tgh} \theta ,$$

e l'elemento lineare della S prenderà la forma caratteristica (Cf. §. 331)

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2) ,$$

dove θ soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\,.$$

L'elemento lineare sferico rappresentativo della S sarà

$$ds'^2 = \cosh^2\theta\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\,dv^2\,.$$

Ora lo scambio di u con v lascia alla equazione (I) la medesima forma, onde si trae il teorema:

La determinazione delle superficie applicabili sulla sfera di raggio R *dipende dalla integrazione dell'equazione a derivate parziali:*

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\,.$$

Ad ogni soluzione θ *di questa equazione corrispondono due diverse superficie* S, S_1 *a curvatura* $K = \frac{1}{R^2}$ *(che diremo coniugate), i cui elementi lineari* ds, ds_1, *riferiti alle linee di curvatura* u, v, *sono dati dalle formole*

$$\text{(1)} \qquad ds^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta\,du^2 + \cosh^2\theta\,dv^2)$$

$$\text{(1*)} \qquad ds_1^2 = R^2(\cosh^2\theta\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\,dv^2)$$

e i rispettivi elementi lineari sferici da

$$ds'^2 = \cosh^2\theta\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\,dv^2$$

$$ds_1'^2 = \operatorname{senh}^2\theta\,du^2 + \cosh^2\theta\,dv^2\,,$$

mentre pei raggi principali di curvatura si ha:

$$\text{(2)} \qquad r_1 = R\coth\theta\,, \quad r_2 = R\operatorname{tgh}\theta\,, \quad \text{per la S}$$

$$\text{(2*)} \qquad r_1 = R\operatorname{tgh}\theta\,, \quad r_2 = R\coth\theta\,, \quad \text{per la } S_1\,.$$

Distendendo la S sulla sfera, l'applicazione si può fare evidentemente in guisa che le linee di curvatura di S si distendano sulle immagini delle linee di curvatura di S_1 e similmente invertendo S con S_1. Le geodetiche di S distendendosi sui circoli massimi della sfera, ed ognuno di questi essendo l'immagine della linea di contatto di un cilindro circoscritto ad S_1, vediamo che: *alle geodetiche di* S *corrispondono sulla coniugata* S_1 *le linee d'ombra per raggi paralleli.*

Questa trasformazione delle superficie a curvatura costante positiva, che è evidentemente involutoria, è stata scoperta da Hazzidakis *(Crelle's Journal* 88).

È chiaro che possiamo esprimere le proprietà di questa trasformazione anche nel modo seguente: *Di una superficie* S *a curvatura costante positiva* $K = +\frac{1}{R^2}$ *si consideri l'immagine di Gauss sopra una sfera* Σ *di raggio* R *ed il sistema ortogonale sferico di* Σ *che è l'immagine delle linee di curvatura di* S. *Deformando la sfera* Σ, *si può rendere questo sistema il sistema delle linee di curvatura della deformata* S_1, *che è allora la coniugata di* S.

Si osservi in fine che data una superficie S applicabile sulla sfera, per trovare la sua coniugata S_1 basta conoscere le linee geodetiche di S.

§. 398.

Le superficie a curvatura media costante.

Già al §. 256 (pag. 97) abbiamo osservato il teorema di Bonnet: *Le due superficie parallele ad una superficie* S *applicabile sopra una sfera di raggio* $= R$, *e distanti da* S *della lunghezza* R, *hanno la curvatura media costante* $= \pm\frac{1}{R}$. Ne risulta l'identità dei due problemi della determinazione delle superficie a curvatura di Gauss costante positiva e delle superficie a curvatura media costante.

Confermiamo col calcolo diretto queste proprietà nel modo seguente.

La superficie $\overline{S}$ parallela alla S d'elemento lineare (1), e distante da questa del tratto l, ha l'elemento lineare

$$(3) \qquad \overline{ds}^2 = (R\,\mathrm{senh}\,\theta + l\cosh\theta)^2\,du^2 + (R\cosh\theta + l\,\mathrm{senh}\,\theta)^2\,dv^2$$

e i suoi raggi principali di curvatura sono

$$\rho_1 = r_1 + l = \frac{R\cosh\theta + l\,\mathrm{senh}\,\theta}{\mathrm{senh}\,\theta}$$

$$\rho_2 = r_2 + l = \frac{R\,\mathrm{senh}\,\theta + l\cosh\theta}{\cosh\theta}\,.$$

Se facciamo $l = \pm R$, abbiamo quindi

$$(4) \qquad \overline{ds}^2 = R^2\,e^{\pm 2\theta}\,(du^2 + dv^2)$$

$$(5) \qquad \rho_1 = R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\mathrm{senh}\,\theta}\,, \quad \rho_2 = \pm R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\cosh\theta}$$

indi

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \pm \frac{1}{R} ;$$

dunque la $\overline{S}$ è a curvatura media costante $\pm \frac{1}{R}$.

Se consideriamo altresì la superficie $\overline{S}_1$ parallela alla coniugata S_1 e distante da questa di m, avremo

$$(3^*) \quad \overline{ds}_1^2 = (R\cosh\theta + m\,\mathrm{senh}\,\theta)^2\,du^2 + (R\,\mathrm{senh}\,\theta + m\cosh\theta)^2\,dv^2$$

$$\overline{\rho}_1 = \frac{R\,\mathrm{senh}\,\theta + m\cosh\theta}{\cosh\theta} , \quad \overline{\rho}_2 = \frac{R\cosh\theta + m\,\mathrm{senh}\,\theta}{\mathrm{senh}\,\theta} ;$$

e facendo $m = \pm R$, risulta

$$\overline{ds}_1^2 = R^2\,e^{\pm 2\theta}\,(du^2\,dv^2)$$

$$\rho_1 = \pm \frac{Re^{\pm\theta}}{\cosh\theta} , \quad \overline{\rho}_2 = R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\mathrm{senh}\,\theta} .$$

Di qui deduciamo intanto:

L'elemento lineare di ogni superficie a curvatura media costante $\pm \frac{1}{R}$, *riferito alle linee di curvatura u, v, assume la forma:*

$$(4) \qquad ds^2 = R^2\,e^{\pm 2\theta}\,(du^2 + dv^2),$$

dove θ *è una soluzione dell'equazione* (I) *a derivate parziali. Viceversa, se* θ *è una soluzione della* (I), *vi corrispondono due coppie di superficie parallele a curvatura media costante* $\pm \frac{1}{R}$, *d'elemento lineare* (4). *I raggi principali di curvatura della prima coppia sono dati dalle formole* (5)

$$\rho_1 = R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\mathrm{senh}\,\theta} , \quad \rho_2 = \pm R\,\frac{e^{\pm\theta}}{\cosh\theta} ,$$

mentre per la seconda coppia vengono soltanto permutati ρ_1, ρ_2.

Segue di qui in particolare che: *Sopra ogni superficie di curvatura media costante le linee di curvatura formano un sistema isotermo.*

Si osserverà poi che ciascuna superficie di una delle due coppie è applicabile sopra una dell'altra coppia in guisa che le linee di curvatura si corrispondono, mentre si permutano i raggi principali di curvatura. Queste singolari deformazioni delle superficie a curvatura media costante furono già osservate al §. 237 (pag. 39) e quivi caratterizzate dalla proprietà che in ogni tale coppia di superficie applicabili tutte le coppie

di direzioni ortogonali sono altresì cinematicamente coniugate. Ora vediamo che queste deformazioni corrispondono per le superficie parallele applicabili sulla sfera alla trasformazione di Hazzidakis.

In generale abbiamo osservato, alla fine del §. 239, che tutte e sole le superficie aventi a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colle superficie a curvatura costante positiva sono suscettibili di una deformazione finita che conserva le linee di curvatura. Secondo i teoremi di Peterson (pag. 43) queste deformazioni corrispondono sempre alla trasformazione di Hazzidakis per le superficie applicabili sulla sfera.

In particolare una superficie parallela ad una superficie S a curvatura costante positiva potrà deformarsi conservando le sue linee di curvatura ed è facile vedere che dopo la deformazione sarà ancora parallela ad una tale superficie, omotetica alla coniugata S_1 della S. Se scriviamo infatti le (3), (3*) sotto la forma

$$\overline{ds}^2 = l^2 \left\{ (\cosh\theta + \frac{R}{l}\operatorname{senh}\theta)^2 du^2 + (\operatorname{senh}\theta + \frac{R}{l}\cosh\theta)^2 dv^2 \right\}$$

$$\overline{ds}_1^2 = R^2 \left\{ (\cosh\theta + \frac{m}{R}\operatorname{senh}\theta) du^2 + (\operatorname{senh}\theta + \frac{m}{R}\cosh\theta)^2 dv^2 \right\},$$

vediamo che, ponendo

$$\frac{R}{l} = \frac{m}{R}, \text{ o } \quad lm = R^2,$$

avremo

$$\overline{ds}_1 = \frac{R}{l}\overline{ds};$$

dunque: *Se alle due superficie* S, S_1 *applicabili sulla sfera di raggio* R, *coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis, si conducono le parallele* $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ *alle distanze* l, $\frac{R^2}{l}$ *sarà la* $\overline{S}$ *applicabile con conservazione delle linee di curvatura sulla omotetica della* S_1 *secondo il rapporto d'omotetia* $\frac{l}{R}$.

§. 394.

Trasformazione di Bonnet-Lie.

In analogia alla trasformazione di Lie per le superficie pseudosferiche (§. 391), abbiamo per le superficie applicabili sulla sfera, o per le parallele a curvatura media costante, una corrispondente trasformazione

trovata da Bonnet. Questa risulta semplicemente dall'osservare che se $\theta\,(u, v)$ è una soluzione della (I) anche la funzione

$$\Theta\,(u, v) = \theta\,(u\cos\sigma - v\,\mathrm{sen}\,\sigma\,,\quad u\,\mathrm{sen}\,\sigma + v\cos\sigma)$$

è una nuova soluzione, qualunque valore si attribuisca alla costante σ.

La trasformazione ha il significato geometrico più semplice quando si riferisca alle superficie a curvatura media costante. E infatti ponendo

$$(6)\qquad \begin{cases} u = u_1\cos\sigma - v_1\,\mathrm{sen}\,\sigma \\ v = u_1\,\mathrm{sen}\,\sigma + v_1\cos\sigma \end{cases}$$

e indicando $\theta_1\,(u_1, v_1)$ la funzione di u_1, v_1 in cui si cangia $\theta\,(u, v)$ per la sostituzione, l'elemento lineare (4) si trasforma in

$$(7)\qquad ds^2 = \mathrm{R}^2\, e^{\pm 2\theta_1}\,(du_1^2 + dv_1^2);$$

e siccome si ha

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial v_1^2} + \mathrm{senh}\,\theta_1\cosh\theta_1 = 0\ ,$$

esiste una superficie a curvatura media costante $\pm\frac{1}{\mathrm{R}}$ coll'elemento lineare (7), le linee u_1, v_1 essendo le linee di curvatura.

La nuova superficie è evidentemente applicabile sulla primitiva e le formole di corrispondenza dei loro punti essendo le (6), si può enunciare il teorema: *Ogni superficie a curvatura media costante può deformarsi serbando invariati i singoli raggi di curvatura ed in guisa che le nuove linee di curvatura taglino sotto angolo costante arbitrario le antiche.* Bonnet, al quale è dovuta la scoperta di queste singolari deformazioni delle superficie a curvatura media costante affatto analoghe a quelle delle superficie d'area minima (pag. 318) ha risoluto in generale il problema di determinare, per mezzo delle loro equazioni intrinseche, tutte le superficie che possono deformarsi conservando invariati i loro raggi principali di curvatura [1]. Fra queste ve ne ha una classe notevole che sono al tempo stesso superficie W ed applicabili sopra superficie di rotazione.

Noi osserveremo qui ancora soltanto che ogni superficie la quale ammetta una deformazione *continua* della specie considerata ha necessariamente linee di curvatura isoterme (§. 233, pag. 26).

---

[1] Journal de l'École Polytechnique, 42^{me} Cahier, 1867, pag. 72 e ss.

In fine accenniamo ad una classe di superficie a curvatura costante positiva, o a curvatura media costante, ciascuna delle quali si trasforma in sè stessa per trasformazioni di Bonnet; esse sono le analoghe delle superficie pseudosferiche considerate alla fine del Cap. precedente (pag. 434). Per trovarle basta cercare quelle soluzioni θ della equazione fondamentale (I) che sono funzioni di $\tau = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. Posto

$$\theta = f(\tau),$$

la (I) diventa

$$2\tau f'' + 2f' + \operatorname{senh} f \cosh f = 0;$$

ogni soluzione di questa ci dà una superficie della classe richiesta.

Le corrispondenti superficie a curvatura media costante d'elemento lineare

$$ds^2 = R^2 e^{2f}(du^2 + dv^2),$$

ammettendo una deformazione continua in sè medesime, durante la quale le linee $u^2 + v^2 =$ costante strisciano sopra sè stesse, sono applicabili sopra superficie di rotazione. Viceversa si dimostra facilmente [1] che, oltre le superficie elicoidali, esse sono le uniche superficie a curvatura media costante applicabili sopra superficie di rotazione.

§. 395.

Notizie storiche sulle nuove trasformazioni.

Cogli sviluppi dei tre paragrafi precedenti abbiamo già fatto conoscere in sostanza quanto era noto sulla teoria delle superficie a curvatura costante positiva fino al 1899. Ed ancora non erano trovate di tali superficie che quelle di rotazione, le elicoidali e le superficie di Enneper a linee di curvatura piane o sferiche. La trasformazione di Hazzidakis e quella di Bonnet portavano soltanto ad una nuova superficie o ad un ciclo chiuso di tali superficie con una costante arbitraria, ed erano quindi ben lungi dall'avere, per la teoria delle superficie applicabili sulla sfera, l'importanza delle trasformazioni complementari e di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.

---

[1] Cf. CHINI. — *Sulle superficie a curvatura media costante.* — Giornale di matematiche 1888.

I notevoli risultati conseguiti da Guichard in quest'epoca, [1] concernenti la deformazione delle quadriche di rotazione, che abbiamo esposto nel Cap. XXII, richiamando nuovamente l' attenzione sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante hanno aperto la via a nuovi perfezionamenti della teoria, che attualmente anche per le superficie a curvatura costante positiva si può dire aver raggiunto lo sviluppo già molti anni prima conseguito per le superficie pseudosferiche [2]. Abbiamo già in parte esposto nel Cap. XX, e particolarmente nel §. 310 i risultati fondamentali della nuova teoria, occupandoci della inversione dei teoremi di Guichard. Ora vogliamo meglio approfondire quelle relazioni delle nuove trasformazioni colle trasformazioni di Bäcklund, che risultano già dai teoremi al §. 266. In sostanza si può dire che l'esistenza di queste nuove trasformazioni era implicitamente contenuta nei risultati del teorema di permutabilità (§. 383 e seguenti) per le trasformazioni di Bäcklund; soltanto occorreva considerare insieme alle trasformazioni *reali* di Bäcklund anche quelle *immaginarie*, che combinate fra loro in modo conveniente, secondo il teorema di permutabilità, conducono nuovamente a superficie reali.

Ed appunto in questa circostanza che soltanto colla duplicazione delle antiche trasformazioni immaginarie di Bäcklund si poteva pervenire alle nuove reali è da ricercarsi, come sembra, la ragione per cui queste ultime rimasero così a lungo nascoste. Attualmente, come si vedrà, riesce ben facile lo stabilire le formole effettive per la composizione di siffatte trasformazioni immaginarie in trasformazioni reali, colla qual cosa si vengono altresì a confermare tutte le altre notevoli circostanze geometriche che accompagnano l'inversione dei teoremi di Guichard.

§. 396.

Composizione di due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund.

Cominciamo i nuovi studî sulle trasformazioni riprendendo i risultati del teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund insieme

---

[1] *Sur la déformation des quadriques de révolution* (Comptes Rendus 28 janvier 1899).

[2] Poco dopo la comparsa della nota di Guichard, e cioè nelle note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei del 10 febbraio, 5 marzo, 23 aprile e 21 maggio 1899 mi occupai dell'inversione di questi teoremi e ne sviluppai le conseguenze

colle formole relative (§. 383). Essendo S una superficie pseudosferica definita da

$$ds^2 = R^2 (\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2) , \tag{8}$$

applichiamo alla S due trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} a costanti diverse σ_1, σ_2, che conducono a due nuove superficie pseudosferiche S_1, S_2 corrispondenti a

$$ds_1^2 = R^2 (\cos^2\theta_1\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, dv^2)$$

$$ds_2^2 = R^2 (\cos^2\theta_2\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2\, dv^2) .$$

Le nuove soluzioni θ_1, θ_2, dell'equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta ,$$

sono legate alla θ dalle relazioni (39), (40) del §. 383 pag. 412

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1}{\cos\sigma_1} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\theta\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\sigma_1} \end{cases}$$

$$(9^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\sigma_2\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2}{\cos\sigma_2} \\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\sigma_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\sigma_2} . \end{cases}$$

Abbiamo allora, secondo il teorema di permutabilità, una quarta superficie pseudosferica S_3 perfettamente determinata, legata alla S_1 da una B'_{σ_2}, alla S_2 da una B'_{σ_1}, e definita da

$$ds_3^2 = R^2 (\cos^2\theta_3\, du + \operatorname{sen}^2\theta_3\, dv^2) \tag{10}$$

dove θ_3 si calcola in termini finiti dalla (C) pag. 416

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)} \operatorname{tang}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) . \tag{11}$$

---

per le trasformazioni delle superficie a curvatura costante. Posteriormente comparvero, a partire dal 27 marzo 1899, ricerche analoghe di Darboux sull'argomento.

Conviene inoltre ricordare le formole effettive (§. 383) colle quali si calcolano le coordinate x_3, y_3, z_3 del punto della S_3 corrispondente al punto (x, y, z) della S: esse sono

$$(12) \qquad x_3 = x + \Lambda\,\alpha\ , \quad y_3 = y + \Lambda\,\beta\ , \quad z_3 = z + \Lambda\,\gamma\ ,$$

dove si ha ((45) pag. 414)

$$(13) \qquad \Lambda = R\,\frac{\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 + \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1}$$

mentre α, β, γ sono definite dalle formole (42) pag. 413

$$(14) \quad \alpha = (\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos\theta_1 - \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\theta_2)\,X_1 +$$
$$+ (\cos\sigma_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 - \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\theta_2)\,X_2 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\,X_3$$

colle analoghe per β, γ.

Ora facciamo l'osservazione evidente che la parte analitica degli sviluppi relativi al teorema di permutabilità conserva la sua validità sia per valori reali che per valori complessi delle funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2$ e delle costanti σ_1, σ_2. Dopo ciò supponiamo che la superficie pseudosferica iniziale S sia ancora reale, ma prendiamo la costante σ_1 complessa qualunque anzichè reale. La soluzione θ_1 della (9) (contenente una costante complessa arbitraria) sarà essa stessa complessa, ed immaginaria sarà quindi la superficie pseudosferica contigua S_1.

È evidente ora che si soddisferà alle (9*) prendendo per θ_2, σ_2 le quantità complesse coniugate di θ_1, σ_1, quantità che indicheremo con

$$\overline{\theta_1}\ , \quad \overline{\sigma_1}\ ,$$

sicchè avremo

$$\theta_2 = \overline{\theta_1}\ , \quad \sigma_2 = \overline{\sigma_1}\ .$$

La superficie S_2 sarà dunque anch'essa immaginaria e precisamente la *coniugata* di S_1. Ma allora le formole (13), (14) dimostrano subito che le quantità

$$\Lambda,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

sono *immaginarie pure*, perchè cangiano di segno permutando σ_1 con σ_2 e θ_1 con θ_2, cioè mutando i in $-i$, e dalle (12) segue che x_3, y_3, z_3 sono reali, ossia la quarta superficie pseudosferica S_3 del teorema di permutabilità risulta ancora reale. Dunque: *Se ad una superficie pseudosferica reale* S *si applica una trasformazione complessa di Bäcklund e se ne deduce la superficie pseudosferica immaginaria* S_1, *indi si considera*

la coniugata S_2 *di* S_1 *trasformata di* S *per la trasformazione coniugata, la quarta superficie pseudosferica* S_3 *legata, come la* S, *ad* S_1, S_2 *da trasformazioni coniugate di Bäcklund risulta nuovamente reale.*

Così si perviene dalla superficie pseudosferica reale S alla superficie reale S_3 componendo fra loro, *nel modo assegnato dal teorema di permutabilità,* due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund.

§. 397.

Le formole effettive per la S_3 sotto forma reale.

Vogliamo ora separare effettivamente nelle formole del §. precedente il reale dall'immaginario, per presentare le formole relative alla S_3 sotto l'aspetto definitivo reale.

Separando il reale dall'immaginario, poniamo

$$\sigma_1 = a + i\,b\ , \quad \theta_1 = \omega + i\,\varphi \tag{15}$$

indi

$$\sigma_2 = a - i\,b\ , \quad \theta_2 = \omega - i\,\varphi\ .$$

Avremo

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\omega\cosh\varphi + i\cos\omega\operatorname{senh}\varphi \\ \cos\theta_1 = \cos\omega\cosh\varphi - i\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\varphi\ , \end{cases}$$

mentre $\operatorname{sen}\theta_2$, $\cos\theta_2$ saranno le quantità coniugate. Osserviamo poi che si ha

$$\operatorname{sen}\sigma_1\cos\sigma_2 = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}(\sigma_1+\sigma_2) + \operatorname{sen}(\sigma_1-\sigma_2)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}2a + i\operatorname{senh}2b\right\}$$

$$\cos\sigma_1\cos\sigma_2 = \frac{1}{2}\left\{\cos(\sigma_1+\sigma_2) + \cos(\sigma_1-\sigma_2)\right\} = \frac{1}{2}\left(\cos 2a + \cosh 2b\right) =$$

$$= \cos^2 a + \operatorname{senh}^2 b$$

$$\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 = \frac{1}{2}\left\{\cos(\sigma_1-\sigma_2) - \cos(\sigma_1+\sigma_2)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\cosh 2b - \cos 2a\right\}$$

$$\operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2 - 1 = \operatorname{senh}^2 b - \cos^2 a$$

Ne deduciamo per le (14)

$$\begin{aligned} \alpha = &- i\,(\operatorname{sen}2a\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\varphi + \operatorname{senh}2b\cos\omega\cosh\varphi)\,X_1 \\ &+ i\,(\operatorname{sen}2a\cos\omega\operatorname{senh}\varphi - \operatorname{senh}2b\operatorname{sen}\omega\cosh\varphi)\,X_2 \\ &- i\,(\cos^2 a + \operatorname{senh}^2 b)\operatorname{senh}2\varphi\,X_3\ , \end{aligned} \tag{15*}$$

e dalla (13)

$$\Lambda = i\,\mathrm{R}\frac{\cos a\,\operatorname{senh} b}{\operatorname{senh}^2 b\,\cosh^2\varphi + \cos^2 a\,\operatorname{senh}^2\varphi}\ ; \tag{16}$$

sostituendo dunque nelle (12) avremo per le formole richieste

$$\begin{aligned} x_3 = x + \frac{\mathrm{R}\cos a\,\operatorname{senh} b}{\operatorname{senh}^2 b\,\cosh^2\varphi + \cos^2 a\,\operatorname{senh}^2\varphi}\times \\ \Big\{(\operatorname{senh} 2b\cos\omega\cosh\varphi + \operatorname{sen} 2a\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\varphi)\,\mathrm{X}_1 + \\ +(\operatorname{senh} 2b\operatorname{sen}\omega\cosh\varphi - \operatorname{sen} 2a\cos\omega\operatorname{senh}\varphi)\,\mathrm{X}_2 \\ +(\cos^2 a + \operatorname{senh}^2 b)\operatorname{senh} 2\varphi\,\mathrm{X}_3\Big\} \end{aligned} \tag{16*}$$

colle analoghe per y_3, z_3. Queste ci definiscono, libera da immaginarii, la superficie pseudosferica reale S_3. Per l'elemento lineare della S_3, riferita alle linee di curvatura u, v avremo

$$ds_3^2 = \mathrm{R}^2(\cos^2\theta_3\,du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\,dv^2), \tag{17}$$

dove θ_3, secondo la (11), sarà definita dalla formola

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) = \frac{\cos a}{\operatorname{senh} b}\operatorname{tangh}\varphi\,. \tag{18}$$

Conviene ancora separare, nelle formole (9) della trasformazione di Bäcklund che definiscono $\theta_1 = \omega + i\varphi$, il reale dall'immaginario. Si ottengono formole più semplici introducendo i parametri

$$\alpha = \frac{1}{2}(u-v)\,,\quad \beta = \frac{1}{2}(u+v)$$

delle assintotiche, con che le (9) si scrivono (§. 391)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial\alpha} = l\operatorname{sen}(\theta_1+\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{l}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta), \end{cases}$$

dove si è posto

$$l = \frac{1+\operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1}\,.$$

Indicando con m il modulo, con τ l'argomento della costante l, pongasi

$$l = me^{i\tau} = \frac{\cos a + i\operatorname{senh} b}{\cosh b - \operatorname{sen} a}$$

e le precedenti si scindono nelle quattro

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega-\theta)}{\partial\alpha} = m\left\{\cos\tau\,\mathrm{sen}\,(\omega+\theta)\cosh\varphi - \mathrm{sen}\,\tau\cos(\omega+\theta)\,\mathrm{senh}\,\varphi\right\} \\ \dfrac{\partial(\omega+\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1}{m}\left\{\cos\tau\,\mathrm{sen}\,(\omega-\theta)\cosh\varphi + \mathrm{sen}\,\tau\cos(\omega-\theta)\,\mathrm{senh}\,\varphi\right\} \end{cases}$$

$$(19^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = m\left\{\mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,(\omega+\theta)\cosh\varphi + \cos\tau\cos(\omega+\theta)\,\mathrm{senh}\,\varphi\right\} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \dfrac{1}{m}\left\{-\mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,(\omega-\theta)\cosh\varphi + \cos\tau\cos(\omega-\theta)\,\mathrm{senh}\,\varphi\right\}. \end{cases}$$

È ben naturale, come del resto si verifica subito, che questo sistema di equazioni a differenziali totali per le funzioni incognite ω, φ è illimitatamente integrabile in forza dell'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\theta} = \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

cui soddisfa θ. Si osserverà poi che la formola (18) si può scrivere

$$(18^*)\qquad \mathrm{tang}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right) = \cot\tau\,\mathrm{tgh}\,\varphi\ .$$

Un'osservazione semplice ma importante si può fare inoltre sulle (19), (19*). Se in queste si cangiano α, β rispettivamente in $m\alpha, \frac{\beta}{m}$ si ottengono le formole stesse con $m = 1$. Ora il porre $m = 1$ equivale ad assumere σ_1 puramente immaginario ($a = 0$), e poichè d'altronde il detto passaggio corrisponde ad una trasformazione di Lie (§. 391), vediamo che: *Se due superficie pseudosferiche* S, S_3 *sono trasformate l'una dell'altra per una trasformazione generale del* §. 396, *composta di due trasformazioni coniugate di Bäcklund* B_{a+ib}, B'_{a-ib}, *applicando ad* S, S_3 *simultaneamente una conveniente trasformazione reale di Lie* L_3 [1], *si ottengono due superficie pseudosferiche* $S'_1 S'_3$ *legate fra loro da una particolare trasformazione del* §. 396 *composta di due trasformazioni di Bäcklund puramente immaginarie ed opposte* $B_{ib'}, B_{-ib'}$ [2].

---

[1] Si vede subito che il valore di σ è dato dalla formola $\mathrm{sen}\,\sigma = \dfrac{\mathrm{sen}\,a}{\cosh b}$.

[2] Il valore di b' è dato da: $\mathrm{senh}\,b' = \dfrac{\mathrm{senh}\,b}{\cos a}$.

§. 398.

Composizione di due trasformazioni puramente immaginarie opposte.

Le ultime ricerche ora esposte ci conducono a studiare particolarmente il caso in cui la trasformazione reale che conduce dalla superficie pseudosferica reale S alla reale S_3 si compone di due trasformazioni puramente immaginarie ed opposte di Bäcklund B_{ib}, B_{-ib}. Nella totalità delle trasformazioni reali del §. 396 esse occupano, pei teoremi precedenti, il medesimo posto come la trasformazione complementare nella totalità delle trasformazioni di Bäcklund (§. 391).

Secondo i risultati del §. 389 (ove i calcoli sviluppati conservano evidentemente la loro validità anche per valori complessi di σ_1, σ_2) possiamo caratterizzare le speciali trasformazioni che formano ora l'oggetto del nostro studio dicendo che: *soltanto nel caso attuale le normali in due punti corrispondenti alle due superficie trasformate* S, S_3 *si incontrano.* E in fatti dobbiamo avere per questo (§. 389).

$$\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma_2 = \operatorname{sen}(a+ib) + \operatorname{sen}(a-ib)$$

$$= 2\operatorname{sen} a \cosh b = 0$$

e per ciò $a = 0$[1]

Vogliamo ora esaminare la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_3 in punti corrispondenti per dimostrare che S_0 è applicabile sul *sinusoide iperbolico* e che S, S_3 sono le due falde dell'inviluppo di sfere coi centri su S_0 associato nei teoremi del §. 259 ad ogni deformata del sinusoide.

Cominciamo dallo scrivere pel caso attuale $a = 0$ le formole del §. precedente relative alla S_3. Facendo $\sigma_1 = ib$, $\theta_1 = \omega + i\varphi$ nelle (9) pag. 443 e separando il reale dall'immaginario, si hanno per determinare ω, φ le equazioni

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\varphi}{\cosh b}\operatorname{sen}\omega \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta\cosh\varphi + \operatorname{senh} b\cos\theta\operatorname{senh}\varphi}{\cosh b}\cos\omega \end{cases}$$

---

[1] È evidentemente inutile considerare gli altri valori di a pei quali $\operatorname{sen} a = 0$.

$$(20^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{\cos\theta \operatorname{senh}\varphi + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\theta \cosh\varphi}{\cosh b}\cos\omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh}\varphi - \operatorname{senh} b \cos\theta \cosh\varphi}{\cosh b}\operatorname{sen}\omega, \end{cases}$$

equazioni che formano in ω, φ un sistema illimitatamente integrabile. Le formole (16*) per definire S_3 diventano nel caso attuale:

$$(21)\qquad x_3 = x + \frac{R \operatorname{senh} 2b \cosh\varphi}{\cosh^2 b \cosh^2\varphi - 1} \times$$
$$\times \left\{ \operatorname{senh} b \cos\omega\, X_1 + \operatorname{senh} b \operatorname{sen}\omega\, X_2 + \cosh b \operatorname{senh}\varphi\, X_3 \right\}.$$

Indichino ora

$$x_0 = x + T X_3,\ y_0 = y + T Y_3,\ z_0 = z + T Z_3$$

le coordinate del punto M_0 ove si incontrano le normali in due punti corrispondenti M, M_3 alle superficie S, S_3. Per trovare il valore algebrico di $T = \overline{M M_0}$ basta esprimere che la congiungente $M_0 M_3$ deve essere normale alla $M_1 M_3$, essendo

$$x_1 = x + R \cosh b\,(\cos\theta_1 X_1 + \operatorname{sen}\theta_1 X_2)$$

le coordinate di M_1 (Cf. §. 390). Ora dalla condizione.

$$\sum (x_0 - x_3)\ (x_1 - x_3) = 0$$

si trae subito, avendo riguardo alle formole superiori, pel cercato valore di T:

$$(22)\qquad T = R \operatorname{senh} b \coth\varphi\ ^{(1)}.$$

Si avrà dunque

$$(23)\qquad x_0 = x + R \operatorname{senh} b \coth\varphi\, X_3$$

colle analoghe per y_0, z_0, e si verificherà subito che si ha $\Sigma(x_0 - x_3)^2 = T^2$, cioè che il punto M_0 dista ugualmente da M, M_3.

Per calcolare ora l'elemento lineare della superficie S_0 descritta dal punto $M_0 = (x_0\, y_0\, z_0)$ si derivino rispetto ad u, v le precedenti, tenendo conto delle (19) e delle formole della tabella (A) §. 373 (pag. 391)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R\cos\theta X_1,\ \frac{\partial x}{\partial v} = R\operatorname{sen}\theta X_2$$
$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta X_1,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta X_2;$$

---

(1) Per la (18) si può scrivere anche

$$T = R\cot\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right).$$

se ne deduce

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{R}{\operatorname{senh}\varphi}\left\{\frac{\cosh b}{\cos\omega}X_1 - \frac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{senh}\varphi}X_3\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{R}{\operatorname{senh}\varphi}\left\{\frac{\cosh b}{\operatorname{sen}\omega}X_2 - \frac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{senh}\varphi}X_3\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

e quindi

$$ds_0^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = R^2\frac{\operatorname{senh}^2 b}{\operatorname{senh}^4\varphi}d\varphi^2 +$$

$$+ R^2\frac{\cosh^2 b}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left\{\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 du^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2\right\},$$

od anche

$$ds_0^2 = R^2\frac{\operatorname{senh}^2 b + \cosh^2 b\operatorname{senh}^2\varphi}{\operatorname{senh}^4\varphi}d\varphi^2 + \tag{24}$$

$$+ R^2\frac{\cosh^2 b}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u}du - \cot\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2.$$

Ora si vede subito che l'espressione

$$\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u}du - \cot\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv = \frac{\cos\theta\operatorname{senh}\varphi + \operatorname{senh} b\operatorname{sen}\theta\cosh\varphi}{\cosh b}\operatorname{sen}\omega\,du$$

$$- \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{senh}\varphi - \operatorname{senh} b\cos\theta\cosh\varphi}{\cosh b}\cos\omega\,dv$$

è un differenziale esatto, in forza delle (20), (20*). Posto dunque

$$\psi(u, v) = \int\left(\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u}du - \cot\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right),$$

la (24) diventa

$$ds_0^2 = R^2\frac{\operatorname{senh}^2 b + \cosh^2 b\operatorname{senh}^2\varphi}{\operatorname{senh}^4\varphi}d\varphi^2 + R^2\frac{\cosh^2 b}{\operatorname{senh}^2\varphi}d\psi^2,$$

e mette in evidenza l'elemento lineare di una superficie di rotazione. Per equazione della curva meridiana si può prendere

$$r = R\operatorname{senh} b\operatorname{senh}\left(\frac{z}{R}\right),$$

ove si ponga

$$\cosh\left(\frac{z}{R}\right) = \coth\varphi, \quad \operatorname{senh}\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{1}{\operatorname{senh}\varphi}.$$

Si ha così appunto il sinusoide iperbolico del §. 259 e si noti che

il valore di

$$T = R \operatorname{senh} b \cosh\left(\frac{z}{R}\right)$$

combina appunto con quello del raggio delle sfere associate nel teorema del citato §. Riassumiamo i risultati ottenuti nella proposizione:

Se le due superficie pseudosferiche reali S, S_3 *di raggio* R *sono dedotte l'una dall'altra combinando due trasformazioni pitramente immaginarie coniugate di Bäcklund* B_{ib}, B_{-ib}, *le normali in punti corrispondenti di* S, S_3 *si incontrano in un punto che descrive una superficie applicabile sul sinusoide iperbolico*

$$r = R \operatorname{senh} b \operatorname{senh}\left(\frac{z}{R}\right)$$

e le sfere descritte con centro in M_0 *e con raggio*

$$T = R \operatorname{senh} b \cosh\left(\frac{z}{R}\right)$$

hanno per le due falde dell' inviluppo precisamente S, S_3. (Cf. §§. 266 e 390).

§. 399.

Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund per le superficie di curvatura costante positiva.

Veniamo ora al caso più interessante, al caso cioè delle superficie a curvatura costante positiva. Per queste le trasformazioni *semplici* di Bäcklund sono sempre necessariamente immaginarie, come già risulta dai teoremi sulle congruenze pseudosferiche (I, pag. 323); ma se si combinano fra loro due tali trasformazioni immaginarie coniugate, secondo il teorema di permutabilità, si ottiene una trasformazione reale. Conviene quindi che cerchiamo in primo luogo le formole delle trasformazioni elementari di Bäcklund per una superficie reale S a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$, e combinando poi opportunamente due tali trasformazioni, facciamo sparire gli immaginarî.

L'elemento lineare della nostra superficie S, applicabile sulla sfera di raggio R, sia dato dalla (1) §. 392 (pag. 436)

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2) \tag{25}$$

essendo u, v le linee di curvatura e

$$r_1 = R \coth\theta \ , \quad r_2 = R \operatorname{tgh}\theta \tag{26}$$

i raggi principali di curvatura. Ritenendo per la superficie S le consuete notazioni della teoria generale, scriviamo in primo luogo le corrispondenti formole fondamentali (§. 254)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = R \operatorname{senh}\theta \, X_1 & , \dfrac{\partial x}{\partial v} = R \cosh\theta \, X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_2 - \cosh\theta \, X_3 \ , & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v} X_1 , \ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \cosh\theta \, X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_2 & , \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u} X_1 - \operatorname{senh}\theta X_3 , \ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta X_2 . \end{cases} \tag{27}$$

Per ogni punto M di S conduciamo, nel piano tangente, un segmento $\overline{M M'}$ di lunghezza costante $= k$, e sia φ il suo angolo d'inclinazione sulle linee v. Cerchiamo di determinare la costante k e la funzione incognita φ di u, v, in guisa che per la superficie S' luogo di M' abbiano luogo le seguenti proprietà:

1.° il segmento M M' tocchi in M' la S' come tocca in M la S (cioè S' sia la seconda falda focale della congruenza M M').

2.° Sia costante l'angolo delle due normali in M, M'. [1]

Per le coordinate x', y', z' di M' abbiamo

$$x' = x + k(\cos\varphi \, X_1 + \operatorname{sen}\varphi \, X_2) \ , \tag{28}$$

e derivando coll'osservare le (27), deduciamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \Big[R \operatorname{senh}\theta - k \operatorname{sen}\varphi \, A\Big] X_1 + k \cos\varphi \, A \, X_2 - k \cos\varphi \cosh\theta \, X_3 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -k \operatorname{sen}\varphi \, B \, X_1 + \Big[R \cosh\theta + k \cos\varphi \, B\Big] X_2 - k \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\theta \, X_3 , \end{cases} \tag{29}$$

avendo posto per brevità

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta}{\partial v} \\ B = \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} . \end{cases} \tag{29*}$$

---

[1] Con ciò esprimiamo che nella congruenza generata dai raggi M M' è costante la distanza dei due fuochi M, M', ed insieme quella dei punti limiti.

La prima condizione imposta si esprime coll'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial u} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix},$$

che si traduce per le precedenti nell'equazione lineare fra A e B [1]:

$$(30)\quad k \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\theta\, A - k\cos\varphi \cosh\theta\, B = R(\cos^2\varphi \cosh^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{senh}^2\theta).$$

La normale in M' alla S' deve essere perpendicolare alle due direzioni che hanno i coseni rispettivamente proporzionali a

$$\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial y'}{\partial u}, \quad \frac{\partial z'}{\partial u}$$

$$x'-x, \quad y'-y, \quad z'-z.$$

Se indichiamo con X'_3, Y'_3, Z'_3 i coseni di direzione della detta normale, avremo dunque:

$$X'_3 = \rho\left[\operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2 + \frac{R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\theta - kA}{k\cos\varphi\cosh\theta} X_3\right]$$

e formole analoghe per Y', Z', indicando con ρ un fattore di proporzionalità. Ma, per ipotesi, deve essere

$$\sum X_3 X'_3 = \text{costante}$$

e quindi

$$\frac{R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\theta - kA}{k\cos\varphi\cosh\theta} = c,$$

essendo c una costante. Da questa e dalla (30) si trae, avendo riguardo ai valori (29*) di A, B:

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{R}{k} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{senh}\theta - c\cos\varphi\cosh\theta \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{R}{k}\cos\varphi\cosh\theta - c\operatorname{sen}\varphi\operatorname{senh}\theta. \end{cases}$$

---

[1] Si ricordi che $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 1.$

Derivando la prima di queste rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo, col ricordare che θ è una soluzione dell'equazione fondamentale

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,,$$

ed osservando le (31) stesse, otteniamo per la condizione d'integrabilità la relazione:

$$\text{(32)} \qquad c^2 + \frac{R^2}{k^2} + 1 = 0$$

fra le costanti c, k, ciò che dimostra essere la trasformazione *necessariamente immaginaria*. Per soddisfare la (32) poniamo

$$c = \operatorname{senh}\sigma\,, \quad \frac{R}{k} = i\cosh\sigma\,,$$

indicando con σ una costante arbitraria complessa. Poniamo inoltre

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + i\,\theta_1\,,$$

indi

$$\operatorname{sen}\varphi = \cosh\theta_1\,, \quad \cos\varphi = -i\operatorname{senh}\theta_1$$

e le (31) assumeranno la forma

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1\,. \end{cases}$$

Soddisfacendo θ alla (A), queste formano, rispetto alla funzione incognita θ_1, un sistema illimitatamente integrabile ed eliminando dalle (B) per derivazione θ anzichè θ_1, si trova subito che θ_1 è alla sua volta una soluzione dell'equazione fondamentale (A). Soltanto, mentre la θ era reale, la θ_1 è necessariamente immaginaria.

Si consideri ora la superficie (immaginaria) S′; per essa le (28), (29) diventano:

$$\text{(33)} \qquad x' = x - R\,\frac{\operatorname{senh}\theta_1 X_1 + i\cosh\theta_1 X_2}{\cosh\sigma_1}$$

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,\theta_1 \Big\{ -(\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1 + \mathrm{tgh}\,\sigma\,\cosh\theta\cosh\theta_1)\,\mathrm{X}_1 - \\ \quad -i(\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1 + \mathrm{tgh}\,\sigma\,\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1)\,\mathrm{X}_2 + \dfrac{\cosh\theta}{\cosh\sigma}\,\mathrm{X}_3 \Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \mathrm{R}\cosh\theta_1 \Big\{ -i\,(\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1 + \mathrm{tgh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1)\,\mathrm{X}_1 + \\ \quad +(\cosh\theta\cosh\theta_1 + \mathrm{tgh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1)\,\mathrm{X}_2 + i\,\dfrac{\mathrm{senh}\,\theta}{\cosh\sigma}\,\mathrm{X}_3 \Big\}\,. \end{cases}$$

Di qui, per l'elemento lineare ds' di S' deduciamo

$$ds'^2 = \mathrm{R}^2\,(\mathrm{senh}^2\,\theta_1\,du^2 + \cosh^2\theta_1\,dv^2)\,,$$

e siccome θ_1 soddisfa la (A), la curvatura della S' è ancora $= \frac{1}{\mathrm{R}^2}$. Si osservi poi che dalle (34) seguono pei coseni di direzione

$$\mathrm{X}'_3,\quad \mathrm{Y}'_3,\quad \mathrm{Z}'_3,$$

della normale a S' le formole

$$(35)\qquad \mathrm{X}'_3 = \frac{\cosh\theta_1\,\mathrm{X}_1 + i\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,\mathrm{X}_2 + \mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{X}_3}{\cosh\sigma}\,.$$

Se ne deduce

$$(36)\qquad \sum \mathrm{X}'_3\,\mathrm{X}_3 = \mathrm{tgh}\,\sigma\,,$$

e si osserverà ancora che si ha

$$(36^*)\qquad \overline{\mathrm{M}\,\mathrm{M}'}^2 = k^2 = -\frac{\mathrm{R}^2}{\cosh^2\sigma}\,.$$

§. 400.

Il teorema di permutabilità.

Una trasformazione semplice B_σ di Bäcklund fa derivare da una superficie *reale* S applicabile sulla sfera di raggio R una nuova superficie S' della stessa natura, ma necessariamente immaginaria. Ma consideriamo ora due trasformate S_1, S_2 di S, contigue ad S per due trasformazioni B_{σ_1}, B_{σ_2} di Bäcklund a costanti (reali o complesse) σ_1, σ_2 differenti. Gli sviluppi analitici relativi al teorema di permutabilità sussistono evidentemente inalterati ed esiste per ciò una quarta superficie S_3, pienamente

determinata, della stessa curvatura $K = +\frac{1}{R^2}$, e contigua alla S_1 per una trasformazione B'_{σ_2}, alla S_1 per una B'_{σ_1}. Conviene innanzi tutto che troviamo, in termini finiti, questa quarta superficie S_3. Siano M, M_1, M_2, M_3 quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3; indichiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate di M_1, con

$$X_3^{(1)}, \quad Y_3^{(1)}, \quad Z_3^{(1)}$$

i coseni di direzione della normale alla S_1 in M_1 e notazioni analoghe teniamo per le altre due superficie S_2, S_3.

Dalle (33), (35) avremo

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = x - R\,\dfrac{\operatorname{senh}\theta_1 X_1 + i\cosh\theta_1 X_2}{\cosh\sigma_1} \\ x_2 = x - R\,\dfrac{\operatorname{senh}\theta_2 X_1 + i\cosh\theta_2 X_2}{\cosh\sigma_2} \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} X_3^{(1)} = \dfrac{\cosh\theta_1 X_1 + i\operatorname{senh}\theta_1 X_2 + \operatorname{senh}\sigma_1 X_3}{\cosh\sigma_1} \\ X_3^{(2)} = \dfrac{\cosh\theta_2 X_1 + i\operatorname{senh}\theta_2 X_2 + \operatorname{senh}\sigma_2 X_3}{\cosh\sigma_2} \end{cases},$$

dove θ_1, θ_2 sono legate a θ dalle corrispondenti equazioni (B):

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(39^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 . \end{cases}$$

Ora, per trovare le coordinate x_3, y_3, z_3 del punto M_3 di S_3, si osservi che questo punto si trova sulla retta $M M_3$ intersezione dei due piani tangenti in M_1, M_2 a S_1, S_2. Dalle (38) risulta subito che i coseni di direzione di questa retta $M M_3$ sono proporzionali alle quantità α, β, γ

date dalle espressioni

$$(40)\qquad \alpha = (\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_2)\,X_1 + \\ + i\,(\operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta_2)\,X_2 + \operatorname{senh}(\theta_2 - \theta_1)\,X_3\ ,$$

colle analoghe per β, γ.

Dopo ciò potremo porre, indicando con Λ una conveniente funzione incognita:

$$(41)\qquad x_3 = x + \Lambda\,\alpha\ ,\quad y_3 = y + \Lambda\,\beta\ ,\quad z_3 = z + \Lambda\,\gamma\ ,$$

e Λ sarà da determinarsi in guisa che risulti

$$\sum (x_3 - x_1)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_2}\ ,\ \sum (x_3 - x_2)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_1}\ ,$$

cioè

$$(41^*)\quad \sum \left\{\Lambda\,\alpha + (x - x_1)\right\}^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_2}\ ,\ \sum \left\{\Lambda\alpha + (x - x_2)\right\}^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_1}\ .$$

Sottraendo le due ultime, coll'osservare che si ha

$$\sum (x - x_1)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_1}\ ,\ \sum (x - x_2)^2 = -\frac{R^2}{\cosh^2\sigma_2}\ ,$$

si ottiene

$$\Lambda \sum \alpha\,(x_2 - x_1) = R^2\,\frac{\cosh^2\sigma_2 - \cosh^2\sigma_1}{\cosh^2\sigma_1 \cosh^2\sigma_2}\ .$$

Ora, avendo riguardo alle (40) ed alle altre

$$x_2 - x_1 = R\left\{\left(\frac{\operatorname{senh}\theta_1}{\cosh\sigma_1} - \frac{\operatorname{senh}\theta_2}{\cosh\sigma_2}\right)X_1 + i\left(\frac{\cosh\theta_1}{\cosh\sigma_1} - \frac{\cosh\theta_2}{\cosh\sigma_2}\right)X_2\right\}\ ,$$

ne segue pel cercato valore di Λ la formola

$$(42)\qquad \Lambda = R\,\frac{\operatorname{senh}(\sigma_2 - \sigma_1)}{\cosh\sigma_1 \cosh\sigma_2\,[\cosh(\theta_1 - \theta_2) - \cosh(\sigma_1 - \sigma_2)]}\ ,$$

e sostituendo nelle (41) questo valore per Λ si avranno le formole finali richieste, che definiscono in termini finiti la S_3. Calcoliamo in fine la funzione $\theta_3\,(u, v)$ che figura nell'elemento lineare della S_3

$$(43)\qquad ds_3^2 = R^2\,(\operatorname{senh}^2\theta_3\,du^2 + \cosh^2\theta_3\,dv^2)\ .$$

A tale oggetto ricordiamo che la S_3 deriva dalla S_1 per mezzo di una trasformazione B'_{σ_2} e dalla S_2 per mezzo di una B'_{σ_1}. Dalla (33) risulta

che, prendendo convenientemente θ_3, potremo scrivere

$$x_3 = x_1 + R\,\frac{\operatorname{senh}\theta_3\, X_1^{(1)} + i\cosh\theta_3\, X_2^{(1)}}{\cosh\sigma_2}$$

$$x_3 = x_2 + R\,\frac{\operatorname{senh}\theta_3\, X_1^{(2)} + i\cosh\theta_3\, X_2^{(2)}}{\cosh\sigma_1}\,.$$

Dal confronto di queste due formole, osservando le (37) ed i valori effettivi per $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ che seguono dalle (34):

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = -(\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma_1\cosh\theta\cosh\theta_1)\,X_1 - \\ \quad - i\,(\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,X_2 + \dfrac{\cosh\theta}{\cosh\sigma_1}\,X_3 \\ X_2^{(1)} = -i\,(\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1)\,X_1 + \\ \quad + (\cosh\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,X_2 + \dfrac{i\operatorname{senh}\theta}{\cosh\sigma_1}\,X_3 \end{cases}$$

colle analoghe per $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$, ne deduciamo per determinare θ_3 le due formole seguenti

$$\begin{cases} \cosh(\theta_3-\theta) = \dfrac{\cosh(\sigma_1-\sigma_2)\cosh(\theta_1-\theta_2) - 1}{\cosh(\theta_1-\theta_2) - \cosh(\sigma_1-\sigma_2)} \\ \operatorname{senh}(\theta_3-\theta) = \dfrac{\operatorname{senh}(\sigma_1-\sigma_2)\operatorname{senh}(\theta_1-\theta_2)}{\cosh(\theta_1-\theta_2) - \cosh(\sigma_1-\sigma_2)}\,. \end{cases}$$

La loro compatibilità risulta d'altronde confermata dal quadrare e sottrarre i secondi membri, con che si ottiene l'unità.

Alle due precedenti possiamo sostituire l'unica ben semplice (Cf. §. 384)

$$\text{(C)}\qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_2-\theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).$$

Ed ora, se deriviamo rapporto ad u e v questa formola, facilmente veniamo a verificare che θ_3 è legata a θ_1, θ_2 dalle rispettive formole della trasformazione di Backlund:

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma_2\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(44^*)\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \\ i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma_1\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 . \end{cases}$$

Queste formole si ottengono dalle (39), (39*) scambiando 0 con θ_3 e σ_1 con σ_2. Esse contengono, come derivate dalla (C) e dalle (39), (39*), l'espressione analitica del teorema di permutabilità nel caso attuale.

§. 401.

Composizione di due trasformazioni immaginarie coniugate.

Le due superficie S_1, S_2, contigue per trasformazioni di Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} alla superficie reale S, sono sempre immaginarie, ed in generale sarà pure immaginaria la quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità. Ma, se prendiamo S_2 in conveniente relazione con S_1, potremo far sì che questa quarta superficie S_3 riesca nuovamente reale.

Ed infatti, essendo σ_2 una costante complessa qualunque, sia θ_1 una soluzione (complessa) delle (39). Se, indicando con $\overline{\sigma_1}$, $\overline{\theta_1}$ le quantità coniugate di σ_1, θ_1, poniamo:

$$\sigma_2 = -\overline{\sigma_1} \quad , \quad \theta_2 = \pi i - \overline{\theta_1} ,$$

vediamo che θ_2 è una soluzione delle (39*) e, a causa delle (37), le due superficie S_1, S_2 sono immaginarie coniugate. Le formole (40), (42) dimostrano poi che le quantità

$$\alpha , \ \beta , \ \gamma , \ \Lambda$$

sono tutte reali, e per le (41) è quindi anche reale la superficie S_3. Ciò risulta altresì confermato dalla formola (C) che diventa

$$(C^*) \qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - 0}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 + \overline{\sigma_1}}{2}\right)\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1 + \overline{\theta_1}}{2}\right) ,$$

essendo evidentemente la quantità del secondo membro reale e minore, in valore assoluto, dell' unità.

Per presentare le formole sotto aspetto reale basta separare nelle formole precedenti il reale dall'immaginario. Se si pone

$$\sigma_1 = a + ib \quad , \quad \theta_1 = \omega + i\varphi ,$$

la (C*) diventa

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega \ ,$$

e, calcolando dalle (41) i valori di x_3, y_3, z_3, si trovano subito le formole seguenti

$$\text{(D)} \qquad x_3 = x + 2\,\mathrm{R}\,\frac{\operatorname{senh} a \cosh a}{(\operatorname{senh}^2 a + \cos^2 b)\,(\operatorname{senh}^2 a + \cosh^2 \omega)} \times$$

$$\times \Big\{ -(\operatorname{senh} a \cos b \operatorname{senh} \omega \cos \varphi + \cosh a \operatorname{sen} b \cosh \omega \operatorname{sen} \varphi)\, \mathrm{X}_1 +$$

$$+ (\operatorname{senh} a \cos b \operatorname{senh} \omega \operatorname{sen} \varphi - \cosh a \operatorname{sen} b \cosh \omega \cos \varphi)\, \mathrm{X}_2 +$$

$$+ \operatorname{senh} \omega \cosh \omega\, \mathrm{X}_3 \Big\} \ ,$$

colle analoghe per y_3, z_3. Queste ci definiscono, sotto forma reale, la superficie trasformata S_3.

Le funzioni reali ω, φ risultano definite dalle (39), che separando le parti reali ed immaginarie e ponendo per brevità:

$$\text{(45)} \quad \begin{cases} \mathrm{A} = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh a \cosh \theta \cosh \omega \\ \mathrm{B} = \operatorname{senh} a \cosh \theta \operatorname{senh} \omega + \cosh a \operatorname{senh} \theta \cosh \omega \\ \mathrm{C} = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} \theta \cosh \omega + \cosh a \cosh \theta \operatorname{senh} \omega \\ \mathrm{D} = \operatorname{senh} a \cosh \theta \cosh \omega + \cosh a \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega \ , \end{cases}$$

danno luogo al sistema

$$\text{(46)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = \cos b\,\mathrm{B}\cos\varphi - \operatorname{sen} b\,\mathrm{A}\operatorname{sen}\varphi \ , & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \cos b.\,\mathrm{D}\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} b.\,\mathrm{C}\cos\varphi \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = -\operatorname{sen} b\,\mathrm{B}\cos\varphi - \cos b\,\mathrm{A}\operatorname{sen}\varphi \ , & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\operatorname{sen} b\,\mathrm{D}\operatorname{sen}\varphi + \cos b.\,\mathrm{C}\cos\varphi . \end{cases}$$

È questo un sistema di equazioni ai differenziali totali per ω, φ, che è illimitatamente integrabile, qualunque siano le costanti a, b.

Eseguendo sulle variabili u, v la sostituzione ortogonale

$$\text{(47)} \qquad \begin{cases} u = u' \cos b + v' \operatorname{sen} b \\ v = -u' \operatorname{sen} b + v' \cos b \ , \end{cases}$$

le (46) possono scriversi più semplicemente

$$(46^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u'} = \mathrm{B}\cos\varphi \quad , & \dfrac{\partial\omega}{\partial v'} = -\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u'} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v'} = \mathrm{D}\,\mathrm{sen}\,\varphi \ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v'} - \dfrac{\partial\theta}{\partial u'} = \mathrm{C}\cos\varphi \ , \end{cases}$$

e queste corrispondono, nelle nuove variabili u', v', alle (46) stesse ove si faccia $b = 0$.

Se ricordiamo (§. 394) che la sostituzione (47) equivale ad una trasformazione reale di Bonnet-Lie, vediamo che le nuove trasformazioni reali delle superficie applicabili sulla sfera possono ridursi, applicando una trasformazione di Bonnet, al caso particolare in cui $b = 0$, e di queste specialmente vogliamo ora occuparci.

§. 402.

Caso in cui le normali a S, S_3 in punti corrispondenti s'incontrano.

In altro modo possiamo caratterizzare le particolari trasformazioni di cui sopra è discorso. Domandiamoci per ciò se può accadere che: *le due normali alla* S *ed alla trasformata* S_3 *in punti corrispondenti si incontrino costantemente* (Cf. §. 389).

Siano in tale ipotesi

$$(47)\qquad x_0 = x + \mathrm{T}\,\mathrm{X}_3 \quad , \quad y_0 = y + \mathrm{T}\,\mathrm{Y}_3 \quad , \quad z_0 = z + \mathrm{T}\,\mathrm{Z}_3$$

le coordinate del punto M_0 d'incontro delle due normali. Poichè la direzione $\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_3$ deve essere normale alla $\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2$, dovremo avere

$$\sum (x_0 - x_3)\,(x_1 - x_2) = 0 \ ,$$

ossia

$$\sum (\mathrm{T}\,\mathrm{X}_3 - \Lambda\,\alpha)\,(x_1 - x_2) = 0 \ ,$$

o in fine

$$\sum \alpha\,(x_1 - x_2) = 0 \ .$$

Questa, avendo riguardo alle (37), (40), ci dà come condizione d'incontro

$$(48)\qquad \mathrm{senh}\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \ .$$

Per trovare il valore di T basta tener conto che la direzione $\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_3$

deve essere normale p. e. alla $M_3 M_1$, ciò che dà la condizione

$$\sum (T X_3 - \Lambda \alpha)(\Lambda \alpha + x - x_1) = 0 ,$$

e quindi

$$T \sum X_3 \alpha = \Lambda \sum \alpha^2 + \sum \alpha (x - x_1) .$$

Ora dalle (41*) sommate risulta

$$\Lambda \sum \alpha^2 + \sum \alpha (x - x_1) = - \sum \alpha (x - x_2) ,$$

e per ciò dalle (37), (40)

$$T \operatorname{senh}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{R}{\cosh \sigma_2} \sum \alpha (\operatorname{senh} \theta_1 X_1 + i \cosh \theta_2 X_2)$$

$$= \frac{R}{\cosh \sigma_2} \Big\{ \operatorname{senh} \theta_2 (\operatorname{senh} \sigma_2 \operatorname{senh} \theta_1 - \operatorname{senh} \sigma_1 \operatorname{senh} \theta_2) -$$

$$- \cosh \theta_2 (\operatorname{senh} \sigma_2 \cosh \theta_1 - \operatorname{senh} \sigma_1 \cosh \theta_2) \Big\} ,$$

e in fine

$$(49) \qquad T = \frac{R [\operatorname{senh} \sigma_1 - \operatorname{senh} \sigma_2 \cosh (\theta_1 - \theta_2)]}{\operatorname{senh} (\theta_1 - \theta_2)} .$$

Ma nel caso nostro speciale, in cui S_3 è reale, si ha

$$\sigma_1 = a + i b \quad , \quad \sigma_2 = - a + i b$$

$$\theta_1 = \omega + i \varphi \quad , \quad \theta_2 = \pi i - \omega + i \varphi ,$$

e la condizione d'incontro (48) diventa

$$\operatorname{senh} (2 i b) = 0 ,$$

o

$$\operatorname{sen} (2 b) = 0 .$$

Senza alterare la generalità possiamo quindi fare

$$b = 0 \quad \text{ovvero} \quad b = \frac{\pi}{2} ,$$

poichè, per le formole fondamentali (39), l'aumento di b di un multiplo di π equivale a cangiare θ_1 di un equimultiplo di πi.

Distinguendo ora i due casi

$$1.^0 \quad b = 0 \quad , \quad 2.^0 \quad b = \frac{\pi}{2} ,$$

avremo corrispondentemente dalle (49)

$$T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega \ , \quad \text{per } b = 0$$

$$T = R \coth a \coth \omega \ , \quad \text{per } b = \frac{\pi}{2} \ .$$

Esaminiamo ora la superficie S_0 luogo del punto M_0 d'incontro delle normali corrispondenti a S, S_3.

§. 403.

La superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali corrispondenti.

Vogliamo ora calcolare l'elemento lineare della detta superficie S_0 per dimostrare che essa è applicabile sull'ellissoide di rotazione allungato o sull'iperboloide a due falde, secondo che ci troviamo nel primo o nel secondo caso. Così veniamo a provare che le attuali trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva, composte di due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund, coincidono con quelle che già al §. 310 abbiamo dedotto dall'inversione dei teoremi di Guichard.

1.° caso; $b = 0$.

Abbiamo

$$T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega$$

e le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto M_0 d'incontro di due normali corrispondenti a S, S_3 sono date da

$$(50) \qquad x_0 = x + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega X_3 \ , \quad y_0 = y + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega Y_3 \ ,$$
$$z_0 = z + R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega Z_3 \ .$$

Le formole (46), essendo $b = 0$, diventano

$$(51) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial u} = B \cos \varphi \ , & \dfrac{\partial \omega}{\partial v} = -A \operatorname{sen} \varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = D \operatorname{sen} \varphi \ , & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = C \cos \varphi \ . \end{cases}$$

Ora derivando le (50) rapporto ad u, v, osservando le (27) pag. 452 e le (45), otteniamo:

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = R \left\{ \frac{B}{\cosh a \cosh \omega} X_1 + \frac{\operatorname{senh} a}{\cosh a \cosh^2 \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} X_3 \right\}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = R \left\{ \frac{A}{\cosh a \cosh \omega} X_2 + \frac{\operatorname{senh} a}{\cosh a \cosh^2 \omega} \frac{\partial \omega}{\partial v} X_3 \right\}$$

e quindi

$$ds_0^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = \frac{R^2}{\cosh^2 a \cosh^2 \omega}(B^2\,du^2 + A^2\,dv^2) + \frac{R^2 \operatorname{senh}^2 a}{\cosh^2 a \cosh^4 \omega}\,d\omega^2 .$$

Ora, a causa delle (51), si ha

$$(\alpha) \qquad B \cos\varphi\,du - A \operatorname{sen}\varphi\,dv = d\omega$$

e d'altronde anche l'espressione

$$B \operatorname{sen}\varphi\,du + A\cos\varphi\,dv$$

è, per le (51) stesse, un differenziale esatto. Ponendo

$$(\beta) \qquad B \operatorname{sen}\varphi\,du + A\cos\varphi\,dv = d\psi$$

e quadrando e sommando le (α), (β) si ha dunque

$$B^2\,du^2 + A^2\,dv^2 = d\omega^2 + d\psi^2 ,$$

e per ciò

$$ds_0^2 = R^2\left\{\frac{\cosh^2\omega + \operatorname{senh}^2 a}{\cosh^2 a \cosh^4\omega}\,d\omega^2 + \frac{d\psi^2}{\cosh^2 a \cosh^2\omega}\right\} .$$

Questa pone in evidenza l'elemento lineare di una superficie di rotazione, e si vede subito che per curva meridiana si può prendere l'ellisse

$$z = R \operatorname{tgh}\omega , \quad r = \frac{R}{\cosh a \cosh\omega} .$$

Il corrispondente ellissoide di rotazione allungato ha il semi-asse maggiore $= R$ ed il semi-asse minore $= \frac{R}{\cosh a}$. Così adunque la superficie S_0 è applicabile sull'ellissoide e paragonando le formole attuali con quelle del §. 259, si riscontra facilmente che le due superficie a curvatura costante S_1 S_2 sono quelle associate a S_0, secondo i teoremi di Guichard.

$$2.^{\circ}\ \text{caso}\ b = \frac{\pi}{2} .$$

Abbiamo allora

$$x_0 = x + R \coth a \coth\omega\, X_3 , \quad y_0 = y + R \coth a \coth\omega\, Y_3 ,$$
$$z_0 = z + R \coth a \coth\omega\, Z_3 ,$$

e le (46) diventano

$$(51^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = -\mathrm{A}\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -\mathrm{B}\cos\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \mathrm{C}\cos\varphi \quad , \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\mathrm{D}\operatorname{sen}\varphi . \end{cases}$$

Ne risulta

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \mathrm{R}\left\{\frac{\mathrm{A}}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}\omega}\mathrm{X}_1 - \frac{\cosh a}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}\mathrm{X}_3\right\}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial v} = \mathrm{R}\left\{\frac{\mathrm{B}}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}\omega}\mathrm{X}_2 - \frac{\cosh a}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}^2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}\mathrm{X}_3\right\}$$

e quindi

$$ds_0^2 = \mathrm{R}^2\left\{\frac{\mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{B}^2\,dv^2}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2\omega} + \frac{\cosh^2 a}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^4\omega}d\omega^2\right\} .$$

Ora anche l'espressione

$$\mathrm{A}\cos\varphi\,du - \mathrm{B}\operatorname{sen}\varphi\,dv$$

è un differenziale esatto, come

$$\mathrm{A}\operatorname{sen}\varphi\,du + \mathrm{B}\cos\varphi\,dv = -d\omega ,$$

onde ponendo

$$\mathrm{A}\cos\varphi\,du - \mathrm{B}\operatorname{sen}\varphi\,dv = d\psi$$

e quadrando e sommando si ha

$$\mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{B}^2\,dv^2 = d\omega^2 + d\psi^2 .$$

Per l'elemento lineare di S_0 abbiamo dunque

$$ds_0^2 = \mathrm{R}^2\left\{\frac{\operatorname{senh}^2\omega + \cosh^2 a}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^4\omega}d\omega^2 + \frac{d\psi^2}{\operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2\omega}\right\} .$$

Questo appartiene alla superficie di rotazione che ha per curva meridiana la curva

$$z = \mathrm{R}\coth\omega , \quad r = \frac{\mathrm{R}}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh}\omega} .$$

È questa un' iperboloide a due falde di semi-asse trasverso $= \mathrm{R}$ e di semi-asse coniugato $= \dfrac{\mathrm{R}}{\operatorname{senh} a}$. Anche qui (Cf. §. 259) le due superficie a curvatura costante S, S_3 sono quelle associate alla deformata S_0 dell'iperboloide, secondo i teoremi di Guichard.

§. 404.

Paragone colle formole d'inversione dei teoremi di Guichard al §. 310.

Alle trasformazioni reali delle superficie a curvatura costante positiva del §. precedente siamo già arrivati per altra via, al §. 310, trattando della inversione dei teoremi di Guichard. Ed ora vogliamo paragonare le formole attuali con quelle del §. 310 per verificarne l'identità, ciò che costituisce una nuova conferma della identità delle corrispondenti trasformazioni.

Nel citato §. 310 la trasformazione era analiticamente definita nel modo seguente. Indicando con Φ, W due funzioni incognite di u, v e γ una costante arbitraria si determinavano Φ, W dal sistema simultaneo (E), (E*) pag. 244; queste nelle attuali coordinate u, v, essendo

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2)$$

$$D = D'' = -R \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\,,\ D' = 0\,,$$

diventano

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right) = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + (\gamma-1)\operatorname{senh}\theta\,\Phi - \gamma R\cosh\theta\, W \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} + (\gamma-1)\cosh\theta\,\Phi - \gamma R\operatorname{senh}\theta\, W\,. \end{cases}$$

$$(53)\qquad \frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{R}\coth\theta\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{R}\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,.$$

A queste è da aggiungersi l'equazione (F) pag. 244

$$(54)\qquad \frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 = (\gamma-1)\,\Phi^2 - \gamma\, R^2\, W^2\,.$$

Scelte Φ, W in guisa da soddisfare questo sistema di equazioni illimitatamente integrabile, si aveva la corrispondente superficie trasformata S' a curvatura $K = \frac{1}{R^2}$ dalle formole (50) pag. 245

$$(55)\qquad x' = x - \frac{2\,\Phi}{(\gamma-1)\,(K\,\Phi^2 - W^2)}\left\{ W\, X_3 + \nabla(x, \Phi)\right\}\,,$$

mentre per la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali in

punti corrispondenti alle S, S', risultava dalle (48*) pag. 242

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3 .$$

Per stabilire il confronto colle formole del §. precedente, dobbiamo porre, secondo le (47)

$$\frac{\Phi}{W} = -T .$$

Cominciando dunque dal primo caso $b = 0$, avremo

$$\frac{\Phi}{W} = -R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega$$

cioè

$$W = -\frac{1}{R} \coth a \coth \omega \, \Phi . \tag{55}$$

Sostituendo questo valore di W nelle (53) ed osservando le (51), ne deduciamo le formole

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \cosh a . \frac{\operatorname{senh} \theta \cos \varphi}{\operatorname{senh} \omega} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\cosh a . \frac{\cosh \theta \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{senh} \omega} \Phi , \end{cases} \tag{56}$$

dalle quali si ottiene Φ con una quadratura, osservando che, a causa delle (51), l'espressione

$$\frac{\operatorname{senh} \theta \cos \varphi \, du - \cosh \theta \operatorname{sen} \varphi \, dv}{\operatorname{senh} \omega}$$

è in effetto un differenziale esatto.

Confrontando le (56) colla (54), si vede che basta prendere

$$\gamma = -\operatorname{senh}^2 a$$

perchè quest'ultima risulti soddisfatta.

Dopo ciò si constata facilmente che sussistono altresì le (52), quando γ abbia il valore precedente. Ed infine calcolando dalle (55) i valori di x', y', z' si conferma subito che esse coincidono colle (D) §. 401 (pag. 460), ove si faccia $b = 0$ e definiscono quindi la medesima superficie trasformata S_3. Resta che consideriamo il secondo caso $b = \frac{\pi}{2}$. Allora dobbiamo porre

$$\frac{\Phi}{W} = -R \coth a \coth \omega .$$

Procedendo come sopra pel caso $b=0$, si vedrà che Φ è definita con una quadratura dalle formole:

$$(56^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = \operatorname{senh} a \, \dfrac{\operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cosh \omega}\,\Phi \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = \operatorname{senh} a \, \dfrac{\cosh\theta \cos\varphi}{\cosh \omega}\,\Phi \ . \end{cases}$$

Confrontando queste colle (54), vediamo che si deve qui attribuire alla costante γ il valore

$$\gamma = \cosh^2 a \ .$$

§. 405.

Permutabilità delle nuove trasformazioni colla trasformazione di Hazzidakis.

Andiamo ora ad esaminare le relazioni che intercedono fra le nuove trasformazioni delle superficie applicabili sulla sfera e la trasformazione involutoria di Hazzidakis.

Ritornando per ciò alle formole generali del §. 399 per le trasformazioni (immaginarie) di Bäcklund, applicate ad una superficie S di curvatura costante $K = \frac{1}{R^2}$ definita dalla (25) pag. 451, consideriamo la sua trasformata $\overline{S}$ di Hazzidakis il cui elemento lineare è

$$\overline{ds^2} = R^2 (\cosh^2\theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta \, dv^2) \ .$$

Sia ora S_1 una trasformata di Bäcklund della S definita dalle formole (33) pag. 454

$$x_1 = x - R\,\frac{\operatorname{senh}\theta_1 X_1 + i \cosh\theta_1 X_2}{\cosh\sigma} \ ,$$

dove la θ_1 è legata alla θ dalle formole (B) ibid. Conservando a θ_1 il medesimo significato, ed indicando coi simboli

$$\overline{x}, \overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3} \ldots$$

le quantità che per la $\overline{S}$ sono le analoghe delle $x, X_1, X_2, X_3 \ldots$, si vedrà che ove si ponga

$$\overline{x_1} = \overline{x} + R\,\frac{\cosh\theta_1 \overline{X_1} + i \operatorname{senh}\theta_1 \overline{X_2}}{\operatorname{senh}\sigma}$$

e analogamente per y_1, z_1, ne risulta definita una superficie $\overline{S}_1$ trasformata di Bäcklund della $\overline{S}$. E infatti, derivando le precedenti, si deduce

$$\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial u} = R \cosh\theta_1 \left\{ (\cosh\theta \cosh\theta_1 + \coth\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1)\, \overline{X}_1 + \right.$$

$$\left. + i\,(\cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \coth\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1)\, \overline{X}_2 - \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\sigma}\, \overline{X}_3 \right\}$$

$$\frac{\partial \overline{x}_1}{\partial v} = R \operatorname{senh}\theta_1 \left\{ i\,(\operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \coth\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1)\, \overline{X}_1 - \right.$$

$$\left. - (\operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \coth\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1)\, \overline{X}_2 - \frac{i \operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\sigma}\, \overline{X}_3 \right\},$$

e quindi

$$\overline{dx}_1^2 + \overline{dy}_1^2 + \overline{dz}_1^2 = R^2 (\cosh^2\theta_1\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta_1\, dv^2) \;;$$

inoltre pei coseni di direzione $\overline{X}_3^{(1)}$, $\overline{Y}_3^{(1)}$, $\overline{Z}_3^{(1)}$ della normale alla $\overline{S}_1$ avremo

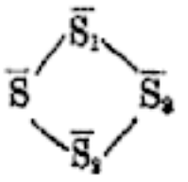
$$\overline{X}_3^{(1)} = \frac{\operatorname{senh}\theta_1\, \overline{X}_1 + i \cosh\theta_1\, \overline{X}_2 - \cosh\sigma\, \overline{X}_3}{\operatorname{senh}\sigma}.$$

Con queste formole si verifica subito la proprietà asserita e di più vediamo che le due superficie S_1, $\overline{S}_1$ sono alla loro volta associate per trasformazione di Hazzidakis. Possiamo dunque dire che la trasformazione di Hazzidakis cangia una coppia qualunque (S, S_1) di superficie applicabili sulla sfera, legate fra di loro da una trasformazione di Bäcklund, in un'altra tale coppia $(\overline{S}, \overline{S}_1)$.

Se applichiamo questo risultato alle quattro superficie



del teorema di permutabilità (§. 400), vediamo che la trasformazione di Hazzidakis le cangierà contemporaneamente in quattro superficie



nelle medesime relazioni fra loro.

Con un calcolo del tutto analogo a quello eseguito nel §. 400, tro-

viamo che la quarta superficie $\overline{S}_3$ è definita dalle formole

$$\overline{x}_3 = \overline{x} + \overline{\Lambda}\,\overline{\alpha} \quad , \quad \overline{y}_3 = \overline{y} + \overline{\Lambda}\,\overline{\beta} \quad , \quad \overline{z}_3 = \overline{z} + \overline{\Lambda}\,\overline{\gamma} \ ,$$

dove

$$\overline{\Lambda} = \mathrm{R}\,\frac{\operatorname{senh}(\sigma_1 - \sigma_2)}{\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\sigma_2 \{\cosh(\sigma_1 - \sigma_2) - \cosh(\theta_1 - \theta_2)\}}$$

$$\overline{\alpha} = (\cosh\sigma_1 \cosh\theta_2 - \cosh\sigma_2 \cosh\theta_1)\,\overline{X}_1 + i\,(\cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta_2 - \cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta_1)\,\overline{X}_2 +$$

$$+ \operatorname{senh}(\theta_1 - \theta_2)\,\overline{X}_3$$

e $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ hanno espressioni analoghe.

Consideriamo particolarmente il caso più importante per noi in cui essendo (§. 401)

$$\sigma_2 = -\overline{\sigma_1} \quad , \quad \theta_2 = \pi i - \overline{\theta_1} \ ,$$

la quarta superficie $\overline{S}_3$ è reale. Ponendo come al §. 401

$$\sigma_1 = a + i\,b \quad , \quad \theta_1 = \omega + i\,\varphi \ ,$$

e separando il reale dall'immaginario, le formole che definiscono la $\overline{S}_3$ diventano:

$$(\mathrm{D}^*) \qquad \overline{x}_3 = \overline{x} + 2\,\mathrm{R}\,\frac{\operatorname{senh} a \cosh a}{(\operatorname{senh}^2 a + \operatorname{sen}^2 b)(\cosh^2 a + \cos^2\omega)} \times$$

$$\times \Big\{ (\cosh a \cos b \cosh\omega \cos\varphi + \operatorname{senh} a \operatorname{sen} b \operatorname{senh}\omega \operatorname{sen}\varphi)\,\overline{X}_1 +$$

$$+ (\operatorname{senh} a \operatorname{sen} b \operatorname{senh}\omega \cos\varphi - \cosh a \cos b \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi)\,\overline{X}_2 +$$

$$+ \operatorname{senh}\omega \cosh\omega\,\overline{X}_3$$

e sono da raffrontarsi colle (D) pag. 460 che danno la trasformata S_3 di Hazzidakis. Ancor più in particolare, supponiamo di trovarci nel caso di quelle trasformazioni reali che corrispondono all'inversione dei teoremi di Guichard, le normali a due superficie trasformate S, S_3 (o $\overline{S}$, $\overline{S}_3$) in punti corrispondenti incontrandosi costantemente. Avremo allora (§. 402)

$$b = 0 \quad \text{o} \quad b = \frac{\pi}{2} \ .$$

Fissiamo p. e. l'attenzione sul primo caso, l'altro corrispondendo a scambiare le due coppie (S, S_3) $(\overline{S}, \overline{S}_3)$. Si è visto al §. 403 che, indicando con

$$x_0 = x + \mathrm{T}\,X_3 \quad , \quad y_0 = y + \mathrm{T}\,Y_3 \quad , \quad z_0 = z + \mathrm{T}\,Z_3$$

le coordinate del punto ove si incontrano due normali corrispondenti alla S, S_3, si ha

$$T = R \operatorname{tgh} a \operatorname{tgh} \omega .$$

Con notazioni analoghe per la coppia $(\overline{S}, \overline{S}_3)$ troviamo invece

$$\overline{T} = R \coth a \coth \omega ,$$

onde

$$T \overline{T} = R^2 .$$

Ora, come si è visto al §. 402, la superficie S_0 luogo del punto $M_0 \equiv (x_0\ y_0\ z_0)$ è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione, la cui ellisse meridiana ha l'equazione

$$(\alpha) \qquad \frac{r^2}{\left(\frac{R}{\cosh a}\right)^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 ,$$

e la superficie $\overline{S}_0$ luogo di $\overline{M}_0 \equiv (\overline{x}_0\ \overline{y}_0\ \overline{z}_0)$ è invece applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde, la cui iperbola meridiana ha l'equazione

$$(\beta) \qquad \frac{z^2}{R^2} - \frac{r^2}{\left(\frac{R}{\operatorname{senh} a}\right)^2} = 1 .$$

Troviamo così il singolare risultato che ad ogni deformazione dell'una quadrica ne corrisponde una perfettamente determinata della seconda e le quattro falde a curvatura costante $\frac{1}{R^2}$ dei due inviluppi di sfere associati alle due quadriche, secondo i teoremi di Guichard, si distribuiscono in due coppie di superficie trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra. Notevole è altresì la semplice relazione

$$T \overline{T} = R^2$$

sopra trovata per i raggi T, $\overline{T}$ di sfere corrispondenti nei due inviluppi.

Infine osserviamo che fra i punti delle due superficie S_0, $\overline{S}_0$, applicabili rispettivamente sull'ellissoide (α) e sull'iperboloide (β), viene stabilita dalla generazione geometrica stessa una legge di corrispondenza. Si vede facilmente che la corrispondenza cangia i sistemi coniugati di S_0 nei coniugati di $\overline{S}_0$ ed altresì le geodetiche dell'una nelle geodetiche dell'altra superficie. In particolare alle linee di curvatura (u, v) delle S, $\overline{S}$ corrisponde sopra S_0, $\overline{S}_0$ quel sistema coniugato che si conserva

coniugato quando la S_0 si applica sull'ellissoide (α) e la $\overline{S}_0$ sull'iperboloide (β), ed una corrispondenza della stessa natura ne risulta fra i punti dell'ellissoide (α) e dell'iperboloide (β); questa è una projettività.[1]

§. 406.

Applicazione successiva delle nuove trasformazioni.

Le ricerche precedenti ci pongono in grado di estendere ai metodi di trasformazione delle superficie a curvatura costante positiva le considerazioni che abbiamo fatto nel §. 385 sulla applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni reali di Bäcklund alle superficie pseudosferiche. Per persuadersene basta osservare che le conseguenze analitiche del teorema di permutabilità restano le stesse (Cf. § 400). Possiamo quindi concludere: *Se per una superficie* S *di curvatura costante positiva* $\frac{1}{R^2}$, *definita da*

$$ds^2 = R^2 (\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2).$$

si sanno integrare completamente le equazioni di trasformazione (B) pag. 454

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \end{cases}$$

per tutti i valori della costante complessa σ, *l'applicazione successiva ed illimitata delle nuove trasformazioni alle superficie di curvatura costante via via ottenute richiederà soltanto calcoli algebrici e di derivazioni.*

Volendo limitarsi al caso più interessante per le applicazioni di trasformazioni reali di superficie reali, basterà supporre a σ nelle (B) un valore reale $\sigma = a$ ovvero un valore complesso della forma $\sigma = a + \frac{\pi i}{2}$ (Cf. §. 403). In ogni caso, se insieme alla superficie iniziale S si conosce anche la sua trasformata di Hazzidakis $\overline{S}$, converrà sempre applicare le trasformazioni all'una e all'altra superficie della coppia (S, $\overline{S}$) con che si otterranno le nuove superficie a coppie di superficie trasformate di

---

[1] Cf. la mia nota: *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie* (Rendiconti dei Lincei aprile 1902) e l'altra: *Sulle quadriche coniugate in deformazione* (ibid. Aprile 1903).

Hazzidakis. Così sopra ogni nuova superficie conosceremo altresì, in termini finiti, le equazioni delle linee geodetiche come corrispondenti alle linee d'ombra della trasformata di Hazzidakis.

Per constatare con un esempio l'utilità dei risultati conseguiti, applichiamo le nostre formole a far conoscere le superficie iniziali di un gruppo infinito di superficie applicabili sulla sfera le cui equazioni si hanno in termini finiti per funzioni ordinarie. Questo gruppo corrisponde all'analogo delle superficie pseudosferiche studiato al §. 387 (pag. 420).

Partiamo dalla soluzione evidente

$$\theta = 0$$

dell'equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\,.$$

La superficie S corrispondente degenera evidentemente in una linea; ma tutti i nostri sviluppi (§. 399 e seguenti) restano applicabili, purchè si assumano le funzioni

$$x,\ y,\ z;\quad X_1,\ Y_1,\ Z_1;\quad X_2,\ Y_2,\ Z_2;\quad X_3,\ Y_3,\ Z_3$$

di u, v in guisa da soddisfare le equazioni della tabella (27) §. 399 (pag. 452).

Basta assumere per ciò:

$$(a)\qquad \begin{cases} x = 0 & y = 0 & z = R\,v \\ X_1 = -\operatorname{sen} u\,, & Y_1 = \cos u\,, & Z_1 = 0 \\ X_2 = 0\ , & Y_2 = 0\ , & Z_2 = 1 \\ X_3 = \cos u\,, & Y_3 = \operatorname{sen} u\,, & Z_3 = 0\,, \end{cases}$$

e la superficie S è così ridotta all'asse delle z; le sue normali sono le normali a questa retta.

Conformemente alle ultime osservazioni del §. precedente, consideriamo insieme alla S la sua trasformata di Hazzidakis $\overline{S}$ ridotta anch'essa all'asse delle z e corrispondente alle formole

$$(a^*)\qquad \begin{cases} \overline{x} = 0 & \overline{y} = 0 & \overline{z} = -R\,u \\ \overline{X}_1 = 0 & \overline{Y}_1 = 0 & \overline{Z}_1 = -1 \\ \overline{X}_2 = -\operatorname{sen} v, & \overline{Y}_2 = \cos v, & \overline{Z}_2 = 0 \\ \overline{X}_3 = \cos v\,, & \overline{Y}_3 = \operatorname{sen} v, & \overline{Z}_3 = 0\,. \end{cases}$$

Il sistema (B), essendo $\theta = 0$, si riduce qui a

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta_1, \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial v} = i\cosh\sigma \operatorname{senh}\theta,$$

e si integra colla formola

$$\operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta_1 = e^{u\operatorname{senh}\sigma + i\cosh\sigma.\, v}$$

dove la costante arbitraria moltiplicativa si omette perchè aumentando u, v di costanti si può evidentemente ridurre $= 1$.

Lasciando alla costante σ un valore complesso qualunque $\sigma = a + ib$ e ponendo

$$\theta_1 = \omega + i\varphi,$$

si separerebbe subito nella formola precedente il reale dall'immaginario, ed applicando le formole (D), (D*) (pag. 460, 470) si avrebbero anche, in termini finiti, le equazioni di due classi di superficie reali applicabili sulla sfera, trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra, e dipendenti da due costanti arbitrarie a, b. Da queste poi, con sole operazioni di derivazione, si otterrebbe un gruppo infinito di superficie applicabili sulla sfera dipendenti dalle funzioni ordinarie.

§. 407.

Esempi.

Noi ci limiteremo qui al solo caso $b = 0$, cioè ad assumere σ costante reale $= a$. Le altre superficie più generali di cui sopra è discorso si ottengono da queste con una trasformazione di Lie-Bonnet (§. 401).

Avendosi

$$\operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta_1 = e^{u\operatorname{senh}a + iv\cosh a},$$

se si pone per brevità

$$u_1 = u\operatorname{senh}a, \quad v_1 = v\cosh a,$$

ne deduciamo

$$\cosh\theta_1 = -\coth(u_1 + iv_1), \operatorname{senh}\theta_1 = -\frac{1}{\operatorname{senh}(u_1 + iv_1)},$$

e quindi, separando il reale dall'immaginario, avremo le formole

$$(b)\quad \begin{cases} \cosh\omega\cos\varphi = -\dfrac{\operatorname{senh}u_1\cosh u_1}{\operatorname{senh}^2 u_1 + \operatorname{sen}^2 v_1}, \operatorname{senh}\omega\cos\varphi = -\dfrac{\operatorname{senh}u_1\cos v_1}{\operatorname{senh}^2 u_1 + \operatorname{sen}^2 v_1} \\ \cosh\omega\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\cosh u_1\operatorname{sen}v_1}{\operatorname{senh}^2 u_1 + \operatorname{sen}^2 v_1}, \operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\operatorname{sen}v_1\cos v_1}{\operatorname{senh}^2 u_1 + \operatorname{sen}^2 v_1}, \end{cases}$$

da cui si ha intanto

$$(c) \qquad \operatorname{tgh}\omega = \frac{\cos v_1}{\cosh u_1} .$$

Ricerchiamo dapprima, nel caso nostro, le due superficie S_0 $\overline{S}_0$ applicabili sull'ellissoide e sull'iperboloide di Guichard, di cui abbiamo detto in generale alla fine del §. 405. Qui abbiamo

$$T = R \operatorname{tgh} a \frac{\cos v_1}{\cosh u_1}$$

$$\overline{T} = R \coth a \frac{\cosh u_1}{\cos v_1} ,$$

e quindi dalle formole

$$x_0 = x + T X_3 , \quad y_0 = y + T Y_3 , \quad z_0 = z + T Z_3$$

$$\overline{x}_0 = \overline{x} + \overline{T} \overline{X}_3 , \quad \overline{y}_0 = \overline{y} + \overline{T} \overline{Y}_3 , \quad \overline{z}_0 = \overline{z} + \overline{T} \overline{Z}_3$$

deduciamo, osservando le (a) (a^*):

$$(57) \quad x_0 = R \operatorname{tgh} a \frac{\cos v_1}{\cosh u_1} \cos u , \; y_0 = R \operatorname{tgh} a \frac{\cos v_1}{\cosh u_1} \operatorname{sen} u , \; z_0 = R v$$

$$(57^*) \quad \overline{x}_0 = R \coth a \frac{\cosh u_1}{\cos v_1} \cos v , \; \overline{y}_0 = R \coth a \frac{\cosh u_1}{\cos v_1} \operatorname{sen} v , \; \overline{z}_0 = - R u .$$

Le prime formole definiscono una superficie S_0 applicabile sull'ellissoide di rotazione allungato i cui semi-assi, principale e secondario, hanno le rispettive lunghezze

$$R , \frac{R}{\cosh a} .$$

Similmente le (57*) ci danno una superficie $\overline{S}_0$ applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde nel quale le lunghezze dei semi-assi principale e secondario sono

$$R , \frac{R}{\operatorname{senh} a} .$$

Introducendo coordinate cilindriche

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) , z ,$$

le equazioni di queste superficie S_0, $\overline{S}_0$ si scrivono semplicemente così:

$$r\cosh(\theta\,\mathrm{senh}\,a) = \mathrm{R}\,\mathrm{tgh}\;a\cos\left(\frac{s\cosh a}{\mathrm{R}}\right)$$

$$r\cos\;(\theta\cosh a) = \mathrm{R}\coth a\cosh\left(\frac{s\,\mathrm{senh}\,a}{\mathrm{R}}\right).$$

È da osservarsi che le deformate dei paralleli dell'ellissoide od iperboloide di Guichard sono le linee T = costante ossia r = costante; esse sono quindi descritte sopra cilindri circolari aventi per asse l'asse s.

Resta ora che scriviamo le equazioni esplicite delle due superficie S_3, $\overline{S}_3$ applicabili sulla sfera che si ottengono dalle formole (D), (D*), ove si faccia $b = 0$, e si abbia riguardo alle formole (a), (a^*), (b). Ma prima ancora di far questo osserviamo che l'elemento lineare delle S_3, $\overline{S}_3$ sarà dato rispettivamente da

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(\mathrm{senh}^2\theta_3\,du^2 + \cosh^2\theta_3\,dv^2)$$

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(\cosh^2\theta_3\,du^2 + \mathrm{senh}^2\theta_3\,dv^2)$$

e la funzione θ_3 di u, v sarà data, secondo la formola (C*) del teorema di permutabilità (pag. 459), e a causa del valore (c) di $\mathrm{tgh}\,\omega$, da

$$\mathrm{tgh}\,\frac{\theta_3}{2} = \mathrm{tgh}\,a\,\frac{\cos v_1}{\cosh u_1}.$$

Ora essendo $\mathrm{tgh}\,\frac{\theta_3}{2}$ il prodotto di due funzioni l'una della sola u, l'altra della sola v, ne segue (§. 331) che la superficie S_3 avrà piane le linee di curvatura u e quindi sferiche le v; la sua trasformata di Hazzidakis $\overline{S}_3$ ha invece sferiche le prime, piane le seconde.

Per le formole effettive che danno queste superficie S_3, $\overline{S}_3$ troviamo, applicando le formole superiori:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{2\,\mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,a\cos v_1}{\cosh a\,\{\cosh^2 u_1 + \mathrm{senh}^2 a\,(\mathrm{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}} \times \\ \qquad \times [\cosh u_1 \cos u - \mathrm{senh}\,a\,\mathrm{senh}\,u_1\,\mathrm{sen}\,u] \\ y_3 = \dfrac{2\,\mathrm{R}\,\mathrm{senh}\,a\cos v_1}{\cosh a\,\{\cosh^2 u_1 + \mathrm{senh}^2 a\,(\mathrm{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}} \times \\ \qquad \times [\cosh u_1\,\mathrm{sen}\,u + \mathrm{senh}\,a\,\mathrm{senh}\,u_1\cos u] \\ z_3 = \mathrm{R}v + \dfrac{2\,\mathrm{R}\,\mathrm{senh}^2 a\,\mathrm{sen}\,v_1\cos v_1}{\cosh a\,\{\cosh^2 u_1 + \mathrm{senh}^2 a\,(\mathrm{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}} \end{cases}$$

$$(A^*)\quad \begin{cases} \bar{x}_3 = \dfrac{2\,R\cosh a\cosh u_1}{\operatorname{senh} a\,\{\cosh^2 u_1 + \cosh^2 a\,(\operatorname{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}} \times \\ \qquad \times [\cos v_1 \cos v + \cosh a \operatorname{sen} v_1 \operatorname{sen} v] \\ \bar{y}_3 = \dfrac{2\,R\cosh a\cosh u_1}{\operatorname{senh} a\,\{\cosh^2 u_1 + \cosh^2 a\,(\operatorname{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}} \times \\ \qquad \times [\cos v_1 \operatorname{sen} v - \cosh a \operatorname{sen} v_1 \cos v] \\ \bar{z}_3 = -Ru + \dfrac{2\,R\cosh^2 a \operatorname{senh} u_1 \cosh u_1}{\operatorname{senh} a\,\{\cosh^2 u_1 + \cosh^2 a\,(\operatorname{senh}^2 u_1 + \cos^2 v_1)\}}, \end{cases}$$

dove si è posto come sopra

$$u_1 = u \operatorname{senh} a\,, \quad v_1 = v \cosh a\,.$$

È immediatamente visibile, dalle formole superiori, che per la prima superficie le linee di curvatura u sono in piani per l'asse z, per la seconda invece le linee v.

Si osserverà ancora che sulla seconda superficie $\bar{S}_3$, quando si attribuisca alla costante $\cosh a$ un valore commensurabile, le linee di curvatura sferiche u sono algebriche razionali.

Capitolo XXVI.

I sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo

Le formole di Lamé per H_1, H_2, H_3. — Valori dei raggi principali di curvatura r_{ik} in un sistema triplo ortogonale, dei raggi di flessione e torsione delle curve coordinate. — Linee d'equidistanza ed equazione del Cayley. — I sistemi ciclici osculatori di un dato sistema triplo ortogonale. — La trasformazione di Combescure. — Esempi di sistemi tripli ortogonali. — *Le famiglie di Lamé con traiettorie ortogonali piane.* — Loro derivazione per trasformazione di Combescure dai sistemi ciclici. — Le quadriche a centro confocali e le coordinate ellittiche. — Corrispondenza delle asintotiche sulle quadriche di una famiglia. — Le congruenze normali le cui falde sono quadriche confocali. — Le linee geodetiche sull' ellissoide. — Geodetiche uscenti dagli ombelichi. — Loro traiettorie ortogonali. — Teoremi di Roberts e di Hart.

§. 408.

Il ds^2 di forma ortogonale e le formole di Lamé.

In questi ultimi capitoli ci proponiamo di studiare più da vicino i sistemi tripli di superficie ortogonali dello spazio euclideo a tre dimensioni, ed esposte dapprima le proprietà generali di questi sistemi tripli ne faremo poi l'applicazione a particolari sistemi tripli notevoli. Il nostro studio in questo campo, che ha formato oggetto di tante ed importanti ricerche dei geometri, sarà necessariamente molto limitato. Per uno studio ulteriore il lettore consulti il trattato completo di Darboux [1], di cui per ora non possediamo che il primo volume.

Già alla fine del Cap. XI (I, pag. 379 e segg.) abbiamo esposto i teoremi fondamentali sui sistemi tripli ortogonali, in uno spazio curvo qualunque a tre dimensioni, in particolare il teorema di Dupin-Darboux (I, pag. 383) e il risultato di Darboux secondo il quale se la famiglia di superficie

$$\varphi(x, y, z) = \text{costante}$$

è una *famiglia di Lamé*, la funzione $\varphi(x, y, z)$ deve soddisfare ad un'equazione caratteristica alle derivate parziali terze. Si tratta ora di proseguire questi studî pel caso particolare che lo spazio S_3 sia uno spazio euclideo.

---

[1] *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* (Paris Gauthier Villars 1898)

Essendo x, y, z un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, suppongasi di avere un sistema triplo di superficie ortogonali, i cui parametri indichiamo con u_1, u_2, u_3, che dia all'elemento lineare dello spazio la forma

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2 .$$

Le funzioni H_1^2, H_2^2, H_3^2 di u_1, u_2, u_3, come somme di quadrati, [1] sono sempre essenzialmente positive, ed a scanso di equivoci diciamo una volta per tutte che con H_1, H_2, H_3 intenderemo sempre i valori *positivi* delle loro radici quadrate. Le funzioni H_1, H_2, H_3 di u_1, u_2, u_3 debbono essere tali che la forma quadratica (1) rappresenti il ds^2 di uno spazio a curvatura Riemanniana nulla, e per ciò sarà necessario e sufficiente (I, pag. 75, 344 e 416) che i sei simboli di Riemann a quattro indici siano identicamente nulli, cioè si abbia

$$\begin{cases} (21,\ 13) = 0\,, & (32,\ 21) = 0\,, & (13,\ 32) = 0 \\ (12,\ 12) = 0\,, & (23,\ 23) = 0\,, & (31,\ 31) = 0\,. \end{cases}$$

Scrivendo per disteso queste sei equazioni, sviluppate per mezzo delle formole (17) del §. 159 (I, pag. 344), troviamo il gruppo di formole seguenti:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\,, \\ \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial u_3 \partial u_1} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} + \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\,, \\ \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} + \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\,, \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2}\right) + \dfrac{1}{H_3^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1}\right) + \dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0\,. \end{cases}$$

Queste si dicono le formole di Lamé, poichè furono stabilite la prima

---

[1] $H_i^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2$.

volta da questo geometra come condizioni necessarie e sufficienti perchè il

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2$$

appartenga allo spazio euclideo.

Sappiamo già che, soddisfatte le condizioni (A), (B) di Lamé, il sistema triplo ortogonale corrispondente è perfettamente determinato, a meno di movimenti nello spazio (I, §. 160, pag. 346).

§. 409.

Triedro principale e raggi principali di curvatura.

Note H_1, H_2, H_3 in funzione di u_1, u_2, u_3, per determinare il sistema triplo ortogonale cioè x, y, z in funzione di u_1, u_2, u_3 abbiamo le equazioni fondamentali di Christoffel (I, pag. 64), che qui assumono la forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_r\,\partial u_s} = \sum_t \begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_t} \quad (1), \tag{2}$$

dove r, s sono due indici qualunque presi fra 1, 2, 3 e i simboli di Christoffel si riferiscono alla forma quadratica

$$H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2;$$

alle medesime equazioni (2) soddisfano ancora y, z. Distinguendo due casi secondo che $r \neq s$ o $r = s$, abbiamo il sistema seguente:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_r\,\partial u_s} = \frac{1}{H_r}\frac{\partial H_r}{\partial u_s}\frac{\partial x}{\partial u_s} + \frac{1}{H_s}\frac{\partial H_s}{\partial u_r}\frac{\partial x}{\partial u_s} \quad (r \neq s) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_r^2} = \frac{1}{H_r}\frac{\partial H_r}{\partial u_r}\frac{\partial x}{\partial u_r} - \frac{H_r}{H_s^2}\frac{\partial H_r}{\partial u_s}\frac{\partial x}{\partial u_s} - \frac{H_r}{H_t^2}\frac{\partial H_r}{\partial u_t}\frac{\partial x}{\partial u_t}, \tag{4}$$

dove nella seconda s, t indicano i due indici oltre r.

Consideriamo ora in ogni punto (u_1, u_2, u_3) dello spazio il triedro trirettangolo formato dalle direzioni (positive) delle tangenti alle linee coordinate u_1, u_2, u_3 rispettivamente, ossia dalle normali alle tre superficie coordinate; questo diremo il *triedro principale*. Indicando con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) i coseni di direzione delle dette tre

---

(1) Esse non sono altro che le equazioni di Weingarten pel caso attuale ove $K = 0$ (Cf. I, pag. 414).

tangenti principali, avremo

$$X_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial u_i} \quad , \quad Y_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial u_i} \quad , \quad Z_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}$$

$$(i = 1, 2, 3) ,$$

e le (3), (4) si scriveranno

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_r}{\partial u_s} = \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_s}{\partial u_r} X_s \ , \quad \dfrac{\partial X_r}{\partial u_s} = \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_s}{\partial u_r} X_s \\ \dfrac{\partial X_r}{\partial u_r} = -\dfrac{1}{H_s}\dfrac{\partial H_r}{\partial u_s} X_s - \dfrac{1}{H_t}\dfrac{\partial H_r}{\partial u_t} X_t \ ; \end{cases}$$

ed alle medesime equazioni soddisferanno

$$Y_1 \ , \quad Y_2 \ , \quad Y_3$$
$$Z_1 \ , \quad Z_2 \ , \quad Z_3 \ .$$

Il triedro principale si supporrà orientato come la terna degli assi coordinati, cioè sarà

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = +1 \ .$$

Le (5) sono per le funzioni incognite X_1, X_2, X_3 un sistema di equazioni lineari omogenee ai differenziali totali. Le condizioni d'integrabilità risultano identicamente soddisfatte, riducendosi appunto alle equazioni (A), (B) di Lamé. Di qui è facile dedurre nuovamente l'esistenza e l'unicità del sistema triplo ortogonale corrispondente (Cf. I, §. 58, pag. 124).

Le linee coordinate (u_1), (u_2), (u_3) sono, pel teorema di Dupin, le linee di curvatura delle superficie del sistema triplo. Riprendendo le notazioni del §. 171 (I, pag. 378), denotiamo con

$$r_{ik}$$

il raggio principale di curvatura della superficie coordinata $u_i =$ costante lungo la linea di curvatura (u_k), e per armonia colla convenzione fondamentale rispetto ai segni dei raggi principali di curvatura delle superficie, diamo ad r_{ik} il valore positivo o negativo secondo che per andare dal rispettivo centro di curvatura verso il piede della normale si va nel

verso positivo o negativo della direzione (X_i, Y_i, Z_i). Dalle formole generali testè citate (I, pag. 378), ovvero dalle (5) attuali, deduciamo subito che si avrà

$$\frac{1}{r_{ik}} = \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} , \tag{6}$$

e, scrivendo per disteso le sei formole corrispondenti (date da Lamé), avremo

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_1} , & \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u_2} , & \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} , \\ \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u_1} , & \frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} , & \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_3} . \end{cases} \tag{7}$$

Conformemente alle notazioni della teoria delle curve, denotiamo con

$$\begin{matrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \lambda_i & \mu_i & \nu_i \end{matrix}$$

i coseni di direzione della tangente, normale principale e binormale della curva coordinata (u_i) e con

$$\rho_i , \quad T_i$$

i corrispondenti raggi di flessione e torsione; avremo intanto

$$\alpha_i = X_i , \quad \beta_i = Y_i , \quad \gamma_i = Z_i . \tag{8}$$

L'arco elementare ds_i della (u_i) è

$$ds_i = H_i \, du_i ,$$

e se deriviamo le precedenti rapporto ad u_i, ricordando le formole di Frenet ed osservando le seconde (5), ne dedurremo

$$\frac{\xi_i}{\rho_i} = -\frac{X_k}{r_{ki}} - \frac{X_i}{r_{ii}} , \quad \frac{\eta_i}{\rho_i} = -\frac{Y_k}{r_{ki}} - \frac{Y_i}{r_{ii}} , \quad \frac{\zeta_i}{\rho_i} = -\frac{Z_k}{r_{ki}} - \frac{Z_i}{r_{ii}} , \tag{9}$$

da cui quadrando e sommando risulta intanto

$$\frac{1}{\rho_i^2} = \frac{1}{r_{ki}^2} + \frac{1}{r_{ii}^2} . \tag{10}$$

Questa non è che un caso particolare della formola stabilita alla fine del §. 171 (I, pag. 379). Dalle (9), (10) segue poi

$$(11)\qquad \lambda_i = \pm\frac{\rho_i}{r_{ii}}X_k \mp \frac{\rho_i}{r_{ki}}X_i\ ,\quad \mu_i = \pm\frac{\rho_i}{r_{ii}}Y_k \mp \frac{\rho_i}{r_{ki}}Y_i\ ,$$

$$\nu_i = \pm\frac{\rho_i}{r_{ii}}Z_k \mp \frac{\rho_i}{r_{ki}}Z_i\ ,$$

e si vede subito che varrà il segno superiore o l'inferiore, secondo che la permutazione $i\ k\ l$ degli indici 1 2 3 è pari o dispari.

Dalle formole di Frenet abbiamo

$$\frac{1}{T_i} = \sum \frac{\xi_i}{H_i}\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_i}\ ,$$

onde, avendo riguardo alle precedenti ed alle (5), si trae

$$\frac{1}{T_i} = \pm\frac{\rho_i}{H_i}\left\{\frac{1}{r_{ii}}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\rho_i}{r_{ki}}\right) - \frac{1}{r_{ki}}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\rho_i}{r_{ii}}\right)\right\}\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{T_i} = \pm\frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\operatorname{arctg}\left(\frac{r_{ii}}{r_{ki}}\right)\ .$$

Supponiamo senz'altro, come è lecito, pari la permutazione $i\ k\ l$ e ponendo

$$\cos\omega_i = -\frac{\rho_i}{r_{ii}}\ ,\qquad \operatorname{sen}\omega_i = -\frac{\rho_i}{r_{ki}}\ ,$$

avremo

$$(12)\quad \begin{cases} \xi_i = \cos\omega_i X_i + \operatorname{sen}\omega_i X_k\ ,\quad \eta_i = \cos\omega_i Y_i + \operatorname{sen}\omega_i Y_k\ , \\ \qquad\qquad \zeta_i = \cos\omega_i Z_i + \operatorname{sen}\omega_i Z_k\ , \\ \lambda_i = \operatorname{sen}\omega_i X_i - \cos\omega_i X_k\ ,\quad \mu_i = \operatorname{sen}\omega_i Y_i - \cos\omega_i Y_k\ , \\ \qquad\qquad \nu_i = \operatorname{sen}\omega_i Z_i - \cos\omega_i Z_k\ . \end{cases}$$

Il significato geometrico di ω_i risulta da queste formole stesse: esso è l'angolo che la normale principale della curva (u_i), nel suo verso positivo, forma colla direzione positiva della curva (u_i) e si ha

$$\frac{1}{T_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial u_i}\ .$$

Riepilogando abbiamo dunque, oltre le (7), le formole:

$$(13)\quad \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{31}^2}\ , \quad \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{r_{32}^2} + \frac{1}{r_{12}^2}\ , \quad \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}$$

$$(14)\quad \frac{1}{T_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial u_1}\ , \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial u_2}\ , \quad \frac{1}{T_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial u_3}\ .$$

$$(15)\quad \operatorname{tg}\omega_1 = \frac{r_{31}}{r_{21}}\ , \quad \operatorname{tg}\omega_2 = \frac{r_{12}}{r_{32}}\ , \quad \operatorname{tg}\omega_3 = \frac{r_{23}}{r_{13}}\ .$$

§. 410.

Linee d'equidistanza ed equazione del Cayley.

L'elemento d'arco

$$ds_3 = H_3\, du_3$$

delle curve coordinate (u_3) può anche riguardarsi come la porzione infinitesima di normale alla superficie u_3, intercetta dalla successiva $u_3 + du_3$ del medesimo sistema. Sulla superficie u_3 le linee

$$H_3 = \text{costante}$$

sono dunque quelle lungo le quali è costante questa porzione infinitesima di normale; esse si diranno per ciò *le linee di equidistanza* della superficie $u_3 =$ costante [1].

Ora osserviamo che i coseni di direzione della tangente alla linea di equidistanza $H_3 =$ costante sono proporzionali ai tre binomii

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2}\ , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_1} - \frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\ ,$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_1} - \frac{\partial H_3}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2}\ ,$$

e quindi per le (11) a λ_3, μ_3, ν_3. Ne deduciamo il teorema: *La normale principale di una linea coordinata (u_3) è diretta secondo la normale alla linea di equidistanza.*

---

[1] Solo nel caso in cui fosse H_3 assolutamente costante (o funzione della sola u_3) le linee di equidistanza sarebbero indeterminate. Ma allora avremmo

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{23}} = 0\ , \quad \frac{1}{\rho_3} = 0\ ,$$

e le linee coordinate (u_3) sarebbero rette, cioè le superficie u_3 parallele.

Osserviamo di più che la formola

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{H_3^2}\left\{\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\right)^2\right\},$$

che dà la flessione di questa traiettoria ortogonale si può scrivere

$$\frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\Delta_1 \log H_3} = \sqrt{\Delta_1 \log n}\,, \tag{16}$$

essendo Δ_1 il parametro differenziale primo calcolato rispetto all'elemento lineare della superficie $u_3 =$ costante ed εn, con ε costante infinitesima, indicando la porzione infinitesima di normale alle superficie u_3, intercetta dalla successiva. È notevole che il teorema superiore, come anche la formola (16), non dipendono dall'essere la famiglia $u_3 =$ costante una famiglia di Lamé ma valgono per qualunque sistema di superficie e per le loro traiettorie ortogonali, come per primo ha osservato Morera [1]. Anzi aggiungiamo di più che esse sussistono in qualunque spazio curvo a tre dimensioni, come facilmente si deduce dalle formole generali al §. 166 (I, pag. 364) [2].

Ma, nel caso nostro dei sistemi tripli ortogonali, la funzione n deve soddisfare per la terza delle formole (A) di Lamé, all'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial n}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial n}{\partial u_2}\,. \tag{17}$$

Abbiamo già incontrato più volte questa equazione in varie ricerche in particolare nella teoria dei sistemi ciclici (Cf. particolarmente §. 273)

---

[1] Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 4 marzo 1886.

[2] Indichiamo rapidamente la dimostrazione che si ottiene applicando le formole (31), (32) della citata pag. 364 (vol. I). Prendasi nello spazio curvo S_3 il dato sistema ∞^1 di superficie come superficie coordinate x_3 e le loro traiettorie ortogonali per linee coordinate (x_3). Avremo

$$ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2\,a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 + a_{33}\,dx_3^2$$

e sarà

$$dt = ds_3 = \sqrt{a_{33}}\,dx_3 \quad , \quad n = \sqrt{a_{33}}\,.$$

Posto nelle (32) citate

$$\eta_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}^{3} \begin{Bmatrix} \lambda\,\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt},$$

se ne trae

$$\eta_i = -\sum_{k=1}^{k=2} A_{ik}\frac{\partial \log n}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2)$$

$$\eta_3 = 0\,,$$

e nel problema di determinare le superficie aventi a comune con una data u_3 = costante l'immagine sferica delle linee di curvatura. Nel significato attuale, come equazione a cui soddisfa la distanza normale infinitesima fra una superficie e la sua successiva in una famiglia di Lamé, è stata data dal Cayley e si dirà per ciò l'equazione *del Cayley*.

La forma (17) di quest'equazione suppone che le linee coordinate siano quelle di curvatura. In coordinate curvilinee qualunque, denotando nel solito modo le due forme quadratiche fondamentali della superficie, essa si scrive come abbiamo già osservato al §. 273* (pag. 151)

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Possiamo dedurre di qui nuovamente il risultato (già sopra ricordato) di Darboux che il parametro φ di una famiglia di Lamé

$$\varphi(x, y, z) = \varphi$$

soddisfa ad un'equazione caratteristica alle derivate parziali terze. Si vede subito infatti che la distanza normale εn fra la superficie φ della famiglia e la successiva $\varphi + d\varphi$ è data da

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} .$$

Sostituendo nella (18), calcolata per la superficie φ, avremo appunto l'indicata equazione alle derivate parziali terze. Di qui si ha facilmente il risultato:

Affinchè un sistema ∞^1 *di superficie sia una famiglia di Lamé è necessario e sufficiente che la distanza normale infinitesima di ogni superficie della famiglia dalla successiva soddisfi all'equazione* (18) *del Cayley.*

---

e quindi

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum_{l,m}^{1,2} A_{lm} \frac{\partial \log n}{\partial x_l} \frac{\partial \log n}{\partial x_m} = \Delta_1 \log n ,$$

che è la formola (16) del testo generalizzata. Dai valori superiori delle η_l, considerando che le costanti di direzione delle linee di equidistanza n = costante sono proporzionali a

$$\frac{\partial \log n}{\partial x_2} , \quad -\frac{\partial \log n}{\partial x_1} , 0,$$

segue l'ortogonalità di questa direzione a quella della normale principale alle linee (x_3) c. d. d.

§. 411.

Sistemi ciclici osculatori.

La coincidenza, sopra notata, dell'equazione del Cayley con quella che ha servito al §. 273 per la determinazione dei sistemi ciclici normali ad una superficie data trova la sua espressione geometrica nel bel teorema di Ribaucour:

Se in un sistema triplo ortogonale si considera una superficie S *di uno dei tre sistemi e nei punti di essa si costruiscono i circoli osculatori delle traiettorie ortogonali delle superficie appartenenti al medesimo sistema, la doppia infinità di circoli costruiti forma un sistema ciclico.*

Diremo che questo sistema ciclico è il sistema *osculatore* del sistema dato lungo la superficie S.

Per dimostrare analiticamente questo teorema basta paragonare le formole generali dei §§. precedenti con quelle che al §. 273 ci hanno servito alla determinazione dei sistemi ciclici normali ad una data superficie. Consideriamo nel sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) una determinata superficie $u_3 =$ costante; la funzione H_3 è una soluzione dell'equazione del Cayley:

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}.$$

Essendo ρ_3 il raggio del circolo osculatore della curva coordinata (u_3), ed ω_3 l'angolo che la sua normale principale forma colla linea (u_1), dalle formole alla fine del §. 409 si ha

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u_2}\right)^2$$

$$\cos\omega_3 = -\frac{\rho_3}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u_1}, \quad \operatorname{sen}\omega_3 = -\frac{\rho_3}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial u_2}.$$

Confrontando queste formole colle (V) §. 273 (pag. 149), e tenendo conto delle mutate notazioni, deduciamo il teorema enunciato.

Una dimostrazione geometrica del teorema di Ribaucour si rileva dalle proprietà generali osservate al §. 326 relativa ai circoli osculatori delle linee di curvatura. Se si considera infatti la doppia infinità dei circoli osculatori delle linee (u_3) lungo una superficie $u_3 =$ costante, ne risulta che associando questi circoli lungo le linee di curvatura (u_1) o

lungo le (u_2) si avranno due sistemi di superficie a linee di curvatura circolari. D'altronde due tali superficie Σ_1, Σ_2, aventi a comune uno dei detti circoli C uscente da un punto M della $u_3 =$ costante, hanno per normali in M le tangenti alle rispettive linee di curvatura (u_1), (u_2); dunque Σ_1, Σ_2 si tagliano ortogonalmente lungo C. Dal teorema inverso di Dupin segue ora che i circoli C costituiscono un sistema ciclico.

Da quanto abbiamo detto alla fine del §. precedente risulta poi che la proprietà contenuta nel teorema di Ribaucour è caratteristica per le famiglie di Lamé, che cioè: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una famiglia* (S) *di superficie sia una famiglia di Lamé è che lungo ogni superficie* S *della serie i circoli osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia costituiscano un sistema ciclico.*

La condizione è necessaria secondo il teorema di Ribaucour. Essa è anche sufficiente poichè, indicando con n la distanza normale infinitesima fra la superficie S e la successiva, il raggio ρ_3 del circolo sarà dato dalla (16) pag. 485. D'altronde, riferendo la S alle sue linee di curvatura, siccome quei circoli formano un sistema ciclico, dovrà la n, secondo i risultati del §. 273, soddisfare l'equazione (17) del Cayley e però la famiglia (S) apparterrà ad un sistema triplo ortogonale.

§. 412.

Le equazioni a derivate parziali per la funzione $W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Per un sistema triplo ortogonale qualunque (u_1, u_2, u_3) indichisi con W il semiquadrato della distanza dell'origine (o di un punto fisso dello spazio) da un punto mobile di coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3, cioè pongasi

$$W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) .$$

La W, considerata come funzione di u_1, u_2, u_3, soddisfa ad un sistema notevole di equazioni simultanee a derivate parziali del secondo ordine, che ora andiamo a formare. Siccome questo primo risultato è indipendente dall'essere u_1, u_2, u_3 parametri di un sistema triplo ortogonale, ma vale per un sistema qualunque di coordinate curvilinee, supponiamo che sia in generale

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1-3} a_{ik}\, du_i\, du_k$$

il ds^2 dello spazio euclideo e ricordiamo che per le formole di Christoffel

le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l^{1,2,3} \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial x}{\partial u_l} \tag{20}$$

colle analoghe per y, z. Dalla (19), derivando ed osservando le (20), si trae

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = S\, x \frac{\partial x}{\partial u_i}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = S\, x \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} + S \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k}$$

0

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial W}{\partial u_l} + a_{ik} . \tag{21}$$

Coi simboli delle derivate seconde covarianti queste si scrivono

$$W_{ik} = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{21*}$$

È questo un sistema di sei equazioni simultanee alle derivate parziali del secondo ordine per W; esso è illimitatamente integrabile, come risulta *a priori* dall'osservare che per un sistema iniziale di valori u_1, u_2, u_3 si possono prendere ad arbitrio i valori di W e delle tre derivate prime.

Ciò si verifica anche subito direttamente sulle (21) osservando che nel caso attuale tutti i simboli a quattro indici

$$|is, t\lambda|$$

sono identicamente nulli.

Ma supponiamo ora che il sistema (u_1, u_2, u_3) sia ortogonale, cioè si abbia

$$a_{ii} = H_i^2, \quad a_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k .$$

Allora se si considerano delle sei equazioni (21) solo le tre che implicano le derivate miste, cioè il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_1} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_3} = \begin{Bmatrix} 23 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_2} + \begin{Bmatrix} 23 \\ 3 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_3 \partial u_1} = \begin{Bmatrix} 31 \\ 3 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_3} + \begin{Bmatrix} 31 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u_1} , \end{cases}$$

ovvero, sostituendo ai simboli i loro valori effettivi:

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{\partial \log H_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial W}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \log H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial W}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{\partial \log H_2}{\partial u_3}\dfrac{\partial W}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \log H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial W}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u_3 \partial u_1} = \dfrac{\partial \log H_3}{\partial u_1}\dfrac{\partial W}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \log H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial W}{\partial u_1}\,, \end{cases}$$

si vede che già per questo sistema le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte [1]. La soluzione più generale di questo sistema (C) contiene quindi tre funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna, potendosi assumere ad arbitrio lungo tre linee coordinate (u_1), (u_2), (u_3) uscenti da un punto, i valori di W (Cf. §. 209, I, pag. 481).

§. 413.

Trasformazione di Combescure.

Applichiamo le considerazioni del §. precedente allo studio di un'importante trasformazione dei sistemi tripli ortogonali scoperta da Combescure [2], e ritrovata poi indipendentemente da Darboux pel caso generale dei sistemi n^{pli} ortogonali nell'S_n euclideo.

Il problema che conduce alla trasformazione di Combescure è il seguente:

Dato un sistema triplo ortogonale, definito dalle formole

$$x = x(u_1, u_2, u_3)\,,\quad y = y(u_1, u_2, u_3)\,,\quad z = z(u_1, u_2, u_3)\,,$$

---

[1] Senza supporre il sistema (u_1, u_2, u_3) ortogonale, basta supporre che si abbia

$$(\alpha)\qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 3 \end{Bmatrix} = 0\,,\quad \begin{Bmatrix} 23 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0\,,\quad \begin{Bmatrix} 31 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

perchè le tre corrispondenti equazioni

$$W_{ik} = a_{ik}\quad (i \neq k)$$

formino un sistema completo. Il significato geometrico delle (α) è questo che sopra ciascuna superficie (u_i) le superficie degli altri due sistemi tracciano un sistema coniugato; si hanno allora i *sistemi tripli coniugati* di Darboux sui quali non possiamo trattenerci nel testo (V. Darboux T. III, pag. 281, s. 8).

[2] Annales de l'École Normale Supérieure, t. IV (1.ª serie).

trovarne un secondo

$$x' = x'(u_1, u_2, u_3)\,,\quad y' = y'(u_1, u_2, u_3)\,,\quad z' = z'(u_1, u_2, u_3)$$

tale che in ogni punto (x, y, z) *dello spazio le normali alle tre superficie del primo sistema siano parallele alle corrispondenti nel punto* (x', y', z') *del secondo.*

Prendiamo per incognite le distanze algebriche W_1, W_2, W_3 dell'origine delle coordinate dalle tre facce del triedro principale nel secondo sistema, cioè poniamo

$$\begin{cases} W_1 = x' X_1 + y' Y_1 + z' Z_1 \\ W_2 = x' X_2 + y' Y_2 + z' Z_2 \\ W_3 = x' X_3 + y' Y_3 + z' Z_3\,, \end{cases}$$

onde avremo

$$x' = W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3\,, \tag{22}$$

colle analoghe per y', z'. Basterà determinare W_1, W_2, W_3 in guisa che risultino

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i}\,,\ \frac{\partial y'}{\partial u_i}\,,\ \frac{\partial z'}{\partial u_i}\ (i = 1, 2, 3)$$

proporzionali a

$$X_i\,,\quad Y_i\,,\quad Z_i\,.$$

Ora se deriviamo le (22) rispetto ad u_i, avendo riguardo alle (5), troviamo

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k} W_k + \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_i}{\partial u_l} W_l\right) X_i + \left(\frac{\partial W_k}{\partial u_i} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k} W_i\right) X_k + \tag{23}$$

$$+ \left(\frac{\partial W_l}{\partial u_i} - \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_i}{\partial u_l} W_i\right) X_l\,,$$

dove al solito $i\,k\,l$ indica una permutazione degli indici 1 2 3. Ne risulta che le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare W_1, W_2, W_3 sono le sei seguenti

$$\frac{\partial W_k}{\partial u_i} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k} W_i\ (i \neq k)\,, \tag{24}$$

prendendo per i, k le sei coppie differenti.

Questa si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(H_k W_k) = \frac{\partial H_i}{\partial u_k} W_i + \frac{\partial H_k}{\partial u_i} W_k\,,$$

ed il secondo membro non mutando per lo scambio di i con k, ne risulta

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(H_k W_k) = \frac{\partial}{\partial u_k}(H_i W_i),$$

onde sarà

$$H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + H_3 W_3 du_3$$

il differenziale esatto di una funzione, che indichiamo con W. Avremo dunque

$$W_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial u_1}, \quad W_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial u_2}, \quad W_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial u_3}$$

e sostituendo nelle (24), vediamo che W deve unicamente soddisfare le tre equazioni

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i\, \partial u_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k} \quad (i \neq k),$$

ossia

$$W_{ik} = 0.$$

Queste non sono altro che le (C) pag. 490, che ammettono come si è detto una soluzione generale W con tre funzioni arbitrarie. Inversamente, pei calcoli sopra eseguiti, basta che W soddisfi le tre equazioni

$$(C) \qquad W_{12} = 0, \quad W_{23} = 0, \quad W_{31} = 0$$

e le formole

$$(22^*) \qquad x' = \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial u_1} X_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial u_2} X_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial u_3} X_3$$

daranno in termini finiti il sistema triplo ortogonale trasformato.

Si può altresì calcolare facilmente l'elemento lineare dello spazio relativo al nuovo sistema triplo

$$ds'^2 = H'^2_1 du_1^2 + H'^2_2 du_2^2 + H'^2_3 du_3^2,$$

osservando che le (23) diventano

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{W_{ii}}{H_i} X_i,$$

e si ha quindi

$$(25) \quad . \qquad ds'^2 = \left(\frac{W_{11}}{H_1}\right)^2 du_1^2 + \left(\frac{W_{22}}{H_2}\right)^2 du_2^2 + \left(\frac{W_{33}}{H_3}\right)^2 du_3^2 .$$

Come si vede, i sistemi tripli ortogonali derivati da un sistema dato per trasformazione di Combescure dipendono da tre funzioni arbitrarie.

Volendo caratterizzare geometricamente gli elementi che determinano il sistema trasformato, si osservi che le curve coordinate (u_1) (u_2) (u_3) vengono trasformate esse stesse per la trasformazione che al Cap. I (I, pag. 40) abbiamo detta la trasformazione di Combescure per le curve. Ora si considerino nel sistema primitivo le tre curve coordinate (u_1) (u_2) (u_3) uscenti da un punto $(u_1^{(0)} u_2^{(0)} u_3^{(0)})$; per individuare il sistema triplo trasformato basterà dare, ad arbitrio, le tre trasformate di Combescure delle tre curve coordinate primitive.

§. 414.

Altro modo di determinare i sistemi trasformati.

Si può procedere alla determinazione dei sistemi trasformati di Combescure di un sistema dato

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$$

in un altro modo, che talora torna più utile nelle applicazioni. Basta per ciò prendere come incognite i nuovi valori delle H pel sistema trasformato

$$ds'^2 = H_1'^2 du_1^2 + H_2'^2 du_2^2 + H_3'^2 du_3^2 .$$

Le H'_i sono da determinarsi in guisa che le tre espressioni

$$\sum_i H'_i X_i du_i , \quad \sum_i H'_i Y_i du_i , \quad \sum_i H'_i Z_i du_i$$

risultino tre differenziali esatti, dopo di che avremo il sistema trasformato con quadrature dalle formole

$$x' = \int \sum_i H'_i X_i du_i , \quad y' = \int \sum_i H'_i Y_i du_i , \quad z' = \int \sum_i H'_i Z_i du_i$$

Ora, scrivendo le condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(H'_i X_i) = \frac{\partial}{\partial u_i}(H'_k X_k) ,$$

coll'osservare le (5), si ottiene

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} X_i + \frac{H'_i}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} X_k = \frac{\partial H'_k}{\partial u_i} X_k + \frac{H'_k}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} X_i .$$

Questa deve sussistere cangiando le X nelle Y e nelle Z, per cui le H'_i

debbono soddisfare alle 6 condizioni

$$\frac{1}{H'_h}\frac{\partial H'_i}{\partial u_h} = \frac{1}{H_h}\frac{\partial H_i}{\partial u_h} \quad (i \neq k) .$$

Ponendo con Darboux

$$\beta_{hi} = \frac{1}{H_h}\frac{\partial H_i}{\partial u_h} ,$$

vediamo che le 6 quantità β_{hi} debbono conservare il medesimo valore per due sistemi trasformati di Combescure, come risulta anche subito dalle (5)*. È da notarsi che le formole (A), (B) di Lamé, espresse per le β, assumono la forma

$$\frac{\partial \beta_{hi}}{\partial u_i} = \beta_{hi}\,\beta_{ii} \tag{A*}$$

$$\frac{\partial \beta_{ih}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{hi}}{\partial u_h} + \beta_{ii}\,\beta_{hi} = 0 . \tag{B*}$$

Le H'_i sono dunque da determinarsi in guisa da soddisfare le 6 equazioni lineari ed omogenee

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_h} = \beta_{hi}\,H'_h .$$

Se si trae da due di queste i valori di H'_1 H'_2 espressi per H'_3, cioè

$$H'_1 = \frac{1}{\beta_{13}}\frac{\partial H'_3}{\partial u_1} , \quad H'_2 = \frac{1}{\beta_{23}}\frac{\partial H'_3}{\partial u_2} ,$$

si trova subito che H'_3 deve soddisfare alle tre seguenti equazioni del secondo ordine:

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H'_3}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{\beta_{13}\beta_{23}}{\beta_{13}}\dfrac{\partial H'_3}{\partial u_1} + \dfrac{\beta_{21}\beta_{13}}{\beta_{23}}\dfrac{\partial H'_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 H'_3}{\partial u_1 \partial u_3} = \dfrac{1}{\beta_{13}}\dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_3}\dfrac{\partial H'_3}{\partial u_1} + \beta_{13}\beta_{31}\,H'_3 \\ \dfrac{\partial^2 H'_3}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{1}{\beta_{23}}\dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_3}\dfrac{\partial H'_3}{\partial u_2} + \beta_{23}\beta_{32}\,H'_3 . \end{cases}$$

Per questo sistema le condizioni d'integrabilità risultano identicamente soddisfatte a causa delle (A*), onde segue che la soluzione più generale H'_3 del sistema dipende da tre funzioni arbitrarie di u_1, u_2, u_3 rispettivamente. Così arriviamo per altra via alle medesime conclusioni che al §. precedente.

§. 415.

Casi particolari di sistemi tripli ortogonali.

Dopo queste generalità sui sistemi tripli ortogonali, passiamo a considerare alcuni casi semplici notevoli.

Consideriamo dapprima un sistema qualunque ∞^1 di piani o di sfere e le loro traiettorie ortogonali. Se sopra una sfera o piano iniziale si fissa una linea arbitraria L, quelle traiettorie ortogonali che escono dai punti di L formano una superficie Σ la quale viene intersecata da tutte le sfere (piani) del sistema ortogonalmente e quindi lungo linee di curvatura. Dunque: *Ogni sistema ∞^1 di sfere o piani appartiene ad infiniti sistemi tripli ortogonali.*

Per ottenerne uno basta tracciare ad arbitrio sopra una sfera iniziale (piano) due sistemi di curve ortogonali L, L′; le corrispondenti superficie Σ, Σ' completano il sistema triplo ortogonale. Al Cap. I (§§. 22, 23) abbiamo esposto i risultati di Darboux relativi alle famiglie di sfere ed alle loro traiettorie ortogonali e dimostrato che queste famiglie, insieme colle loro traiettorie ortogonali, si hanno con sole quadrature. Così tutti i sistemi tripli ortogonali in discorso si hanno con quadrature.

Ricordiamo poi (I, pag. 46) che se sopra due sfere qualunque della famiglia si riguardano come corrispondenti i punti d'incontro con una medesima traiettoria ortogonale, la rappresentazione dell'una sfera sull'altra conserva gli angoli (ed i circoli). Si vede facilmente che tale proprietà è caratteristica per le famiglie di sfere (o piani) e le loro traiettorie ortogonali, cioè: *Se sopra le superficie di un sistema ∞^1 le traiettorie ortogonali segnano una corrispondenza conforme, le superficie sono sfere o piani.*

Supposto infatti di avere una tale famiglia di superficie (Σ), se sopra una di esse Σ tracciamo un doppio sistema ortogonale qualunque di linee (L, L′), le superficie luogo delle traiettorie ortogonali delle (Σ) uscenti dai punti di una L o di una L′ completeranno con (Σ) un sistema triplo ortogonale. Pel teorema di Dupin le linee L, L′ sono dunque linee di curvatura di Σ e questa superficie, avendo le linee di curvatura indeterminate, è per conseguenza una sfera.

Consideriamo il caso particolare in cui la famiglia di Lamé si riduce ad un fascio di piani. In tal caso, tracciato sopra uno dei piani un sistema doppio ortogonale arbitrario di curve (L, L′), il sistema triplo

si comporrà 1° dei piani del fascio, 2° dei due sistemi di superficie di rotazione aventi per asse l'asse del fascio e per curve meridiane le L, L'. Ricerchiamo se è questo il più generale sistema triplo ortogonale contenente una famiglia di superficie di rotazione. Supponiamo per ciò che nel sistema triplo definito da

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2$$

le superficie $u_2 =$ costante siano di rotazione e siano le curve (u_3) i loro meridiani. Poichè queste sono geodetiche, sarà

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0\,,$$

onde dalla prima delle equazioni (A) di Lamé segue

$$a)\ \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = 0 \quad \text{ovvero} \quad b)\ \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0\ .$$

Nel primo caso a) avendosi

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = 0$$

segue dalle (7) pag. 482.

$$\frac{1}{r_{31}} = 0 \qquad \frac{1}{r_{32}} = 0\ ;$$

dunque le superficie $u_3 =$ costante sono piani, cioè i piani delle curve meridiane delle superficie $u_2 =$ costante, e le superficie di rotazione $u_2 =$ costante hanno il medesimo asse. Si ha quindi necessariamente un sistema della specie sopra considerata, ove anche le superficie $u_1 =$ costante sono di rotazione attorno al medesimo asse.

Notiamo poi che H_1, H_2 sono indipendenti da u_3, e dovendo essere

$$\frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{H_2\,H_3}\frac{\partial H_2}{\partial u_2} \quad , \quad \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{H_1\,H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}$$

indipendenti da u_3, ne segue

$$\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u_1\,\partial u_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u_2\,\partial u_3} = 0,$$

cioè

$$H_3 = U_3\,f(u_1, u_2)\ ,$$

e cangiando il parametro u_3 si può rendere anche H_3 indipendente da u_3.

Viceversa se in

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2 ,$$

H_1, H_2, H_3 sono funzioni solo di u_1, u_2 si ha il caso considerato.

Nel secondo caso *b*), essendo

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0 \qquad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0 ,$$

si può fare senz'altro $H_1 = 1$. Essendo così

$$\frac{1}{r_{32}} = 0 \qquad \frac{1}{r_{31}} = 0$$

e quindi per le (13) pag. 484 $\frac{1}{\rho_1} = 0$, le linee (u_1) sono rette e le superficie u_1 sono parallele. Inoltre le superficie $u_2 =$ costante di rotazione sono sviluppabili, quindi o cilindri retti o coni circolari retti. Nel primo caso le $u_1 =$ costante sono piani paralleli, nel secondo superficie parallele a linee di curvatura circolari. Viceversa si vede subito che qualunque sistema ∞^2 di cilindri circolari retti a generatrici parallele, o di coni circolari retti i cui assi siano le tangenti della curva luogo dei vertici danno una famiglia di Lamé composta di superficie di rotazione.

§. 416.

La trasformazione di Combescure applicata ai sistemi ciclici.

Una classe notevole di sistemi tripli ortogonali è quella dei *sistemi ciclici* di Ribaucour, al cui studio abbiamo dedicato il Cap. XVIII. Il teorema di Ribaucour, dimostrato al §. 411, permette di far derivare da ogni sistema triplo ortogonale noto infiniti sistemi ciclici.

Ora andiamo ad applicare ai sistemi ciclici la trasformazione di Combescure il che conduce, come dimostreremo, alle più generali famiglie di Lamé con traiettorie ortogonali piane.

È chiaro intanto che in ogni sistema triplo ortogonale, derivato per trasformazione di Combescure da un sistema ciclico, le curve che corrispondono ai circoli sono piane e per ciò: *Nei sistemi tripli ortogonali derivati per trasformazione di Combescure dai sistemi ciclici le traiettorie ortogonali delle superficie di uno dei tre sistemi sono curve piane.*

Inversamente dimostriamo che ogni sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3), nel quale le curve coordinate di una stessa famiglia, p. e. le (u_3), sono

piane derivano per trasformazione di Combescure da un sistema ciclico. Consideriamo infatti una superficie S_3 del sistema u_3 ed il sistema ciclico osculatore lungo di essa secondo il §. 411. Le superficie a linee di curvatura circolari del sistema ciclico hanno le stesse immagini delle linee di curvatura delle superficie $u_1 =$ costante, $u_2 =$ costante del sistema primitivo, onde risulta che fra i due sistemi tripli ortogonali viene a stabilirsi precisamente la trasformazione di Combescure; dunque: *Se in un sistema triplo ortogonale* (u_1, u_2, u_3) *le curve* (u_3) *sono piane, i sistemi ciclici osculatori lungo le superficie* $u_3 =$ costante *derivano dal primitivo per trasformazione di Combescure.*

Per trovare tutti i sistemi (u_1, u_2, u_3) in discorso basterà dunque cercare quelli che hanno un sistema ciclico assegnato per sistema osculatore. Quest'ultimo problema si risolve, come dimostreremo, con sole quadrature.

Conviene per ciò che richiamiamo le formole del Cap. XVIII relative ai sistemi ciclici, in particolare quelle del §. 279 (pag. 168), ove abbiamo determinata la forma dell'elemento lineare dello spazio, riferito ad un tale sistema ciclico (u, v, w). Si è trovata la formola, ivi segnata (36):

$$ds^2 = h_1^2\,du^2 + h_2^2\,dv^2 + h_3^2\,dw^2\,, \tag{27}$$

avendo h_1, h_2, h_3 i valori seguenti:

$$\begin{cases} h_1 = 2\cos\dfrac{\sigma}{2}\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial u} - \sqrt{\mathrm{E}}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(t+\dfrac{\Omega}{2}\right)\rho + \dfrac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\rho\right] \\ h_2 = 2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\sigma}{2}\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + \sqrt{\mathrm{G}}\,\cot\dfrac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(t-\dfrac{\Omega}{2}\right)\rho - \dfrac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\rho\right] \\ h_3 = \rho\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\dfrac{\partial t}{\partial w}\,. \end{cases} \tag{28}$$

Ricordiamo che in queste formole le funzioni

$$\mathrm{E},\ \mathrm{G},\ \Omega,\ \sigma,\ \rho$$

sono funzioni solo di u, v col significato seguente. Le tre prime figurano nella formola

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\cos\Omega\sqrt{\mathrm{E}\,\mathrm{G}}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

che dà l'elemento lineare sferico, riferito alle immagini (u, v) delle sviluppabili della congruenza formata dagli assi dei circoli. L'angolo σ è

definito dalla formola

$$(a) \qquad \cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

e soddisfa alle equazioni

$$(b) \quad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial u}=2(\cos\sigma-1)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v}=2(\cos\sigma+1)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

che è bene scrivere anche sotto la forma

$$(c) \quad \frac{\partial\log\operatorname{sen}\sigma}{\partial u}=\frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial\log\operatorname{sen}\sigma}{\partial v}=\frac{2\cos\sigma}{\cos\sigma-1}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

dove $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$ sono calcolati per l'elemento lineare sferico. La funzione $\rho(u,v)$ è poi una soluzione (qualunque) dell'equazione di Laplace

$$(29) \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v}+\left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\cos\Omega\sqrt{EG}\right]\rho=0.$$

In fine la funzione $t(u,v,w)$ è la soluzione generale dell'equazione a differenziali totali, illimitatamente integrabile:

$$(30) \quad dt=\left[\sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(t+\frac{\Omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right]du-$$
$$-\left[\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(t-\frac{\Omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right]dv.$$

Questa soluzione generale t contiene una costante arbitraria, indicata con w, la quale figura come terza variabile soltanto in t.

§. 417.

Riduzione al caso dei sistemi ciclici derivati.

Ricordate le formole superiori, costruiamo per il sistema ciclico le quantità

$$\beta_{ik}=\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_k}{\partial u_i}$$

del §. 414; troviamo:

$$(31)\quad \begin{cases} \beta_{12} = \sqrt{G}\,\operatorname{sen}\left(t-\frac{\Omega}{2}\right) - \cot\frac{\sigma}{2}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \quad \beta_{23} = \cos\frac{\sigma}{2}\frac{\partial t}{\partial w}, \\ \beta_{31} = -\frac{\sqrt{E}\cos\left(t+\frac{\Omega}{2}\right)}{\cos\frac{\sigma}{2}} \\ \beta_{21} = -\sqrt{E}\,\operatorname{sen}\left(t+\frac{\Omega}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} \\ \beta_{32} = \dfrac{\sqrt{G}\cos\left(t-\frac{\Omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}, \quad \beta_{13} = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

Osserviamo che questi valori delle β sono affatto indipendenti dalla soluzione scelta ρ della equazione (29), onde segue il teorema;

Tutti i sistemi ciclici che hanno a comune l' immagine sferica delle sviluppabili delle congruenze degli assi dei circoli derivano l'uno dall'altro per trasformazione di Combescure.

Questo risultato deriva anche subito dalle formole del citato §. 278, in particolare dalle (34*) pag. 168.

Ora per applicare, nel modo più generale, al nostro sistema ciclico la trasformazione di Combescure dobbiamo determinare i coefficienti H_1, H_2, H_3 del sistema trasformato, definito dalla formola

$$ds^2 = H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 + H_3^2\,dw^2,$$

mediante le formole (26) del §. 414 che servono a trovare H_3. Se mutiamo in queste la funzione incognita H_3, ponendo

$$H_3 = R\,\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial t}{\partial w},$$

essendo $R\,(u, v, w)$ la nuova funzione incognita, troviamo per determinare R le tre equazioni simultanee:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial w} = \left[\sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\Omega}{2}\right) - \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial R}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial v\,\partial w} = \left[-\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(t-\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial R}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \cos\Omega\sqrt{E\,G}\right]R = 0. \end{cases}$$

Ma le prime due, in forza delle (c) e della (30), si scrivono

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right)=-\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial t}{\partial w}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\partial R}{\partial w}\right)=-\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial t}{\partial w}\right),$$

onde integrando risulta

$$\frac{\partial R}{\partial w}=\frac{W}{\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial t}{\partial w}},$$

dove W è una funzione arbitraria di w. Una nuova integrazione rapporto a w dà

$$R=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\int_{w_0}^{w}\frac{W\,dw}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}+\psi(u,v)\,, \tag{33}$$

dove w_0 è un valore fisso di w e $\psi(u,v)$ indica una funzione di u, v soltanto. Questa resterà da determinarsi in guisa che il valore (33) di R soddisfi anche la terza delle (32). Ora si verifica subito che la funzione

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma\dfrac{\partial t}{\partial w}}$$

soddisfa a quest'equazione; e poichè i coefficienti di quest'equazione lineare omogenea non contengono w, vi soddisferà pure

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\int_{w_0}^{w}\frac{W\,dw}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}.$$

Dunque: *si soddisferà nel modo più generale a tutte le condizioni* (32), *assumendo nella* (7) *per* $\psi(u,v)$ *una soluzione arbitraria dell'equazione di Laplace* (29), *da cui dipende la ricerca delle congruenze (cicliche), aventi per immagini delle sviluppabili le linee sferiche* (u, v).

Vediamo adunque che basta conoscere tutti i sistemi *ciclici* derivati dal sistema ciclico dato per trasformazione di Combescure per trovare con quadrature i sistemi derivati più generali.

§. 418.

Determinazione dei nuovi sistemi tripli dai loro elementi caratteristici.

Colle formole ottenute nei §§. precedenti, siamo in grado di stabilire il seguente teorema, che precisa il grado di arbitrarietà delle famiglie di Lamé con traiettorie ortogonali piane:

Per determinare un sistema triplo ortogonale, in cui le traiettorie ortogonali delle superficie di uno dei sistemi (Σ) *siano curve piane* C, *si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi:* 1.° *una superficie* Σ_0 *del sistema* Σ, 2.° *una curva* C_0 *fra le* C, 3.° *il sistema ciclico osculatore lungo* Σ_0. *Questi elementi individuano il sistema, che si otterrà con sole quadrature, se le linee di curvatura di* Σ_0 *sono note.*

Che il sistema triplo cercato, supposto esistente, sia unico risulta già dai teoremi dati al §. 327 (Vedi teorema (A') pag. 283). Ma l'unicità, insieme alla effettiva esistenza, risulta nuovamente dall'analisi seguente. Il sistema ciclico osculatore sia quello a cui si riferiscono le formole del §. 416. Pel sistema da costruirsi avrà H_3 il valore

$$H_3 = R \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial t}{\partial w},$$

essendo R dato dalla (7). Ne deduciamo

$$H_1 = \frac{1}{\beta_{13}} \frac{\partial H_3}{\partial u}, \quad H_2 = \frac{1}{\beta_{23}} \frac{\partial H_3}{\partial v}$$

e quindi per le (30) (31):

$$(34)\quad \begin{cases} H_1 = 2 \cos \frac{\sigma}{2} \left[\frac{\partial R}{\partial u} - \sqrt{E} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left(t + \frac{\Omega}{2} \right) R + \frac{2 \cos \sigma}{1 + \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} R \right] \\ H_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \left[\frac{\partial R}{\partial v} + \sqrt{G} \cot \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen} \left(t - \frac{\Omega}{2} \right) R - \frac{2 \cos \sigma}{1 - \cos \sigma} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} R \right] \\ H_3 = R \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

Per le curvature principali

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{\beta_{13}}{H_3}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \frac{\beta_{23}}{H_3}$$

troviamo

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{2\,R\cos\frac{\sigma}{2}}\,,\quad \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{2\,R\,\mathrm{sen}\,\frac{\sigma}{2}}\,,$$

e quindi per le quantità ρ_3, ω_3, $\frac{1}{T_3}$ del §. 409:

$$\rho_3 = R\,\mathrm{sen}\,\sigma\,,\quad \omega_3 = \frac{\sigma}{2}\,,\quad \frac{1}{T_3} = 0\,.$$

Ora per il sistema ciclico osculatore valgono le medesime formole cangiatovi R in ρ; e poichè per $w = w_0$ debbono risultare per ipotesi formole identiche nei due casi, mentre dalla (33) si ha

$$(R\,\mathrm{sen}\,\sigma)_{w=w_0} = \psi\,\mathrm{sen}\,\sigma\,,$$

vediamo che si dovrà prendere necessariamente $\psi = \rho$. E viceversa prendendo

$$R = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\sigma}\int_{w_0}^{w}\frac{W\,dw}{\frac{\partial t}{\partial w}} + \rho\,(u, v) \tag{35}$$

con W funzione arbitraria di w, il sistema triplo ortogonale corrispondente avrà per sistema ciclico osculatore (come si vede dalle (34)) il sistema ciclico dato, dal quale deriva per trasformazione di Combescure. Basta ora osservare che la presenza della funzione arbitraria W nella (35) permette di dare ad una delle curve coordinate piane (w) la forma prestabilita C_0 perchè ne risulti dimostrato il nostro teorema.

Faremo un'ultima osservazione sui sistemi tripli ortogonali che attualmente consideriamo. L'angolo $\frac{\sigma}{2}$ misura, secondo le formole superiori, l'inclinazione dei piani delle curve C sulle superficie u = costante; domandiamo se fra i sistemi tripli considerati ve ne sono di quelli pei quali σ è costante. Essendo allora per le (b)

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0\,,\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0\,,$$

le linee (u, v) sono le immagini delle assintotiche di una superficie pseudosferica d'elemento lineare sferico rappresentativo

$$ds'^2 = du^2 + 2\cos\Omega\,du\,dv + dv^2,$$

dove Ω è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} + \operatorname{sen}\Omega = 0\,.$$

L'equazione (29) per ρ diventa allora l'equazione per le deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \rho\cos\Omega = 0\,.$$

La ricerca di questi speciali sistemi tripli dipende così dal problema delle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche.

§. 419.

Il sistema triplo ortogonale delle quadriche a centro confocali.

Il resto del presente Capitolo sarà dedicato allo studio di uno dei più semplici ed importanti sistemi tripli ortogonali, del sistema delle quadriche a centro confocali, che dà luogo alle coordinate ellittiche, introdotte nell'analisi da Lamé.

Consideriamo il sistema di quadriche a centro confocali definito dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} = 1\,, \tag{36}$$

dove ρ è un parametro variabile, e le costanti a, b, c sono tali che

$$a^2 > b^2 > c^2\,.$$

La superficie (36) è reale soltanto quando ρ giace fra $+\infty$ e $-a^2$, e più precisamente essa è

un ellissoide . . . . . quando $+\infty > \rho > -c^2$

un iperboloide ad una falda „ $-c^2 > \rho > -b^2$

un iperboloide a due falde . „ $-b^2 > \rho > -a^2$.

Per $\rho = +\infty$ si ha una sfera di raggio infinito; variando ρ da $+\infty$ a $-c^2$, la superficie rimane sempre un ellissoide, il cui asse minore $\sqrt{c^2+\rho}$ va sempre e continuamente diminuendo, l'ellissoide riducendosi al limite per $\rho = -c^2$ alla porzione di piano $x\,y$ (contata due volte) interna al-

l'ellisse focale

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1\,.$$

Appena è $\rho<-c^2$, la superficie è un iperboloide ad una falda; e se si pone $\lambda=-c^2-\varepsilon$ con ε positivo, poi si fa tendere ε a zero, si riconosce che per $\varepsilon=0$ l'iperboloide si riduce alla porzione di piano $x\,y$ esterna all'ellisse focale; questa ellisse forma adunque il passaggio dalla serie degli ellissoidi a quella degli iperboloidi ad una falda.

Medesimamente si vedrà che il passaggio da questa serie di iperboloidi a quella degli iperboloidi a due falde avviene attraversando l'iperbola focale

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1\,.$$

Per ogni punto (ξ,η,ζ) dello spazio passano tre superficie del sistema (36), corrispondenti ai tre valori di ρ radici dell'equazione di 3.° grado

$$f(\rho)=(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)-(b^2+\rho)(c^2+\rho)\xi^2-(c^2+\rho)(a^2+\rho)\eta^2-\\-(a^2+\rho)(b^2+\rho)\zeta^2=0\,,$$

e poichè

$$f(+\infty)>0\,,\ f(-c^2)<0\,,\ f(-b^2)>0\,,\ f(-a^2)<0\,,$$

l'equazione avrà le tre radici reali ρ_1, ρ_2, ρ_3 giacenti rispettivamente negli intervalli

$$+\infty>\rho_1>-c^2\,,\quad -c^2>\rho_2>-b^2\,,\quad -b^2>\rho_3>-a^2$$

e le tre superficie corrispondenti del sistema (36):

$$(37)\qquad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2+\rho_1}+\dfrac{y^2}{b^2+\rho_1}+\dfrac{z^2}{c^2+\rho_1}=1\\[2ex]\dfrac{x^2}{a^2+\rho_2}+\dfrac{y^2}{b^2+\rho_2}+\dfrac{z^2}{c^2+\rho_2}=1\\[2ex]\dfrac{x^2}{a^2+\rho_3}+\dfrac{y^2}{b^2+\rho_3}+\dfrac{z^2}{c^2+\rho_3}=1\,,\end{cases}$$

che passano per (ξ,η,ζ), saranno rispettivamente un ellissoide, un iperboloide ad una falda ed un iperboloide a due falde.

Possiamo definire la posizione di un punto $P\equiv(x,y,z)$ dello spazio per mezzo dei parametri ρ_1, ρ_2, ρ_3 delle tre quadriche del sistema (9) che

vi passano; in tal caso ρ_1, ρ_2, ρ_3 diconsi le *coordinate ellittiche* del punto P. Esse sono legate alle coordinate cartesiane x, y, z del medesimo punto dalle relazioni (37).

§. 420.

Coordinate ellittiche.

Per calcolare l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche ρ_1, ρ_2, ρ_3, osserviamo [1] che, essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 le radici dell'equazione di 3.° grado in ρ

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0 ,$$

si avrà identicamente, qualunque sia ρ:

$$(38) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)(\rho_3-\rho)}{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)} .$$

Moltiplicando da ambo le parti per

$$(a^2+\rho)\ (b^2+\rho)\ (c^2+\rho) ,$$

indi facendo successivamente

$$\rho = -a^2 , \quad \rho = -b^2 , \quad \rho = -c^2 ,$$

otteniamo:

$$(39) \qquad x^2 = \frac{(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)(a^2+\rho_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} , \quad y^2 = \frac{(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)(b^2+\rho_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} ,$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)(c^2+\rho_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} ,$$

formole che danno le coordinate cartesiane, espresse per le coordinate ellittiche.

Da queste formole, derivate logaritmicamente rispetto a ρ_1, ρ_2, ρ_3, seguono le altre

$$(40) \qquad \frac{\partial x}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2}\frac{x}{a^2+\rho_i} , \quad \frac{\partial y}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2}\frac{y}{b^2+\rho_i} , \quad \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2}\frac{z}{c^2+\rho_i} \text{ per } i = 1, 2, 3$$

e dalle (37), sottraendole due a due e osservando le (40):

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} = 0 , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} = 0 , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_3}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = 0 ,$$

i segni sommatorii riferendosi ad una permutazione di x, y, z. Segue già di qui:

---

[1] Vedi KIRCHOFF. — Mechanik 17.ª Vorlesung.

Il sistema (36) *di quadriche a centro confocali è un sistema triplo ortogonale.*

Ora, derivando la (38) rispetto a ρ, e ponendo poi successivamente $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3$ si ottiene per le (40)

$$(40^*)\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)},\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)},$$

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_3}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}{(a^2+\rho_3)(b^2+\rho_3)(c^2+\rho_3)},$$

e quindi: *per l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche* ρ_1, ρ_2, ρ_3

$$(41)\quad ds^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}\,d\rho_2^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}{(a^2+\rho_3)(b^2+\rho_3)(c^2+\rho_3)}\,d\rho_3^2\right\}.$$

Di qui vediamo che nel presente sistema triplo ortogonale le linee di curvatura di ciascuna superficie di uno dei tre sistemi formano un sistema isotermo. Esiste però un sistema triplo ortogonale più generale, scoperto da Darboux [1], al quale appartiene la medesima proprietà. Le superficie di questo sistema sono ancora algebriche ma del 4.° ordine.

§. 421.

Corrispondenza delle assintotiche.

Consideriamo le quadriche confocali di una qualunque delle tre famiglie e le loro traiettorie ortogonali. Sopra due qualunque di queste quadriche riguardiamo come punti corrispondenti quelli ove sono incontrate dalla medesima traiettoria ortogonale. Diciamo che sussiste il teorema: *Sopra due quadriche della medesima famiglia si corrispondono i sistemi coniugati (le linee assintotiche).*

Per dimostrarlo basta osservare che la detta corrispondenza per due quadriche della stessa famiglia è una *projettività* (affinità), come risulta subito dalle formole (39). In altro modo lo proviamo, p. e. per la famiglia $\rho_3 =$ costante, così. Per i raggi principali di curvatura delle corrispondenti superficie abbiamo

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_2 H_1}\,\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2}\quad ,\quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_1 H_2}\,\frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}$$

[1] Annales etc. t. III, 1886.

e quindi pei coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale della superficie stessa

$$D = -\frac{H_1^2}{r_{31}} = -\frac{1}{2H_3}\frac{\partial H_1^2}{\partial \rho_3} \quad , \quad D' = 0 \quad , \quad D'' = -\frac{H_2^2}{r_{32}} = -\frac{1}{2H_3}\frac{\partial H_2^2}{\partial \rho_3} \; .$$

Ma, per la (41), H_1^2, H_2^2 sono funzioni lineari intere di ρ_3 e per ciò il rapporto $\frac{D}{D''}$ è indipendente da ρ_3, ciò che dimostra il teorema.

Si può trarre di qui una notevole conseguenza che riguarda la famiglia degli iperboloidi ad una falda. Sopra due tali iperboloidi si corrispondono le generatrici rettilinee (assintotiche). Quelle traiettorie ortogonali degli iperboloidi che escono dai punti di una generatrice segano tutte gli altri iperboloidi lungo generatrici e per ciò tratti corrispondenti di due generatrici hanno eguale lunghezza. Dunque: *il doppio reticolo formato dai due sistemi di generatrici rettilinee di una quadrica si può trasportare senza alterazione delle lunghezze nel doppio reticolo omologo di una qualunque delle quadriche confocali.*

La proprietà della corrispondenza dei sistemi coniugati delle quadriche di una famiglia confocale, proprietà che ritroveremo nel Capitolo seguente per le famiglie di Lamé costituite da superficie a curvatura costante, basta già ad assicurare che la famiglia è di Lamé. Diciamo cioè che sussiste il teorema:

Se le traiettorie ortogonali di una famiglia ∞^1 di superficie segnano sulle superficie stesse una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati, queste superficie costituiscono una famiglia di Lamé, cioè appartengono ad un sistema triplo ortogonale.

Ed infatti supponiamo che l'elemento lineare dello spazio, riferito alle superficie della famiglia come a superficie coordinate u_3, ed alle loro traiettorie ortogonali come a curve (u_3), abbia la forma

$$ds^2 = a_{11}\,du_1^2 + 2\,a_{12}\,du_1\,du_2 + a_{22}\,du_2^2 + a_{33}\,du_3^2 \; .$$

Pei coefficienti Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{22} della seconda forma fondamentale delle superficie (u_3) abbiamo (I, pag. 380)

$$\Omega_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\begin{bmatrix} r & s \\ 3 & \end{bmatrix}$$

ed in particolare

$$(\alpha) \qquad \Omega_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{a_{33}}}\frac{\partial a_{12}}{\partial u_3} \; .$$

Ora sopra una superficie iniziale, p. e. la $u_3 = 0$, prendiamo a linee coordinate (u_1), (u_2) quelle di curvatura ed avremo

$$a_{12} = 0 \quad , \quad \Omega_{12} = 0 \quad \text{per} \quad u_3 = 0 \ .$$

Per la supposta corrispondenza dei sistemi coniugati sarà quindi $\Omega_{12} = 0$ per tutti i valori di u_1, u_2, u_3 e dalla (α)

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial u_3} = 0 \quad , \quad a_{12} = f(u_1, u_2) \ .$$

E poichè a_{12} deve annullarsi per $u_3 = 0$, sarà identicamente $a_{12} = 0$, ciò che dimostra il teorema.

Si osserverà che nella dimostrazione del teorema superiore non entra l'ipotesi che lo spazio sia euclideo; esso vale per uno spazio curvo qualunque a tre dimensioni.

§. 422.

Teorema di Chasles.

Il sistema isotermo delle linee di curvatura di una quadrica gode altresì della proprietà di essere costituito da ellissi e da iperbole geodetiche, come risulta dalla forma (41) dell'elemento lineare. Le quadriche appartengono cioè alla classe di superficie di Liouville, sulle quali le linee geodetiche si hanno con quadrature. E qui appunto vogliamo studiare le proprietà delle geodetiche sulle quadriche a centro, e in particolare sull'ellissoide.

Ma anzichè riferirci alle proprietà generali delle superficie di Liouville, procederemo in un modo geometrico diretto, che utilizza le proprietà delle quadriche confocali, e confronteremo poi i risultati così ottenuti con quelli che seguono dalle formole generali del §. 94 (I, pag. 205). [1]

Il teorema fondamentale, dovuto a Chasles, che conduce geometricamente alla determinazione delle linee geodetiche, è il seguente:

Se si considerano due quadriche omofocali, la congruenza di raggi formata dalle loro tangenti comuni è una congruenza normale.

Siano infatti ρ', ρ'' i valori del parametro ρ nella (36) per le due quadriche confocali che si considerano e siano x', y', z' ; x'', y'', z'' le coordinate dei due punti di contatto di un raggio della congruenza colle

---

[1] Cf. Darboux, T. II, pag. 295.

rispettive quadriche (ρ'), (ρ'') avremo

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2+\rho'} + \dfrac{y'^2}{b^2+\rho'} + \dfrac{z'^2}{c^2+\rho'} = 1 \\ \dfrac{x''^2}{a^2+\rho''} + \dfrac{y''^2}{b^2+\rho''} + \dfrac{z''^2}{c^2+\rho''} = 1 . \end{cases}$$

Le normali alle due quadriche (ρ'), (ρ'') nei punti (x', y', z') , (x'', y'', z'') avendo per le (40) i coseni di direzione rispettivamente proporzionali a

$$\frac{x'}{a^2+\rho'} , \frac{y'}{b^2+\rho'} , \frac{z'}{c^2+\rho'}$$

$$\frac{x''}{a^2+\rho''} , \frac{y''}{b^2+\rho''} , \frac{z''}{c^2+\rho''} ,$$

ne risulta per ipotesi

$$\begin{cases} \dfrac{x'(x''-x')}{a^2+\rho'} + \dfrac{y'(y''-y')}{b^2+\rho'} + \dfrac{z'(z''-z')}{c^2+\rho'} = 0 \\ \dfrac{x''(x''-x')}{a^2+\rho''} + \dfrac{y'(y''-y')}{b^2+\rho''} + \dfrac{z''(z''-z')}{c^2+\rho''} = 0 , \end{cases}$$

ossia per le (42)

$$\begin{cases} \dfrac{x'x''}{a^2+\rho'} + \dfrac{y'y''}{b^2+\rho'} + \dfrac{z'z''}{c^2+\rho'} = 1 \\ \dfrac{x'x''}{a^2+\rho''} + \dfrac{y'y''}{b^2+\rho''} + \dfrac{z'z''}{c^2+\rho''} = 1 . \end{cases}$$

Queste ultime sottratte danno

$$\frac{x'x''}{(a^2+\rho')(a^2+\rho'')} + \frac{y'y''}{(b^2+\rho')(b^2+\rho'')} + \frac{z'z''}{(c^2+\rho')(c^2+\rho'')} = 0 ,$$

onde segue che le due normali considerate sono perpendicolari fra loro, e però il teorema enunciato risulta dimostrato.

Ciò premesso, le linee inviluppate sulla prima superficie focale (ρ') dai raggi della congruenza daranno un sistema ∞^1 di geodetiche su questa quadrica e se, tenendo fissa la quadrica (ρ'), facciamo variare l'altra (ρ''), otterremo tutte le linee geodetiche della prima.

§. 423.

Le superficie evolventi di Liouville.

Liouville ha dato il modo di formare effettivamente, nelle coordinate ellittiche ρ_1, ρ_2, ρ_3, l'equazione del sistema di superficie parallele Σ, le cui normali sono i raggi della congruenza sopra considerata, che ha per superficie focali le quadriche (ρ'), (ρ'') [1].

Per stabilire il risultato di Liouville ricordiamo che se la funzione

$$\Theta(x, y, z)$$

soddisfa all'equazione

$$\Delta_1 \Theta = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 = 1 ,$$

le superficie

$$\Theta(x, y, z) = \text{costante}$$

costituiranno un sistema di superficie parallele. Ora l'equazione

$$\Delta_1 \Theta = 1$$

in coordinate curvilinee ρ_1, ρ_2, ρ_3, che diano all'elemento lineare dello spazio ds la forma ortogonale

$$ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2 ,$$

prende la forma

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho_3}\right)^2 = 1 . \tag{43}$$

Introduciamo le coordinate ellittiche, ponendo per abbreviare

$$f(\rho) = 4\,(a^2+\rho)\,(b^2+\rho)\,(c^2+\rho) \tag{44}$$

$$\varphi(\rho) = (\rho-\rho_1)\,(\rho-\rho_2)\,(\rho-\rho_3) ; \tag{45}$$

la formola (41) si scriverà

$$ds^2 = \sum \frac{\varphi'(\rho_i)}{f(\rho_i)} d\rho_i^2 \tag{46}$$

e la (43) diventerà

$$\sum \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho_i}\right)^2 = 1 .$$

---

[1] Queste due quadriche confocali sono adunque le due falde dell'evoluta delle superficie Σ.

A questa si soddisfa ponendo

$$\Theta = \sum \int \sqrt{\frac{(\rho_i - \alpha)(\rho_i - \beta)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i , \tag{47}$$

dove α, β sono costanti arbitrarie, giacchè si ha identicamente

$$\sum \frac{(\rho_i - \alpha)(\rho_i - \beta)}{\varphi'(\rho_i)} = 1 ,$$

come risulta dalle note formole di decomposizione della frazione

$$\frac{(\rho - \alpha)(\rho - \beta)}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)}$$

in frazioni semplici.

L'equazione

$$\Theta(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \text{costante} ,$$

Θ avendo il valore dato dalla (47), rappresenta adunque un sistema di superficie parallele ed ora andiamo a verificare che le due falde della evoluta di queste superficie sono appunto le due superficie coordinate, corrispondenti ai valori α, β di ρ.

L'equazione

$$\Delta_1 \Theta = 1$$

valendo qualunque siano le costanti α, β, se la deriviamo rapporto ad α, β otteniamo

$$\nabla\left(\Theta , \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}\right) = 0 , \quad \nabla\left(\Theta , \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right) = 0 , \tag{a}$$

essendo ∇ il simbolo del parametro differenziale misto. D'altronde, in forza della identità

$$\sum \frac{1}{\varphi'(\rho_i)} = 0 ,$$

si ha anche

$$\nabla\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} , \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right) = 0 . \tag{b}$$

Le tre relazioni (*a*), (*b*) esprimono che i sistemi di superficie

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \text{costante} , \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \text{costante} \tag{48}$$

completano colle superficie parallele

$$\Theta = \text{costante}$$

un sistema triplo ortogonale. Dunque le superficie (48) sono le sviluppabili formate colle normali delle superficie $\Theta =$ costante.

Ora basta osservare che la prima delle (48) differenziata dà

$$\Sigma \sqrt{\frac{\rho_i - \beta}{(\rho_i - \alpha) f(\rho_i)}}\, d\rho_i = 0$$

e per conseguenza, facendo $\rho_i = \alpha$, ne risulta

$$d\rho_i = 0\,,$$

per concludere che le sviluppabili

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \text{costante}$$

sono tangenti alla superficie del sistema confocale di parametro α. Similmente le sviluppabili

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{costante}$$

sono tangenti alla quadrica di parametro β. Dunque le due quadriche di parametri α, β sono le due falde dell'evoluta delle superficie

$$\Theta = \text{costante.}$$

Possiamo ora facilmente scrivere l'equazione delle linee geodetiche sulla quadrica di parametro α, supponendo per fissare le idee che sia p. e. un ellissoide [1]. Facendo $\rho_1 = \alpha$ nella

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{costante,}$$

avremo per l'equazione richiesta

$$(49)\quad \int \sqrt{\frac{\rho_2 - \alpha}{(\rho_2 - \beta) f(\rho_2)}}\, d\rho_2 + \int \sqrt{\frac{\rho_3 - \alpha}{(\rho_3 - \beta) f(\rho_3)}}\, d\rho_3 = \text{costante}\,,$$

che rappresenterà sull'ellissoide $\rho_1 = \alpha$ le geodetiche inviluppate dalle tangenti comuni a questo ellissoide e alla quadrica di parametro β. Perchè queste geodetiche siano reali, bisogna che β sia il parametro di un iperboloide ad una o a due falde, e facendo nel 1.° caso nella (49) $\rho_2 = \beta$,

---

[1] La determinazione delle linee geodetiche sull'ellissoide è stata effettuata la prima volta da Jacobi (*Crelle's Journal*, t. XIX).

nel 2.° $\rho_2 = \beta$, ne risulta rispettivamente $d\rho_2 = 0$, o $d\rho_3 = 0$. Le geodetiche (49), che si ottengono tenendo fisso β, e facendo variare la costante del secondo membro, sono dunque tutte tangenti alla linea di curvatura

$$\rho_2 = \beta \quad o \quad \rho_3 = \beta$$

sull'ellissoide. Facendo poi variare nella (49) anche la costante β, si avranno tutte le geodetiche dell'ellissoide.

§. 424.

Le geodetiche sull'ellissoide.

Applicando le formole generali dei numeri precedenti al caso dell'ellissoide $\rho_1 = 0$, che ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

assumiamo per parametri u, v delle linee di curvatura i rispettivi assi primarii degli iperboloidi confocali ad una e due falde, che tagliano appunto l'ellissoide secondo le linee di curvatura. Poniamo adunque

$$u^2 = a^2 + \rho_2 \quad , \quad v^2 = a^2 + \rho_3 ,$$

e facciamo inoltre per brevità

$$a^2 - b^2 = h^2 \quad , \quad a^2 - c^2 = k^2 .$$

I parametri u, v varieranno entro i limiti segnati dalle diseguaglianze

$$k^2 \geq u^2 \geq h^2 \quad , \quad h^2 \geq v^2 \geq 0 ;$$

l'elemento lineare dell'ellissoide prenderà la forma

$$(50) \quad ds^2 = (u^2 - v^2) \left\{ \frac{a^2 - u^2}{(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)} du^2 + \frac{a^2 - v^2}{(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)} dv^2 \right\} ,$$

che colle sostituzioni

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{\sqrt{(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)}} du = u_1$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{\sqrt{(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)}} dv = v_1$$

si riduce subito alla forma di Liouville (§. 94), e l'equazione (49) in ter-

mini finiti delle geodetiche diventerà:

$$(51)\quad \int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{\sqrt{(u^2-C)(u^2-h^2)(k^2-u^2)}}du \pm \int \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{\sqrt{(C-v^2)(h^2-v^2)(k^2-v^2)}}dv = \text{cost}^{te},$$

essendo C una costante arbitraria, come risulterebbe altresì dalle formole del §. ora citato. Per l'arco σ delle geodetiche (51), contato da una traiettoria ortogonale fissa, avremo secondo il §. 94:

$$(52)\quad \sigma = \int \sqrt{\frac{(a^2-u^2)(u^2-C)}{(u^2-h^2)(k^2-u^2)}}\,du \mp \int \sqrt{\frac{(a^2-v^2)(C-v^2)}{(h^2-v^2)(k^2-v^2)}}\,dv,$$

il segno superiore od inferiore valendo in concordanza colla (51). Indicando poi con ψ l'angolo delle geodetiche (51) colle linee di curvatura $v =$ costante, avremo l'integrale primo

$$(53)\qquad u^2 \operatorname{sen}^2\psi + v^2\cos^2\psi = C.$$

Queste formole (52), (53) sono del resto semplici conseguenze della (51).

L'ultima formola è suscettibile di un'elegante interpretazione geometrica, dovuta a Joachimsthal, che ora andiamo a stabilire, avvertendo che alla (53) soddisfano non solo le geodetiche ma anche le linee di curvatura.

Qui osserviamo ancora che le linee geodetiche reali dell'ellissoide si possono distinguere in tre specie, a seconda del valore della costante C nella (51). Perchè la geodetica (51) sia reale, occorre che C giaccia nell'intervallo:

$$k^2 > C > 0.$$

Ora, se si dà a C un valore fisso compreso fra k^2 e h^2, le geodetiche (51) saranno (§. 423) tutte tangenti alla linea di curvatura

$$u^2 = C;$$

questa si compone di due parti chiuse diametralmente opposte descritte attorno a due ombelichi dell'ellissoide come un'ellisse attorno ai due fuochi. (Cf. il §. seguente). La linea geodetica svolge tutto il suo corso entro la zona ellissoidale compresa fra queste due curve chiuse, passando dall'una all'altra e toccandole nel retrocedere sulla zona, sulla quale gira in generale infinite volte senza chiudersi. Se la costante C giace nell'intervallo fra h^2 e 0, lo stesso accade rispetto alla linea di curvatura

$$v^2 = C.$$

In fine se $C = h^2$, si ha il caso notevole delle geodetiche uscenti da un ombelico, che vanno a passare per l'ombelico diametralmente opposto. Ciò si riconosce già osservando che la quadrica del sistema confocale, a

cui sono tangenti le tangenti delle geodetiche (51) per $C = h^2$, avendo il parametro $\rho = -b^2$, si riduce all'iperbola focale, alla quale si appoggiano dunque le dette tangenti. La medesima proprietà risulterà anche dalle discussioni seguenti.

§. 425.

Teorema di Joachimsthal.

Per stabilire il teorema di Joachimsthal sopra accennato, cominciamo dalle osservazioni seguenti. In un punto qualunque (x, y, z) dell'ellissoide conduciamo il piano tangente e per il centro il piano parallelo; la sezione ellittica prodotta avrà per assi i diametri paralleli alle direzioni delle linee di curvatura uscenti da (x, y, z). E infatti, indicando con $\cos\alpha$, $\cos\beta$ $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ i coseni di direzione di questi diametri, abbiamo

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial x}{\partial\rho_3} : \frac{\partial y}{\partial\rho_3} : \frac{\partial z}{\partial\rho_3} = \frac{x}{a^2+\rho_3} : \frac{y}{b^2+\rho_3} : \frac{z}{c^2+\rho_3}$$

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = \frac{\partial x}{\partial\rho_2} : \frac{\partial y}{\partial\rho_2} : \frac{\partial z}{\partial\rho_2} = \frac{x}{a^2+\rho_2} : \frac{y}{b^2+\rho_2} : \frac{z}{c^2+\rho_2}$$

e da queste segue subito, sottraendo le due formole (§. 420)

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_3)} + \dfrac{y^2}{(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_3)} + \dfrac{z^2}{(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_3)} = 0 \\ \dfrac{x^2}{(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)} + \dfrac{y^2}{(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)} + \dfrac{z^2}{(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)} = 0 . \end{cases}$$

nelle quali si faccia $\rho_1 = 0$:

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{a^2} + \frac{\cos\beta\cos\beta'}{b^2} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{c^2} = 0 .$$

Questa esprime che i due diametri in considerazione sono coniugati, e, poichè sono anche ortogonali, coincidono appunto cogli assi della sezione centrale [1].

Ciò posto, se R_1, R_2 indicano le lunghezze dei semi-assi paralleli rispettivamente alle tangenti alle linee $u =$ costante, $v =$ costante, avremo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1^2} = \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\cos^2\beta}{b^2} + \dfrac{\cos^2\gamma}{c^2} \\ \dfrac{1}{R_2^2} = \dfrac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \dfrac{\cos^2\beta'}{b^2} + \dfrac{\cos^2\gamma'}{c^2} , \end{cases}$$

[1] Ciò risulta anche subito geometricamente dall'osservare che la detta sezione centrale è simile all'indicatrice di Dupin nel punto (x, y, z).

ossia per le formole precedenti

$$\frac{1}{R_1^2} = \left\{ \frac{x^2}{a^2 (a^2+\rho_3)^2} + b^2 \frac{y^2}{(b^2+\rho_3)^2} + \frac{z^2}{c^2 (c^2+\rho_3)^2} \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\dfrac{x^2}{(a^2+\rho_3)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+\rho_3)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+\rho_3)^2}} .$$

Ora dalla prima delle (*a*) segue

$$\frac{x^2}{a^2 (a^2+\rho_3)} + \frac{y^2}{b^2 (b^2+\rho_3)} + \frac{z^2}{c^2 (c^2+\rho_3)} = 0 ,$$

indi

$$\frac{x^2}{(a^2+\rho_3)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\rho_3)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\rho_3)^2} = -\rho_3 \left\{ \frac{x^2}{a^2 (a^2+\rho_3)^2} + \frac{y^2}{b^2 (b^2+\rho_3)^2} + \frac{z^2}{c^2 (c^2+\rho_3)^2} \right\}$$

e perciò $R_1^2 = -\rho_3$ e similmente $R_2^2 = -\rho_2$, cioè

$$R_1^2 = a^2 - v^2 \quad , \quad R_2^2 = a^2 - u^2 . \tag{54}$$

Queste ci dimostrano che R_1 è il semi-asse maggiore, R_2 il minore.

Nella sezione centrale tiriamo ora il semi-diametro parallelo a quella tangente nel punto (x, y, z) all'ellissoide che fa colle v = costante l'angolo ψ, e indichiamo con R la sua lunghezza; avremo

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \psi}{a^2 - u^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \psi}{a^2 - v^2} .$$

Se poi con δ indichiamo la distanza del centro dal piano tangente in (x, y, z), abbiamo

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} .$$

cioè per la prima delle (40*) pag. 507, ove si faccia $\rho_1 = 0$

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}{a^2 b^2 c^2} \ (1) .$$

---

(1) A questa formola si può legare l'osservazione seguente. La curvatura totale K dell'ellissoide è data da

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - u^2)^2 (a^2 - v^2)^2} ,$$

Ne deduciamo

$$\frac{a^2\,b^2\,c^2}{\delta^2\,R^4} = a^2 - (u^2\,\mathrm{sen}^2\,\psi + v^2\cos^2\psi)$$

e, confrontando coll'integrale primo (53) delle geodetiche, otteniamo il teorema di Joachimsthal:

Per ogni linea geodetica tracciata sopra un ellissoide è costante il prodotto della distanza del centro dal piano tangente in un punto della geodetica per la lunghezza del diametro parallelo alla tangente della geodetica nel medesimo punto.

Per quanto si è già osservato, la medesima proprietà appartiene, oltre che alle geodetiche, anche alle linee di curvatura. Segue di qui nuovamente che per le geodetiche tangenti ad una medesima linea di curvatura la costante δR, ovvero la costante C della (51), serba il medesimo valore.

§. 426.

Geodetiche ombelicali.

Consideriamo ora i quattro ombelichi reali dell'ellissoide. Essi giacciono sulla ellisse principale dell'asse massimo e minimo ed hanno per coordinate

$$x = \pm\, a\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} = \pm\,\frac{ah}{k}\,,\quad y = 0\,,\quad z = \pm\, c\,\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} = \pm\, c\,\frac{\sqrt{k^2-h^2}}{k}.$$

Il piano tangente in ogni ombelico è distante dal centro della lunghezza $\delta = \frac{ac}{b}$ e qualunque semidiametro della sezione centrale fatta con un piano parallelo è eguale a b. Dunque:

Per ogni geodetica uscente da un ombelico il prodotto δR ha il valore costante ac. Il valore corrispondente della costante C nella (51) è quindi eguale a h^2, come si è già osservato al §. 424.

Da questa osservazione possono dedursi conseguenze notevoli, segnalate da Roberts. Consideriamo un punto M dell'ellissoide e congiungiamolo per archi geodetici M F, M F_1 a due ombelichi F, F_1 non diame-

---

onde segue $$K = \frac{\delta^4}{a^2\,b^2\,c^2}\,.$$

Dunque: *Le linee di egual curvatura dell'ellissoide sono le linee inviluppate dai piani tangenti comuni all'ellissoide ed alle sfere concentriche.*

tralmente opposti. Il valore della costante δ R è lo stesso per le due geodetiche, e siccome in M anche δ è la stessa, i due diametri condotti parallelamente alle tangenti in M alle due geodetiche dovranno avere eguale lunghezza e faranno quindi angoli eguali cogli assi della sezione centrale; e poichè questi sono paralleli alle direzioni delle linee di curvatura in M, ne segue:

Le direzioni delle linee di curvatura in M *sono le bisettrici dell'angolo interno e dell'angolo esterno formato dagli archi geodetici* M F, M F_1.

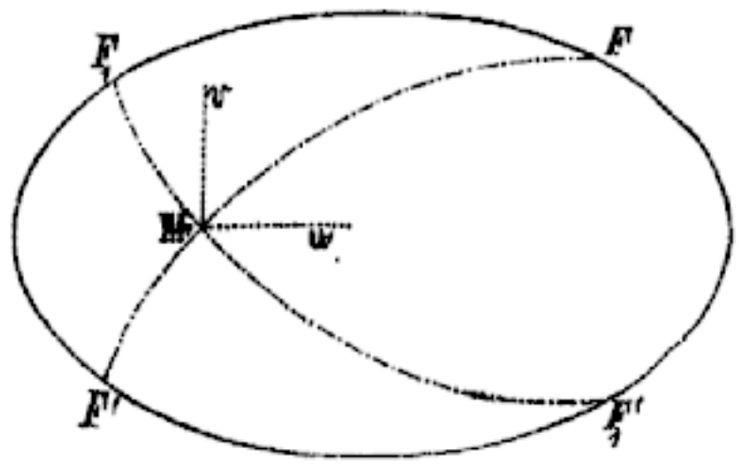


Fig. 17.ª

Ne risulta che l'arco geodetico M F′ che riunisce M all'ombelico F′, diametralmente opposto ad F, è il prolungamento dell'arco geodetico F M e quindi:

Ogni geodetica uscente da un ombelico passa per l'ombelico diametralmente opposto. Come due punti diametralmente opposti della sfera, così due ombelichi opposti dell'ellissoide possono riunirsi con infiniti archi geodetici, i quali avranno tutti eguale lunghezza, poichè per la definizione stessa di geodetica, passando da una di queste geodetiche alla infinitamente vicina la variazione prima di tale lunghezza è nulla.

Già da questi teoremi segue che le linee di curvatura dell'ellissoide sono ellissi ed iperbole geodetiche aventi i fuochi negli ombelichi dell'ellissoide, ma più chiaramente apparirà dai §§. seguenti.

Le equazioni (24), (25) in termini finiti delle geodetiche danno per le geodetiche uscenti dagli ombelichi ($C = h^2$):

$$(55)\quad \int \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{k^2 - u^2}} \frac{du}{u^2 - h^2} \pm \int \sqrt{\frac{a^2 - v^2}{k^2 - v^2}} \frac{dv}{h^2 - v^2} = \text{costante}$$

e pel loro arco

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{k^2 - u^2}}\, du \pm \int \sqrt{\frac{a^2 - v^2}{k^2 - v^2}}\, dv \,. \tag{56}$$

Le quadrature nelle formole generali (51), (52) portano evidentemente ad integrali iperellittici, le attuali invece ad integrali ellittici. Per eseguirle assumiamo per semplicità il semi-asse maggiore dell'ellissoide per unità lineare $a = 1$ e potremo prendere la quantità $k = \sqrt{1 - c^2} < 1$ come modulo di una classe di funzioni ellittiche di Jacobi, per le quali le quantità K. K′ saranno reali. In luogo dei parametri u, v, introduciamone due nuovi τ, τ_1, ponendo

$$u = k \operatorname{sn} \tau \quad , \quad v = k \operatorname{sn} \tau_1 ,$$

ed essendo $h < k$, poniamo

$$h = k \operatorname{sn} \alpha \,,$$

dove α è una quantità reale compresa fra 0 e K; avremo così

$$a = 1 \,, \quad b = \operatorname{dn} \alpha \,, \quad c = k' \,, \quad h = k \operatorname{sn} \alpha$$

e le formole (39) pag. 506, che danno le coordinate dei punti dell'ellissoide, diventano

$$x = \frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{sn}\tau_1}{\operatorname{sn}\alpha}, \; y = \frac{\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha} \sqrt{(\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2\alpha)\,(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\tau_1)}, \; z = k' \frac{\operatorname{cn}\tau \operatorname{cn}\tau_1}{\operatorname{cn}\alpha} \,, \tag{57}$$

dove, adottando pel radicale il segno positivo e dovendo restare $k^2 \geq u^2 \geq h^2$, $h^2 \geq v^2 \geq 0$, cioè

$$1 \geq \operatorname{sn}^2\tau \geq \operatorname{sn}^2\alpha \quad , \quad \operatorname{sn}^2\alpha \geq \operatorname{sn}^2\tau_1 \geq 0 \,,$$

faremo variare τ, τ_1 negli intervalli

$$\alpha \leq \tau \leq 2\,\mathrm{K} - \alpha \quad , \quad -\alpha \leq \tau_1 \leq \alpha \,.$$

Le (57) ci danno allora i punti del semi-ellissoide

$$y > 0$$

e i quattro ombelichi

$$\mathrm{F} \equiv (\operatorname{sn}\alpha \,, 0 \,, k' \operatorname{cn}\alpha) \quad , \quad \mathrm{F}' \equiv (-\operatorname{sn}\alpha \,, 0, -k' \operatorname{cn}\alpha)$$

$$\mathrm{F}_1 \equiv (-\operatorname{sn}\alpha \,, 0 \,, k' \operatorname{cn}\alpha) \,, \quad \mathrm{F}'_1 \equiv (\operatorname{sn}\alpha \,, 0, -k' \operatorname{cn}\alpha)$$

riceveranno le coordinate curvilinee τ, τ_1:

$$F \equiv (\alpha, \alpha)\ ,\ F' \equiv (2K - \alpha, -\alpha)\ ,\ F_1 \equiv (\alpha, -\alpha)\ ,\ F'_1 \equiv (2K - \alpha, \alpha)\ .$$

L'equazione (55) delle geodetiche è data da

$$\int \frac{dn^2 \tau}{sn^2 \tau - sn^2 \alpha}\, d\tau \mp \int \frac{dn^2 \tau_1\, d\tau_1}{sn^2 \alpha - sn^2 \tau_1} = \text{costante}\ ,$$

e il loro arco da

$$\sigma = \int dn^2 \tau\, d\tau \pm \int dn^2 \tau_1\, d\tau_1\ .$$

Se prendiamo un punto M sul semiellissoide $y > 0$ ed applichiamo queste formole all'arco geodetico F M, osservando che mentre τ cresce τ_1 decresce, vediamo che debbono adottarsi i segni inferiori, e perciò sarà

$$\sigma = \int_\alpha^\tau dn^2 \tau\, d\tau - \int_\alpha^{\tau_1} dn^2 \tau_1\, d\tau_1$$

la lunghezza dell'arco geodetico F M contato da F, cioè

$$\sigma = \frac{E}{K}(\tau - \tau_1) + Z(\tau) - Z(\tau_1)\ , \tag{58}$$

essendo $Z(\tau)$ la funzione di Jacobi ed E la lunghezza di un quadrante della ellisse principale nel piano $x\,s$.

Per l'arco geodetico F_1 M al contrario valgono i segni opposti e la sua lunghezza σ_1 è data da

$$\sigma_1 = \frac{E}{K}(\tau + \tau_1) + Z(\tau) + Z(\tau_1)\ . \tag{58*}$$

Facendo nella (31) $\tau = 2K - \alpha, \tau_1 = -\alpha$ o nella (31*) $\tau = 2K - \alpha, \tau_1 = \alpha$, si vede che tutti gli archi geodetici F F' o F_1 F'_1 hanno la lunghezza comune 2 E. Sommando e sottraendo segue poi

$$\sigma + \sigma_1 = 2\frac{E}{K}\tau + 2Z(\tau)$$

$$\sigma_1 - \sigma = 2\frac{E}{K}\tau_1 + 2Z(\tau_1)\ .$$

Dunque le linee di curvatura $\tau = \text{costante}$, $\tau_1 = \text{costante}$ sono ellissi geodetiche le prime rispetto ai fuochi F, F_1 e le seconde iperbole geodetiche rispetto ai medesimi fuochi. Ma se ad uno dei fuochi si sostituisce

il diametralmente opposto p. e. a F_1, F'_1, allora le $\tau_1 =$ costante diventano ellissi geodetiche rispetto ai fuochi F, F'_1, e le $\tau =$ costante iperbole. Ogni linea di curvatura di un ellissoide può quindi descriversi fissando un filo di lunghezza costante coi due capi a due ombelichi non diametralmente opposti e per mezzo di uno stilo in M tendendo il filo sull'ellissoide: la estremità M dello stilo descriverà una linea di curvatura.

§. 427.

Ellissoide riferito alle geodetiche ombelicali e traiettorie ortogonali.

Cerchiamo la forma dell'elemento lineare dell'ellissoide, riferito alle geodetiche uscenti da un ombelico e alle loro traiettorie ortogonali. Se prendiamo p. e. le geodetiche uscenti dall'ombelico F e ritorniamo alle formole (55), (56), ponendo

$$(55^*) \qquad \int \sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,\frac{du}{u^2-h^2} - \int \sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,\frac{dv}{v^2-h^2} = \Phi ,$$

$$(56^*) \qquad \int \sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,du - \int \sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,dv = \sigma ,$$

saranno le linee $\Phi =$ costante le geodetiche e $\sigma =$ costante le loro traiettorie ortogonali.

Ora si ha

$$\Delta_1 \Phi = \frac{1}{(u^2-h^2)(h^2-v^2)}, \quad \Delta_1 \sigma = 1$$

$$\nabla(\Phi, \sigma) = 0$$

e quindi per l'elemento lineare dell'ellissoide in coordinate σ, Φ (I, pag. 94)

$$(59) \qquad ds^2 = d\sigma^2 + (u^2-h^2)(h^2-v^2)\,d\Phi^2 .$$

La costante del secondo membro nella equazione (55*) delle geodetiche uscenti da F dipende unicamente dalla direzione che la geodetica ha in F. Se con ω indichiamo l'angolo, che l'arco geodetico da F verso M forma colla direzione F F_1 della ellisse principale $y = 0$, sarà Φ una funzione di ω, la cui espressione effettiva importa di trovare. Fissiamo per ciò la costante additiva in Φ, scrivendo

$$(60) \qquad \Phi = \int_k^u \sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,\frac{du}{u^2-h^2} - \int_0^v \sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,\frac{dv}{v^2-h^2} .$$

Ora se uniamo M con F_1 e con φ indichiamo l'angolo esterno F_1 M F' in M del triangolo geodetico M F F_1, sarà evidentemente ω il limite di φ, quando M muovendosi sull'arco geodetico M F considerato si avvicina indefinitamente a F.

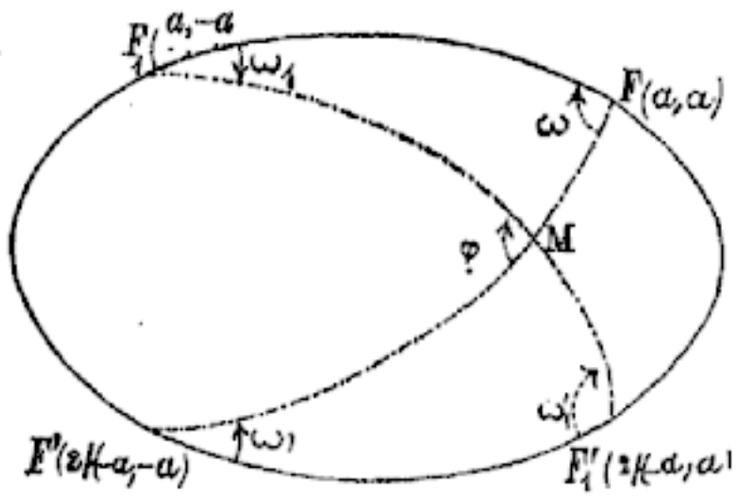


Fig. 18.ª

Ora la linea di curvatura $v =$ costante, uscente da M, divide per metà l'angolo F_1 M F e forma coll'arco geodetico F M l'angolo ψ definito dalla (59), ove $C = h^2$; si ha quindi

$$\varphi = \pi - 2\psi$$

e però

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cot^2\psi = \frac{u^2 - h^2}{h^2 - v^2} ,$$

onde

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \lim_{u=h,\, v=h} \frac{u^2 - h^2}{h^2 - v^2} = \lim_{u=h,\, v=h} \frac{u-h}{h-v} . \tag{61}$$

Ora, se scriviamo le (60) nel modo seguente

$$\Phi = \left[\int_k^u \left(\sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}} - \sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\right)\frac{du}{u^2-h^2} - \int_0^v \left(\sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}} - \sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\right)\frac{dv}{v^2-h^2}\right] +$$
$$+ \sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}} \int_k^u \left[\frac{du}{u^2-h^2} - \int_0^v \frac{dv}{v^2-h^2}\right] ,$$

vediamo che la differenza dei due primi integrali, convergendo u e v verso h, converge verso un limite determinato e finito, che dipende solo dalle costanti a, h, k, mentre la seconda parte di Φ può scriversi

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}} \left\{\log\frac{(u-h)(v+h)}{(h-v)(u+h)} - \log\frac{k-h}{k+h}\right\}$$

e al limite per $u = h, v = h$ converge, per la (61), verso

$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\log\frac{k-h}{k+h}.$$

Si ha adunque

$$\Phi = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}}\log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + A,$$

essendo A una costante e la (59), cangiando il parametro Φ in ω, diventa

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{(a^2-h^2)}{h^2(k^2-h^2)}(u^2-h^2)(h^2-v^2)\frac{d\omega^2}{\operatorname{sen}^2\omega},$$

ovvero

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\omega}d\omega^2, \tag{62}$$

dove y è la distanza del punto M dal piano $x\,s$ degli ombelichi. È questa la formola notevole dovuta a Roberts.

§. 428.

Teoremi di Roberts.

Se uniamo il medesimo punto M all'ombelico F_1, e con σ_1 indichiamo l'arco geodetico $M F_1$, con ω_1 l'angolo $M F_1 F$, avremo per la (62) stessa

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\omega_1}d\omega_1^2,$$

da cui

$$(d\sigma - d\sigma_1)(d\sigma + d\sigma_1) = y^2\left(\frac{d\omega}{\operatorname{sen}\ \omega} - \frac{d\omega_1}{\operatorname{sen}\ \omega_1}\right)\left(\frac{d\omega}{\operatorname{sen}\ \omega} + \frac{d\omega_1}{\operatorname{sen}\ \omega_1}\right).$$

Lungo le linee di curvatura

$$u = \text{costante}\quad,\quad v = \text{costante},$$

è rispettivamente

$$d\sigma + d\sigma_1 = 0\quad,\quad d\sigma - d\sigma_1 = 0$$

e però

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} = \text{costante}\quad,\quad \text{ovvero}\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}} = \text{costante}\ [1].$$

---

[1] Dell'esattezza di questa corrispondenza ci si persuade facilmente, osservando che lungo la ellisse (di curvatura) $z=0$, ω è crescente per ω_1 decrescente e invece lungo l'ellisse $x=0$, ω, ω_1 crescono o decrescono insieme.

Prolunghiamo ora l'arco geodetico M F sino a passare per l'ombelico opposto e sia ω' l'angolo che l'arco geodetico F' M da F' verso M fa coll'arco F' F'_1 dell'ellisse principale, mentre con σ' denotiamo la lunghezza dell'arco F' M; per la (62) avremo

$$d\sigma^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\omega}\, d\omega^2 = d\sigma'^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\omega'}\, d\omega'^2,$$

e poichè

$$d\sigma'^2 = d\sigma^2,$$

risulterà

$$\frac{d\omega^2}{\operatorname{sen}^2\omega} = \frac{d\omega'^2}{\operatorname{sen}^2\omega'}.$$

Se si osserva che ω' è decrescente per ω crescente, ne risulta

$$\frac{d\omega}{\operatorname{sen}\ \omega} + \frac{d\omega'}{\operatorname{sen}\ \omega'} = 0,$$

quindi

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \text{costante}.$$

Il valore della costante del secondo membro si esprime facilmente per l'angolo Ω, corrispondente all'arco geodetico che unisce F coll'estremità dell'asse medio; in tal caso è infatti

$$\omega = \omega' = \Omega,$$

e però

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right). \tag{63}$$

Per mezzo di questa formola possiamo facilmente seguire l'ulteriore corso delle geodetiche. L'arco geodetico F M F' traversa in F'' il piano $x\,z$ e descrive un nuovo arco F' N F sopra l'altro semi-ellissoide $y<0$, ritornando in F. Quivi però non si chiude, come nel caso della sfera, ma uscendo di nuovo da F forma coll'arco F F_1 un nuovo angolo $\omega^{(1)}$ differente da ω. È infatti, se al nuovo arco F' N F applichiamo la (63), osservando che i nuovi valori di ω, ω' sono $\pi-\omega'$, $\pi-\omega^{(1)}$, otteniamo;

$$\cot\left(\frac{\omega'}{2}\right) \cot\left(\frac{\omega^{(1)}}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right).$$

Questa formola, confrontata colla (63), dà

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega^{(1)}}{2}\right) = \lambda \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \lambda = \cot^4\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

e, poichè l'angolo Ω è acuto e in conseguenza $\lambda > 1$, ne risulta

$$\omega^{(1)} > \omega .$$

In generale, indicando con $\omega^{(n)}$ il valore di ω dopo n giri della geodetica sull'ellissoide, avremo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega^{(n)}}{2}\right) = \lambda^n \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Dunque l'angolo $\omega^{(n)}$, al crescere di n, si avvicina indefinitamente a π e la geodetica converge sempre più verso l'ellisse principale, che contiene gli ombelichi.

Capitolo XXVII

Le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante

Forma dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema triplo ortogonale pseudosferico.— Esistenza e grado di arbitrarietà di questi sistemi.— Le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva.— Corrispondenza dei sistemi coniugati sulle superficie a curvatura costante di una famiglia di Lamé.— Esempi diversi.— Le trasformazioni reali di Bäcklund per le famiglie pseudosferiche di Lamé.— Il teorema di permutabilità e l'applicazione illimitata della trasformazione di Bäcklund.— Le nuove trasformazioni reali delle famiglie pseudosferiche di Lamé composte con trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund.— Ricerche analoghe per le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva.— Caso particolare dei sistemi di Weingarten quando la curvatura è la stessa per tutte le superficie della famiglia.— Linee di equidistanza sui sistemi di Weingarten come circoli geodetici paralleli.— I sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante.— Sistema triplo di Weingarten elicoidale.— Trasformazione di Bäcklund pei sistemi di Weingarten.— Trasformazione complementare.— Relazione delle famiglie di Lamé a curvatura costante colle superficie applicabili sulla quadrica immaginaria $y^2 + z^2 + (x - y + i z)^2 = \frac{1}{K}$, che osculа il circolo immaginario all'infinito.

§. 429.

Sistemi tripli ortogonali pseudosferici.

I sistemi ciclici di Ribaucour a raggio costante, che abbiamo trovato al §. 272 (pag. 146), ci danno un primo e più semplice esempio di famiglie di Lamé composte di superficie colla (medesima) curvatura costante. In quest'ultimo capitolo ci proponiamo di costruire e di studiare in generale quei sistemi tripli ortogonali che contengono una famiglia di superficie a curvatura costante, sia questa curvatura la stessa per tutte le superficie della famiglia oppure variabile dall'una all'altra. Escluderemo senz'altro il caso in cui le superficie a curvatura costante del sistema triplo sono di rotazione. In questo caso, secondo quanto abbiamo dimostrato al §. 415, si possono costruire immediatamente le corrispondenti famiglie di Lamé prendendo un sistema qualunque ∞^1 di superficie di rotazione a curvatura costante col medesimo asse. Per questi particolari sistemi non varrebbero *in generale* le formole che andiamo ora a sviluppare.

Cominciamo dal considerare una famiglia di Lamé composta di superficie pseudosferiche di raggio R, variabile in generale dall'una all'altra

superficie della famiglia. Supponiamo che nel sistema triplo ortogonale corrispondente, definito dalla formola

$$ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2$$

del ds^2, le superficie $u_3 =$ costante siano pseudosferiche di raggio R, dove R è una funzione della sola u_3. Dalle formole (pag. 482)

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_3}\ , \qquad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\ ,$$

per l'ipotesi

$$\frac{1}{r_{31}}\frac{1}{r_{32}} = -\frac{1}{R^2}\ ,$$

risulta che si può porre

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{H_1 H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3} = -\dfrac{\operatorname{tg}\,\omega}{R} \\ \dfrac{1}{H_2 H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} = \dfrac{\cot\omega}{R}\ , \end{cases}$$

dove $2\,\omega$ è un angolo ausiliario che misura l'inclinazione mutua delle due assintotiche, uscenti da un punto delle superficie pseudosferiche $u_3 =$ costante.

Sostituendo i valori di $\frac{\partial H_1}{\partial u_3}$, $\frac{\partial H_2}{\partial u_3}$, che si traggono dalle (1), nelle due prime equazioni di Lamé del gruppo (A) pag. 479, risulta

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial u_2} = -\frac{\operatorname{sen}\,\omega}{\cos\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u_2}\ , \qquad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\,\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u_1}\ ,$$

onde integrando si ha

$$(2)\qquad H_1 = \cos\omega\ .\ \psi(u_1, u_3)\ , \qquad H_2 = \operatorname{sen}\,\omega\ \varphi(u_2, u_3)\ ,$$

essendo ψ funzione di u_1, u_3 soltanto e φ di u_2, u_3.

Dimostriamo ora, ciò che è essenziale per la nostra ricerca, che φ, ψ sono indipendenti da u_3 cioè

$$(3)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = 0\ , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u_3} = 0\ .$$

Ricaviamo per ciò dalle (1), (2)

$$(3^*)\quad H_3 = R\ \operatorname{tg}\,\omega\left[\cot\omega\frac{\partial\omega}{\partial u_3} + \frac{\partial \log\varphi}{\partial u_3}\right] = -R\cot\omega\left[-\operatorname{tg}\,\omega\frac{\partial\omega}{\partial u_3} + \frac{\partial\log\psi}{\partial u_3}\right],$$

da cui

$$\operatorname{tg}\omega\,\frac{\partial\log\varphi}{\partial u_3}+\cot\omega\,\frac{\partial\log\psi}{\partial u_3}=0\,.$$

Questa, se non sussistessero le (3), darebbe:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\mathrm{M}\,(u_1,u_3)}{\mathrm{N}\,(u_2,u_3)}\,, \tag{4}$$

dove M è funzione di u_1, u_3 e N di u_2, u_3. Ora, se consideriamo una speciale superficie pseudosferica $u_3=c$ e cangiamo i parametri u_1, u_2 rispettivamente in

$$\int\psi\,(u_1,c)\,du_1\quad,\quad\int\varphi\,(u_2,c)\,du_2\,,$$

per l'elemento lineare della $u_3=c$ avremo dalle (2)

$$ds^2=\cos^2\omega\,du_1^2+\operatorname{sen}^2\omega\,du_2^2\,, \tag{5}$$

dove per la (4)

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\mathrm{U}\,(u_1)}{\mathrm{V}\,(u_2)}\,, \tag{6}$$

essendo U funzione della sola u_1 e V della sola u_2. Ma poichè l'elemento lineare (5) appartiene ad una superficie pseudosferica di raggio R, dovrà ω soddisfare all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2}=\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\mathrm{R}^2}\,. \tag{6*}$$

A causa della forma (6) di ω, ciò è possibile soltanto, come ora dimostriamo, quando la funzione U o la V si riduca ad una costante, ed allora le superficie $u_3=$ costante sarebbero superficie di rotazione contro l'ipotesi. Ed infatti, gli apici indicando derivate, le (6), (6*) danno

$$\left(\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}+\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}}\right)(\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2)=\frac{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}^2}+2\,\mathrm{U}'^2+2\,\mathrm{V}'^2\,, \tag{a}$$

dalla quale formola, formando la derivata seconda rapporto a u_1, u_2, risulta

$$\left(\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}\right)'\mathrm{V}\,\mathrm{V}'+\left(\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}}\right)'\mathrm{U}\,\mathrm{U}'=0\,,$$

e però

$$\left(\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}\right)'=k\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}'\quad,\quad\left(\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}}\right)'=-k\,\mathrm{V}\,\mathrm{V}'\ (k\text{ costante})\ .$$

Integrando segue

$$\frac{U''}{U} = \frac{k U^2}{2} + C \ , \quad \frac{V''}{V} = - \frac{k V^2}{2} + C'$$

$$2 U'^2 = \frac{k U^4}{2} + 2 C U^2 + C_1 \ , \quad 2 V'^2 = - \frac{k V^4}{2} + 2 C' V^2 + C'_1 ,$$

con C, C', C_1, C'_1 nuove costanti. Dopo di ciò la (*a*) diventa

$$\left(C' - C - \frac{1}{R^2}\right) U^2 + \left(C - C' - \frac{1}{R^2}\right) V^2 = C_1 + C'_1$$

e non può essere soddisfatta che per U o V costante, c. d. d.

Sussistono dunque le (3), e cangiando i parametri u_1, u_2 in $\int \psi \, du_1$, $\int \varphi \, du_2$ rispettivamente, avremo dalle (2), (3*)

$$(7) \qquad H_1 = \cos \omega \ , \quad H_2 = \operatorname{sen} \omega \ , \quad H_3 = R \frac{\partial \omega}{\partial u_3} .$$

§. 430.

Le equazioni a derivate parziali per la funzione ω.

L'elemento lineare dello spazio, riferito ad un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) della nostra specie, viene così a dipendere da un'unica funzione $\omega\,(u_1, u_2, u_3)$ delle tre variabili u_1, u_2, u_3 (oltre che dalla funzione arbitraria R di u_3). Resta che scriviamo le equazioni a cui deve essere assoggettata ω. Per ciò bisogna sostituire i valori di H_1, H_2, H_3 nelle formole (A), (B) di Lamé (pag. 479). Le due prime (A) sono identicamente soddisfatte e le quattro rimanenti si traducono nelle seguenti:

$$(8) \quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2^2} - \dfrac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega}{R^2} = 0 \\ B = \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial u_1 \, \partial u_2 \, \partial u_3} - \cot \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} + \operatorname{tg} \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial u_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} = 0 \\ C = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3}\right) - \dfrac{1}{R} \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\operatorname{sen} \omega}{R}\right) - \dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial u_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3} = 0 \\ D = \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_2 \partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R} \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\cos \omega}{R}\right) + \dfrac{1}{\cos \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial u_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u_1 \partial u_3} = 0 \ . \end{cases}$$

Ogni qualvolta la funzione ω soddisferà a questo sistema di equazioni a derivate parziali, avremo un corrispondente sistema triplo ortogonale,

che darà al ds^2 la forma

$$(9) \qquad ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

dove $R = R(u_3)$ è funzione della sola u_3 e le superficie $u_3 =$ costante sono pseudosferiche di raggio R.

Per stabilire l'esistenza e riconoscere il grado di arbitrarietà di questi sistemi tripli ortogonali, conviene dunque discutere il sistema delle equazioni (8) alle derivate parziali. Raggiungiamo il nostro scopo col processo seguente che riproduce in sostanza le considerazioni esposte nella prima edizione di questo libro, modificate e semplificate, per la parte analitica, nel modo adottato da Darboux nella sua opera recente [1].

Avendo A, B, C, D il significato dei primi membri delle (8), cominciamo dall'osservare che si possono dare a B le tre forme seguenti

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{B}{\cos\omega} = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right) - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} \\ \dfrac{B}{\operatorname{sen}\omega} = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} \\ \dfrac{B}{\operatorname{sen}\omega\cos\omega} = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\cot\omega\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\operatorname{tg}\omega\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right) . \end{cases}$$

Ne segue che fra i primi membri delle (8) hanno luogo le identità seguenti:

$$(\beta) \quad \begin{cases} C\cos\omega - D\operatorname{sen}\omega = \dfrac{\partial A}{\partial u_3} , \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{B}{\cos\omega}\right) - \dfrac{\partial C}{\partial u_2} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}B + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}D - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}A , \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{B}{\operatorname{sen}\omega}\right) - \dfrac{\partial D}{\partial u_1} = \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}B - \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}C - \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}A . \end{cases}$$

Supponiamo ora che ω sia una funzione *analitica regolare* delle tre variabili u_1, u_2, u_3, la quale soddisfi alla

$$A = 0 \quad \text{per tutti i valori di } u_1, u_2, u_3$$

ed alle

$$B = 0 \quad , \quad D = 0 \quad \text{per} \quad u_1 = 0 ;$$

dimostriamo che la ω soddisferà al sistema (8) per tutti i valori di u_1,

---

[1] *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, pag. 312 e seguenti.

u_2, u_3, per il che basterà dimostrare che B e D saranno zero per tutti i valori delle u, dalla prima delle (3) seguendo allora che anche $C = 0$. Ora essendo

$$B = 0 \quad , \quad D = 0 \quad \text{per} \quad u_1 = 0 \, ,$$

quindi anche $C = 0$ per $u_1 = 0$, dalle seconde (3) segue

$$\frac{\partial B}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial u_1} = 0 \quad \text{per} \quad u_1 = 0 \, .$$

Derivando nuovamente le (6) rapporto a u_1, poi facendo $u_1 = 0$, ne risulta

$$\frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2} = 0 \, , \quad \frac{\partial^2 D}{\partial u_1^2} = 0 \, , \quad \frac{\partial C}{\partial u_1} = 0 \quad \text{per} \; u_1 = 0 \, ,$$

e così di seguito, derivando quante volte si voglia rispetto alla medesima variabile u_1. Le B, C, D, essendo serie di Taylor in u_1 che si annullano per $u_1 = 0$ con tutte le derivate rapporto ad u_1, sono dunque identicamente nulle, c. d. d. Ciò posto pongasi

$$(\omega)_{u_1=0} = \omega_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_1}\right)_{u_1=0} = \psi_0 \, ,$$

e facendo $u_1 = 0$ nelle $B = 0$, $D = 0$, si scrivano le due equazioni con due variabili indipendenti u_2, u_3 e con due incognite ω_0, ψ_0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial u_2 \partial u_3} = \cot \omega \, \psi_0 \cdot \dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial u_2 \partial u_3} - \operatorname{tg} \omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial u_2} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega_0} \dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial u_2 \partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R} \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\cos \omega_0}{R}\right) + \dfrac{\psi_0}{\cos \omega_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u_3} = 0 \, . \end{cases}$$

In ordine ai teoremi sulle equazioni a derivate parziali, questo sistema ammette una soluzione generale con *cinque* funzioni arbitrarie di una variabile.

Ed ora prendasi, secondo il teorema fondamentale di Cauchy, quella soluzione ω perfettamente determinata della $A = 0$ tale che sia

$$\omega = \omega_0 \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = \psi_0 \quad \text{per} \quad u_1 = 0 \, ;$$

essa soddisferà per quanto precede alle equazioni fondamentali (8) per tutti i valori delle u. Ne concludiamo: *Le famiglie di Lamé composte di superficie pseudosferiche dipendono da cinque funzioni arbitrarie.*

È da osservarsi per altro che se R è costante, cangiando u_3 in una funzione di u_3, si può far sparire una delle funzioni arbitrarie.

Volendo porre sotto forma geometrica gli elementi caratteristici di uno dei nostri sistemi tripli ortogonali, si osserverà che: *un tale sistema risulta individuato se si danno gli elementi seguenti:*

1.° *una superficie pseudosferica iniziale* $u_3 = 0$.

2.° *una delle curve* (u_3) *traiettorie ortogonali della famiglia, sia la* $u_1 = u_2 = 0$.

3.° *la legge come varia* R *lungo questa curva.*

Sviluppando infatti ω in serie di potenze di u_3 si avrà

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 u_3 + \omega_2 u_3^2 + \ldots ,$$

le $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots$ essendo funzioni di u_1, u_2 di cui la prima è data e le seguenti risultano pienamente determinate dalle condizioni imposte. (1)

§. 431.

Famiglie di Lamé con superficie a curvatura costante positiva.

Passiamo ora a considerare le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$, variabile in generale dall'una all'altra superficie della famiglia. Intendiamo escluse quelle soluzioni del problema che si ottengono prendendo una famiglia qualunque di sfere, o una famiglia di superficie di rotazione. Sia

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$$

l'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale corrispondente, nel quale le $u_3 =$ costante abbiano la curvatura $= \frac{1}{R^2}$, dove R è una funzione della sola u_3. Procedendo come al §. 429, osserveremo che avendosi

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} , \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial u_3}$$

ed essendo per ipotesi

$$\frac{1}{r_{31}} \cdot \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{R^2} ,$$

---

(1) Cf. la mia Memoria: *Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante.* (Atti dei Lincei, vol. IV, serie 4.ª, 1887).

potremo porre, indicando con θ una funzione ausiliaria

$$\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \frac{\coth\theta}{R}, \quad \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{tgh}\theta}{R}.$$

Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli del §. 429 (essendo escluse le famiglie di sfere e di superficie di rotazione) si troverà così:

$$(10) \qquad ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

dove la funzione $\theta(u_1, u_2, u_3)$ deve soddisfare al sistema di equazioni a derivate parziali seguenti:

$$(11)\begin{cases} A = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} + \dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\theta}{R^2} = 0 \\ B = \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3} - \operatorname{tgh}\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} - \coth\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = 0 \\ C = \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\cosh\theta}{R}\right) + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} = 0 \\ D = \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right) + \dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = 0. \end{cases}$$

Inversamente ad ogni soluzione θ di questo sistema corrisponde un sistema triplo ortogonale (10) della specie richiesta. Il sistema (11), che non differisce in sostanza analiticamente dal sistema (8), ha le medesime proprietà e conduce alle medesime conclusioni, cioè a riconoscere l'esistenza delle attuali famiglie di Lamé con cinque funzioni arbitrarie. Ora, se osserviamo che nelle rispettive forme (9), (10) del ds^2 abbiamo

$$H_2^2 + H_1^2 = 1 \quad \text{o} \quad H_2^2 - H_1^2 = 1,$$

e quindi

$$\frac{\partial H_1^2}{\partial u_3} = \pm\frac{\partial H_2^2}{\partial u_3},$$

ne deduciamo, secondo le osservazioni al principio del §. 421, il teorema seguente: *In una famiglia di Lamé, composta di superficie a curvatura costante positiva o negativa, le traiettorie ortogonali della famiglia segnano sulle singole superficie una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati (le linee assintotiche).*

Per questa proprietà i nostri sistemi tripli ortogonali si ravvicinano al sistema triplo delle quadriche confocali. È poi da notarsi che dal

teorema precedente non vanno nemmeno escluse le famiglie di sfere, perchè allora la corrispondenza segnata conserva i sistemi ortogonali o, ciò che per la sfera è lo stesso, i sistemi coniugati.

Osserviamo ancora che nel caso pseudosferico le linee assintotiche α, β si introducono ponendo

$$u_1 - u_2 = 2\alpha \ , \quad u_1 + u_2 = 2\beta \ ,$$

il che dà per la (9)

$$(9^*) \qquad ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\omega \, d\alpha \, d\beta + d\beta^2 + R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 \ .$$

Qui è posta in evidenza la corrispondenza delle assintotiche su due superficie pseudosferiche della famiglia e di più si vede che *gli archi corrispondenti di assintotiche sono uguali.*

Ciò risulta anche dall'osservare che sulle superficie luogo delle assintotiche corrispondenti queste sono linee geodetiche, poichè il loro piano osculatore, che è tangente alla superficie pseudosferica, è quindi normale alla detta superficie. Anche dalla (9*) segue subito questo risultato perchè, facendovi p. e. $\beta =$ costante, si ha

$$ds^2 = d\alpha^2 + R^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 \ .$$

La superficie dei due sistemi $\alpha =$ costante $\beta =$ costante hanno quindi un sistema di linee geodetiche a torsione costante. [1]

§. 432.

Esempî diversi.

Prima di procedere ad uno studio ulteriore dei nuovi sistemi tripli ortogonali, consideriamone alcuni esempî più semplici.

1.° Cerchiamo di soddisfare alle equazioni (8) con una funzione ω indipendente da u_2. Allora le dette equazioni si riducono all'unica

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial u_1}\right)^2 + \frac{\cos^2 \omega}{R^2} = \text{costante} \ ,$$

che si integra colle funzioni ellittiche di Jacobi, a modulo variabile k,

---

[1] Le superficie qui indicate per incidenza sono state studiate direttamente dal Fibri nella sua tesi di abilitazione (Annali della R.ª Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. X, 1888).

colle formole

$$\cos\omega = \mathrm{sn}\,(\tau, k) \quad , \quad \mathrm{sen}\,\omega = \mathrm{cn}\,(\tau, k)\,,$$

essendo

$$\tau = \frac{u_1}{\lambda} + \psi(u_3) \quad , \quad k = \frac{\lambda}{R}$$

con λ costante arbitraria e $\psi(u_3)$, $R(u_3)$ funzioni arbitrarie di u_3. Le superficie pseudosferiche $u_3 =$ costante sono allora di rotazione.

Notevole è il caso in cui R sia assolutamente costante; allora queste superficie pseudosferiche sono identiche di forma, cioè congruenti per traslazione lungo l'asse. Le $u_1 =$ costante sono alla loro volta superficie congruenti di rotazione e di curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$. Ne discende il teorema: *Se al meridiano di una superficie a curvatura costante si dà un moto di traslazione lungo l'asse, le traiettorie ortogonali delle ∞^1 posizioni di questa curva (congruenti fra loro) sono ancora i meridiani di superficie a curvatura costante eguale ed opposta alla precedente.* [1]

2.° Consideriamo un sistema ∞^1 di elicoidi pseudosferiche del Dini (§. 334) col medesimo asse ed aventi per profilo meridiano la medesima trattrice, ma differenti fra loro per il passo e quindi per la curvatura. Poichè le sfere di raggio eguale al segmento costante di tangente alla trattrice intercetto dall'assintoto, coi centri distribuiti sull'asse, tagliano le elicoidi ortogonalmente, risulta dal teorema di Darboux che ai due sistemi ∞^1 di elicoidi e di sfere ortogonali fra loro può associarsi un terzo sistema ortogonale ad ambedue; abbiamo dunque un sistema triplo ortogonale pseudosferico. Ponendo per semplicità = 1 il segmento costante di tangente, si trova facilmente che il corrispondente sistema triplo ortogonale pseudosferico è definito dalle formole

$$\cos\omega = \mathrm{tgh}\,\tau \quad , \quad \mathrm{sen}\,\omega = \frac{1}{\cosh\tau}\,, \tag{12}$$

dove

$$\tau = u_1 + u_2\,\mathrm{tgh}\,u_3 + \psi(u_3)\,, \tag{12*}$$

essendo $\psi(u_3)$ una funzione arbitraria di u_3 e $R = \cosh u_3$.

---

[1] È questo un caso particolare di un teorema di Beltrami, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione* (Annali di matematica, serie I, tomo VI (1864)).

3.° Si consideri una superficie d'Enneper a curvatura costante, ma del resto qualunque. Le sue linee di curvatura di un sistema sono tracciate sopra sfere ortogonali alla superficie e coi centri in linea retta. Se facciamo rotare la superficie d'Enneper attorno all'asse, essa taglierà, in tutte le sue posizioni, ortogonalmente il detto sistema di sfere; dunque: *ogni superficie d'Enneper genera per rotazione attorno all'asse una famiglia di Lamé della nostra specie.*

§. 433.

La trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli pseudosferici.

Ci proponiamo ora di dimostrare che la teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante negativa o positiva, stabilita nei Cap. XXIV e XXV, può applicarsi non solo, come ivi si è visto, a superficie isolate, ma anche simultaneamente a tutte le superficie di curvatura costante di una famiglia di Lamé, ottenendone nuove famiglie di Lamé.

Cominciamo anche qui dalle trasformazioni *reali* di Bäcklund applicate alle famiglie pseudosferiche di Lamé. Supponiamo dunque di avere un sistema triplo ortogonale pseudosferico, che dia all'elemento lineare dello spazio la forma (9)

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right)^2 du_3^2 ,$$

la funzione ω di u_1, u_2, u_3, soddisfacendo alle equazioni del sistema (8) pag. 530. A ciascuna superficie pseudosferica $u_3 =$ costante applichiamo una trasformazione semplice di Bäcklund (§. 373). Indichiamo con k la distanza costante dei fuochi nella corrispondente congruenza pseudosferica, e con σ il complemento dell'angolo dei piani focali, sicchè

$$k = R\cos\sigma , \tag{13}$$

dove k, σ saranno, come R, funzioni di u_3. Si indichi poi con φ l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza sopra le linee di curvatura $u_2 =$ costante. Le formole (B) §. 373 (pag. 392) della trasformazione di Bäcklund diventano nelle nuove notazioni: [1]

---

[1] Evidentemente, pel confronto delle notazioni attuali con quelle del §. 373, bisogna porre $\omega = \theta$, $u_1 = Ru$, $u_2 = Rv$, ciò che da luogo alle (14) del testo.

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\varphi}{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\omega\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi}{k} \end{cases}.$$

Prendiamo una determinata funzione $\varphi\,(u_1, u_2, u_3)$ che soddisfi le (14), e domandiamo: *A quali ulteriori condizioni dovremo assoggettare la funzione* $\varphi\,(u_1, u_2, u_3)$ *affinchè le* ∞^1 *superficie pseudosferiche trasformate abbiano per traiettorie ortogonali le nuove curve* (u_3)?

In tal caso, siccome la trasformazione di Bäcklund conserva le linee di curvatura, le superficie pseudosferiche derivate faranno nuovamente parte di un sistema triplo ortogonale. Cominciamo dall'osservare che la condizione imposta porta per conseguenza che il segmento k sia una costante assoluta (indipendente da u_3), poichè una curva coordinata (u_3), e la sua derivata debbono essere traiettorie ortogonali dei segmenti k, che ne congiungono i punti corrispondenti.

§. 434.

L'equazione a differenziali totali per la funzione φ.

Siano x, y, z, le coordinate di un punto dello spazio, riferito al sistema triplo primitivo, x', y', z' quelle del punto corrispondente per la trasformazione; avremo:

$$(15)\qquad \begin{cases} x' = x + k\,(\cos\varphi\,\mathrm{X}_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{X}_2) \\ y' = y + k\,(\cos\varphi\,\mathrm{Y}_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{Y}_2) \\ z' = z + k\,(\cos\varphi\,\mathrm{Z}_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{Z}_2), \end{cases}$$

essendo $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$; $\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2$ i rispettivi coseni di direzione delle tangenti alle curve coordinate (u_1) (u_2).

Dalle formole (5) del §. 409 (pag. 481) deduciamo pel caso attuale:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\mathrm{X}_2 + \dfrac{\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{R}}\mathrm{X}_3\,,\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\mathrm{X}_2,\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u_3} = \dfrac{\mathrm{R}}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\mathrm{X}_2 \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\mathrm{X}_1\,,\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u_2} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\mathrm{X}_1 - \dfrac{\cos\omega}{\mathrm{R}}\mathrm{X}_3,\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u_3} = \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{sen}\,\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\mathrm{X}_3 \end{cases}$$

colle analoghe in Y, Z, onde derivando le (15), col tener conto delle (14),

e della (18), troviamo:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u_1} = \cos\varphi\Big\{(\cos\omega\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi)\,X_1 + \\ + (\cos\omega\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi)\,X_2 + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\,X_3\Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\varphi\Big\{(\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi)\,X_1 + \\ + (\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\cos\varphi)\,X_2 - \cos\sigma\cos\omega\,X_3\Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_3} = -k\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}X_1 + k\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}X_2 + \\ \qquad + R\left(\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \dfrac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)X_3\ . \end{cases}$$

Ne segue

$$\sum\frac{\partial x'}{\partial u_1}\frac{\partial x'}{\partial u_2} = 0$$

$$\sum\frac{\partial x'}{\partial u_1}\frac{\partial x'}{\partial u_3} = k\cos\varphi\operatorname{sen}\omega\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)$$

$$\sum\frac{\partial x'}{\partial u_2}\frac{\partial x'}{\partial u_3} = -k\operatorname{sen}\varphi\cos\omega\left(\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right).$$

Perchè le nuove curve (u_3) riescano ortogonali alle superficie pseudosferiche trasformate è dunque necessario e sufficiente assoggettare φ a soddisfare l'ulteriore condizione:

$$(18)\qquad \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3} = 0\ .$$

Supposto per un momento che ciò possa farsi, le (17) ci daranno subito per l'elemento lineare dello spazio riferito al sistema triplo trasformato

$$(19)\qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \cos^2\varphi\,du_1^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2\ ,$$

che ha la stessa forma (9), sostituito l'angolo φ all'angolo ω.

Tutto si riduce dunque a provare che la funzione incognita φ può determinarsi in guisa da soddisfare insieme le (14), (18) ossia l'equazione

a differenziali totali:

$$(I)\qquad d\varphi = \left(\frac{\cos\omega\,\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\,\operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right)du_1 -$$

$$-\left(\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\,\operatorname{sen}\varphi}{k} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1}\right)du_2 -$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3} + \frac{k\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)du_3\,.$$

Se scriviamo le condizioni d'integrabilità di questa equazione, tenendo conto delle equazioni (8) cui soddisfa ω e della relazione

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}\,,$$

troviamo che esse sono identicamente soddisfatte. Dunque la (I) è illimitatamente integrabile e per ciò, fissata ad arbitrio la costante k, la (I) ammette una soluzione generale contenente una costante arbitraria C. Per fissare il valore di C basta fissare la trasformata di Bäcklund di *una* superficie pseudosferica iniziale, cioè la direzione di *uno* dei segmenti k, che potrà del resto essere data ad arbitrio, purchè normale alla curva coordinata (u_3). Dunque: *Ad ogni famiglia di Lamé composta di superficie pseudosferiche si può applicare, come alle superficie pseudosferiche isolate, la trasformazione di Bäcklund; per fissare la famiglia trasformata basta dare di una delle superficie della famiglia la trasformata di Bäcklund, che si può scegliere del resto ad arbitrio. Così, da ogni tale famiglia nota di Lamé, derivano per trasformazione di Bäcklund ∞^2 nuove famiglie trasformate.*

La ricerca delle famiglie trasformate dipende dall'integrazione dell'equazione a differenziali totali (I), alla quale prendendo per incognita

$$\Lambda = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$$

si può dare nuovamente (Cf. §. 374, pag. 394) la forma di un'equazione di Riccati. Basterà dunque conoscere una particolare famiglia trasformata per avere tutte le altre con quadrature. E con sole quadrature potrà poi applicarsi illimitatamente alle nuove famiglie la trasformazione di Bäcklund.

§. 435.

Il teorema di permutabilità.

Come per le superficie pseudosferiche isolate, così anche per le famiglie pseudosferiche di Lamé il metodo di trasformazione descritto può ricevere un'importante semplificazione facendo uso del *teorema di permutabilità* (Cf. §. 383 e seguenti) il quale, come ora si vedrà, è ancora applicabile alle nostre famiglie di Lamé.

Per dimostrarlo indichiamo (con un leggiero cambiamento nelle notazioni del Cap. XXIV) simbolicamente con B_k la trasformazione di Bäcklund applicata ad una famiglia pseudosferica (Σ) di Lamé, quando la distanza costante fra un punto di una superficie Σ e il punto corrispondente della superficie trasformata Σ' è eguale a k. Dimostriamo che sussiste il teorema di permutabilità:

Se (Σ'), (Σ'') *sono due famiglie pseudosferiche di Lamé legate alla medesima* (Σ) *da due trasformazioni di Bäcklund* B_k, $B_{k'}$, *a costanti* k, k' *differenti, esiste una quarta famiglia pseudosferica* (Σ'''), *perfettamente determinata, che è legata rispettivamente a* (Σ'), (Σ'') *da due trasformazioni di Bäcklund colle costanti invertite* k', k.

Siano infatti

$$\Sigma,\ \Sigma',\ \Sigma''$$

tre superficie pseudosferiche corrispondenti nei tre sistemi (Σ), (Σ'), (Σ''). Pel teorema di permutabilità relativo alle superficie pseudosferiche isolate (§. 383), esiste una quarta superficie pseudosferica Σ''', perfettamente determinata e deducibile in termini finiti, che è legata a Σ', Σ'' rispettivamente da due trasformazioni $B'_{k'}$, B'_k. Dobbiamo solo provare che Σ''' genera una famiglia (Σ''') di Lamé. Ora se P, P', P'', P''' sono quattro punti corrispondenti di Σ, Σ', Σ'', Σ''', e a P facciamo descrivere una delle curve C traiettorie ortogonali della famiglia (Σ) i punti P', P'' descriveranno rispettivamente, per quanto si è visto sopra, due curve C', C'' traiettorie ortogonali delle rispettive famiglie (Σ'), (Σ''). Indicando con C''' la curva descritta da P''', basta osservare che i segmenti P' P''', P'' P''' sono costanti e normali rispettivamente a C', C'' per dedurne che essi sono normali in P''' a C'''; ma questi due segmenti sono tangenti in P''' alla Σ''' e però le curve C''' sono traiettorie ortogonali della famiglia (Σ'''). D'altronde, siccome la trasformazione di Bäcklund conserva le linee di

curvatura, le C''' segnano sulle superficie Σ''' una corrispondenza che conserva le linee di curvatura (ed i sistemi coniugati); dunque (Σ''') è una famiglia di Lamé.

Noti i tre sistemi tripli ortogonali pseudosferici (Σ), (Σ'), (Σ''), definiti dalle formole

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

$$ds_1^2 = \cos^2\omega'\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega'\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega'}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

$$ds_2^2 = \cos^2\omega''\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega''\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega''}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

il quarto sistema (Σ'''), pel quale indichiamo con ω''' il corrispondente valore di ω, si otterrà con operazioni algebriche dalla formola (C) §. 384 (pag. 416) del teorema di permutabilità

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega''' - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma+\sigma'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\sigma'}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right), \tag{20}$$

dove

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}, \quad \cos\sigma' = \frac{k'}{R}.$$

Applicando le considerazioni stesse dei §§. 384, 385, otteniamo anche qui per le famiglie di Lamé l'importante conseguenza:

Se di una famiglia pseudosferica di Lamé si conoscono tutte le ∞^2 famiglie derivate per trasformazione di Bäcklund, per ciascuna di queste ultime si potranno determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione tutte le nuove famiglie derivate.

Nelle condizioni del teorema ora enunciato trovansi p. e. i sistemi tripli pseudosferici composti con elicoidi del Dini e corrispondenti alle formole (12), (12*) pag. 536. Senza compiere i calcoli relativi, ci limitiamo qui a constatarlo nel modo seguente. Il sistema (8) pag. 530 ammette la soluzione evidente $\omega = 0$, alla quale applicando la trasformazione di Bäcklund a costante k per ottenere una nuova soluzione φ, vediamo facilmente che φ deve unicamente soddisfare le due equazioni (14) pag. 538, che diventano attualmente:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{k}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{k}.$$

Queste integrate danno

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = e^{\frac{u_1 - \operatorname{sen}\sigma\, u_2}{k}} + \psi(u_3)$$

dove ψ è funzione arbitraria di u_3, e basta fare in questa

$$k = 1 \quad \operatorname{sen}\sigma = -\operatorname{tgh} u_3$$

per trovare appunto le (12). Della soluzione $\omega = 0$ conosciamo adunque *tutte* le trasformate di Bäcklund, e possiamo quindi applicare il teorema superiore. Così riconosciamo l' esistenza di un gruppo infinito di famiglie pseudosferiche di Lamé che dipendono dalle funzioni ordinarie (Cf. §. 387).

§. 436.

Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund composte in trasformazioni reali.

Stabilito anche per le famiglie pseudosferiche di Lamè il teorema di permutabilità, è chiaro *a priori* che tutti gli sviluppi dati nel Capitolo precedente per le trasformazioni immaginarie di Bäcklund e la loro composizione in trasformazioni reali per le superficie a curvatura costante isolate potranno applicarsi alle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante. E basterà che ci limitiamo a dare le formole fondamentali per le nuove trasformazioni.

Dalla soluzione reale ω delle equazioni fondamentali (8) passiamo ad una nuova soluzione ω_1, trasformata di Bäcklund di ω, mediante l'integrazione dell'equazione (I) a differenziali totali (pag. 540):

$$(21)\quad d\omega_1 = \left(\frac{\cos\omega \operatorname{sen}\omega_1 + \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\omega\cos\omega_1}{k_1} - \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right) du_1 -$$
$$- \left(\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega_1 + \operatorname{sen}\sigma_1\cos\omega\operatorname{sen}\omega_1}{k_1} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1}\right) du_2 -$$
$$- \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma_1}\left(\frac{k_1\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \frac{k_1\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} + \frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right) du_3,$$

dove k_1 è una costante e

$$\cos\sigma_1 = \frac{k_1}{R}.$$

Ma supponiamo qui che k_1 sia una costante complessa qualunque, per cui la ω_1 sarà essa stessa complessa. Ora se si cangia nella (21) i in $-i$

e quindi le quantità

$$k_1 \quad \sigma_1 \quad \omega_1$$

nelle loro coniugate

$$k_2 = \overline{k_1} \quad , \quad \sigma_2 = \overline{\sigma_1} \quad , \quad \omega_2 = \overline{\omega_1} \ ,$$

la ω_2 sarà una soluzione (complessa) delle (8) legata alla reale ω dalla trasformazione di Bäcklund $B_{\overline{k_1}}$ coniugata della B_{k_1} che lega ω_1 ad ω stessa. La formola (20) del teorema di permutabilità, indicando qui con ω_3 la quarta soluzione ci dà

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \overline{\sigma_1}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 + \overline{\sigma_1}}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1 - \overline{\omega_1}}{2}\right) ,$$

ovvero, scindendo il reale dall'immaginario col porre

$$\sigma_1 = a + ib \quad , \quad \omega_1 = \theta + i\varphi \ ,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\cos a}{\operatorname{senh} b} \operatorname{tgh} \varphi \ , \tag{22}$$

e questa ci dimostra che la quarta soluzione ω_3 è nuovamente reale. Le formole stesse che abbiamo stabilite al §. 397 (vedi (16*) pag. 446) ci darebbero in termini finiti la nuova famiglia reale pseudosferica di Lamé corrispondente alla soluzione trasformata ω_3. Applicando una trasformazione di Lie, potremo anche qui (Cf. §. 398) ridurci al caso in cui le due trasformazioni elementari componenti B_{k_1}, B_{k_1} sono puramente immaginarie ed opposte.

§. 437.

Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund per le famiglie di Lamé a curvatura costante positiva.

Passiamo ora al caso più interessante delle nuove trasformazioni reali per le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante, al caso in cui questa curvatura è *positiva*. In questo caso infatti le trasformazioni elementari di Bäcklund sono necessariamente immaginarie, e soltanto quando siano opportunamente composte danno luogo a trasformazioni reali (Cf. §. 399 e seguenti).

Supponiamo di avere un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3), definito dalla formola (10) pag. 534

$$(23) \qquad ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 ,$$

dove le superficie $u_3 =$ costante sono di curvatura costante positiva $= \frac{1}{R^2}$, essendo R funzione della sola u_3. La funzione reale $\theta\,(u_1, u_2, u_3)$ soddisferà alle equazioni fondamentali (11) pag. 534.

Cominciamo dallo stabilire le formole delle trasformazioni elementari (immaginarie) di Bäcklund per questi sistemi tripli. Per ciò non faremo altro che riprendere le formole già calcolate al §. 399 per le superficie a curvatura costante positiva isolate. Occorre in primo luogo, adoprando le solite notazioni per i coseni delle direzioni principali nell'attuale sistema triplo, scrivere le formole seguenti relative alla forma (23) dell'elemento lineare dello spazio:

$$(24) \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u_1} = \operatorname{senh}\theta\, X_1 \quad , \quad \dfrac{\partial x}{\partial u_2} = \cosh\theta\, X_2 \quad , \quad \dfrac{\partial x}{\partial u_3} = R\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\, X_3 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u_1} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2}\, X_2 - \dfrac{\cosh\theta}{R}\, X_3 \ , \ \dfrac{\partial X_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\, X_2 , \ \dfrac{\partial X_1}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\operatorname{senh}\theta}\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_2}\, X_3 \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u_1} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} X_1 , \ \dfrac{\partial X_2}{\partial u_3} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u_1}\, X_1 - \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{R}\, X_3 , \ \dfrac{\partial X_2}{\partial u_3} = \dfrac{R}{\cosh\theta}\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\, X_2 . \end{cases}$$

Indicando ora con k una costante complessa qualunque, pongasi

$$\cosh\sigma = \frac{R}{k}$$

e, secondo le formole (B) pag. 454, si determini una funzione θ_1 di u_1, u_2, u_3 che soddisfi alle due equazioni simultanee:

$$(25) \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_1} + i\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} = \dfrac{\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1}{R} \\ i\,\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u_1} = -\dfrac{\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1}{R} , \end{cases}$$

le quali, a causa della prima equazione (11), sono come sappiamo compatibili.

Scelta una soluzione θ_1 delle (25), si considerino secondo le (33) §. 399

(pag. 454) le superficie (immaginarie) trasformate date dalla formola

$$(26) \qquad x' = x - \mathrm{R}\,\frac{\operatorname{senh}\theta_1\,\mathrm{X}_1 + i\cosh\theta_1\,\mathrm{X}_2}{\cosh\sigma}$$

colle analoghe per y', z'. Dobbiamo ora trovare le ulteriori condizioni cui bisogna assoggettare θ_1 affinchè il punto (x', y', z') descriva un nuovo sistema triplo ortogonale. Per questo, derivando la (26) coll'aver riguardo alle (24), (25), troviamo:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u_1} = \operatorname{senh}\theta_1 \Big\{ -(\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1)\,\mathrm{X}_1 - \\ \qquad\qquad -i\,(\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,\mathrm{X}_2 + \dfrac{\cosh\theta}{\cosh\sigma}\,\mathrm{X}_3 \Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_2} = \cosh\theta_1 \Big\{ -i\,(\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1)\,\mathrm{X}_1 + \\ \qquad\qquad +(\cosh\theta\cosh\theta_1 + \operatorname{tgh}\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_1)\,\mathrm{X}_2 + \dfrac{i\operatorname{senh}\theta_1}{\cosh\sigma}\,\mathrm{X}_3 \Big\} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u_3} = -k\cosh\theta_1\,\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_3}\,\mathrm{X}_1 - i\,k\operatorname{senh}\theta_1\,\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u_3}\,\mathrm{X}_2 + \\ \qquad\qquad +\mathrm{R}\left[\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} - \dfrac{k}{\operatorname{senh}\theta}\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\operatorname{senh}\theta_1 + \dfrac{i\,k}{\cosh\theta}\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\cosh\theta_1\right]\mathrm{X}_3 \end{cases}$$

e quindi

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial u_1}\,\frac{\partial x'}{\partial u_2} = 0$$

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial u_1}\,\frac{\partial x'}{\partial u_3} = \frac{k\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1}{\cosh\sigma}\left\{\operatorname{senh}\sigma\,\frac{\partial\theta_1}{\partial u_3} + \cosh\sigma\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\mathrm{R}}{\operatorname{senh}\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\operatorname{senh}\theta_1 - \frac{i\,\mathrm{R}}{\cosh\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\cosh\theta_1\right\}$$

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial u_2}\,\frac{\partial x'}{\partial u_3} = \frac{ik\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1}{\cosh\sigma}\left\{\operatorname{senh}\sigma\,\frac{\partial\theta_1}{\partial u_3} + \cosh\sigma\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3} - \right.$$
$$\left. -\frac{\mathrm{R}}{\operatorname{senh}\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\operatorname{senh}\theta_1 - \frac{i\,\mathrm{R}}{\cosh\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_3}\operatorname{senh}\theta_1\right\}.$$

Il nuovo sistema triplo $(u_1\,u_2\,u_3)$ sarà dunque ancora ortogonale se

la funzione θ_1 soddisferà, oltre che alle (25), alla ulteriore equazione

$$(25^*)\quad \operatorname{senh}\sigma\frac{\partial\theta_1}{\partial u_3}=\frac{R}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\partial u_2}\operatorname{senh}\theta_1+\frac{iR}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\partial u_3}\cosh\theta_1-\cosh\sigma\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\,.$$

Ma questa, insieme colle (25), forma un sistema illimitatamente integrabile, come facilmente si verifica tenendo conto delle equazioni (11) (pag. 534) cui soddisfa θ. La soluzione più generale θ_1 del sistema (25), (25*) contiene quindi una costante arbitraria (complessa). È da notarsi poi che, soddisfatte le equazioni precedenti, le (27) danno

$$(28)\quad ds'^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2=\operatorname{senh}^2\theta_1\,du_1^2+\cosh^2\theta_1\,du_2^2+R^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u_3}\right)^2du_3^2\,,$$

sicchè θ_1 ha lo stesso significato pel sistema trasformato come θ pel primitivo.

§. 438.

Le nuove trasformazioni reali.

Il risultato analitico del teorema di permutabilità conserva evidentemente, anche nel caso attuale, il suo valore; e cioè, se θ_1 è legata a θ dalle (25), (25*) con $\sigma=\sigma_1$, e similmente θ_2 a θ dalle formole stesse con $\sigma=\sigma_2$, avremo una quarta soluzione θ_3 delle equazioni fondamentali (11) dalla formola (C) pag. 458

$$(29)\qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\,.$$

E questa θ_3 sarà legata a θ_1, θ_2 dalle formole stesse, scambiandovi σ_1 con σ_2.

Non resta ora altro che applicare le considerazioni stesse dei §§. 401, 402 per comporre due trasformazioni immaginarie in una reale. Per ciò osserviamo anche qui che se si pone

$$\sigma_2=-\bar{\sigma}_1\qquad\theta_2=\pi i-\bar{\theta}_1\,,$$

mentre θ_1 soddisfa alle (25), (25*) con $\sigma=\sigma_1$, la θ_2 soddisferà alle equazioni stesse con $\sigma=\sigma_2$.

Dopo di ciò la (27) ci darà per la quarta soluzione θ_3 la formola

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3-\theta}{2}\right)=\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1+\bar{\sigma}_1}{2}\right)\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_1+\bar{\theta}_1}{2}\right)\,,$$

la quale ci dimostra che θ_3 è nuovamente reale. Avremo quindi un nuovo sistema triplo ortogonale reale (u_1, u_2, u_3) con superficie $u_3 =$ costante a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$, definito dalla formola

$$(30) \qquad ds_1^2 = \operatorname{senh}^2\theta_3\, du_1^2 + \cosh^2\theta_3\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta_3}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 .$$

Le equazioni in termini finiti del nuovo sistema triplo si ottengono dalle formole stesse che abbiamo dato al §. 400 e che non importa qui trascrivere.

Terminiamo queste ricerche generali sulle trasformazioni delle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante coll'osservare che vale anche qui, come per le superficie isolate, il teorema finale: *Se di una delle indicate famiglie di Lamé si conoscono tutte le trasformate contigue, l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione si farà con soli calcoli algebrici e di derivazione.*

Così p. e. se ad una superficie di Enneper della classe particolare trovata alla fine del Cap. XXV si dà un moto di rotazione attorno all'asse, si genera una famiglia di Lamé (§. 432, 3.°) che si trova appunto nelle condizioni indicate nel teorema.

§. 439.

I sistemi di Weingarten.

Fino ad ora abbiamo considerato il caso generale in cui le superficie della famiglia di Lamé sono, individualmente considerate, a curvatura costante, ma questa curvatura K è variabile dall'una all'altra superficie della famiglia. Veniamo ora ad occuparci del caso particolare notevole in cui la curvatura K è una costante assoluta. I sistemi tripli ortogonali corrispondenti li diremo *sistemi di Weingarten*, poichè questo geometra fu il primo a riconoscerne l'esistenza notando la possibilità del passaggio da una superficie di curvatura costante ad una *infinitamente vicina* colla medesima curvatura, in guisa che la distanza normale infinitesima fra le due superficie sia una soluzione dell'equazione del Cayley.

Per ricercare le proprietà speciali dei sistemi di Weingarten, prenderemo per semplicità per la curvatura comune K delle superficie $u =$ costante il valore $K = \pm 1$. Cominciamo dal caso pseudosferico $K = -1$ e

facciamo quindi nelle (8) pag. 530 $R = 1$. Abbiamo così il sistema di equazioni

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^3\omega}{\partial u_1\partial u_2\partial u_3} = \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} - \operatorname{tg}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right) = \cos\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) = \operatorname{sen}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} - \dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} \end{cases}$$

e scriviamo altresì, per comodità dei calcoli seguenti, la seconda delle precedenti sotto le due forme equivalenti:

$$(31^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) = -\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}. \end{cases}$$

L'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema pseudosferico di Weingarten, ha la forma

$$(32)\qquad ds^2 = \cos^2\omega\,du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\,du_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 .$$

Poniamo per un momento

$$\Lambda = \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 ,$$

ed osserviamo che dalle (31), (31*) risulta

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u_1} = 0 \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial u_2} = 0 ,$$

onde

$$\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 = F(u_3) ,$$

dove $F(u_3)$ è funzione di u_3 soltanto. Ora osserviamo che cangiando u_3 in una funzione di u_3, ciò che non altera la forma dell'elemento lineare (32), si può rendere

$$F(u_3) = c \quad (c \text{ costante}) ,$$

ed il valore di questa costante si potrà, senza alterare la generalità, modificare per un fattore positivo. Così le equazioni fondamentali (31) traggono seco (disponendo del parametro u_3) le due equazioni del secondo ordine:

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 = C \end{cases}$$

Ma viceversa si vede che dalle (A) seguono le (31), sicchè le (A) sono le equazioni caratteristiche pei sistemi pseudosferici di Weingarten. Pongasi infatti

$$M = \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\quad,\qquad N = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\,,$$

e si derivi la prima delle (A) rapporto ad u_3, e la seconda una prima volta rapporto ad u_1, una seconda rapporto ad u_2. Le tre equazioni così ottenute si associno alla

$$\frac{\partial\,(M\cos\omega)}{\partial u_2} = \frac{\partial\,(N\operatorname{sen}\omega)}{\partial u_1}$$

e si risolvano le quattro rapporto alle derivate

$$\frac{\partial M}{\partial u_1}\,,\quad \frac{\partial M}{\partial u_2}\,,\quad \frac{\partial N}{\partial u_1}\,,\quad \frac{\partial N}{\partial u_2}\,;$$

si ottengono così appunto le (31), (31*). Si presenterebbe un caso d'eccezione se potesse annullarsi il determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\omega & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\omega \\ 0 & \cos\omega & -\operatorname{sen}\omega & 0 \\ M & 0 & N & 0 \\ 0 & M & 0 & N \end{vmatrix} = N^2\cos^2\omega - M^2\operatorname{sen}^2\omega\,.$$

Ma allora ne seguirebbe

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} = \varepsilon\cos^2\omega\sqrt{C+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2}\quad,\qquad \varepsilon = \pm 1$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} = \varepsilon'\operatorname{sen}^2\omega\sqrt{C+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2}\quad,\qquad \varepsilon' = \pm 1$$

e derivando la prima di queste rapporto a u_3, la seconda rapporto a u_1, ne verrebbe

$$\frac{\partial \omega}{\partial u_1} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial u_2} ,$$

ciò che contraddice alle due precedenti.

In modo perfettamente analogo si tratta il caso dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva. Allora l'elemento lineare dello spazio prende la forma (10) pag. 534

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du_1^2 + \cosh^2\theta\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 , \tag{33}$$

dove θ soddisfa le (11) ibid. con $R = 1$. In virtù di queste l'espressione

$$\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2$$

è una funzione $F(u_3)$ della sola u_3 e, cangiando il parametro u_3, si può rendere $F(u_3) = 1$. Così θ dovrà soddisfare il sistema:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 \\ \left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 = 1 . \end{cases}$$

E analogamente, come sopra pel sistema (A), si dimostrerà che dalle (B) seguono le altre equazioni (11), per cui il sistema (B) caratterizza le funzioni θ che danno luogo, secondo la (33), ai sistemi di Weingarten a curvatura positiva.

§. 440.

Le linee di equidistanza nei sistemi di Weingarten.

In un sistema di Weingarten si consideri una qualunque superficie $u_3 =$ costante della serie a curvatura costante e sopra di esse le linee di equidistanza $H_3 =$ costante, cioè le linee lungo le quali è costante la distanza infinitesima normale εn della superficie dalla consecutiva (§. 410). Dimostriamo che sussiste il teorema: *In ogni sistema di Weingarten le linee di equidistanza sulle superficie a curvatura costante sono circoli geodetici paralleli.*

Si consideri dapprima il caso di un sistema pseudosferico, corrispondente alla forma (32) dell'elemento lineare. Qui si ha

$$n = \frac{\partial \omega}{\partial u_3},$$

e quindi la seconda delle (A) si scrive

$$\Delta_1 n = c + n^2, \tag{34}$$

indicando con $\Delta_1 n$ il parametro differenziale primo di n, calcolato rispetto all'elemento lineare

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2$$

della superficie pseudosferica $u_3 =$ costante. La (34) ci dimostra intanto che le linee di equidistanza $n =$ costante sono geodeticamente parallele. Calcoliamo ora, colla formola di Bonnet (I, pag. 183), la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_n}$ delle linee di equidistanza:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{\Delta_1 n}}\,\frac{1}{\cos\omega}\,\frac{\partial n}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{\cos\omega}{\sqrt{\Delta_1 n}}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\frac{\partial n}{\partial u_2}\right]\right\}.$$

Facendo uso delle formole

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial n}{\partial u_1}\right) = \cos\omega\, n + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial n}{\partial u_2}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial n}{\partial u_2}\right) = \operatorname{sen}\omega\, n - \dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial n}{\partial u_1}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial u_1}, \end{cases}$$

che seguono dalle (31) e dalle altre

$$\frac{\partial \Delta_1 n}{\partial u_1} = 2n\frac{\partial n}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \Delta_1 n}{\partial u_2} = 2n\frac{\partial n}{\partial u_2},$$

che provengono per derivazione dalla (34), otteniamo

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{n}{\sqrt{\Delta_1 n}} = \frac{n}{\sqrt{c + n^2}}. \tag{35}$$

Dunque le linee di equidistanza $n =$ costante, geodeticamente parallele, sono altresì a curvatura geodetica costante, e però circoli geodetici paralleli, c. d. d.

Del tutto analoga è la dimostrazione pel caso in cui le $u_3 =$ costante del sistema di Weingarten abbiano curvatura positiva. Valendo allora le

formole (B), ed essendo l'elemento lineare dato dalla (33), si ha

$$n = \frac{\partial\theta}{\partial u_3}\ , \quad \Delta_1 n = 1 - n^2$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\ . \tag{35*}$$

Dal teorema ora dimostrato segue poi che: *Se un sistema di Weingarten è noto, le linee geodetiche delle superficie della serie a curvatura costante si ottengono con quadrature.*

Ed infatti conosciamo su queste superficie un sistema di linee n–costante, appartenenti ad un sistema ortogonale isotermo, e le geodetiche ortogonali si hanno quindi, pel teorema di Lie al §. 47 (I, pag. 100), con una quadratura.

Così p. e. se ricordiamo (§. 432) che ogni superficie d'Enneper a curvatura costante genera, per rotazione attorno all'asse, una famiglia di Lamé, ne deduciamo: *Sulle superficie d'Enneper a curvatura costante le geodetiche si ottengono con quadrature.*

§. 441.

I sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante.

Consideriamo in particolare i sistemi pseudosferici di Weingarten, che conviene distinguere, secondo la formola (35), in tre specie secondo che la costante c è positiva, negativa o nulla. Possiamo fare corrispondentemente

$$c = +1\ , \quad c = -1\ , \quad c = 0\ ,$$

e si ha dalla (35) ordinatamente

$$\frac{1}{\rho_n} < 1\ , \quad \frac{1}{\rho_n} > 1\ , \quad \frac{1}{\rho_n} = 1\ ,$$

D'altra parte, per la formola generale (16) del §. 410 (pag. 485), indicando con $\frac{1}{\rho_3}$ la flessione delle curve (u_3), si ha

$$\frac{1}{\rho_3} = \frac{\sqrt{\Delta_1 n}}{n} = \rho_n \tag{36}$$

e quindi nei tre rispettivi casi

$$\frac{1}{\rho_3} > 1 \ , \ \frac{1}{\rho_3} < 1 , \frac{1}{\rho_3} = 1 \ .$$

Diremo $\frac{1}{\rho_3}$ la *flessione* del sistema di Weingarten e corrispondentemente avremo tre specie di questi sistemi, secondo che la flessione sarà >1, <1 ovvero $=1$. Nel primo caso i circoli di equidistanza saranno a centro ideale (paralleli geodeticamente ad una medesima geodetica), nel secondo a centro reale e a distanza finita, e nel terzo infine oricicli paralleli.

L'ultimo caso è specialmente notevole. Basta che *una* delle curve (u_3) sia a flessione costante $= 1$ ed allora sopra ogni superficie pseudosferica del sistema, per le (35), (36), le linee di equidistanza sono oricicli paralleli ed in conseguenza tutte le altre curve (u_3) sono a flessione costante $= 1$. Diremo in questo caso che il sistema di Weingarten è a *flessione costante*. Esso è caratterizzato dal valore $c = 0$ della costante e in conseguenza dalle equazioni per ω:

$$(A^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \left(\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 . \end{cases}$$

Se si indica con θ l'angolo che la direzione positiva della normale principale alla curva coordinata (u_2) forma sulla superficie pseudosferica colla linea $u_2 =$ costante, si ha per le formole del §. 409

$$\cos\theta = -\frac{\rho_3}{r_{13}} = -\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_1}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\rho_3}{r_{23}} = -\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}$$

e si può quindi sostituire al sistema (A*) il seguente

$$(C) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\,\partial u_3} = -\cos\theta\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\,\partial u_3} = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} . \end{cases}$$

Le formole (31), che seguono da queste, danno allora

$$(37)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_1}+\frac{\partial\omega}{\partial u_2}=\operatorname{sen}\theta\cos\omega\,,\quad \frac{\partial\theta}{\partial u_2}+\frac{\partial\omega}{\partial u_1}=-\cos\theta\operatorname{sen}\omega\,,$$

dalle quali eliminando ω si ha

$$(38)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,.$$

Derivando le (37) rapporto ad u_3 abbiamo

$$(39)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}=\cos\theta\cos\omega\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\,,$$

da cui

$$(40)\qquad \left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2=\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2\,.$$

Dalle (38), (40) risulta che θ soddisfa al sistema (A*), e però al dato sistema di Weingarten a flessione costante se ne associa un secondo corrispondente alla formola

$$ds^2=\cos^2\theta\,du_1^2+\operatorname{sen}^2\theta\,du_2^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2du_3^2\,.$$

La relazione geometrica di questo secondo sistema di Weingarten col primitivo si vedrà chiaramente più avanti (§. 445).

§. 442.

I sistemi ciclici di raggio costante.

Tra i sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante noi conosciamo già i sistemi ciclici di Ribaucour a raggio costante (§. 272). Per vedere come la loro esistenza risulti altresì dalle formole generali del §. precedente, osserviamo che, indicando con $\frac{1}{T_3}$ la torsione delle curve (u_3) in un sistema di Weingarten a flessione costante definito dalle (C), avremo per le (14) del §. 409 (pag. 484)

$$\frac{1}{T_3}=\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial u_3}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}\,,$$

e però se θ è indipendente da u_3, sarà $\frac{1}{T_3} = 0$, cioè le curve (u_3) saranno circoli di raggio $= 1$. Per ottenere questi sistemi, basta, secondo il §. precedente, partire da una superficie pseudosferica arbitraria S (di raggio $= 1$) il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura sia

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, du_2^2 ,$$

e, determinando ω dal sistema illimitatamente integrabile

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_1} + \frac{\partial\theta}{\partial u_2} = -\cos\theta \operatorname{sen}\omega$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_2} + \frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega ,$$

prendere per terza variabile u_3 la costante arbitraria che entra in ω; così la ω verrà appunto a soddisfare alle (C). Il sistema ciclico di Ribaucour corrispondente sarà definito da

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

e le superficie pseudosferiche $u_3 =$ costante saranno qui le ∞^1 complementari della S.

È bene osservare che dalle formole (39), confrontate colle due ultime (C), si deduce

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\frac{\partial\omega}{\partial u_3} = \psi(u_3) ,$$

essendo $\psi(u_3)$ funzione di u_3 soltanto; ne segue che se per un sistema particolare di valori di u_1, u_2 risulta $\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0$, sarà $\psi(u_3) = 0$, e per ciò costantemente $\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0$. Geometricamente ciò si interpreta col teorema:

Se in un sistema di Weingarten a flessione costante $= 1$ *una delle traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche è un circolo di raggio* $= 1$, *tutte le altre saranno circoli dello stesso raggio ed il sistema sarà un sistema ciclico di Ribaucour.*

Osserviamo che già dal teorema enunciato alla fine del §. 430 risulta l'esistenza di infiniti sistemi di Weingarten a flessione costante che non coincidono con sistemi ciclici di Ribaucour. Per definire un tale sistema

si può dare infatti ad arbitrio: 1.° una superficie pseudosferica S di raggio $= R$. 2.° una curva Γ a flessione costante $\frac{1}{R}$ uscente da un punto di S normalmente a questa superficie. Il sistema pseudosferico di Weingarten, che ne risulta individuato pel citato teorema, sarà a flessione costante, perchè anche tutte le altre traiettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche avranno (§. 441) la flessione $= \frac{1}{R}$. D'altra parte basta che la curva iniziale l' non sia un circolo e nessun'altra traiettoria ortogonale sarà un circolo, cioè il sistema non sarà ciclico.

È evidente poi che: *In ogni sistema di Weingarten a flessione costante i sistemi ciclici osculatori lungo ciascuna superficie pseudosferica saranno sistemi ciclici di Ribaucour di raggio costante.*

Possiamo poi servirci della considerazione dei sistemi ciclici osculatori per dimostrare la seguente proprietà caratteristica dei sistemi di Weingarten a flessione costante: *Se in una famiglia di Lamé le traiettorie ortogonali sono curve (non piane) colla medesima flessione costante, le superficie della famiglia sono pseudosferiche d'egual raggio, ed il sistema triplo corrispondente è quindi un sistema di Weingarten a flessione costante.*

Ed infatti ogni sistema ciclico osculatore del sistema triplo dato lungo una superficie S della famiglia consterà di circoli di egual raggio R e quindi, per quanto abbiamo dimostrato al §. 272 (pag. 146), la superficie S sarà pseudosferica di raggio R, a meno che non sia una superficie modanata. In quest'ultimo caso le linee di equidistanza sulla S saranno le linee di curvatura non geodetiche, e si vede subito che le traiettorie ortogonali della famiglia saranno allora circoli tracciati nei piani tangenti di una sviluppabile. E infatti se

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2 + H_3^2\,du_3^2$$

e il ds^2 corrispondente al nostro sistema triplo, sarà H_3 indipendente da u_1 o da u_2, poniamo da u_2. Allora

$$H_3 = 0\ ,\quad \frac{1}{r_{23}} = 0\ ,$$

indi per le (14), (15), pag. 484

$$\omega_3 = \frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{1}{T_3} = 0\ ,$$

la quale ultima formola ci dimostra appunto che le (u_3) sono circoli.

§. 443.

Sistema triplo ortogonale di Weingarten composto di elicoidi.

Vogliamo considerare nel presente §. un particolare sistema di Weingarten molto notevole, che si ottiene cercando di soddisfare le equazioni fondamentali (A), ovvero le (B) §. 439, con una funzione ω che sia funzione di una combinazione lineare

$$\tau = a u_1 + b u_2 + u_3 \,(a, b \text{ costanti})$$

delle variabili u_1, u_2, u_3. Poniamo p. e.

$$\omega = f(\tau)$$

e la prima delle (A) ci dà

$$f' = \frac{\operatorname{sen} f \cos f}{a^2 - b^2},$$

da cui integrando

$$f^2 = C' + \frac{\operatorname{sen}^2 f}{a^2 - b^2} \,(C' \text{ costante})$$

e la seconda delle (A) sarà pure identicamente soddisfatta, il valore della costante C nel secondo membro essendo

$$C = \frac{b^2}{(a^2 - b^2)^2} - C'.$$

Prendiamo $C' = 1$ e sia $b > a$; avremo

$$\tau = \int \frac{df}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 f}{b^2 - a^2}}},$$

onde

$$\operatorname{sen}\omega = \operatorname{sn}(\tau, k), \quad \cos\omega = \operatorname{cn}(\tau, k), \quad k = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

e per la forma dell'elemento lineare dello spazio risulterà la formola notevole

(41)
$$ds^2 = \operatorname{cn}^2\tau\, du_1^2 + \operatorname{sn}^2\tau\, du_2^2 + \operatorname{dn}^2\tau\, du_3^2$$

$$\tau = a u_1 + b u_2 + u_3, \quad k = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Il modulo k delle funzioni ellittiche rimane qui arbitrario mentre le costanti a, b sono legate dalla relazione

$$b^2 - a^2 = \frac{1}{k^2} .$$

Per i raggi principali di curvatura delle superficie dei tre sistemi troviamo dalle formole (7) del §. 409 (pag. 482):

$$(42) \qquad \begin{cases} \frac{1}{r_{12}} = a \frac{\mathrm{dn}\,\tau}{\mathrm{sn}\,\tau} , \frac{1}{r_{23}} = - b k^2 \frac{\mathrm{cn}\,\tau}{\mathrm{dn}\,\tau} , \frac{1}{r_{31}} = - \frac{\mathrm{sn}\,\tau}{\mathrm{cn}\,\tau} \\ \frac{1}{r_{13}} = - a k^2 \frac{\mathrm{sn}\,\tau}{\mathrm{dn}\,\tau} , \frac{1}{r_{21}} = - b \frac{\mathrm{dn}\,\tau}{\mathrm{cn}\,\tau} , \frac{1}{r_{32}} = \frac{\mathrm{cn}\,\tau}{\mathrm{sn}\,\tau} , \end{cases}$$

e quindi per le rispettive curvature

$$K_1 = - a^2 k^2 , \; K_2 = k^2 b^2 , \; K_3 = - 1 ,$$

onde

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0 .$$

Come si vede, in questo sistema di Weingarten tutte tre le famiglie di superficie sono a curvatura costante, due negative e la terza positiva. Di più, siccome per ciascuna superficie della famiglia tanto i coefficienti della prima quanto quelli della seconda forma quadratica fondamentale sono funzioni di una combinazione lineare delle variabili, risulta che le superficie di ciascuna famiglia sono elicoidi congruenti fra loro. Le equazioni in termini finiti dell'attuale sistema si ottengono per funzioni ellittiche [1] e si trova allora che i tre sistemi elicoidali hanno il medesimo asse. Ogni elicoide a curvatura costante può appartenere ad un tale sistema, cioè si ha il teorema: *Un elicoide qualunque a curvatura costante genera per rotazione attorno all'asse una famiglia di Lamé; le altre due famiglie sono ancora costituite di elicoidi congruenti a curvatura costante col medesimo asse. Due delle curvature sono negative, la terza positiva e la somma delle tre è nulla.*

Particolarizzando i valori della costante a, b, si può anche fare in modo che il nostro sistema triplo elicoidale riesca a flessione costante. Avendosi infatti

$$\frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2} = 1 + \frac{b^2 k^4 - 1}{\mathrm{dn}^2 \tau} ,$$

---

[1] Cf. la mia memoria: *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo.* (Annali di matematica 1885).

basterà prendere

$$b = \frac{1}{k'} \ , \ a = \frac{k'}{k^2}$$

per avere un sistema di Weingarten a flessione costante

$$\frac{1}{\rho_3} = 1 \ .$$

Ma esso non degenera in un sistema ciclico di Ribaucour, perchè si trova

$$\frac{1}{T_3} = \frac{k'}{dn^2 \tau} \ ,$$

valore non nullo.

Notevole è ancora il caso particolare in cui nelle formole (41), (42) si prende il modulo k delle funzioni ellittiche $= 1$, con che le funzioni ellittiche degenerano in iperboliche e si ha

$$ds^2 = \operatorname{tgh}^2 \tau \, du_2^2 + \frac{1}{\cosh^2 \tau} (du_1^2 + du_3^2) \ .$$

Le superficie $u_1 =$ costante, $u_3 =$ costante sono allora elicoidi del Dini, congruenti in ciascuna serie e coassiali, mentre le $u_2 =$ costante sono le sfere di raggio costante $= \frac{1}{b}$ coi centri sull'asse.

§. 444.

La trasformazione di Bäcklund pei sistemi di Weingarten.

Ai sistemi pseudosferici di Weingarten potremo applicare, secondo i risultati generali dei §§. 433, 434, la trasformazione elementare (reale) di Bäcklund per derivarne nuovi sistemi della medesima specie. Le formole che legano le due funzioni caratteristiche ω, φ pel sistema primitivo

$$ds^2 = \cos^2 \omega \, du_1^2 + \operatorname{sen}^2 \omega \, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2$$

e per il trasformato

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi \, du_1^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi \, du_2^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2$$

saranno, per la (I) pag. 540, essendo qui

$$R = 1 \quad , \quad k = \cos \sigma \ ,$$

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2} = \dfrac{\cos\omega \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\omega\cos\varphi}{\cos\sigma} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \frac{\cos\sigma}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\cos\varphi + \frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial u_3} = 0\ .$$

È importante osservare che l'espressione

$$\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2$$

è un *invariante* per la trasformazione, cioè si avrà:

$$(48)\quad \left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2\ .$$

E infatti dalle (D), osservando le (31), (31*) pag. 549, si traggono le seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\sigma}{\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_3} = \cos\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} + \\ + \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} - \cos\sigma\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3} \\ \dfrac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u_3} = \operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3} - \\ - \cos\sigma\cos\omega\operatorname{sen}\varphi\dfrac{1}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3} + \cos\sigma\cos\omega\cos\varphi\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\ . \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando, coll'aver riguardo alla terza delle (D), si deduce appunto la (43).

Stabilita questa formola, ne risulta che, scelto il parametro u_3 in guisa che ω soddisfi le (A) pag. 550, anche la φ soddisferà le medesime equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ \left(\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)^2 = C\ , \end{cases}$$

senza che sia cangiato il valore della costante C. Dunque: la flessione

del sistema derivato sarà > 1, $= 1$ ovvero < 1, secondo che accade l'uno o l'altro dei tre casi pel sistema primitivo. In particolare;

Ogni sistema di Weingarten a flessione costante si cangia per trasformazione di Bäcklund in sistemi della medesima specie.

Ponendo poi nel caso dei sistemi di Weingarten a flessione costante (§. 441):

$$\cos\theta = -\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1 \partial u_3}}{\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial u_3}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2 \partial u_3}}{\operatorname{sen}\omega \frac{\partial\omega}{\partial u_3}}$$

$$\cos\psi = -\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1 \partial u_3}}{\cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}}, \qquad \operatorname{sen}\psi = -\frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2 \partial u_3}}{\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}},$$

risulta

$$\begin{cases} \cos\psi = \dfrac{\cos\omega\cos(\varphi-\theta) - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \cos\sigma\cos\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)} \\ \operatorname{sen}\psi = \dfrac{\operatorname{sen}\omega\cos(\varphi-\theta) + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \cos\sigma\operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)} \end{cases}$$

e derivando rapporto ad u_3 ne segue:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_3} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\theta)}\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0 .$$

Dunque se $\frac{\partial\theta}{\partial u_3} = 0$ anche $\frac{\partial\psi}{\partial u_3} = 0$, cioè (§. 442):

I sistemi ciclici di Ribaucour si cangiano per trasformazione di Bäcklund in nuovi sistemi ciclici.

La dimostrazione di questo teorema e del precedente si può anche fare direttamente, osservando la legge geometrica secondo cui la trasformazione di Bäcklund cangia una curva C traiettoria ortogonale delle superficie pseudosferiche di un sistema di Weingarten nella corrispondente curva C′ del sistema trasformato: *il segmento* P P′ *che unisce due punti corrispondenti di* C, C′ *è costante* $= \cos\sigma$ *e normale alle due curve, mentre l'angolo delle rispettive tangenti in* P, P′ *a* C, C′ *è* $= \frac{\pi}{2} - \sigma$.

Trattando direttamente una tale trasformazione per una curva arbitraria C, si trova subito che se si indica con θ l'angolo d'inclinazione del segmento P P′ sulla normale principale in P alla C, risulta θ definito,

nelle solite notazioni, dalla equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\cos\sigma\cos\theta}{\rho} - 1\right).$$

Tenendo fisso σ si hanno ∞^1 curve C′ derivate dalla C; esse sono evidentemente tracciate sulla superficie canale che ha per asse la curva C e per raggio $R = \cos\sigma$ e tagliano i circoli sotto l'angolo costante σ. Per la flessione $\frac{1}{\rho'}$ delle curve C′ si trova la formola

$$\left(\frac{1}{\rho'^2} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos\sigma\cos\theta}{\rho}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\sigma\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right)$$

dalla quale si deduce appunto che $\frac{1}{\rho'^2} - 1$ ha il segno di $\frac{1}{\rho^2} - 1$ e si annulla con essa. Dunque se C è a flessione costante $= 1$ anche tutte le C′ hanno la medesima flessione. Di più è facile vedere che se C è un circolo anche le C′ sono circoli.

§. 445.

La trasformazione complementare dei sistemi di Weingarten.

Nell'applicare la trasformazione di Bäcklund ai sistemi di Weingarten è ammissibile il caso speciale notevole, in cui l'angolo σ sia eguale a zero e quindi la trasformazione di Bäcklund si cangi nella *trasformazione complementare*, ciò che nel caso generale dei sistemi pseudosferici a raggio R variabile, a causa della formola $k = R\cos\sigma$, non poteva evidentemente aver luogo.

Esaminiamo ora questo caso. Allora la terza delle (D) diventa una equazione in termini finiti per φ, e cioè

$$\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}\cos\varphi + \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial u_3} = 0\,. \tag{44}$$

Ma per le formole del §. 409

$$\cos\theta = -\frac{\rho_3}{r_{13}} = -\rho_3\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_1\partial u_3}}{\cos\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\rho_3}{r_{23}} = -\rho_3\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u_2\partial u_3}}{\operatorname{sen}\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u_3}}\,.$$

dove θ è l'angolo che la normale principale positiva delle curve (u_2) forma colle linee $u_2 =$ costante; la (44) può quindi scriversi

$$\cos(\varphi - \theta) = \frac{1}{r_3} \tag{45}$$

e dà due valori reali e distinti per φ quando la flessione $\frac{1}{r_3}$ del sistema di Weingarten è > 1 ed invece l'unico valore $\varphi = \theta$ pei sistemi a flessione costante $\frac{1}{r_3} = 1$. Ora basta derivare la (44) una volta rispetto ad u_1, una seconda rispetto a u_2, col tener conto delle formole (31), per accertarsi che la funzione φ soddisfa alle due prime (D).

Per interpretare geometricamente questo risultato, assumiamo sopra una superficie pseudosferica S del sistema, supposto a flessione > 1, per linee coordinate α, β i circoli geodetici di equidistanza e le geodetiche ortogonali. L'elemento lineare della S prenderà la forma iperbolica

$$ds^2 + d\alpha^2 + \cosh^2\alpha\, d\beta^2 .$$

Ora se con Ω indichiamo l'angolo che la direzione definita dalla (44) forma colla geodetica $\beta =$ costante, avremo

$$\Omega = \varphi - \theta$$

e la (45) essendo per la (36) pag. 553

$$\frac{1}{r_3} = \rho_n = \coth\alpha$$

diventa

$$\cos\Omega = \operatorname{tgh}\alpha ,$$

dove α è la distanza geodetica del punto P che si considera su S dalla geodetica $\alpha = 0$. Ma per la formola che dà *l'angolo di parallelismo* in geometria non-euclidea (I, pag. 397), l'angolo Ω è appunto l'angolo di parallelismo relativo al punto P ed alla geodetica $\alpha = 0$. Abbiamo dunque il risultato seguente:

Dato un sistema pseudosferico di Weingarten a flessione $\frac{1}{r_3} > 1$, *si consideri sopra ogni superficie pseudosferica* S *del sistema quella determinata geodetica g che appartiene alle linee di equidistanza e sopra* S *si traccino le geodetiche parallele nell'uno o nell'altro senso alla g. Se della* S *si prende la superficie complementare* S_1 *o* S_{-1}, *rispetto all'uno o all'altro dei due sistemi* ∞^1 *di geodetiche parallele, le* ∞^1 *superficie* S_1, *come le* S_{-1}, *daranno luogo a due nuovi sistemi di Weingarten.*

Per confermare il teorema precedente possiamo anche ricorrere alle proprietà delle linee a doppia curvatura osservate al §. 13 (I, pag. 26). Se consideriamo una curva C del sistema (u_3) e le sue due trasformate C_1, C_{-1} la formola (45)

$$\cos\Omega = \rho_3$$

dimostra che C_1, C_{-1} sono, sulla superficie canale di raggio $=1$ che ha per asse la curva C, i due rami dello spigolo di regresso di questa superficie, e per ciò le tangenti a C_1, C_{-1} in due punti corrispondenti sono perpendicolari alla tangente nel punto corrispondente alla C. Ricordando le proprietà della trasformazione complementare, ne segue che C_1 è traiettoria ortogonale di tutte le S_1 come C_{-1} di tutte le S_{-1}. Ne risulta quindi nuovamente che le S_1, come le S_{-1}, formano una famiglia di Lamé, corrispondendosi su due tali superficie le linee di curvatura.

Così da ogni sistema pseudosferico (S) di Weingarten a flessione >1 ne deduciamo due nuovi (S_1), (S_{-1}), che diremo i *complementari* di (S); essi hanno, come il primitivo, la flessione >1 (§. 444). Potremo quindi applicare tanto a (S_1) che a (S_{-1}) di nuovo la trasformazione complementare. Ma poichè ogni volta uno dei due sistemi complementari è il primitivo, così vediamo che il sistema noto (S) darà luogo *con sole operazioni di derivazione* ad una catena di sistemi di Weingarten

$$\ldots\ (S_{-2}),\ (S_{-1}),\ (S),\ (S_1),\ (S_2)\ \ldots\ .$$

estendentesi all'infinito nei due sensi; ciascuno di questi sistemi ha per complementari i due contigui nella catena.

Però se il sistema (S) è a flessione costante $\frac{1}{\rho_3} = 1$, allora i due sistemi complementari si riducono ad uno solo (S_1) e la relazione fra (S), (S_1) è involutoria. Ciascuna delle due famiglie di Lamé ha per traiettorie ortogonali i luoghi dei centri di curvatura delle corrispondenti traiettorie ortogonali dell'altra famiglia.

§. 446.

La distanza normale infinitesima fra due superficie successive in una famiglia di Lamé a curvatura costante.

Ritorniamo ora alle famiglie generali (S) di Lamé composte di superficie a curvatura costante K, essendo però K variabile con continuità dall'una all'altra superficie della famiglia, e consideriamo la distanza

normale infinitesima $\varepsilon\Phi$ fra una superficie S della famiglia e la successiva. Le equazioni di Lamé si traducono per Φ in un notevole sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali, che già abbiamo incontrato nel Cap. XX nelle applicazioni del nuovo metodo di Weingarten alle superficie di curvatura costante, e questa coincidenza ci fa riconoscere una nuova ed interessante proprietà delle nostre famiglie di Lamé.

Si consideri dapprima un sistema triplo ortogonale pseudosferico (a curvatura variabile) corrispondente alla forma (9) §. 430 (pag. 531) dell'elemento lineare

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2 .$$

Qui la distanza normale infinitesima fra la superficie pseudosferica $u_3 =$ costante e la successiva è proporzionale a

$$\Phi = R\,\frac{\partial\omega}{\partial u_3} .$$

Basta ora ricordare le equazioni (8) pag. 530 cui deve soddisfare ω per vedere che le tre ultime $C=0$, $B=0$, $D=0$ si traducono per Φ nel sistema simultaneo

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_1^2} = -\operatorname{tg}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \dfrac{\cos^2\omega}{R^2}\Phi + \left(\dfrac{1}{R}\right)' \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2} = -\operatorname{tg}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_2^2} = -\operatorname{tg}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{R^2}\Phi - \left(\dfrac{1}{R}\right)' \operatorname{sen}\omega\cos\omega , \end{cases}$$

dove

$$\left(\frac{1}{R}\right)' = \frac{d}{du_3}\left(\frac{1}{R}\right) .$$

Ora per un'individuata superficie pseudosferica $u_3 = c$, nelle solite notazioni della teoria generale, abbiamo

$$E = \cos^2\omega \quad , \quad G = \operatorname{sen}^2\omega \quad , \quad F = 0 ,$$

ed essendo

$$r_2 = -R\cot\omega \quad , \quad r_1 = R\operatorname{tg}\omega ,$$

ne segue

$$D = \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R} \quad , \quad D'' = -\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R} \quad , \quad D' = 0 ;$$

le precedenti formole (α) si scrivono

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_1^2} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} - \mathrm{K\,E}\,\Phi + a\,\mathrm{D} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u_2^2} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2} - \mathrm{K\,G}\,\Phi + a\,\mathrm{D}'' , \end{cases}$$

essendo a la costante $-\dfrac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}$ per $u_3 = c$.

Ed ora se consideriamo anche il caso di un sistema triplo ortogonale in cui le superficie $u_3 =$ costante siano a curvatura positiva K, adoperando le formole del §. 481, troviamo che la distanza normale infinitesima $\varepsilon\Phi$ fra una superficie $u_3 =$ costante e la successiva soddisfa ancora al sistema (β).

Confrontando le formole (β) con quelle (D) del §. 307 (pag. 237), vediamo che le prime ne sono un caso particolare, la superficie S essendo riferita alle sue linee di curvatura. Così abbiamo stabilito il teorema:

In qualsiasi famiglia (S) *di Lamé composta di superficie a curvatura costante, se si riferisce una superficie* S *della famiglia ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee* (u, v) *e con* $\varepsilon\Phi$ *si indica la distanza normale infinitesima fra la superficie* S *e la successiva nella famiglia, questa funzione* Φ *soddisfa al sistema simultaneo di equazioni alle derivate parziali*

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} \Phi_{11} = -\mathrm{K\,E}\,\Phi + a\,\mathrm{D} \\ \Phi_{12} = -\mathrm{K\,F}\,\Phi + a\,\mathrm{D}' \\ \Phi_{22} = -\mathrm{K\,G}\,\Phi + a\,\mathrm{D}'' . \end{cases}$$

In queste formole abbiamo denotato al solito con

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2$$

le due forme quadratiche fondamentali della superficie S, e con a una costante che è proporzionale alla variazione della curvatura K nel passaggio dalla S alla successiva. La costante a è dunque eguale a zero solo quando K è assolutamente costante, cioè quando (S) è una famiglia di Weingarten.

§. 447.

Interpretazione geometrica.

Veniamo ad interpretare geometricamente questi risultati. Cominciamo dal caso più semplice, cioè dal caso dei sistemi di Weingarten in cui $a = 0$. Allora il sistema (E) si riduce a quel sistema di equazioni a derivate parziali che abbiamo particolarmente studiato al §. 184 (I, pag. 410), a cui soddisfano le coordinate di Weierstrass in una molteplicità a due dimensioni di curvatura costante K. Segue di qui nuovamente che le linee di equidistanza Φ=costante sulle superficie S sono circoli geodetici paralleli, come già abbiamo osservato al §. 440. Ora consideriamo i piani normali alle linee Φ = costante di equidistanza sulla S, ossia i piani osculatori nei punti di S delle traiettorie ortogonali della famiglia (S). Il loro inviluppo non è altro che la superficie $\overline{S}$ complementare di S rispetto alle geodetiche normali alle Φ = costante ed ha un elemento lineare che dipende unicamente dal valore K della curvatura.

Un risultato del tutto simile otteniamo per le famiglie generali di Lamé a curvatura costante. Abbiamo infatti dimostrato ai §§. 307, 308 che se Φ è una soluzione qualunque del sistema (E), *ove la costante a non sia nulla*, l'inviluppo dei piani normali alle linee Φ = costante è una superficie $\overline{S}$ cui compete la forma

$$\overline{ds}^2 = e^{-2v}\, du^2 + \left\{ 2\,(v-u)\, e^{-2v} - \frac{1}{K} \right\} dv^2$$

dell'elemento lineare $\overline{ds}$, dipendente unicamente dal valore K della curvatura. Questo elemento lineare si è visto (pag. 240) appartenere alla quadrica immaginaria

$$y^2 + z^2 + (x - y - i\,z)^2 = \frac{1}{K}\,, \tag{46}$$

che oscula in un punto il circolo immaginario all'infinito. Ora basta rammentare le proprietà generali delle linee di equidistanza (§. 410), secondo le quali i piani normali a queste linee non sono altro che i piani osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia (S) per dedurne il teorema finale:

In ogni famiglia (S) *di Lamé composta di superficie* S *a curvatura costante* K *(variabile dall'una all'altra superficie della famiglia) i piani*

osculatori nei punti di una superficie S *delle curve traiettorie ortogonali della famiglia* (S) *inviluppano una superficie* $\overline{S}$ *d'elemento lineare*

$$\overline{ds}^2 = e^{-2v}\,du^2 + \left\{ 2\,(v-u)\,e^{-2v} - \frac{1}{K} \right\} dv^2 ,$$

che dipende unicamente dal valore K *della curvatura.*

Così variando comunque la superficie S, restando fissa la curvatura K e cangiando comunque la famiglia (S) di Lamé in cui la S è inserita, le infinite superficie S che si ottengono sono tutte applicabili l'una sull'altra e sulla quadrica immaginaria

$$y^2 + z^2 + (x - y + i\,z)^2 = \frac{1}{K} , \tag{46}$$

che oscula in un punto il circolo immaginario all'infinito. Per tal modo la ricerca delle superficie applicabili su questa quadrica viene a collegarsi, in singolare guisa colle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante.

§. 448.

Integrazione del sistema (B).

Prescindendo da ultimo dalla relazione delle superficie applicabili sulla quadrica (46) colle famiglie di Lamé a curvatura costante, dimostriamo che nota una superficie S a curvatura costante *e note le sue linee geodetiche*, si potrà trovare con sole quadrature la soluzione generale Φ delle equazioni del sistema (E), dopo di che per le (1) del §. 294 si avranno le ∞^3 superficie $\overline{S}$ derivate, applicabili snlla quadrica (46) colle formole

$$\begin{cases} \overline{x} = x + \dfrac{1}{K\,\Phi} \left\{ \nabla(x, \Phi) + a\,X \right\} \\ \overline{y} = y + \dfrac{1}{K\,\Phi} \left\{ \nabla(y, \Phi) + a\,Y \right\} \\ \overline{z} = z + \dfrac{1}{K\,\Phi} \left\{ \nabla(z, \Phi) + a\,Z \right\} . \end{cases}$$

Per dimostrare quanto sopra abbiamo asserito basta osservare che l'integrazione del sistema lineare (E) si riduce, per noti teoremi generali, a quella del sistema *omogeneo*

$$\phi_{11} = -\,K\,E\,\phi\ , \quad \phi_{12} = -\,K\,F\,\phi\ , \quad \phi_{22} = -\,K\,G\,\phi \tag{E*}$$

ed a successive quadrature. Ora l'integrazione di quest'ultimo sistema è subito effettuata appena note le geodetiche di S.

Volendo scrivere effettivamente nel caso nostro l'integrale generale del sistema, si indichino con ψ_1, ψ_2, ψ_3 tre soluzioni linearmente indipendenti del sistema (E*), talchè il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sarà diverso da zero. Derivando Δ rapporto ad u, v ed osservando le (E*), si ha subito

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial u} = \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \Delta \\ \frac{\partial \Delta}{\partial v} = \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \Delta \, , \end{cases}$$

cioè (I, pag. 119)

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} \, , \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} \, ,$$

e quindi integrando

$$\Delta = k \sqrt{EG - F^2} \, , \tag{47}$$

dove la costante k, che non è zero, si potrà fare p. e. $= 1$, alterando una delle tre soluzioni per un fattore costante.

Applicando il metodo della variazione delle costanti, pongasi la soluzione generale Φ del sistema non omogeneo (E) sotto la forma

$$\Phi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3$$

e si cerchi di determinare C_1, C_2, C_3 in funzione di u, v in guisa che sussistano le equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial u} \psi_1 + \frac{\partial C_2}{\partial u} \psi_2 + \frac{\partial C_3}{\partial u} \psi_3 = 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial C_2}{\partial u} \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \frac{\partial C_3}{\partial u} \frac{\partial \psi_3}{\partial u} = a \, D \\ \frac{\partial C_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} + \frac{\partial C_2}{\partial u} \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + \frac{\partial C_3}{\partial u} \frac{\partial \psi_3}{\partial v} = a \, D' \end{cases}$$

e le altre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial v}\psi_1 + \dfrac{\partial C_2}{\partial v}\psi_2 + \dfrac{\partial C_3}{\partial v}\psi_3 = 0 \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial u} + \dfrac{\partial C_2}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} + \dfrac{\partial C_3}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_3}{\partial u} = a\,D' \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial v} + \dfrac{\partial C_2}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} + \dfrac{\partial C_3}{\partial v}\dfrac{\partial \psi_3}{\partial v} = a\,D'', \end{cases}$$

dopo di che la ψ verrà appunto a soddisfare (E). Dalle precedenti, osservando la (47), si traggono per le due derivate di C_1 i valori:

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial u} = \dfrac{a}{k\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & \psi_2 & \psi_3 \\ D & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ D' & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial v} = \dfrac{a}{k\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} 0 & \psi_2 & \psi_3 \\ D' & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ D'' & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

e analogamente per C_2, C_3 con rotazione degli indici 1, 2, 3. La condizione d'integrabilità per le (48) risulta identicamente soddisfatta in virtù delle equazioni (E*) cui soddisfano ψ_2, ψ_3 e delle equazioni di Codazzi (I, pag. 120). Così dalle (48) si ha con una quadratura C_1, a cui è da aggiungersi una costante assoluta arbitraria c_1. Analogamente dicasi per C_2, C_3.

Si osservi in fine che se alla superficie a curvatura costante S applicheremo i metodi di trasformazione dei quali ci siamo occupati nei Cap. XXIV e XXV, sulle nuove superficie a curvatura costante conosceremo ancora le geodetiche e basteranno quindi quadrature per dedurre da queste le corrispondenti superficie $\bar{S}$ applicabili sulla quadrica (46).

Così i metodi di trasformazione per le superficie a curvatura costante possono anche interpretarsi come metodi di trasformazione per le superficie applicabili sulla detta quadrica, che oscula il circolo immaginario all'infinito.

NOTA I.

Sulle curve di Bertrand e sulle deformate rigate dell'iperboloide di rotazione ad una falda.

1.

A pag. 270, del volume I, abbiamo fatto conoscere l'elegante teorema di Laguerre, che pone in relazione le curve di Bertrand colle deformate rigate dell'iperboloide di rotazione ad una falda. Il teorema consiste in questa proprietà: che il circolo di gola dell'iperboloide (linea di stringimento), in qualunque deformazione della superficie, che lasci rettilinee le generatrici di un sistema, si trasforma in una curva di Bertrand. A complemento di questo teorema, aggiungiamo ora la costruzione seguente, dovuta a Bioche, [1] colla quale, data una curva C di Bertrand, si genera quella deformata rigata dell'iperboloide che ha la curva C per linea di stringimento:

Se C *è una curva di Bertrand e* C′ *la sua coniugata (avente a comune con* C *le normali principali), si conduca per ogni punto di* C *la parallela alla binormale di* C′ *nel punto corrispondente; la rigata* Σ *formata da queste parallele ha la curva* C *per linea di stringimento ed è applicabile sull'iperboloide.*

Per dimostrare questa proposizione, riprendiamo le solite notazioni della teoria delle curve (I, pag. 50) e indichiamo con

$$(1) \qquad \frac{k \operatorname{sen}\sigma}{\rho} - \frac{k\cos\sigma}{T} = \operatorname{sen}\sigma$$

la relazione lineare che vincola le curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ della curva C di Bertrand.

Le coordinate x', y', z' del punto della curva coniugata C′, che corrisponde ad (x, y, z) sopra C, saranno date da

$$x' = x + k\xi \quad , \quad y' = y + k\eta \quad , \quad z' = z + k\zeta \, ,$$

---

[1] *Sur une classe de surfaces reglées,* (Comptes rendus, t. 106 pag. 829; (1888)).

e i coseni di direzione λ', μ', ν' della binormale a C' saranno

$$(2)\quad \lambda' = \alpha \operatorname{sen}\sigma - \lambda\cos\sigma\ ,\quad \mu' = \beta\operatorname{sen}\sigma - \mu\cos\sigma\ ,\quad \nu' = \gamma\operatorname{sen}\sigma - \nu\operatorname{sen}\sigma\ .$$

Pel punto $M \equiv (x, y, z)$ di C conducasi la parallela alla direzione (λ', μ', ν') e si stacchi su di essa, a partire da M, un segmento $M\overline{M} = u$; indicando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate dell'estremo $\overline{M}$, avremo:

$$(3)\qquad \bar{x} = x + u(\alpha\operatorname{sen}\sigma - \lambda\cos\sigma)\quad ,\quad \bar{y} = y + u(\beta\operatorname{sen}\sigma - \mu\cos\sigma)$$

$$\bar{z} = z + u(\gamma\operatorname{sen}\sigma - \nu\operatorname{sen}\sigma)\ .$$

Denotando con v l'arco di C e riguardando nelle (3) u, v come variabili indipendenti, le (3) ci definiranno la rigata Σ dell'enunciato, riferita alle coordinate curvilinee u, v. Derivando le (3), coll'osservare le formole di Frenet e la relazione (1), troviamo

$$(4)\qquad \frac{\partial\bar{x}}{\partial u} = \alpha\operatorname{sen}\sigma - \lambda\cos\sigma\quad ,\quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = \alpha + \frac{u\operatorname{sen}\sigma}{k}\xi\ ;$$

pel ds^2 della superficie Σ abbiamo quindi

$$(5)\qquad ds^2 = du^2 + 2\operatorname{sen}\sigma\, du\, dv + \left(1 + \frac{u^2\operatorname{sen}^2\sigma}{k^2}\right)dv^2\ .$$

Se consideriamo ora l'iperboloide di rotazione ad una falda definito dalle formole

$$(6)\quad x = k\cos\left(\frac{v}{k}\right) - u\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\left(\frac{v}{k}\right)\ ,\quad y = k\operatorname{sen}\left(\frac{v}{k}\right) + u\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\frac{v}{k}\right)\ ,$$

$$z = u\cos\sigma\ ,$$

dove k è il raggio del circolo di gola e σ l'angolo d'inclinazione delle generatrici dell'iperboloide sull'asse, vediamo appunto che il suo elemento lineare è dato dalla (5). Così è dimostrata la proposizione di Bioche.

2.

Completiamo ora la proposizione dimostrata colle considerazioni seguenti.

Se tiriamo per ogni punto (x', y', z') di C' la parallela alla binormale (λ, μ, ν) della C, formiamo evidentemente una seconda rigata Σ' applicabile sul medesimo iperboloide. Queste due rigate Σ, Σ' stanno fra loro

in una relazione semplice notevole; esse sono superficie *complementari* l'una dell'altra rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani dell'iperboloide.

Per dimostrarlo osserviamo che, indicando con $\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}$ le coordinate di un punto $\overline{M'}$ di Σ', avremo

$$\overline{x'} = x + k\,\xi + u'\,\lambda$$

colle analoghe per $\overline{y'}, \overline{z'}$, dove si è posto

$$M\,\overline{M'} = u' \ .$$

Basterà provare che, determinando convenientemente u' in funzione di u, potremo far sì che il segmento $\overline{M}\ \overline{M'}$, che unisce due punti corrispondenti $\overline{M}$, $\overline{M'}$ di Σ, Σ' tocchi in $\overline{M}$ la Σ in $\overline{M'}$ la Σ', e sia inoltre normale in $\overline{M}$ alla direzione della linea $u =$ costante (deformata del parallelo) similmente in $\overline{M'}$ alla direzione della $u' =$ costante.

Per ciò osserviamo che, se si indicano con X, Y, Z i coseni direzione della normale in $\overline{M}$ a Σ con X', Y', Z' quelli della normale a Σ' in M', saranno X, Y, Z proporzionali ai trinomii

$$\frac{u\,\mathrm{sen}\,\sigma}{k}\,\alpha - \xi + \frac{u\,\mathrm{sen}^2\,\sigma}{k\cos\sigma}\,\lambda \quad , \quad \frac{u\,\mathrm{sen}\,\sigma}{k}\,\beta - \eta + \frac{u\,\mathrm{sen}^2\,\sigma}{k\cos\sigma}\,\mu \ ,$$

$$\frac{u\,\mathrm{sen}\,\sigma}{k}\,\gamma - \zeta + \frac{u\,\mathrm{sen}^2\,\sigma}{k\cos\sigma}\,\nu \ .$$

e similmente X', Y', Z' ai tre binomii

$$\frac{u'}{T}\,\alpha + \left(\frac{k}{\rho} - 1\right)\xi \quad , \quad \frac{u'}{T}\,\beta + \left(\frac{k}{\rho} - 1\right)\eta \quad , \quad \frac{u'}{T}\,\gamma + \left(\frac{k}{\rho} - 1\right)\zeta \ .$$

Ora, avendosi

$$\overline{x'} - \overline{x} = -\,u\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\alpha + (u' + u\cos\sigma)\,\lambda + k\,\xi$$

colle analoghe, si verifica subito che basta porre fra u, u' la relazione

$$u\,u' = \frac{k^2\cos\sigma}{\mathrm{sen}^2\,\sigma}$$

perchè ne risultino le identità

$$\sum (\overline{x'} - \overline{x})\,X = 0 \quad , \quad \sum (\overline{x'} - \overline{x})\,X' = 0 \ .$$

Queste dimostrano che il segmento $\overline{M}\ \overline{M'}$ è tangente rispettivamente

a Σ, Σ' in $\overline{M}$, $\overline{M}'$. In fine le identità

$$\sum (\overline{x}' - \overline{x}) \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0 \quad , \quad \sum (\overline{x}' - \overline{x}) \frac{\partial \overline{x}'}{\partial v} = 0 \ ,$$

provano le restanti asserzioni. Così abbiamo completata la proposizione di Bioche colla seguente:

Prese due curve di Bertrand coniugate (aventi cioè a comune le normali principali), se pei punti di ciascuna di esse si conducono le parallele alle binormali nei punti corrispondenti dell'altra, si formano due superficie rigate Σ, Σ' applicabili sul medesimo iperboloide di rotazione ad una falda; le due superficie Σ, Σ' sono complementari l'una dell'altra rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani.

Risulta di qui che la superficie complementare di una deformata qualsiasi dell'iperboloide di rotazione (rigata o no) è applicabile sullo stesso iperboloide, la qual cosa sarebbe facile constatare direttamente colle formole del §. 136* (I, pag. 295).

NOTA II.

Sulle superficie d'area minima negli spazî curvi a tre dimensioni.

1.

In uno spazio S_3 qualunque definito dal suo ds^2

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\ldots3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \ ,$$

consideriamo una superficie arbitraria Σ data da

$$x_1 = x_1(u,v) \ , \quad x_2 = x_2(u,v) \ , \quad x_3 = x_3(u,v) \ ;$$

e sia

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

il ds^2 di Σ, calcolato nella metrica di S_3.

Per *area* di una porzione qualunque di Σ intendiamo il valore A dell'integrale doppio

$$A = \int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \ ,$$

esteso alla porzione di Σ considerata. È immediatamente evidente che l'area così definita è invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate, e che nel caso euclideo questa definizione si traduce nell'ordinaria.

Dopo ciò resta anche precisato che cosa dobbiamo intendere per superficie Σ_0 d'area minima nello spazio S_3, rispetto ad un dato contorno chiuso C. Sia Σ_0 una tale superficie e consideriamo poi una serie ∞^1 continua qualunque di superficie (Σ), limitate tutte al contorno C, e contenente Σ_0.

Prendiamo in S_3 a superficie coordinate $x_3 =$ costante le Σ e sia $x_3 = 0$ l'equazione di Σ_0; prendiamo inoltre per linee coordinate (x_3) le traiettorie ortogonali delle Σ, talchè l'elemento lineare di S_3 prenderà la forma

$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 + a_{33}\, dx_3^2 \ .$$

L'elemento d'area di una superficie Σ sarà

$$\sqrt{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}\, dx_1\, dx_2 \ ,$$

e la nostra ipotesi che la Σ_0 sia una superficie d'area minima si tradurrà nella relazione

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad \text{per} \quad x_3 = 0 \,.$$

Ora i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale di Σ sono dati dalle formole (I, pag. 380):

$$(2) \qquad \Omega_{rs} = \sqrt{A_{33}} \begin{bmatrix} r\,s \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_3} \,.$$

Se chiamiamo curvatura media la somma delle curvature principali e la indichiamo con H, abbiamo

$$H = \frac{a_{11}\,\Omega_{22} + a_{22}\,\Omega_{11} - 2\,a_{12}\,\Omega_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} \,,$$

indi per le (2)

$$H = -\frac{1}{2\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial}{\partial x_3} \log (a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2)$$

Dalla (1) segue quindi il teorema già enunciato alla pag. 338 del presente volume:

In qualunque spazio curvo a tre dimensioni le superficie d'area minima hanno nulla la curvatura media.

Da queste formole discende anche una semplice conseguenza che vogliamo notare. Si consideri in S_3 una serie ∞^1 di superficie Σ d'area minima (a curvatura media nulla). Prendendo il sistema coordinato come sopra, sarà identicamente

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2) = 0 \;;$$

e viceversa se $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$ è indipendente da x_3 le superficie Σ ($x_3 = \text{cost.}^{te}$) sono d'area minima. Dunque: *In uno spazio qualunque a tre dimensioni le traiettorie di una serie ∞^1 di superficie Σ d'area minima, comunque scelte, segnano sopra due Σ una corrispondenza che conserva le aree; viceversa se questo accade le Σ sono d'area minima.*

2.

Vogliamo ora considerare in particolare le superficie d'area minima dello spazio a curvatura costante negativa (iperbolico). Se usiamo la rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sul semi-spazio euclideo $s > 0$ (I, pag. 419 seguenti), l'equazione a derivate parziali ca-

ratteristica per le superficie immagini di quelle ad area minima sarà data, per le formole (58) del §. 222 (I, pag. 515), da:

$$z\,\frac{2pqs-(1+q^2)r-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Colle notazioni del §. 68 (I, pag. 144), questa si scrive

$$s=\frac{2}{\mathrm{H}}\,\mathrm{Z} \tag{3}$$

ed esprime una notevole proprietà geometrica delle nostre superficie. Introduciamo per ciò col sig. Thybaut [1] la nozione di *evoluta armonica* di una data superficie S nel modo seguente. Sopra la normale in ogni punto M di S prendiamo il punto $\overline{\mathrm{M}}$ coniugato armonico di M rispetto ai due centri principali di curvatura M_1, M_2; il luogo $\overline{\mathrm{S}}$ del punto $\overline{\mathrm{M}}$ è appunto la superficie che si dirà l'evoluta armonica di S. Le coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sono date, come subito si vede, dalle formole

$$\overline{x}=x-\frac{2}{\mathrm{H}}\,\mathrm{X}\;,\quad \overline{y}=y-\frac{2}{\mathrm{H}}\,\mathrm{Y}\;,\quad \overline{z}=z-\frac{2}{\mathrm{H}}\,\mathrm{Z}\;,$$

le notazioni essendo le usuali. Di qui è chiaro che la (3) esprime la proprietà seguente: *Le superficie dello spazio euclideo che hanno per evoluta armonica un piano π sono le immagini delle superficie d'area minima in quella metrica iperbolica che ha per piano limite il piano π.*

Queste superficie sono dunque isoterme; la loro ricerca dipende, come si è visto al §. 352, dall'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\cosh\theta\,.$$

Si osserverà che, allontanando il piano π all' infinito, le dette superficie diventano le superficie minime ordinarie.

---

[1] *Sur una classe de surfaces isothermiques.* Annales de l' École Normale 3.e série, t. 17 (1900).

FINE DEL SECONDO ED ULTIMO VOLUME.

INDICE DELLE MATERIE DEL SECONDO VOLUME

Capitolo XV.

Deformazioni infinitesime delle superficie e corrispondenza per ortogonalità d'elementi.

§. 223. — Osservazioni fondamentali . . . . . pag. 1
224. — La funzione caratteristica e l'equazione di Weingarten . » 4
225. — Trasformazione della equazione caratteristica e superficie associate . . . . . » 8
226. — Le forme normali dell'equazione caratteristica . . . » 10
227. — Sistema coniugato permanente nella deformazione infinitesima . . . . . » 12
228. — Proprietà della corrispondenza per ortogonalità d'elementi » 15
229. — Congruenze di Ribaucour . . . . . » 17
230. — Esempi di congruenze di Ribaucour . . . . . » 21
231. — Secondo metodo per la risoluzione del problema delle deformazioni infinitesime . . . . . » 22
232. — Applicazioni varie del secondo metodo . . . . . » 24
233. — Le superficie a linee di curvatura isoterme . . . . » 26
234. — Teorema di Christoffel e criterio di Weingarten . . » 28
235. — Cenno sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili » 31
236. — Coppie di rigate applicabili dedotte da una coppia nota di superficie applicabili . . . . . » 34
237. — Direzioni cinematicamente coniugate . . . . . » 36
238. — Doppio sistema di linee cinematicamente autoconiugate . » 39
239. — Sistema coniugato che si conserva coniugato in una deformazione finita . . . . . » 41
240. — I teoremi di Peterson . . . . . » 43

Capitolo XVI.

Le congruenze W.

§. 241. — Il teorema di Moutard e la sua interpretazione geometrica pag. 47
242. — Le congruenze W . . . . . » 51
243. — Nuova dimostrazione della proprietà fondamentale delle congruenze W . . . . . » 56
244. — Le superficie con deformazione infinitesima in sè medesime » 59

§. 245. — Congruenze W corrispondenti a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$ . . . . pag. 61
246. — Superficie applicabili sul paraboloide di rotazione . . » 65
247. — Applicazione successiva delle trasformazioni di Moutard . » 69
248. — Interpretazione geometrica per le congruenze W . . » 71
249. — Le congruenze W a falde focali di egual curvatura . » 74
250. — Costruzione delle particolari congruenze W da una falda della superficie focale . . . . . » 76
251. — Il teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie S della classe (53) . . . . . » 80
252. — Superficie deformabili in modo continuo con conservazione di un sistema coniugato . . . . . » 86

Capitolo XVII.

Deformazione delle congruenze rettilinee ed inviluppi di sfere.

§. 253. — Deformazione delle congruenze e dei sistemi ∞^2 di sfere . pag. 87
254. — Formole fondamentali per la deformazione delle congruenze » 90
255. — Elementi relativi alle due falde Σ, Σ dell'inviluppo di sfere » 94
256. — Caso in cui la superficie Σ rimane a curvatura media costante » 96
257. — Caso di una superficie Σ d'area minima. — Primo teorema di Guichard . . . . . » 99
258. — Caso di una Σ a curvatura media costante. — Secondo teorema di Guichard . . . . . » 101
259. — Caso in cui la falda Σ dell'inviluppo di sfere rimane a curvatura costante . . . . . » 106
260. — Casi in cui la superficie Σ degenera in una curva od in una sviluppabile . . . . . » 109
261. — Esame di un problema generale . . . . . » 111
262. — Inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura . . . . . » 114
263. — Caso in cui ai sistemi ortogonali di Σ corrispondono i sistemi coniugati sopra S_0 . . . . . » 117
264. — Corrispondenza dei sistemi coniugati di Σ ai sistemi coniugati di S_0 . . . . . » 120
265. — Ricerca degli inviluppi di sfere nei quali le due falde sono contigue per trasformazione di Moutard ad una medesima superficie . . . . . » 122
266. — Corrispondenza delle assintotiche sopra Σ, S_1 . . . » 126

Capitolo XVIII.

I sistemi ciclici.

§. 267. — Congruenze normali di curve . . . . . pag. 130
268. — Congruenze di curve piane. — Teorema di Ribaucour . » 132

§. 269. — Formole generali pei sistemi ciclici . . . . . pag. 135
270. — Sistemi ciclici tracciati nei piani tangenti di una superficie Σ . . . . . » 137
271. — Teorema di Darboux . . . . . » 140
272. — Sistemi ciclici normali ad una data superficie. — Sistemi di raggio costante . . . . . » 144
273. — Nuovo modo di trattare il problema . . . . . » 147
273*. — Trasformazione delle formole in coordinate curvilinee qualunque . . . . . » 150
274. — Relazione col problema della rappresentazione sferica . » 153
275. — Sistemi ciclici normali ad una sfera (o ad un piano) . . » 155
276. — Sistema triplo ortogonale collegato ad un sistema ciclico . » 159
277. — Le congruenze rettilinee cicliche . . . . . » 161
278. — Congruenze infinite volte cicliche e congruenze cicliche normali . . . . . » 165
279. — Forma dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema ciclico . . . . . » 167
280. — Determinazione delle immagini sferiche delle congruenze cicliche . . . . . » 169
281. — Inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura . . . . . » 170

Capitolo XIX.

Il nuovo metodo di Weingarten per la ricerca delle superficie applicabili.

§. 282. — Preliminari . . . . . pag. 172
283. — Considerazioni geometriche di Darboux . . . . » 173
284. — Il triedro mobile e le formole relative alle rotazioni . . » 176
285. — Formole relative alle traslazioni . . . . . » 179
286. — Formole fondamentali per la teoria delle superficie . . » 181
287. — Forme ridotte del ds^2 . . . . . » 183
288. — La nuova equazione dell'applicabilità . . . . . » 186
289. — Corrispondenza tra le soluzioni della (W) e le deformazioni della S . . . . . » 190
290. — Esame dei casi eccezionali . . . . . » 192
291. — Semplificazione dell'equazione (W) . . . . . » 194
292. — Altra dimostrazione dei risultati precedenti . . . . » 198
293. — Dimostrazione del teorema inverso . . . . . » 200

Capitolo XX.

Applicazioni del nuovo metodo di Weingarten.

§. 294. — Relazione colla teoria dei sistemi ciclici . . . . pag. 204
295. — Calcoli relativi alla superficie inviluppo . . . . » 207

§. 296. — Interpretazione del metodo di Weingarten . . . pag. 210
297. — Prime applicazioni del metodo di Weingarten . . . » 212
298. — Nuove classi complete di superficie applicabili . . . » 214
299. — Applicazione del metodo di Weingarten alle deformate delle superficie di rotazione . . . . . » 217
300. — La superficie Σ in relazione colla complementare di S . » 219
301. — Relazione fra due superficie Σ, Σ' dedotte da due superficie complementari S, S' . . . . . » 222
302. — Applicazione alle superficie di curvatura costante . . » 224
303. — Enunciato di un nuovo problema . . . . . » 227
304. — Caso d'illimitata integrabilità del sistema (A), (B) . . » 228
305. — Proprietà del sistema (A*), (B*) . . . . . » 231
306. — Caso di una superficie S d'area minima . . . . . » 233
307. — Caso di una superficie S a curvatura costante K . . » 236
308. — Le quadriche immaginarie d'elemento lineare (38*), (40*) . » 238
309. — Caso in cui C=0 nella (37*) e relazione coi teoremi di Guichard » 241
310. — Inversione dei teoremi di Guichard e superficie a curvatura costante derivate . . . . . » 243
311. — Calcolo diretto dell'elemento lineare della complementare S_1 » 245
312. — Applicazioni del metodo di Weingarten alla geometria ellittica . . . . . » 248
313. — Applicazioni alla geometria iperbolica . . . . . » 252

Capitolo XXI.

Le superficie con un sistema di linee di curvatura piane o sferiche.

§. 314. — Forma dell'elemento lineare sferico riferito ad un sistema doppio ortogonale di circoli . . . . . pag. 255
315. — Generazione geometrica di Darboux per le superficie a linee di curvatura piane . . . . . » 258
316. — Determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 262
317. — Superficie modanate generali . . . . . » 264
318. — Elemento lineare delle superficie modanate . . . » 265
319. — Superficie modanate a direttrice conica . . . . . » 268
320. — Superficie di Joachimsthal . . . . . » 269
321. — Superficie a linee di curvatura circolari . . . . » 271
322. — Rappresentazione sferica ed evolute . . . . . » 272
323. — La ciclide di Dupin . . . . . » 275
324. — Superficie con un sistema di linee di curvatura circolari e l'altro di linee piane . . . . . » 277
325. — Elementi caratteristici di una superficie a linee di curvatura circolari . . . . . » 278
326. — Proprietà generali delle linee di curvatura di una superficie qualunque . . . . . » 281

§. 327. — Elementi caratteristici di una superficie con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . pag. 283
328. — Il teorema di Ribaucour . . . . . » 284
329. — Le superficie d'area minima con linee di curvatura piane » 287
330. — Superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane . . . . . » 290
331. — Caso della curvatura K=+1 . . . . . » 293
332. — Le superficie d'Enneper come superficie di Joachimsthal . » 295
333. — Equazioni in termini finiti per le superficie d'Enneper . » 296
334. — Elicoidi pseudosferiche del Dini . . . . . » 298
335. — Superficie a linee di curvatura sferiche in un sistema . » 300
336. — Ricerca delle condizioni perchè le linee v siano sferiche . » 302
337. — Altre forme delle equazioni di condizione . . . . » 304
338. — Determinazione di tutte le superficie con un sistema di linee di curvatura sferiche . . . . . » 305

Capitolo XXII.

Le superficie d'area minima.

§. 339. — Cenno storico . . . . . pag. 308
340. — Formole di Weierstrass . . . . . » 310
341. — Superficie minime algebriche . . . . . » 313
342. — Superficie minime doppie . . . . . » 315
343. — Superficie minime applicabili . . . . . » 317
344. — Proprietà caratteristiche delle superficie minime associate » 320
345. — Superficie minime applicabili sopra superficie di rotazione » 321
346. — Nuove formole di Weierstrass . . . . . » 324
347. — Formole di Schwarz . . . . . » 326
348. — Casi particolari . . . . . » 329
349. — Superficie applicabili sopra superficie minime . . . » 330
350. — Inversione del primo teorema di Guichard . . . » 332
351. — Le congruenze di Thybaut . . . . . » 334
352. — Le superficie d'area minima in geometria ellittica ed iperbolica . . . . . » 338

Capitolo XXIII.

Il problema di Plateau e la superficie minima di Schwarz.

§. 353. — Considerazioni fondamentali sul problema di Plateau . pag. 341
354. — Caso di un contorno di Schwarz . . . . . » 343
355. — Rete ottaedrica sulla sfera . . . . . » 347
356. — Irrazionalità dell'ottaedro . . . . . » 349
357. — Verifiche relative alla rappresentazione conforme . . » 351
358. — Determinazione della superficie minima di Schwarz . . » 354

§. 359. — Verifiche relative al contorno . . . . . pag. 359
360. — Riduzione a integrali ellittici . . . . . » 360
361. — Continuazione analitica della superficie di Schwarz . . » 364
362. — Discontinuità del gruppo G della superficie di Schwarz . » 368
363. — La superficie completa di Schwarz . . . . . » 370
364. — La superficie coniugata in applicabilità . . . . » 371
365. — Variazione seconda di un pezzo di superficie minima . » 374
366. — Proprietà effettiva di minimo . . . . . » 376

Capitolo XXIV.

Le superficie pseudosferiche e la trasformazione di Bäcklund.

§. 367. — Il problema di Cauchy per le superficie a curvatura costante pag. 379
368. — Superficie pseudosferiche con due assegnate assintotiche . » 381
369. — Applicazione del metodo delle approssimazioni successive » 382
370. — Caso analitico . . . . . » 385
371. — Deformazioni con un'assintotica rigida . . . . » 387
372. — Trasformazione di Bäcklund . . . . . » 389
373. — Le formole della trasformazione di Bäcklund . . . » 390
374. — Verifiche delle proprietà della trasformazione di Bäcklund » 393
375. — Caso della trasformazione complementare . . . . » 395
376. — Le deformazioni infinitesime delle due falde di una congruenza pseudosferica . . . . . » 397
377. — Evoluta di una superficie pseudosferica . . . . » 398
378. — Le quattro falde della evoluta nella trasformazione di Bäcklund . . . . . » 399
379. — Il problema di Tchebychef . . . . . » 401
380. — Scorrimenti delle reti di Tchebychef sulla sfera . . » 403
381. — Scorrimenti delle reti di Tchebychef sulle superficie pseudosferiche . . . . . » 406
382. — Applicabilità delle due falde di una congruenza pseudosferica » 409
383. — Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund » 411
384. — Calcoli relativi alla S_3 e verifiche . . . . . » 414
385. — Applicazione successiva della trasformazione di Bäcklund » 417
386. — Le geodetiche sulle superficie derivate . . . . . » 418
387. — Applicazione alle elicoidi del Dini ed alla superficie complementare della pseudosfera . . . . . » 420
388. — Complementari delle superficie pseudosferiche di rotazione e delle superficie d'Enneper . . . . . » 423
389. — Composizione di due trasformazioni complementari . . » 427
390. — Composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund B_3, B_{-3}. . . . . » 429
391. — La trasformazione di Lie . . . . . » 432

Capitolo XXV.

Le superficie a curvatura costante in generale e le loro trasformazioni.

§. 392. — Le superficie applicabili sulla sfera e la trasformazione di Hazzidakis . . . . . pag. 435
393. — Le superficie a curvatura media costante . . . . . » 437
394. — Trasformazione di Bonnet-Lie . . . . . » 439
395. — Notizie storiche sulle nuove trasformazioni . . . . » 441
396. — Composizione di due trasformazioni immaginarie coniugate di Bäcklund . . . . . » 442
397. — Le formole effettive per la S_3 sotto forma reale . . » 445
398. — Composizione di due trasformazioni puramente immaginarie opposte . . . . . » 448
399. — Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund per le superficie di curvatura costante positiva . . . . . » 451
400. — Il teorema di permutabilità . . . . . » 455
401. — Composizione di due trasformazioni immaginarie coniugate » 459
402. — Caso in cui le normali a S, S_3 in punti corrispondenti si incontrano. . . . . » 461
403. — La superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali corrispondenti . . . . . » 463
404. — Paragone colle formole d'inversione dei teoremi di Guichard al §. 310 . . . . . » 466
405. — Permutabilità delle nuove trasformazioni colla trasformazione di Hazzidakis . . . . . » 468
406. — Applicazione successiva delle nuove trasformazioni . . » 472
407. — Esempi . . . . . » 474

Capitolo XXVI.

I sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo.

§. 408. — Il ds^2 di forma ortogonale e le formole di Lamé . . pag. 478
409. — Triedro principale e raggi principali di curvatura . . » 480
410. — Linee d'equidistanza ed equazione del Cayley . . . » 484
411. — Sistemi ciclici osculatori . . . . . » 487
412. — Le equazioni a derivate parziali per la funzione $W = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ . . . . . » 488
413. — Trasformazione di Combescure . . . . . » 490
414 — Altro modo di determinare i sistemi trasformati . . » 493
415. — Casi particolari di sistemi tripli ortogonali . . . » 495
416. — La trasformazione di Combescure applicata ai sistemi ciclici » 497
417. — Riduzione al caso dei sistemi ciclici derivati . . . » 499
418. — Determinazione dei nuovi sistemi tripli dai loro elementi caratteristici . . . . . pag. 502

§. 419. – Il sistema triplo ortogonale delle quadriche a centro confocali . . . . . » 504
420. — Coordinate ellittiche . . . . . » 506
421. — Corrispondenza delle assintotiche . . . . . » 507
422. — Teorema di Chasles . . . . . » 509
423. — Le superficie evolventi di Liouville . . . . . » 511
424. — Le geodetiche sull'ellissoide . . . . . » 514
425. — Teorema di Joachimsthal . . . . . » 516
426. – Geodetiche ombelicali . . . . . » 518
427. – Ellissoide riferito alle geodetiche ombelicali e traiettorie ortogonali . . . . . » 522
428. — Teoremi di Roberts . . . . . » 524

CAPITOLO XXVII.

Le famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante.

§. 429. — Sistemi tripli ortogonali pseudosferici . . . . pag. 527
430. — Le equazioni a derivate parziali per la funzione ω . . » 530
431. — Famiglie di Lamé con superficie a curvatura costante positiva . . . . . » 533
432. — Esempi diversi . . . . . » 535
433. — La trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli pseudosferici . . . . . » 537
434. — L'equazione a differenziali totali per la funzione φ . . » 538
435. — Il teorema di permutabilità . . . . . » 541
436. — Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund composte in trasformazioni reali . . . . . » 543
437. — Le trasformazioni immaginarie di Bäcklund per le famiglie di Lamé a curvatura costante positiva . . . . . » 544
438. — Le nuove trasformazioni reali . . . . . » 547
439. — I sistemi di Weingarten . . . . . » 548
440. — Le linee di equidistanza nei sistemi di Weingarten . . » 551
441. — I sistemi pseudosferici di Weingarten a flessione costante . » 553
442. — I sistemi ciclici di raggio costante . . . . . » 556
443. — Sistema triplo ortogonale di Weingarten composto di elicoidi » 558
444. — La trasformazione di Bäcklund pei sistemi di Weingarten . » 560
445. — La trasformazione complementare dei sistemi di Weingarten » 563
446. — La distanza normale infinitesima fra due superficie successive in una famiglia di Lamé a curvatura costante . . » 565
447. — Interpretazione geometrica . . . . . » 568
448. — Integrazione del sistema (B) . . . . . » 569
NOTA I. — Sulle curve di Bertrand e sulle deformate rigate dell'iperboloide di rotazione ad una falda . . . . . » 573
NOTA II. — Sulle superficie d'area minima negli spazî curvi a tre dimensioni . . . . . » 577

INDICE ALFABETICO

DELLE

MATERIE CONTENUTE NEI DUE VOLUMI

N. B. — I numeri indicano i §§ — Il volume I contiene i §§ 1-222, il volume II i rimanenti.

A

Angolare (metrica) nello spazio S_n a n dimensioni, 153.
Angolo di parallelismo in geometria iperbolica, 178.
— di parallelismo in geometria ellittica, 199.
— di una curva colle linee coordinate, 42.
Applicabilità delle superficie in generale, 98.
— delle superficie a curvatura costante, 100.
— degli spazi di curvatura costante, 160.
— continua di una superficie, 104, 244.
— di superficie di rotazione, 105.
— di superficie rigate (teorema di Bonnet), 115.
— delle elicoidi sopra superficie di rotazione, 106.
— di superficie d'area minima, 343.
— sopra superficie d'area minima, 349.
— (primo problema dell') 99.
— (equazione dell') 109.
— (equazioni dell') nell'S_n euclideo, 205.
— (nuova equazione di Weingarten dell') 288.
— delle due falde di una congruenza pseudosferica, 382.
Area minima (superficie di) 339 e nota II.
Assintotiche (linee) sulle superficie, 65.
— (torsione delle linee) 71, 74.
— (superficie riferita alle sue linee) 73.
— (superficie riferita alle) in geometria ellittica ed iperbolica, 218.
— sulle superficie d'area minima, 75.
— sulle superficie pseudosferiche, 76.
— (formole di Lelieuvre per le) 77.
Associate (superficie) in una deformazione infinitesima, 225.
— (superficie minime) 344.

B

Bäcklund (trasformazione di) per le superficie pseudosferiche, 372, 374.
— (trasformazione di) per le superficie applicabili sulla sfera, 399.
— (trasformazione di) per i sistemi tripli ortogonali pseudosferici, 433.
— (trasformazione di) per i sistemi di Weingarten, 444.
Bäcklund (composizione di trasformazioni di) 390, 401.
— (applicazione successiva della trasformazione di) 385-387.
Beltrami (costruzione di) pel raggio di curvatura geodetica, 117.
— (metodo di) per la deformazione delle superficie rigate, 120.
— (rappresentazione geodetica di) per le superficie pseudosferiche, 180.
— (rappresentazione geodetica di) per gli spazi di curvatura costante, 191.
Bonnet (formola di) per la curvatura geodetica, 85.
— (teorema di) sulla deformazione delle rigate, 115.
Bonnet-Lie (trasformazione di) per le superficie applicabili sulla sfera, 394.
Bour (teorema di) sulle superficie elicoidali, 106.

C

Canali (superficie) 13.
Caratteristica (funzione) di Weingarten per le deformazioni infinitesime, 224.
Catenoide, 107.
— accorciato 259.
— (superficie rigate applicabili sul) 121.
Cauchy (problema di) per le superficie d'area minima, 347.
— (problema di) per le superficie di curvatura costante, 387.
Cayley (equazione del) per le famiglie di Lamé, 410.
— (formola di) per le rotazioni della sfera complessa, 58.
— (metrica di) nello spazio a n dimensioni, 192.
Chasles (teorema di) sulle quadriche confocali, 422.
Christoffel (simboli a tre indici di) 31.
— (valori dei simboli di) per le superficie, 43.
— (teorema di) sulle superficie isoterme, 234.
Ciclide di Dupin, 323.
Circoli (sistemi doppi ortogonali di) sul piano o sulla sfera 52, 314.
— geodetici sulle superficie pseudosferiche, 177.
Clifford (parallelismo di) in geom. ellittica, 198.

Clifford (superficie di) a curvatura nulla, 200.
Codazzi (equazioni di) per le superficie, 56.
— (equazioni di) per le ipersuperficie nell'S_n 165.
Combescure (trasformazione di) per le curve, 20.
— (trasformazione di) per i sistemi tripli ortogonali, 413, 414.
Complementare (superficie) di una data, 133.
— di una superficie di rotazione, 138 *
Complementari (superficie) delle pseudosferiche, 136.
Complementare (trasformazione) per le superficie pseudosferiche, 375.
Congruenze rettilinee in generale, 137.
— isotrope di Ribaucour, 139.
— rettilinee normali, 143.
— rettilinee cicliche 277.
— rettilinee ∞^1 cicliche, 278.
— di Guichard, 151.
— di Ribaucour 229, 230.
— di Thybaut, 361.
— pseudosferiche, 150.
— normali di curve gobbe, 237.
— normali di curve piane, 263.
Coniugate (tangenti), 64.
Coniugati (sistemi di linee) 66, 67.
— (sistemi) in coordinate tangenziali, 82.
Coordinate curvilinee in generale, 40.
— geodetiche sopra una superficie, 90.
— geodetiche negli spazi, 156.
— ellittiche, 420.
— tangenziali per le superficie, 81.
— per le ipersuperficie, 208.
— di Weierstrass in geometria ellittica ed iperbolica, 183, 198.
Costanti di direzione 154.
Curvatura (prima) di una curva 2.
— (prima) di una curva nell' S_n 166.
— (seconda) di una curva, 5.
— di una forma binaria, 37.
— geodetica di una linea, 84.
— geodetica costante (linee a) 97.
— totale (di Gauss), 63.
— media, 63.
— costante (spazi di) 159.
— media costante (superficie di) 393.
— totale di un triangolo geodetico, 96.
— Riemanniana in ogni orientazione nell'S_n 157, 158.
— nulla (superficie di) in geometria ellittica, 219-221.
Curvature delle sezioni normali di una superficie, 61.
— delle sezioni normali per un' ipersuperficie, 168.
— principali in uno spazio S_3 162, 163.
— principali di un' ipersuperficie, 168.
Curvatura (linee di) sópra una superficie, 69.
— (linee di) di un' ipersuperficie, 168.
— (linee di) in geometria ellittica ed iperbolica, 212.
— (equazione differenziale delle linee di) 60.
— (equazione differenziale delle linee di) in coordinate cartesiane, 68.

D

Darboux (generazione geometrica di) per le superficie a linee di curvatura piane, 315.
— (teorema di) sui sistemi ciclici, 271.
Darboux-Dupin (teorema di) sui sistemi tripli ortogonali, 172.
Deformazione delle superficie (teoremi generali sulla) 111, 113.
Deformazioni speciali, 113, 114.
— di superficie rigate, 119, 120.
— continue conservanti un sistema coniugato, 352.
— di superficie pseudosferiche con un'assintotica rigida, 371.
— delle congruenze rettilinee, 238, 264.
Dini (Elicoidi pseudosferiche del) 334.
Dupin (Ciclide di) 323.
Dupin-Darboux (teorema di) sui sistemi tripli ortogonali, 172.

E

Elemento lineare e d'area, 41.
— lineare nello spazio a n dimensioni, 152.
Eliche cilindriche, 10.
Elica circolare e cilindro conico, 11.
— sferica, 21.
Elicoidali (superficie) Teorema di Bour, 106.
Elicoide rigata d'area minima, 107.
Elicoidale (sistema triplo ortogonale) a curvature costanti, 443.
Elicoidi pseudosferiche del Dini, 334.
Ellissi geodetiche, 91.
Ellissoide di rotazione (superficie applicabili sull'), 403.
— a tre assi (geodetiche dell'), 424.
Ellittiche coordinate, 420.
Enneper (superficie di) ad area minima, 329.
— (superficie d') a curvatura costante, 330-333.
— (teorema d') sulla torsione delle assintotiche, 71.
Equazione caratteristica per le deformazioni infinitesime, 224.
— caratteristica (forme normali dell'), 226.
— del Cayley per le famiglie di Lamé, 410.
Equazioni fondamentali per la teoria delle superficie, 55.
— fondamentali per la teoria delle ipersuperficie, 165.
— di Gauss e Codazzi per le superficie, 56.
— di Gauss e di Codazzi per le ipersuperficie, 165.
— di Weingarten per le coordinate di Weierstrass, 184, 185, 195.
Equidistanza (linee di) in una famiglia di Lamé, 410.
Equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, 235.
Equivalenza delle forme differenziali, 30.
Euclidea (geometria non), 180.
Eulero (formola di) per le curvature delle sezioni normali, 92.
— (formola di) estesa agli iperspazi, 168.
Evolventi ed evolute delle curve, 18.
— ed evolute delle superficie, 133.

Evolventi delle superficie pseudosferiche, 136.
Evoluta armonica di una superficie. Nota II.
— media di una superficie, 128.
Evolute di superficie W, 129.
— di superficie W (teoremi di Weingarten sulle) 189, 188.
— di superficie pseudosferiche in trasformazione di Bäcklund, 377.
— di un'ipersuperficie, 206.

F

Falde dell'evoluta di una superficie in generale, 124.
— dell'evoluta di una superficie W, 129.
— di un inviluppo di ∞^2 sfere, 255.
Flessibili superficie, 98.
Flessione di una curva nello spazio, 2.
— di una curva negli iperspazii, 196.
— costante (curve di), 21.
— costante (sistemi di Weingarten), 441.
Focali (superficie) in una congruenza rettilinea, 142, 149.
Forme algebriche quadratiche, 26.
— differenziali quadratiche, 27.
— differenziali simultanee, 38, 39.
— quadratiche fondamentali per una superficie, 54.
— quadratiche fondamentali per un'ipersuperficie, 164.
— quadratiche fondamentali per una congruenza, 137.
— ridotte del ds^2, 277.
— tipiche del ds^2 per una superficie pseudosferica, 103.
— tipiche del ds^2 per gli spazi di curvatura costante, 180.
Frenet (formole di) per le curve, 6.
— (formole di) estese alla geometria ellittica ed iperbolica, 201.
Fuochi sopra un raggio di una congruenza, 141.

G

Gauss (curvatura di) o totale, 63.
— (equazione di) per le superficie, 165.
Geodetica (curvatura), 84.
— (forma) dell'elemento lineare, 90.
Geodetiche (equazione differenziale delle linee), 87.
— (equazione sotto la forma di Gauss), 88.
— (proprietà generali delle linee), 89.
— (linee) sulle sviluppabili, 15, 93.
— sulle superficie di Liouville, 94.
— sulle superficie di rotazione, 95.
— negli iperspazii, 155-156.
— parallele in geometria iperbolica, 178.
— parallele in geometria ellittica, 198.
Guichard (congruenze di) 151.
— (formole di) per le congruenze rettilinee, 147.
— (teoremi di) sulle deformate delle quadriche di rotazione, 257, 268.
— (teoremi di) in relazione coi sistemi ciclici, 309.
— (inversione dei teoremi di), 310.

H

Halphen (formola di) per le due falde dell'evoluta di una superficie W, 180.
— (formola di) estesa da Ribaucour a tutte le congruenze W, 248.
Hamilton (formula di) per le congruenze rettilinee, 132.
Hazzidakis (trasformazione di) per le superficie applicabili sulla sfera, 392.
— (permutabilità della trasformazione di) con quella di Bäcklund, 415.

I

Immagine sferica di un sistema coniugato, 78.
Immagini sferiche delle superficie principali in una congruenza, 145.
— sferiche delle sviluppabili di una congruenza, 147.
— sferiche delle sviluppabili di una congruenza ciclica, 289,
Indeformabilità di una superficie con una linea rigida, 110.
— delle ipersuperficie nello spazio euclideo, 204.
Intrinseche (equazioni) delle curve, 8, 9.
— (equazioni) delle superficie, 57, 58.
Invarianti differenziali, 28.
Inversione dei teoremi di Guichard, 310, 330, 404.
Inviluppi (superficie) di un sistema ∞^1 di superficie, 12.
— di sistemi ∞^1 di sfere, 253.
— di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura, 281.
Inviluppata media in una congruenza isotropa 146.
Jacobimsthal (superficie di) con un sistema di linee di curvatura in piani per una retta, 320.
— (teorema di) per le geodetiche dell'ellissoide 415.
Iperboloide di rotazione ad una falda (superficie applicabili sull'), 107, 403 e nota I.
— di rotazione a due falde (teorema di Guichard), 258.
Ipersuperficie negli spazi curvi in generale, 164.
— nello spazio euclideo, 203.
— nello spazio ellittico ed iperbolico, 210, 211.
Irrazionalità dell'ottaedro, 356.
Isometrici (parametri), 46.
Isotermi (sistemi) di linee, 44.
Isotermo-coniugati (sistemi) 79.
Isoterme (superficie a linee di curvatura), 233, 234.

L

Lamé (famiglie di) appartenenti a sistemi tripli ortogonali, 178.
— (famiglie di) con traiettorie ortogonali piane, 417, 418.
— (famiglie di) composte di superficie pseudosferiche, 420.

Lamé (famiglie di) composte di superficie applicabili sulla sfera, 431.
Lie (teorema di) sui sistemi isotermi di linee, 47.
— (teorema di) sulle superficie W, 131.
— (trasformazione di) per le superficie pseudosferiche, 391.
Lie-Bonnet (trasformazione di) per le superficie applicabili sulla sfera, 384.
Limiti (punti) sul raggio di una congruenza, 140.
Liouville (formola di) per la curvatura di Gauss, 88.
— (superficie evolventi di) per due quadriche confocali, 423.
— (teorema di) sulle rappresentazioni conformi dello spazio, 170.

M

Malus-Dupin (teorema di) sulle congruenze normali, 143.
Meusnier (teorema di) pei raggi di curvatura delle linee di una superficie 61.
Metrica angolare nello spazio S_n 153.
— del Cayley, 192.
— ellittica, 193.
— iperbolica, 191.
Minding (metodo di) per la deformazione delle rigate, 159.
Minime (superficie) in generale 330 e nota 11ª.
— (superficie) algebriche, 341.
— (superficie) doppie, 342.
— (superficie) applicabili le une sulle altre, 343.
— (superficie) applicabili sopra superficie di rotazione, 345.
— (superficie) in relazione colle deformate del paraboloide, 330, 351.
— (superficie) in geometria ellittica ed iperbolica, 373.
Modanato (superficie) in generale, 318.
— (superficie) a sviluppabile direttrice cilindrica, 53.
— (superficie a sviluppabile direttrice conica, 319.
Moutard (Teorema di), 211.
Movimenti della sfera complessa 53.
— delle superficie pseudosferiche, 175, 176.
— nello spazio iperbolico a tre dimensioni, 189, 190.
— nello spazio ellittico a tre dimensioni, 196, 197.

N

Normali (congruenze) rettilinee, 143.
— (congruenze) di curve, 257.
— (congruenze) di curve piane, 259.

O

Ombelicali (geodetiche) sull'ellissoide, 426.
Oricicli o circoli limiti in geometria pseudosferica, 177.
Ortogonali (sistemi tripli) in uno spazio S_3 curvo, 173.
Ortogonali (sistemi n^{plu}) nello spazio S_n, 171.
— (sistemi n^{plu}) nell'ipersfera, 209.
Osculatore (piano), 3.
Osculatori (sistemi ciclici), 411.
Ottaedro (irrazionalità dell'), 350.

P

Paraboloide di rotazione (superficie applicabili sul) 245, 246.
— (teorema di Guichard), 257.
Parallelismo di Clifford in geometria ellittica, 198.
— (angolo di) in geometria iperbolica, 178
— (angoli di) in geometria ellittica, 199.
Parametri differenziali in generale, 28.
— differenziali primi 29.
Parametro differenziale secondo, 32.
Parametri differenziali (calcolo di), 99.
— isometrici, 46.
Parametro di distribuzione del piano tangente in una rigata, 118.
Parametri di scorrimento, 199.
Permanente (sistema coniugato) in una deformazione infinitesima, 237.
— (sistema coniugato) in una deformazione finita, 239.
— (sistema coniugato) in una deformazione continua, 252.
Permutabilità (teorema generale di) per le deformazioni infinitesime, 248.
— (teorema di) per le congruenze W a falde focali di egual curvatura, 251.
— (teorema di) per le superficie pseudosferiche, 383, 384.
— (teorema di) per i sistemi tripli ortogonali pseudosferici, 435.
Peterson (teoremi di), 240.
Plateau (problema di) per le superficie minime, 333.
Poincaré (formole di) pei movimenti nello spazio iperbolico, 189.
Pseudosferiche (assintotiche sulla superficie) 76.
— (superficie) di rotazione, 103.
— (superficie) elicoidali del Dini, 334.
— (superficie) d'Enneper, 330.
— (superficie) con due assegnate assintotiche, 368-370.
— (congruenze), 150.
Pseudosferici (sistemi tripli ortogonali), 429.
Punti limiti nelle congruenze rettilinee, 138-140.

Q

Quadriche confocali, 419.
— di rotazione (teoremi di Guichard), 257, 258,
— immaginarie (deformazioni di), 308.
Quadrica immaginaria osculante il circolo all'infinito (superficie applicabili), sulla 447-448.

R

Raggio di curvatura delle sezioni normali, 62.
— di curvatura geodetica, 127.
Raggi principali di curvatura di una superficie, 62.

Rappresentazione conforme delle superficie, 48, 49.
— conforme stereografica della sfera, 50.
— conforme della pseudosfera sul semipiano, 174.
— conforme della pseudosfera entro un circolo, 177.
Rappresentazioni conformi degli spazi, 170.
Rappresentazione conforme dello spazio pseudosferico sull'euclideo, 187.
— geodetica delle superficie a curvatura costante, 180, 181.
— geodetica degli spazi di curvatura costante, 191.
— sferica delle superficie, 70-72.
— sferica delle ipersuperficie, 207.
— sferica in relazione coi sistemi ciclici, 274.
Rete ottaedrica sulla sfera, 355.
Reti di Tchebychef sulle superficie, 379.
— (scorrimenti delle) di Tchebychef sulla sfera, 380.
— (scorrimenti delle) di Tchebychef sulla pseudosfera, 381.
Ribaucour (congruenze di) 229, 230.
— (teorema di) sulle congruenze di curve piane, 268.
— (teorema di) sulle superficie con linee di curvatura piane, 328.
— (sistemi ciclici di) a raggio costante, 272.
Ricci (equazione di) per le geodetiche delle superficie a curvatura costante, 182.
Riemann (curvatura di), 157-168.
— (simboli di), 35.
Rigate (superficie), 114.
— (deformazione delle) secondo Minding, 119.
— (deformazione delle) secondo Beltrami, 120.
— applicabili sul catenoide, 121.
— applicabili sopra superficie di rotazione, 123.
— applicabili (coppie di), 236.
— a curvatura nulla in geometria ellittica, 200.
Roberts (teoremi di) sulle geodetiche dell'ellissoide, 427, 428.
Rotolamento di una superficie sopra una applicabile, 230.

S

Schur (teorema di) sulla curvatura di Riemann, 161.
Schwarz (formola di) per le superficie minime, 347.
— (contorno di) per superficie minime, 351.
— (superficie d'area minima di), 358-364.
Scorrimenti in geometria ellittica, 196.
Scorrimento (superficie di), 220.
Sinusoide iperbolico, 259.
Sistema coniugato permanente in deformazioni infinitesime, 227.
— coniugato permanente in deformazioni finite, 230.
Sistemi ciclici in generale, 269, 273 *.
— ciclici nei piani tangenti di una superficie, 270.
— ciclici normali ad una data superficie, 272,
— ciclici normali ad una sfera o ad un piano, 275.
— ciclici di raggio costante, 272.
Sistemi (tripli) ciclici ortogonali, 278-279.
— (tripli) ortogonali in generale, 172, 173.
— n^{pli} ortogonali, 171.

S

Spazi a n dimensioni, 152.
— di curvatura costante, 159.
Spigolo di regresso della sviluppabile polare, 17.
Stringimento (linea di) sulle rigate, 117.
Superficie a linee di curvatura piane, 315.
— con un sistema di linee di curvatura piane, 316.
— di Joachimsthal, 320.
— a linee di curvatura circolari, 321-324.
— a linee di curvatura sferiche, 335-336.
— modanate (moulures) del Monge, 318.
— a linee di curvatura in piani paralleli, 83.
Sviluppabili (superficie) 14.
Sviluppabile polare di una curva, 16.
— rettificante di una curva, 15.
Sviluppabili di una congruenza, 141.

T

Tangente di una curva, 1.
Tangenti coniugate, 64.
Tchebychef (problema di) 379.
— (reti di) sulla sfera, 380.
— (reti di) sulla pseudosfera, 381.
Thybaut (congruenze di) 251.
Torsione delle curve, 6.
— (segno della) 7.
— costante (curve a) in geometria ellittica ed iperbolica, 202.
— delle linee assintotiche, 71.
— geodetica, 92.
Traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di piani, 19.
— ortogonali di un sistema ∞^1 di sfere, 22, 23.
Trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche, 375.
— complementare dei sistemi di Weingarten, 445.
Trasformazioni complementari (composizione di due) 389.
— di Bäcklund per le superficie pseudosferiche, 372-374.
— di Bäcklund (composizione di due) 390.
— delle superficie applicabili sulla sfera, 399-403.
— di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici, 433.
— di Bäcklund pei sistemi di Weingarten, 444.
Trasformazione di Combescure per le curve, 20.
— pei sistemi tripli ortogonali, 413, 414.
— di Moutard, 247.
Triangolo geodetico (curvatura totale di un) 96.
Triangoli geodetici sulla pseudosfera, 179.
Triedro principale di una curva, 4.
— (formole del) mobile nella teoria delle superficie, 281 285.
— principale in un sistema triplo ortogonale, 409.

Triedro principale in uno spazio curvo a tre dimensioni, 163.
Trigonometria pseudosferica, 179.

V

Variazioni di D, D', D'' in una deformazione infinitesima, 281.
Variazione seconda di un'area di superficie minima, 365.

W

Weierstrass (coordinate di) in geometria ellittica ed iperbolica, 183, 195.
— (formole di) per le superficie minime, 340, 346.
Weingarten (formole di) in coordinate tangenziali, 81.
Weingarten (criterio di) per le superficie isoterme.
— (teoremi di) sulle evolute, 129, 133.
— (nuova equazione dell'applicabilità di) 288-291.
— (nuovo metodo di) in relazione coi sistemi ciclici, 294-296.
— (metodo di) in geometria ellittica ed iperbolica, 312, 313.
— (sistemi tripli ortogonali di) 439.
— (sistemi di) a flessione costante.
W. (superficie) in generale, 129.
— (Elemento lineare sferico di una superficie) 134.
— (Superficie in geometria ellittica ed iperbolica, 217.
— (Congruenze) rettilinee, 242, 243.
— (Congruenze a falde focali d'egual curvatura, 249.
— (Classi complete di superficie), 135.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE Bibliothèque

CORREZIONI

VOLUME I.

Pag. 351 linea 12, *in luogo di:* rh, tkl *leggi:* rk, thl

» ibid. nella nota a piè di pagina *leggi:* $(rk, thl) = \frac{\partial}{\partial x_t}(rk, th) \ldots$

» 458 nella seconda (49*) *in luogo di:* $\frac{dx_i}{ds}$ *leggi:* $\frac{da_i}{ds}$

» 507 linea 6, dal basso *leggi:* t il tratto

» 515 nel primo membro della seconda formola (59) *leggasi:* $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_t}$

VOLUME II.

Pag. 17 linea 15 nella seconda formola *leggasi:* $\frac{\partial x}{\partial v} = \ldots$

» 78 nel primo membro della prima (49) *in luogo di:* x *leggi:* x'

» 87 nell'intestazione del §. 253 *leggasi:* sistemi ∞^2 di sfere

» 92 nella seconda delle (3) *in luogo di:* $\frac{\partial X}{\partial u}$ *leggi:* $\frac{\partial X}{\partial v}$

» 98 nel penultimo termine della (6*) *in luogo di:* $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ *leggi:* $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$

» 105 nell'enunciato del secondo teorema di Guichard *leggi:* *iperboloide di rotazione a due falde.*

» 138 nell'ultimo termine della (I*) *leggasi:* $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$

» 140 nella formola (A) *in luogo di:* $\Delta_1 \tau$ *leggi:* $\Delta_2 \tau$

» 141 nel secondo membro della prima delle (12) l'ultimo termine *si legga:* $B \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}$

» 142 formola (14) nel primo fattore fra parentesi nel secondo membro *si legga:* $B \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}$

» 200 formola (27) nel secondo membro il primo termine *si legga:* $\frac{\partial \psi}{\partial p}$

Del medesimo Autore:

LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

E

DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

Un volume di pagine 608 in-8° grande, 1901 - PREZZO: **Lire 20.**

TEORIA

DEI

Gruppi di sostituzioni e delle Equazioni algebriche

SECONDO GALOIS

Un volume di pagine 284 in-8° grande, 1900 - PREZZO: **Lire 10.**

LEZIONI

SULLA

Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni

Anno 1902-1903

Un volume di pagine 708 in-8° grande, litogr. - PREZZO: **Lire 16.**