UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215688 1

UNIV.OF
TORONTO
LIBRARY

ETTORE BORTOLOTTI

LEZIONI
DI
GEOMETRIA ANALITICA

VOLUME PRIMO

LABORAVI · FIDENTER

250365-6
4/1/31.

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Ettore Bortolotti

QA
551
B67

PREFAZIONE

Questo libro completa la raccolta delle lezioni di matematica date nel primo biennio della Università di Bologna.

Ho cercato di coordinare lo svolgimento della materia con quello seguito dai colleghi di Facoltà, per evitare pericolosi anticipi ed oziose ripetizioni; ed affinchè gli scolari, nel procedimento sincrono e concorde dei vari insegnamenti, potessero più facilmente cogliere le analogie, percepire le differenziazioni, intendere come le varie discipline matematiche procedano per diverse strade ad uno stesso fine.

Ho trovato perciò opportuno il trattare anzitutto della proiettività in forme di prima specie: argomento che può esser svolto col sussidio delle sole nozioni apprese nei corsi liceali.

Segue lo studio delle proprietà relative alle rette ed ai piani, nel quale trovano applicazione le dottrine dei determinanti e dei sistemi di equazioni lineari, apprese nelle prime lezioni di Analisi Algebrica.

Lo studio delle Coniche e delle Quadriche vien fatto quando i giovani già si sono resi famigliari i concetti di derivata e di limite, e procede parallelamente allo sviluppo che gli stessi argomenti hanno nel corso di Proiettiva.

Infine, gli elementi della teoria delle linee e delle superficie sono trattati alla fine del corso, quando, nelle lezioni di Analisi, già sono stati svolti i Capitoli di calcolo differenziale ed i fondamenti di calcolo integrale richiesti per lo sviluppo di questa teoria.

La necessità di preparare i giovani al corso di Meccanica mi ha consigliato l'introduzione di questi ultimi argomenti nelle lezioni di Analitica; la quale introduzione si vede da tempo effettuata nei libri pubblicati fuori d'Italia, ma non è comune fra noi.

A me parve che, avuto riguardo al presente ordinamento degli studi nel primo biennio delle nostre facoltà, fosse opportuno il dar qui notizia delle più interessanti applicazioni del metodo infi-

nitesimale alle questioni geometriche; e l' esperimento di questi ultimi anni di scuola, mi conforta nella fiducia di aver fatto cosa utile agli studi e gradita agli studiosi.

Ho seguito, nelle linee generali, la trattazione consacrata dalle opere, ormai classiche, scritte ai tempi nostri dai geometri italiani, ed, in particolare, da quelle del D' OVIDIO, *del* BIANCHI, *del* BERZOLARI, *del* CASTELNUOVO; *opere che, nella compilazione delle presenti Lezioni, sempre ho avuto dinanzi agli occhi, e delle quali mi sono studiato di imitare il rigore del metodo, l' eleganza degli svolgimenti, la perspicuità della forma.*

Ma, nella limitazione degli argomenti, nella proporzione delle parti, nella interpretazione delle finalità didattiche; in tuttociò insomma che può dare carattere individuale ad un' opera destinata all' insegnamento, riconosco la ispirazione del mio illustre, venerato maestro SALVATORE PINCHERLE.

In qualche punto, tuttavia, ho ritenuto opportuno discostarmi dalla trattazione consueta.

Mi è parso, fra l' altro, di poter unificare le convenzioni che nelle varie circostanze vengono fatte circa l' orientamento delle rette e dei piani nello spazio, in modo da togliere ogni arbitrarietà, e quindi ogni dubbio, circa il segno da attribuire ad un segmento, ad un angolo, o ad un' area, in relazione con un presupposto sistema di coordinate.

Fissato il verso positivo delle rotazioni, basta infatti che venga determinato il segno di ogni segmento $\overline{P_1P_2}$, *dato mediante le coordinate dei punti estremi* $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$, *perchè rimanga fissato il verso positivo di ogni retta dello spazio, la pagina positiva di ogni piano, su questa il verso positivo delle rotazioni, ed infine anche il segno dell' angolo di due rette, comunque date nello spazio.*

Ed ho verificato che ciò può esser fatto con estrema semplicità, ed in modo affatto generale (Cfr. n.° 166, pag. 142), senza che le applicazioni, che ad ogni tratto si presentano, conducano a risultati discordi da quelli comunemente accettati.

Ho premesso un breve saggio storico, *poichè ben conosco l' alto valore educativo della storia della scienza.*

Uno storico illustre, che fu anche geometra insigne, lo ZEUTHEN, *disse molto giustamente che coloro, i quali vogliono apprendere una scienza, « ont besoin, non seulement d' apprendre « par coeur, mais d' assimiler et même de reproduire ce qui pourra « leur servir de point de départ pour des progrès ultérieurs. Pour*

« cela ils ont moins besoin des résultats tout prêts et complets « transmis par leurs prédécesseurs, que des pensées et des impul- « sions fécondes qu'ils ont reçues en même temps que les résultats ».

Le poche pagine da me scritte hanno appunto per iscopo di dar notizia dello svolgersi e del progredire delle idee che hanno condotto la Geometria Analitica *al presente stato di perfezione.*

Una vera e propria istoria di questa scienza non è stata ancor scritta; ma lo studioso che desiderasse più estese e più complete notizie, potrà leggere le opere dello stesso ZEUTHEN: Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le moyen âge; - Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert: *e chi voglia approfondire l'esame di qualche particolare questione, troverà opportune indicazioni bibliografiche, anche nella breve Introduzione a questo Volume.*

Per non aggravar di troppo la mole del libro, ho qui tralasciato i numerosi esercizi che accompagnano le mie lezioni universitarie, senza dei quali l'insegnamento sarebbe al tutto sterile. Tali esercizi sono stati raccolti e coordinati, e saranno oggetto di una prossima pubblicazione.

Nell'atto di licenziare l'opera, ormai compiuta, mi è caro il ricordare l'assidua, affettuosa, filiale assistenza prestatami da ENEA BORTOLOTTI, *acuto revisore del manoscritto, attento correttore delle bozze di stampa; con grato animo porgo i dovuti ringraziamenti alla signorina dr.* SARA SOLDATI *valente disegnatrice delle figure geometriche; ed, in modo particolare, protesto la più viva ed affettuosa riconoscenza al comm.* O. FRANCHI, *intelligente direttore della Casa Editrice* N. Zanichelli, *che, con signorile larghezza, mise a mia disposizione tutti i mezzi più acconci alla miglior riescita dell'opera.*

/17

INTRODUZIONE STORICA

La storia della scienza presenta momenti nei quali pare che tutto si rinnovi: idee, metodi, indirizzi, principî.

Tali momenti solitamente succedono a periodi di intensa produzione; quando il materiale raccolto pare debba soverchiare, con la sua mole smisurata, la capacità di ogni mente umana.

Una idea generale e feconda, che molti confusamente percepivano, che alcuni già avevano per qualche caso particolare introdotto, superato il periodo di incubazione e di infanzia, improvvisamente giganteggia nelle opere di qualche felice ingegno che seppe conoscerne la potenza creatrice.

Ed allora si scuoprono insospettate analogie, si invertono le relazioni di dipendenza, cambia il sistematico concatenamento delle verità riconosciute, i principî appaiono più fecondi, inutili le distinzioni di casi particolari e lo studio minuto dei dettagli, le eccezioni scompaiono, la generalità e la uniformità dei metodi raccoglie sotto un unico punto di vista teorie che parevano estranee.

Con sintesi nuova viene allora fondata una nuova dottrina, concettualmente più semplice, logicamente più perfetta: l' antica viene ripudiata come inutile e fallace, e presto scompare ogni traccia del faticoso cammino, che attraverso le incertezze e gli errori aveva condotto alla conoscenza del vero. Anche la memoria delle antiche scoperte, dei primi scopritori, a poco a poco si dilegua.

Il ricercare le fonti delle nostre cognizioni è dunque opera di giustizia, e vale, « non solo all' acquisto di sublime erudizione, ma a dar « non fallibile regola di criterio per l' apprezzamento delle verità conse- « seguite, delle quali allora soltanto si fa debita stima, quando si sa « bene tutto ciò che costano [1] ».

Seguiremo a grandi tratti lo sviluppo storico della *Geometria Analitica*.

Vedremo questa scienza, dopo una prima fase di rigoglioso sviluppo, uscir dalle mani di Apollonio, in forma ammirabilmente perfetta.

[1] Cfr. V. Monti, *Dell'obbligo di onorare i primi scopritori del vero*. (Milano 1804, pag. 34).

Poi, dopo lunghi secoli di abbandono, risorgere, col rifiorire delle scienze, nel rinascimento italiano e ricever nuovo impulso e nuovo vigore dalle due nuove dottrine, l'*Algebra* e la *Prospettiva*. Infine, nella seconda metà del XVII secolo, iniziarsi per essa l'ultima fase, che solo nel secolo XIX doveva raggiungere il suo completo sviluppo.

Algebra Geometrica degli antichi.

E' opinione comune che la rappresentazione analitica di proprietà relative alla forma delle figure geometriche sia un portato della scienza moderna, acquisito con l'uso del metodo delle coordinate, all'apparire della *Geometria di Cartesio*.

Sta il fatto, invece, che anche gli antichi sapevano rappresentare, con relazioni analitiche, non solo le proprietà metriche, ma anche quelle di posizione; e che, per la maggior parte delle curve conosciute dagli antichi, le nostre equazioni cartesiane non sono che la traduzione in simboli algebrici di quelle relazioni che, col nome di *sintomo* (²), erano state stabilite ab antiquo, come costituenti il *carattere geometrico* di ogni singola curva.

La sostanziale differenza consiste in ciò, che mentre gli antichi, presso cui era estremamente sviluppato il senso geometrico, e che possedevano una teoria puramente sintetica delle forme geometriche, si giovavano di quella rappresentazione per studiare, mediante procedimenti di natura geometrica, le questioni aritmetiche: i moderni, che possiedono un perfetto algoritmo numerico, si servono di questo per lo studio delle figure geometriche.

L'uso di procedimenti geometrici in problemi di natura analitica era, presso gli antichi, disciplinato da opportune regole, le quali costituivano uno speciale ramo di scienza, che con voce moderna, fu detto *Algebra Geometrica* (³).

Alcune proposizioni di EUCLIDE, di APOLLONIO, di PAPPO, si possono sicuramente riferire a tale scienza ma, per se stesse non giovano a dar chiara dimostrazione del pensiero greco. Più sicure notizie si possono ricavare dallo studio degli autori che, al primo rifiorir delle scienze in Occidente, riportarono fra noi dall'Oriente, tutto ciò che ancor si era conservato della tradizione classica.

(²) Hoc modo autem ceteri quocque Mathematici de Lineis differere consueverunt, uniuscuiusque speciei *Symptomata* tradentes. *Apollonius* namque in qualibet Conicarum Linearum quid *Symptoma* sit ostendit, et *Nicomedes* in *Conchoidibus*, et *Hippias* in Quadrantibus, *Perseusque* in Spiricis, nam post ipsarum ortum quod ipsis per se, et secundum quod ipsum inest, assumptum, constituitam nobis formam a cunctis alijs distinguit. Cfr. PROCLI DIADOCHI, (*Patavii*. 1560, pag. 214, Libr. I, prop. 27).

(³) Cfr. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-âge*. (Paris, 1902, pa. 34 e segg.).

Leonardo Pisano, nella introduzione al suo *Liber Abbaci* (1202) chiaramente esprime la mutua dipendenza fra le dottrine geometriche e le analitiche, scrivendo ([4]): « Et que arismetica et geometria (sic) « scientia sunt connexe et suffragatorie sibi ad invicem, non potest de « numero plena tradi doctrina, nisi intersecantur geometrica quedam, vel « ad geometriam spectantia, que hic tantum juxta modum numeri ope« rantur; qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstra« tionibus, que figuris geometricis fiunt. Verum in alio libro, quem de « *practica Geometrie* composui, ea que ad Geometriam pertinent et alia « plura copiosis explicavi, singula subiectis approbationibus geometricis « demonstrando. Sane hic liber magis ad theoricam spectat quam ad « praticam ».

Egli, infatti, sempre accompagna con figure geometriche esplicative, non solo la esposizione delle regole per la risoluzione delle equazioni dei primi due gradi, ma lo sviluppo del calcolo numerico in particolari questioni prettamente aritmetiche.

E, nella *Practica Geometriae,* egli tratta problemi di analisi indeterminata di secondo grado sotto il titolo: *Expliciunt questiones geometricales: et incipiunt questiones, quorum solutiones non sunt terminate, hoc est quod non cadunt ad unum terminum tantum, sed ad plures.* Mentre poi, molte questioni prettamente geometriche sono da lui risolute *secundum algebram* ([5]), cioè con la traduzione del problema in equazione algebrica.

Quando poi, all' inizio del secolo XVI, con la scoperta della risoluzione algebrica delle equazioni cubiche si iniziava una êra nuova per lo sviluppo di ogni ramo delle matematiche pure ed applicate, troviamo che, appresso i primi scopritori, la perizia nel calcolo algebrico era accompagnata da squisito senso geometrico ([6]).

E sono sempre esclusivamente geometriche le dimostrazioni delle formule di trasformazione e di risoluzione delle equazioni algebriche, che

([4]) *Scritti di Leonardo Pisano.* Vol. I, (Roma, 1857, pag. 1).

([5]) Cfr. loc. cit. ([4]), vol. II *Pratica Geometriae,* Dist. XVIII; *De quibusdam subtilitatibus geometricis,* pp. 207 e segg. La frase « secundum algebram », si legge nel Liber Abbaci, pag. 455.

([6]) La risoluzione algebrica delle equazioni cubiche, fino ad allora ritenuta per impossibile, fu ritrovata da Scipione dal Ferro, del quale si sa che fu maestro al *Dürer* di prospettiva, ed a cui il Ferrari, nel 5° Cartello, fa risalire « *quella bella invenzione di operare senza mutare l' apertura del compasso* ». Ad attestare la perizia del Dal Ferro nel calcolo algebrico, basterebbe d'altra parte la scoperta (a lui attribuita dal Cardano e dal Bombelli), della regola per rendere razionale il denominatore di una frazione contenente la somma di tre radicali cubici.

Anche il Tartaglia aveva fama di valentissimo geometra, e si ritiene che con procedimenti di natura geometrica egli abbia potuto, a sua volta, ritrovare la soluzione della equazione cubica. Zeuthen, *Note II sur l' histoire des Mathématiques.* Bull. Acc. d. Sc. Kiobenhawn, 1894, pag. 22.

si trovano nei trattati di aritmetica del '500, nei quali, al tempo stesso, è fatto posto onorevole a numerose questioni geometriche, risolute per mezzo dell' algebra.

Lo stesso VIETA, che è riguardato come il fondatore dell' algebra letterale, non crede di potersi esimere dal recar dimostrazione geometrica delle proposizioni e delle regole d' algebra, « nam (egli dice) etsi « radices sint assymetrae (irrazionali) exibebuntur ea methodo (l' alge- « brico) veris proximae, accuratas autem exibere, est Geometrae potius « quam Arithmetici » (7).

Luoghi piani e solidi.

Seguendo il medesimo concetto che ha indotto i matematici moderni a classificare i problemi secondo il grado della equazione cui essi danno luogo, gli antichi distinguevano tre classi di problemi:

I. *Problemi o luoghi piani,* che potevano essere risolti con intersezioni di rette e cerchi (del 1° e del 2° grado).

II. *Problemi o luoghi solidi,* che richiedevano l' uso di sezioni coniche (del 3° e del 4° grado).

III. *Problemi supersolidi,* (*grammici* o *lineari*), tutti gli altri.

La denominazione « *luoghi solidi* » (o problemi solidi) ricordava il cono rotondo, onde provenivano le sezioni coniche, necessarie alla loro risoluzione.

E pare che i modelli di dette linee che servivano, sia a scopo di studio nelle scuole di geometria, sia nella pratica applicazione alla risoluzione dei problemi solidi, fossero presentati, non come curve tracciate sul piano del disegno; ma come effettive sezioni di solidi materiali di legno (8).

Leggiamo infatti, nella prefazione di ABRAMO ECCHELLENSE alla traduzione dall' arabo dei libri 5°, 6°, 7° delle *Coniche* di APOLLONIO, che, appresso gli arabi, APOLLONIO ed EUCLIDE erano appellati *Fabri lignarii*:

« *Post Thaletem celebris fuit in Geometricis praecipue disciplinis* « APOLLONIUS NAGGIAR (*idest faber lignarius*). *Is composuit tractatum* « *de Scientia Conicor. nempe de lineis, quae neque rectae sunt, neque ar-* « *cuate, seu curvae, seu inclinate.* Notandum hic est vocem *Naggiar,* quae « Apollonio tribuitur, ut cognomen, et nos *fabrum lignarium* vertimus, « poni (ut opinor) pro Geometra, et id forte exinde, quod instrumenta, « quibus utebantur Geometrae, ex lignis olim conficiebantur. Quod et inde « conijcio, quia hoc idem vocabulum EUCLIDE quoque tribuitur apud eun-

(7) Cfr. *De Emendatione Equationum Caput VI.* (Opere, pag. 140, 141).

(8) Nei vecchi trattati sulle Sezioni Coniche si davano anche regole opportune per la materiale costruzione di tali sezioni. Vedi p. es. B. CAVALIERI, *Lo Specchio Ustorio,* (Bologna, 1632), Cap. XLIV, De i modi particolari di descrivere le Settioni Coniche, che s' aspettano all' invention solida.

« dem GREGORIUM sic de illo scribentem: *At Euclides Naggiar ex Urbe* « *Tyro erat* » ([9]).

E non è da tacere che anche il BOMBELLI, volendo, nella sua « *Algebra* », dar dimostrazione geometrica delle formule di risoluzione della equazione cubica, avverte che « *bisogna havere un cubo materiale*.... nel « quale si farà tre tagli equidistanti di linee e di superficie.... havendo « tal cubo così tagliato, ci servirà a tutte le dimostrazioni dei Cubi; che « senza esso difficilmente si intenderebbe » ([10]).

Le coniche. Loro equazioni locali.

Abbiamo detto che le coniche furono dapprima considerate come sezioni piane di un cono rotondo.

Pare che, a principio, tali sezioni si facessero esclusivamente con piani normali ad una generatrice ([11]); si ottenevano così curve appartenenti ai generi *ellissi, iperbole, parabola,* secondo che il cono sezionato era acutangolo, rettangolo, ottusangolo.

MENECHMO, (350 a C.?) discepolo di EUDOSSO, è considerato come l' inventore di queste curve, che da lui furono introdotte per la soluzione del *problema di Delo* cioè della *duplicazione del cubo.*

PAPPO ALESSANDRINO nella introduzione al libro VII delle sue *Collezioni* ([12]) ci dà notizia di otto libri di EUCLIDE su le coniche, e di altri cinque di ARISTEO (370 a. C.), sui *Luoghi Solidi,* libri ora purtroppo perduti; anche ARCHIMEDE (287-212 a C.) tratta delle Coniche nella sua Opera sui *Conoidi* e sugli *Sferoidi.* Questi autori, che sono anteriori ad APOLLONIO, distinguevano le tre specie di coniche coi nomi di *Sezione del cono acuto, Sezione del cono ottuso, Sezione del cono retto.*

Ma presto si conobbero *proprietà locali* caratteristiche di queste curve, considerate come curve piane.

La determinazione di tali proprietà si otteneva con mezzi estremamente semplici, dei quali voglio ora dar cenno, perchè tuttora potrebbero servire, in un primo studio di dette curve.

Si rappresenti con BAC una sezione del cono, fatta con un piano per l' asse AF, e per quella generatrice AB, che supponevasi normale al piano della sezione conica MEN. La traccia di questo piano sul piano

([9]) Praefatio - Ciò ricorda, per analogia, la denominazione di *cifre gobâr* (di polvere) data dagli arabi ai segni numerici da essi usati su gli abachi a polvere, e che noi ora adoperiamo nella numerazione scritta.

([10]) «*L'Algebra*». *Opera di* RAFAEL BOMBELLI *da Bologna.* Bologna 1572, pag. 283.

([11]) Al n. 548 del nostro testo (vol. II, pag. 68) è dimostrato che una conica qualsivoglia può sempre considerarsi come sezione di un cono rotondo fatta al modo anzidetto.

([12]) PAPPI ALEXANDRINI, *Mathematicae Collectiones,* a Federico Commandino in latinum conversae. (Bononiae MDCLX), pag. 24.

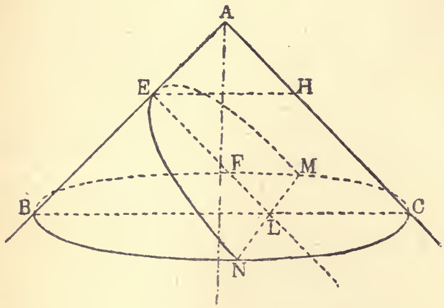
della sezione, è indicata dalla EL, ed è l' asse (asse traverso) di tale sezione.

Se per un punto qualunque L di questo asse, conduciamo il piano $BNCM$, normale all' asse del cono, esso intersecherà il piano della sezione conica secondo la retta LM, ed il cono secondo il cerchio BMC.

I segmenti (come LM) normali all' asse della conica (nel punto L) e terminati alla conica (in M) venivano detti *ordinatamente applicati all' asse*; o più semplicemente *ordinate della conica corrispondenti alla ascissa* (porzione di asse) EL [12].

E poichè tale segmento appartiene anche al cerchio BMC, ed è normale al diametro BC, si avrà

$$(1) \qquad \overline{LM}^2 = \overline{BL} \cdot \overline{LC}.$$



Nel caso del *cono rettangolo* (a *sezione parabolica*) si vede immediatamente che

$$\overline{BL} = \sqrt{2} \cdot \overline{EL},$$
$$\overline{LC} = \overline{EH} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF},$$

così che

$$\overline{LM}^2 = 2\overline{EF} \cdot \overline{EL}.$$

Indicando con y la lunghezza dell' ordinata $\overline{LM}$, con x la porzione (ascissa) di diametro corrispondente, con p il segmento EF, *porzione fino all' asse*, (*parametro*) si ottiene l' equazione normale della parabola (che vedremo al n. 301 del nostro testo)

$$(2) \qquad y^2 = 2px.$$

Gli antichi, invece di scrivere questa formula, dicevano che nella *parabola i quadrati delle ordinate* sono *proporzionali alle corrispondenti ascisse* (Apollonio, lib. I, prop. XX).

Pei coni acutangoli (a sezione ellittica) ed ottusangoli (a sezione iperbolica), la ricerca della equazione locale è fondata sul seguente Lemma:

Se da un punto L qualsiasi del piano dell' angolo BAC, escono due rette BLC, ELD, parallele a due rette fisse, il rapporto $\overline{BL}$ $\overline{LC}$:

[13] Più generalmente si dicevano *ordinatamente applicati ad un diametro*, i segmenti uscenti da un punto del diametro, paralleli al diametro coniugato e terminati alla conica. Questa denominazione è correntemente seguita nella versione di Apollonio fatta dal Commandino. La voce *ascissa* si trova pure nell'*Apollonio* di Commandino (p. es. lib. III, prop. LIII) in un senso un po' più generale di quel che ora viene attribuito a tale parola, ed, in senso meglio determinato, nell'*Apollonio* di Borelli.

$\overline{EL}$ $\overline{LD}$ dei prodotti dei segmenti intercetti fra il punto L ed i lati dell' angolo è costante.

Indicando con $2a$ il segmento $\overline{ED}$ (*asse traverso* della sezione conica) e con p la *porzione $\overline{EF}$ fino all' asse del cono,* si vede facilmente che il valore costante di detto rapporto è $\pm \frac{p}{a}$, onde la relazione

$$\frac{\overline{BL}\cdot\overline{LC}}{\overline{EL}\cdot\overline{LD}} = \pm \frac{p}{a},$$

o, per la (1),

$$\frac{\overline{LM}^2}{\overline{EL}\cdot\overline{LD}} = \pm \frac{p}{a},$$

cioè

$$(3) \qquad y^2 = \pm \frac{p}{a} x(2a - x)$$

dove il segno superiore vale nel caso ellittico, l' inferiore nel caso iperbolico ([14]).

L' equazione scritta è fedele traduzione della proposizione XXI del Libr. I di Apollonio:

« Si in iperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, rectae lineae « ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spacia « contenta lineis, quae inter ipsas et vertices transversi lateris figurae « interijecuntur, ut figurae rectum latis ad transversum ».

Le proposizioni dimostrate ci dicono che le *sezioni coniche sono curve del secondo ordine.*

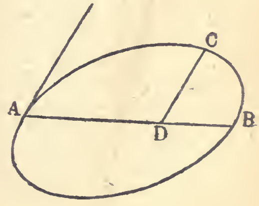
La proposizione reciproca: *qualunque curva del secondo ordine è una sezione conica* ([15]) risulta immediatamente. Ed infatti una equazione

([14]) L' equazione (3) è la forma generale della equazione della conica riferita ad un diametro ed alla tangente in uno degli estremi di esso. (Cfr. il nostro testo al n. 301, Vol. I, pag. 256). Il caso parabolico si ha per $\frac{p}{a} = 0$, cioè per $a = \infty$.

([15]) Gli antichi enunciavano queste proposizioni dicendo: « Si sit recta « linea AB, et CD rectae lineae positione datae parallela sit que proportio « rectanguli ADB ad quadratum ex DC data, punctum C conicam lineam con- « tiget » (Pappo, loc. cit. ([12]), VII, prop. CCXXXV), cioè *se il rapporto*

$$\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DB}}{\overline{CD}^2} = \frac{x(2a-x)}{y^2}$$

ha valore costante, il luogo del punto C è una conica.



del 2° grado nelle variabili x, y può sempre, con opportuna trasformazione lineare di variabili, ridursi alla forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0;$$

e, dal confronto con la

$$y^2 = \pm 2px \mp \frac{p}{a} x^2,$$

si determinano immediatamente i valori

$$p = \mp \frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

del *parametro* e dell' *asse trasverso.*

Uso della equazione locale per la costruzione e lo studio delle coniche.

E' interessante vedere come gli antichi costruivano per punti la conica, data mediante la sua equazione:

$$y^2 = \pm 2px \mp \frac{p}{2a} x^2,$$

(cioè determinata dal lato retto $2p$, dal lato trasverso $2a$, e dall' angolo che il lato trasverso fa con la direzione ad esso coniugata) perchè questa costruzione ci mostra la impalcatura *algebrico-geometrica* che regge tutta la teoria Apolloniana delle coniche, e ci offre, anche nella matematica moderna, uno dei più semplici mezzi per la rappresentazione e lo studio delle coniche.

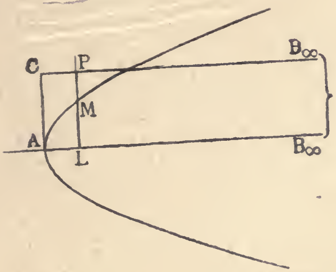
Sia AB il diametro transverso (per semplicità supporremo che sia l' *asse transverso*), *in uno degli estremi di esso si innalzi la perpendicolare AC, si porti su questa un segmento AC eguale al doppio del parametro* (d' onde il nome di *latum erectum — lato retto,* dato ad $AC = 2p$) *e si congiunga CB.*

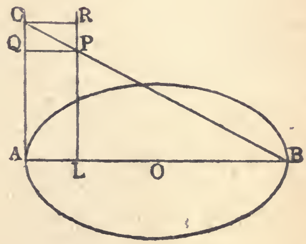
Se da un punto qualunque L del diametro si conduce una retta LP

Ecco esplicitamente rappresentate, con una sola equazione, tutte e tre le coniche, le quali dunque venivano fin d' allora considerate *varietà di un medesimo ente geometrico.*

ordinatamente applicata al diametro, si avrà su questa un punto M della conica prendendo LM in modo che

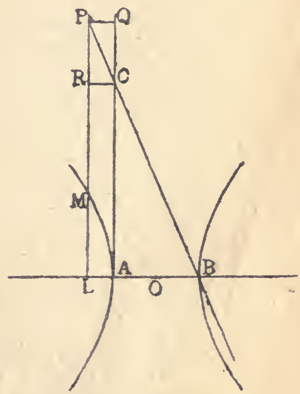
$$(4) \qquad \overline{LM}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{LP}.$$





Si vede, infatti che, nel caso parabolico, $\overline{LP} = \overline{AC} = 2p$, da cui, indicando $\overline{AL}$ con x,

$$y^2 = 2px.$$



E, per le coniche a centro, si ha similmente:

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{AB}}, \quad \overline{LP} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\,\overline{LB} = \frac{p}{a}\overline{LB},$$

cioè

$$\overline{LP} = \frac{p}{a}(2a \mp x)$$

e la (4) diventa

$$y^2 = \pm\frac{p}{a}\,x(2a - x).$$

Non occorre notare che, assumendo come origine delle ascisse il centro O della conica, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{ap} = 1;$$

e che basta fare $p = \frac{b^2}{a}$ (n. 365, Vol. I, pag. 297) per avere la *equazione canonica* delle coniche a centro (n. 342, Vol. I, pag. 281).

**

Non deve dunque far meraviglia se, anche gli antichi, dalla costruzione indicata ricavavano tutte le proprietà delle sezioni coniche, con trasformazioni perfettamente anologhe a quelle che noi ora operiamo su le equazioni loro.

E' opportuno a questo proposito osservare che la operazione che si fa per trovare l' ascissa

$$x = \overline{AL},$$

corrispondente ad una data ordinata $y = LM$, nel caso parabolico consiste *nella applicazione pura e semplice sul lato retto AC di un rettangolo di area* y^2.

Una tale operazione era appunto detta dagli antichi: *applicazione d' area* o *parabola.*

Nei casi ellittico ed iperbolico, si tratta di *dividere il lato retto AC in due parti AQ, QC,* (*o di prolungare il lato retto AC di un segmento CQ*) *in modo che sui segmenti AQ, QC, si possano costruire due rettangoli, di eguale altezza, l' uno ALPQ, equivalente al quadrato dato* y^2, *l' altro QPRC, simile al rettangolo contenuto dal lato retto e dal lato trasverso.*

Tali operazioni, che Euclide insegna nelle prop. XXVIII e XXIX del libro VI, e che, nell' algebra geometrica, corrispondono alle formule di risoluzione delle equazioni di 2° grado, erano notissime agli antichi, che le usavano correntemente e le indicavano coi nomi di: *applicazione in difetto* od *in ellisse, applicazione in eccesso* od *in iperbole.* Da ciò le denominazioni di *parabola, ellissi, iperbole* date da Apollonio ai tre generi di coniche.

Nomi dunque provenienti da proprietà analitiche delle equazioni ad esse pertinenti.

In possesso di queste equazioni, gli antichi videro, anche prima di Apollonio che non era necessario segare il cono con piani normali ad una generatrice, e che da un qualunque cono era possibile ottenere una sezione conica di genere qualunque.

Apollonio ha inoltre osservato che occorreva considerare tutti e due i rami della iperbole, corrispondenti alle due falde del cono, come costituenti una unica curva sola che egli chiamava: *opposte sezioni.*

Le Coniche di Apollonio.

L' opera classica che contiene tutto quanto era noto agli antichi su questo soggetto, è costituita dagli *otto libri delle* Coniche di Apollonio, dei quali libri sette ci sono pervenuti. I primi 4 nell' originale greco (pubblicati nel 1566 nella versione latina del Commandino) gli altri tre in un testo arabo scoperto nella biblioteca medicea da Alfonso Borelli, da questi e da Abramo Ecchellense voltato in latino, e pubblicato nel 1661.

Nel I Libro, dopo avere insegnato a costruire l' equazione della conica dato un diametro, la direzione delle corde ad esso coniugate ed il lato retto, APOLLONIO dimostra che la equazione della conica non cambia forma cambiando gli assi di riferimento (cioè scegliendo ad arbitrio il diametro e quindi la direzione delle relative ordinate ad esso applicate); insegna a costruire le *tangenti* alla conica, e studia le proprietà ad esse relative.

Nel Libro II tratta dei *diametri,* degli *assi,* degli *asintoti,* considera le iperbole coniugate (che hanno a comune gli asintoti), infine stabilisce la *equazione della iperbole riferita agli asintoti* ([16]).

Il Libro III considera anzitutto un sistema di ordinate, non necessariamente parallele alla direzione coniugata al diametro cui si suppongono applicate, e determina le relazioni metriche fra tali ordinate e le corrispondenti ascisse. Stabilisce poi il cosidetto *teorema di potenza* (cui si da impropriamente il nome di *Teorema* di NEWTON) e che si enuncia dicendo che *Se da un punto L del piano di una conica si conducono due rette ALB, CLD, parallele a due direzioni fisse, è costante il rapporto* $\overline{AL}\,\overline{LB}:\overline{CL}\,\overline{LD}$ *dei prodotti dei segmenti che sopra ciascuna retta sono terminati dal punto L e dalla conica.*

Sono importanti le proprietà, contenute nelle prop. XXX-XL e XLIII, relative ai *poli ed alle polari* ([17]) e quelle dalla XLV alla LII, riguardanti *i fuochi,* le *proprietà focali* e la *podaria di un fuoco,* per coniche a centro ([18]). Le proposizioni XLI-XLIII esprimono proprietà delle tangenti non dipendenti dal punto di contatto atte cioè a caratterizzare le curve come *inviluppo di tangenti* ([19]).

Nel IV Libro, dopo aver dato qualche complemento sulla teoria dei poli e delle polari, APOLLONIO studia le posizioni reciproche di due co-

([16]) Prop. XII. *E' costante il prodotto dei segmenti uscenti da un punto comunque dato della iperbole, paralleli a direzioni fisse, e terminati agli asintoti.*

([17]) La prop. XXXVII dice che, per qualsiasi sezione conica, la retta che congiunge i punti di contatto delle tangenti uscenti da un punto P esterno alla conica è il luogo di coniugati armonici di P rispetto ai punti dove le rette uscenti da P incontrano la conica.

([18]) E' notevole il fatto di non riscontrare in Apollonio, notizia alcuna circa il *fuoco della parabola;* ma non è ammissibile che ciò fosse sconosciuto agli antichi. Troviamo infatti, in PAPPO, la relazione che esprime l' equazione della conica dati il fuoco, la direttrice e la eccentricità; esplicitamente enunciata per tutti e tre i generi di coniche.

([19]) Le tangenti alle iperbole determinano con gli asintoti triangoli di area costante. Le tangenti alla ellisse od alla iperbole determinano, sulle tangenti condotte nella estremità di un dato diametro, segmenti che contengono un rettangolo di area costante.

Nella parabola una tangente variabile determina su due tangenti fisse punteggiate simili.

niche giacenti in uno stesso piano, ed in particolare determina il numero massimo delle loro intersezioni.

Il V Libro, tratta *delle normali alla conica uscenti da un punto,* e dimostra che i piedi di queste normali sono nelle intersezioni della conica con una iperbole equilatera. Cercando poi di determinare i punti del piano, tali che la corrispondente iperbole risulti tangente alla conica, trova l' *equazione della evoluta.*

Nel Lemma VII, di questo libro si contiene la soluzione del *Problema di Delo* (duplicazione del cubo) ottenuta mediante la intersezione di un cerchio con una iperbole equilatera.

Nel Libro VI si tratta delle *coniche congruenti* e delle *coniche simili.*

Nel VII, infine, si raccolgono molte proposizioni su le relazioni metriche riguardanti cerchi supplementari, diametri coniugati, e parametri. Notevoli le XII e XXII, che espongono i teoremi su la somma o differenza dei quadrati di due diametri coniugati, e le XXXI, XXXII, che enunciano la costanza dell'area del triangolo compreso da due semidiametri coniugati e dalla curva che ne congiunge gli estremi ([20]).

L' opera di APOLLONIO è un completo trattato delle sezioni coniche che, per vastità di materia e rigore di esposizione, può stare al pari delle migliori opere moderne. Anche il metodo di indagine ed i ragionamenti che conducono alle dimostrazioni, benchè rivestano forma geometrica, presentano la più grande analogia con la esposizione delle proprietà delle curve di secondo ordine riferite a coordinate cartesiane. Nelle scuole greche il Trattato di APOLLONIO era testo universale, e veniva integrato con una importante collezione che comprendeva i *Luoghi Solidi* di ARISTEO, i *Dati,* i *Porismi* ed i *Luoghi superficiali* di EUCLIDE, le *Proposizioni di* ERATOSTENE, la *Sezione* di *Ragione,* la *Sezione* di *spazio,* la *Sezione determinata,* i *Luoghi piani,* le *Inclinazioni* ed i *Contatti* dello stesso APOLLONIO; un complesso di 31 libri, ricordati da PAPPO ([21]) come pertinenti ai *luoghi resoluti,* cioè: « propria quaedam est « materia post communium elementorum constitutionem ijs parata, qui « in geometricis sibi comparare volunt vim ac facultatem inveniendi « problemata, quae ipsis proponuntur; atque huius tantummodo utilitatis « gratia inventa est ».

Decadenza della Geometria greca, Pappo.

Ma la maggior parte di questi libri cessò presto di essere oggetto di studio ed andò irremissibilmente perduta. Delle stesse *Coniche* di APOLLONIO solo i primi 4 libri ci furono, in tarda età, restituiti nell' originale

([20]) Cfr. nel nostro testo i numeri 345, 346, vol. I, pag. 285.

([21]) PAPPI ALEXANDRINI, *Mathematicae Collectiones,* a F. Commandino in latinum conversae. (Bononiae 1660, pag. 240).

greco; e, tradotti in latino, ripresero a far da testo nelle scuole, dove son rimasti fino a tempi a noi vicinissimi. La materia degli altri quattro fu giudicata troppo astratta, troppo lontana dalle pratiche contingenze della vita. La geometria greca, che nelle opere di EUCLIDE, di ARCHIMEDE, di APOLLONIO e dei loro contemporanei, od immediati successori, IPSICLE, DIOCLE, NICOMEDE, PERSEO, ZENODORO, aveva raggiunto il massimo suo splendore, lentamente, ma continuamente decadde.

Al periodo aureo, di intensa, rigogliosa produzione, successe un periodo di raccoglimento, di erudizione, di compilazione storica, nel quale primeggiarono GEMINO, EUTOCIO, PROCLO, TEONE, SERENO, PAPPO....

Quest' ultimo merita un posto speciale, perchè nelle sue opere brilla ancora qualche lampo del genio greco, rivive qualche impulso di nuova forza produttiva.

Le collezioni matematiche di PAPPO [22] (verso la fine del IV secolo d. C.) raccolgono le più interessanti proposizioni dei più celebri matematici dell' età passata, insieme con molte notizie storiche, e con moltissimi *Lemmi* destinati a facilitare la lettura delle opere classiche.

Il VII libro tratta delle Coniche. Dalla materia in esso trattata si rileva che al tempo di PAPPO era conosciuta la *invariabilità per proiezioni e sezioni del birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie*; la *relazione fra i segmenti determinati su di una trasversale arbitraria dai lati di un quadrangolo completo;* le *proprietà armoniche del quadrilatero completo* (ogni diagonale è divisa armonicamente dalle altre due); il *teorema dell'esagono inscritto in due rette* (i punti di concorso dei lati opposti sono in linea retta); *le proprietà fondamentali del gruppo armonico*; le *proprietà fondamentali della polarità rispetto ad un cerchio.*

La proposizione CCXXXVIII dà inoltre l'*equazione generale di una conica determinata da uno dei suoi fuochi dalla corrispondente direttrice e dalla eccentricità* [23].

Ricorderemo ancora il *Problema* che fu detto di PAPPO, ossia il *problema delle* 3 (o delle 4) *rette,* che si enuncia al modo seguente: *date sul piano tre* (*o quattro*) *rette fisse, trovare il luogo dei punti P del piano, tali che il prodotto delle distanze di P da due delle rette date sia in un rapporto costante* col *quadrato della distanza di P dalla terza* (o *col prodotto delle distanze di P dalle altre due*).

Questo luogo, come già ebbero a provare EUCLIDE ed APOLLONIO, è una conica, e da ciò risulta il teorema: *Quando un quadrilatero è in-*

[22] PAPPI ALEXANDRINI, *Mathematicae collectiones,* a F. Commandino in latinum conversae. Pisauri 1588, Bononiae 1660.

[23] Sit recta linea positione data AB, et datum punctum C, in eodem plano, ducaturque CD et perpendicularis DE (perpendicolare ad AB). Proportio autem data sit CD ad DE. Dico punctum D coni sectionem contingere, et si quidem proportio sit aequalis ad aequale, erit parabole; si vero minoris ad maius, ellipsis; quod si maioris ad minus erit hyperbole.

scritto in una conica, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della conica da due dei lati è in un rapporto costante col prodotto delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati.

Proposizione generalissima, che comprende (come ha osservato CHASLES) quali casi speciali il teorema di DESARGUES su l'involuzione dei sei punti ed il famoso *esagramma mistico* di PASCAL.

Noteremo infine che una proposizione enunciata nella introduzione al VII libro di PAPPO coincide col *Teorema,* detto impropriamente di GULDINO sui volumi dei solidi di rotazione ([24]) [dato nella parte IV del nostro testo al § 6 del Cap. 3°].

Tutti questi risultamenti, benchè assai notevoli, non segnano nessun essenziale progresso della geometria nei 5 secoli trascorsi dai tempi di APOLLONIO a quelli di PAPPO; chè, anzi, la diligente premura di spianare con molteplici lemmi, e con prolissi commenti ogni menoma difficoltà nei più minuti particolari, dimostra (ai tempi di PAPPO) scarsa capacità di comprensione dell' insieme e deficienza di idee generali.

L'ammirazione pel passato, piuttosto che un intimo trasporto per la scienza, consigliava lo studio delle opere classiche, delle quali poco a poco, si andò tralasciando tutto ciò che non offriva diretta ed immediata applicazione agli scopi pratici di una vita civile, che andava di continuo immiserendo in un gretto materialismo, e perdendo di artistica finezza e di elevazione scientifica.

In occidente, la caduta dell' impero romano e la rivoluzione sociale provocata dalle invasioni barbariche spegnevano ogni luce di scienza; per 10 lunghi secoli (secoli di ignoranza e di barbarie) tutta la scienza geometrica si compendiava nel primo libro di Euclide, ed in poche regole pratiche ad uso degli architetti e degli artisti.

Nell' Oriente qualche debole riflesso dell' antico splendore continuava tuttavia a diffondersi: quattro libri di APOLLONIO ci furono conservati dai Bizantini, gli Arabi ne tradussero sette nella loro lingua.

Il Rinascimento italiano. La prospettiva.

I primi albori del rinascimento scientifico in Occidente si ebbero all' inizio del secolo XIII, quando i viaggi degli industri mercanti italiani misero la giovane e fiorente civiltà dei nostri comuni in contatto con le millenarie civiltà orientali..

Le traduzioni dall'arabo di GERARDO CREMONESE e di PLATONE TIBURTINO, i magistrali volumi composti da LEONARDO PISANO, recarono fra noi quel che di scienza greca era rimasto presso gli arabi e gli indiani; gli *Elementi* di EUCLIDE ci furono restituiti nella versione di GIOVANNI CAMPANO. Ma tardo e lento fu nel suo primo inizio lo svi-

([24]) loc. cit. ([12]) pag. 252.

luppo della rinata scienza matematica: occorsero non meno di tre secoli di laboriosa elaborazione, di divulgazione perseverante, di paziente preparazione, per ristabilire fra noi la passione per la ricerca scientifica, e per rendere patrimonio comune, il materiale raccolto da LEONARDO.

I modesti maestri d'abbaco, i matematici mercanti, gli architetti delle meravigliose basiliche, gli astrologhi, che nei nostri studi leggevano EUCLIDE e TOLOMEO, contribuirono a cementare la base su cui doveva elevarsi il possente edifizio della scienza moderna.

L'inizio della era nuova è segnato al principio del secolo XVI, dal sorgere, a dignità di scienza, della « *Regola d'Algebra* » in seguito alla scoperta della universale risoluzione delle equazioni cubiche, quando la civiltà moderna per la prima volta si affermava, superando un ostacolo, intorno a cui indarno gli antichi si erano affaticati. Lo sviluppo delle matematiche fu d'allora in poi così rapido, così vigoroso, così intenso, quale non s'era più avuto, dopo il migliore periodo Alessandrino.

La teoria delle coniche, fu rimessa in onore. Incominciarono ad apparire brevi ristretti contenenti quelle sole proposizioni che servivano direttamente all'ottica, all'astronomia, alla geodesia, alla prospettiva: tali sono il *Libellus super viginti duobus elementis conicis,* pubblicato da GIOVANNI WERNER nel 1522; ed i tre libri, che col titolo di *De lineis horariis,* sono contenuti negli *Opuscoli Mathematici,* composti nel 1533 dal MAUROLICO [25] per tacere delle notizie contenute nel *Trattato di Ottica* scritto da WITELO nel XIII secolo.

Ma già nel 1501 il VALLA [26] aveva pubblicati alcuni frammenti di una volgarizzazione delle *Coniche* di APOLLONIO, cui seguirono la traduzione più estesa, ma non più accurata del MEMO [27] e finalmente quella del COMMANDINO [28] che divenne testo per tutte le scuole di Europa.

Contemporaneamente al rifiorire degli studi classici, il rinascimento delle arti in Italia promuoveva lo sviluppo di un nuovo ramo di scienza « *La Prospettiva* », che non tardò ad innestarsi nel vecchio ceppo della geometria greca.

Due nuovi concetti, quelli di *punto di fuga,* e di *linea di fuga,* concetti fecondissimi, d'onde nacque *l'idea di elementi improprii* (all'infinito) si vedono già introdotti nella pratica pittorica dei nostri grandi artisti del '400, e sono chiaramente espressi nel *Trattato della Pittura* composto da LEON BATTISTA ALBERTI intorno al 1435 [29] ove è per la

[25] *Opuscula Mathematica,* pp. 263-285 (Venezia, 1575).

[26] GEORGII VALLAE, De Expetendis et fugiendis Rebus, opus. (Venetiis MDI).

[27] Apollonii Pergei philosophi mathematicique excellentissimi. Opera. (Venezia, 1537).

[28] APOLLONII PERGAE, *Conicorum Libri quatuor.* (Bononia MDLXVI).

[29] Contenuto nel t. IV delle *Opere Volgari* di L. B. ALBERTI pubblicate da *A. Bonucci* (Firenze, 1843-49).

prima volta insegnata la « *costruzione legittima* » che fa uso del *punto principale,* immagine del punto all' infinito ove convergono tutte le rette normali al quadro.

Più tardi BALDASSARRE PERUZZI [30] insegnava il procedimento, che è fondato sull' uso del *punto di distanza*, immagine del punto improprio appartenente a tutte le rette parallele all' orizzonte ed inclinate di 45° sul piano del quadro. Infine GUIDOBALDO DEL MONTE nel suo trattato [31] dimostrava geometricamente *la legge del punto di fuga* da lui enunciata al modo seguente: « tutte le rette parallele fra di esse ed all' oriz-« zonte, quantunque inclinate al piano del quadro, convergono sempre « verso un punto della linea orizzontale, e questo punto è quello ove « questa linea è incontrata dalla retta che è condotta parallelamente dal-« l' occhio a quelle di prima » [32].

E frattanto il metodo insegnato da PIER DELLA FRANCESCA [33] per costruire la prospettiva di una figura, riferita a due piani fra loro ortogonali (*pianta* ed *alzata*) rispetto ad un quadro normale ad entrambi, veniva posto sopra basi geometriche da FEDERICO COMMANDINO [34] e da G. B. BENEDETTI [35] divulgata da DANIELE BARBARO [36] e da SEBASTIANO SERLIO [37] arricchito da nuove costruzioni da JACOPO

[30] EGNAZIO DANTI nel commento alle Due Regole della Prospettiva Pratica di M. Jacomo Barozzi da Vignola (pp. 68), (Roma, M.DCXLIV), indica questo procedimento col nome di *Regola ordinaria di Baldassarre da Siena.*
L'architetto Sebastiano Serlio nella introduzione al suo *Libro di Prospettiva* (Libro II di Architettura di M. Sebastiano Serlio Bolognese, Venezia 1545), identifica Baldassarre da Siena in *Baldassarre Peruzzi*; egli infatti dice: Il consumatissimo Badassar Peruzzi senese, fu ancor lui pittore, et nelle prospettive tanto dotto, che volendo intendere alcune misure di colonne et d'altre cose antiche per tirarle in prospettiva, se accese talmente di quelle proporzioni e misure, che alla Architettura al tutto si diede, nella quale andò tanto avanti, che a nullo altro fu secondo. Su questo argomento cfr. Zur Erfindung der verschiedenen Distanzkonstruktionen in der malerischen Perspektive, von *H. Wieleitner.* (Repertorium fur Kunstwissenschaft (1920).

[31] Perspectivae libri sex. Pisauri 1600.

[32] loc. cit.

[33] Nel Trattato « *De Prospectiva Pingendi* » composto fra il 1470 e il 1490, pubblicato solo nel 1899 a cura di C. WINTERBERG, sotto il titolo: PETRUS PICTOR BURGENSIS, *de prospectiva pingendi.* Cfr. WIELEITNER [30].

[34] Ptolemaei Planisfaerium. (Venezia, 1558).

[35] *Jo. .Bat. .Benedicti.* Diversarum Speculationum Matem. (Torino, M.DLXXXV).

[36] La pratica della Prospettiva di M. DANIELE BARBARO, Eletto patriarca di Aquileia. (Venezia M.DLXVIII).

[37] Il Secondo Libro di Perspettive di M. Sebastiano Serlio Bolognese (1545).

Barozzi da Vignola (38) di dotti commenti da Egnazio Danti, ridotto a corpo di scienza da Guidobaldo del Monte (39).

E, con lo studio delle relazioni geometriche fra la pianta e la figura prospettica, venivano introdotte nella scienza nuovi concetti e nuovi metodi, che più tardi dovevano costituire una nuova teoria: l' *omologia piana.*

Il Metodo delle proiezioni centrali.

Dall' Italia, per la grandissima fama che gli artisti e gli architetti italiani di quel tempo avevano acquistata in tutto il mondo civile, la prospettiva passò ai paesi ultramontani.

Alberto Dürer, che per sua stessa dichiarazione studiò prospettiva a Bologna nel 1506 (sotto la scuola di Scipione dal Ferro (40)) trattò di questa materia nell' opera « *Underweysung der messung mit dem Zirckel und Richtscheyt* », che, tradotta in latino e ripetutamente stampata, ebbe grande celebrità e larga diffusione (41).

In Francia all'originale ma sterile produzione di Viator (42) seguiva (ad un secolo di distanza) l' opera di Fr. d' Aiguillon (43) ispirata alla prospettiva di Guidobaldo, e nei Paesi Bassi un grande matematico, Simone Stevin (44) dava già l'esempio della risoluzione del problema inverso della prospettiva, cioè la determinazione del centro di proiezione, date due figure, l' una prospettiva all' altra.

La ricerca, lo studio, la pratica delle costruzioni prospettiche, passarono così dagli artisti agli scienziati; e divenne comune e volgare l' uso della *proiezione centrale,* nelle investigazioni geometriche.

Questo mezzo di indagine non poteva dirsi al tutto nuovo, poichè anche gli antichi, quando definivano le coniche quali sezioni del cono rotondo, consideravano implicitamente tali curve come proiezioni del cerchio. Ma, non essendo essi abbastanza famigliari con la rappresentazione prospettica di figure solide, piuttosto che giovarsi di tale modo di generazione per dedurre dalle proprietà del cerchio quelle delle coniche, si studiavano di determinare per ogni curva una *equazione* locale, e questa ponevano a fondamento delle loro ricerche.

(38) Le due Regole della prospettiva pratica di M. J. Barozzi da Vignola con i due commentari di Ernesto Danti (Roma, 1582).

(39) loc. cit. (31).

(40) Cfr. M. Cantor, Vorlesungen über Gesch. d. Math, vol. II (1900) p. 468.

(41) Cfr. *Albrecht Durer, precursore di Monge,* di F. Amodeo. [Atti R. Acc. Sc. di Napoli, vol. XIII, serie 2ª (1907)].

(42) Viator (Y. Pélérin), *De artificiali perspective* (Tulli, 1505).

(43) Opticorum Lib. VI (Antwerpiae, 1613).

(44) Wisconstige Gedachtenissen (Leiden, 1605).

I geometri del rinascimento riconobbero invece, nella proiezione centrale, un mezzo generale e diretto di dimostrazione e di studio.

Il nuovo metodo appare nei ristretti, (già citati) di WITELO, di WERNER, di MAUROLICO ed in quello di ORONZIO FINEO [45] come particolarmente idoneo ad una succinta esposizione delle proprietà più praticamente interessanti. Dello stesso metodo si valse KEPLERO nell' opera intitolata: «*Ad Vitellionem paralipomena*» [46] quando la scoperta delle orbite planetarie aveva richiamato su le coniche l' attenzione degli studiosi.

KEPLERO, in poche pagine ha esposto la proprietà di queste curve che meglio giovano allo sviluppo delle sue teorie. La sua opera è notevole, oltre che per l'uso delle proiezioni, per la locuzione da lui usata di *punto a distanza infinita,* per la denominazione di *fuoco* da lui introdotta e pel *principio di analogia,* dal quale egli è condotto a considerare le tre coniche e la retta, come provenienti dalla deformazione continua del cerchio. Il KEPLERO, inoltre ha considerato, anche per la parabola, le proprietà dei fuochi (di cui uno a distanza infinita) [47].

Le proposizioni trovate da KEPLERO per mezzo di considerazioni di analogia e lasciate da lui senza dimostrazione, furono completate e dimostrate dal CAVALIERI «*con la scorta della buona Geometria*» nel suo Opuscoletto «*Lo Specchio Ustorio*» [48] ove sono pure dimostrate le regole date da KEPLERO e da altri per la descrizione delle coniche.

Il CAVALIERI distingue tre modi di descrivere le Sezioni Coniche: per *invenzione solida* (cioè direttamente dalla sezione del cono), per *invenzione piana vera* («quando con qualche istrumento fondato sopra «alcune loro proprietà le descriveremo nella superficie piana») e per *invenzione piana per punti continuati.*

Quest' ultimo modo è particolarmente interessante ed è insegnato con due metodi diversi, che precorrono l'applicazione di teorie generali, solo molto più tardi stabilite.

(45) Dello Specchio che accende il Fuoco ad una data lontananza. Trattato di ORONTIO FINEO *del Definato.* Dal Sig. Cav. Hercole Bottrigaro tradotto in lingua italiana, ridutto in molti luoghi alla sua vera lettione. (Venezia, 1587). L'edizione latina è del 1551.

(46) Francoforte 1604. Cfr. in particolare il paragrafo intitolato: De coni Sectionibus.

(47) L'esistenza del fuoco della Parabola ed alcune delle proprietà ad esso inerenti, si trovano già enunciate da VITELLIONE, dal FINEO (loc. cit.) e da MARINO GHETALDO (Nonnullae propositiones de parabola, nunc primum inventae. (Roma, 1603).

(48) *Lo Specchio Ustorio* del P. F. Bonaventura Cavalieri Giesuato overo *Trattato delle Settioni Coniche,* e di alcuni loro mirabili effetti intorno al Lume, Caldo, Freddo, Suono, e Moto. (Bologna, 1632, una 2ª edizione del 1650). Questo importante trattato era composto dal 1629. Cfr. pp. 131-132 della 2ª edizione). Per i riferimenti all'opera di KEPLERO si vegga il Cap. VII: «*Di un principio cavato dalla Prospettiva*».

Notevole è il secondo di questi metodi, solamente annunciato nella 2ª Edizione dell'Opera ([49]) ma sviluppato, per quel che riguarda la parabola nella *Esercitazione* 6ª ([50]), e, per tutte e tre le coniche nella lettera al TORRICELLI del 15 giugno 1641 ([51]).

Il CAVALIERI insegna a descrivere la conica per punti, come *luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti in due particolari fasci proiettivi.*

Questa costruzione, che offre una diretta applicazione del celebre teorema trovato nella sua forma generale due secoli dopo dallo STEINER, pare sfuggita alla maggior parte degli storici ([52]).

Desargues.

Ma il geometra che in quell'epoca più direttamente si valse, nello studio delle Coniche, di un metodo fondato sulla sistematica applicazione della prospettiva, quello cui si debbono le idee più geniali e feconde, è GÉRARD DESARGUES.

« Il suo punto di vista è completamente geniale, e proiettivo-geo- « metrico. Non solo egli considera le parallele come caso speciale di rette « uscenti da un punto che si supponga trasportato all'infinito; ma i « punti all'infinito del piano sono da lui concepiti come situati sopra « una retta all'infinito; i cilindri come coni col vertice in un punto « improprio; le parabole aventi comune la direzione dei diametri, come « tangenti fra loro nel punto improprio, le iperbole con assintoti co- « muni, come coniche bitangenti in due punti impropri. E dice che « tutte queste proposizioni sono valide, perchè, mediante proiezione « centrale, tali casi particolari possono ridursi nel caso generale, da cui « si fanno dipendere » ([53]).

Questo modo di vedere costituì un principio fecondissimo, che valse ad estendere a casi della massima generalità le proprietà proiettive delle figure, verificate per qualche anche specialissimo caso.

([49]) Bologna, 1650, p. 133.

([50]) Exercitationes Geom., Bon. 1647.

([51]) Cfr. *Opere di Torricelli.* Vol. III, pp. 53-54. Per la dimostrazione vedi TORRICELLI, *Opere,* vol. I, parte 2ª, pp. 408-409.

([52]) Lo CHASLES ha giustamente apprezzata la costruzione della parabola data dal Cavalieri, ma egli ignorava che il Cavalieri avesse dato analoghe costruzioni anche per la Ellissi e la Iperbole, e perciò soggiungeva: mais Cavalieri, s'étant borné à un seul théorème, l'un des plus restreints de cette théorie qui est extrèmement feconde, l'ouvrage de DE WITT (che nel 1658 ha alla sua volta dato tali costruzioni) présente réellement un caractère de nouveauté qui mérite d'être remarqué dans l'histoire de la Géometrie. (Aperçu, pp. 101).

([53]) ZEUTHEN, Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert p. 180). AMODEO, I trattati delle sezioni coniche (Napoli, 1906).

Il DESARGUES se ne valse per ritrovare le principali proposizioni su la *polarità rispetto ad una conica,* che gli antichi avevano solo per casi speciali ritrovate, senza conoscerne la generalità ed il valore.

Un' altra idea fondamentale, per lo studio delle proprietà delle figure, quella di *involuzione* è dovuta al DESARGUES, (cui si deve anche il nome di *involuzione*) ed è ben degno del nome di DESARGUES il *teorema del quadrangolo completo inscritto in una conica* ([54]) poichè non solo egli lo ha dato sotto forma generale, ed esplicita, ma perchè egli ne ha compreso la importanza come mezzo generalissimo di dimostrazione e di studio ([55]).

L' opera ove DESARGUES esprimeva queste sue mirabili scoperte ebbe poca fortuna presso i suoi contemporanei. Egli l'aveva pubblicata nel 1639 col titolo « *Brouillon project d' une atteinte aux événemens des rencontres d' un cone avec un plan* » ed è veramente un abbozzo, piuttosto che un trattato organico: e perciò fu giudicato per cosa astrusa, pressochè inintelligibile.

Bisogna notare peraltro, che alla sua scuola si è formato uno dei più illustri matematici dell' epoca: BIAGIO PASCAL, il quale, valendosi delle idee e dei risultamenti ritrovati da DESARGUES, compose (a 16 anni) un trattato sulle coniche, del quale pubblicò, nel 1640, come *Saggio,* un opuscoletto di 6 pagine ove è contenuto il celebre teorema su l' esagono inscritto, che porta il suo nome.

Le direttive di DESARGUES furono in parte seguite da due geometri francesi F. DE LA HIRE ([56]) e JACQUES LE POIVRE ([57]) i quali considerarono le coniche, indipendentemente dal cono, e costruite nel piano, quali figure omologiche del cerchio.

Ma solo più tardi venne l' uomo di genio che seppe raccogliere tanti sparsi elementi e formarne una scienza, organica e completa: la *Geometria Proiettiva.* Questa scienza sorse nel 1822 col *Traité des propriétés projectives des figures* di JEAN VICTOR PONCELET.

Il PONCELET pose, per primo, nella sua generalità, il problema di studiare sistematicamente le proprietà delle figure geometriche che hanno carattere di invarianza rispetto alle operazioni di proiezioni e sezioni, intese nel senso più generale, cioè delle *proprietà grafiche* e di *quelle proprietà metriche che sono connesse alla nozione di birapporto.*

La nuova geometria, è tutta basata su tre dottrine: l' *omologia solida,* la *polarità rispetto ad una conica,* il *principio di continuità;* delle

([54]) Cfr. il n. 388 (vol. I, p. 313) del nostro testo, ove è enunciato sotto la forma: « Le coniche di un fascio determinano sopra una trasversale le coppie di una involuzione ». Il quadrangolo inscritto è quello che ha per vertici i punti base del fascio.

([55]) Cfr. ZEUTHEN, loc. cit., pag. 183-184.

([56]) Nouvelle méthode en Géometrie pour les sections des superficies Coniques et Cylindriques (Paris, 1673).

([57]) Traité des sections du cylindre et du cône (Paris, 1704).

quali il PONCELET seppe dimostrare l'amplissima generalità, e la potenza creatrice.

L'opera del PONCELET fu continuata dal GERGONNE, dallo CHASLES e dal MÖBIUS, dalle opere dei quali emersero due nuovi principi generali: quello di *dualità*, e quello di *corrispondenza biunivoca*.

Al MÖBIUS (58) ed allo CHASLES sono in ispecial modo, dovute le considerazioni generali delle *omografie*, e delle *correlazioni* o *reciprocità*, cioè, in tutta la loro estensione, della *proiettività* fra forme geometriche.

Sono questi i principî che informano le geometria moderna, che nelle opere di PLÜCKER (59), di STEINER (60), di STAUDT (61), di CREMONA ha raggiunto il più elevato grado di sviluppo.

Il Metodo delle Coordinate.

L'introduzione dei nuovi concetti e dei nuovi metodi non impedì lo sviluppo ulteriore dei metodi e delle idee, che formavano la caratteristica della geometria greca.

Abbiamo visto che gli antichi, quando dovevano studiare una curva, consideravano come fissa una retta del piano di essa (generalmente un diametro), immaginavano poi un sistema di rette parallele (ordinatamente applicate al diametro) e si studiavano di determinare la relazione che i segmenti di tali rette compresi fra la curva ed il diametro avevano con le corrispondenti porzioni (ascisse) del diametro medesimo. Trovata una tale relazione (*sintomo* o *caratteristica* della curva) da essa, con opportune trasformazioni, deducevano tutte le altre proprietà grafiche e metriche della figura.

Tale è l'origine del *metodo delle coordinate* (62).

(58) Der *barycentrische Calcul,* ein neues Hilfsmittel z. Analyt. Behandl. d. Geometrie (1823).

(59) P. PLÜCKER, Analytisch-geometrische Entwicklungen (Essen, 1828).

(60) STEINER, *Systematische Entwickelung* (1832).

(61) C. STAUDT, Geometrie der Lage (1847). Geometria di Posizione, tradotta da M. Pieri (1889). Beiträge zur G. d. L. (1856-1860).

(62) Anche la terminologia da noi usata proviene dalle traduzioni latine di APOLLONIO, fatte nel XVI e nel XVII secolo. La forma *ascissa* per segmento si trova nell'Apollonio di F. COMMANDINO [cfr. p. es. Lib. III, Prop. LIII, cart. 98 verso (Bononiae, MDLXVI)] ed è usata nel senso attuale nell'Apollonio di BORELLI [Lib. V. lef. VI, pag. 1 (Florentiae MDCLXI)]. Cavalieri e Torricelli, invece del termine generico « *ascissa* » usavano, di preferenza, la voce « *diametrale* » od asintotale (Tom. I, pag. 249). Anche *Cartesio* e *Fermat* usavano le locuzioni « *segmentum diametri* », « *portio diametri* », « *intercepta diameter* ». Con Leibniz, (dal 1675 in poi) è stato definitivamente fissato il valore del termine matematico « ascissa ».

La voce « *ordinata* », viene dalla frase « *ordinatim applicata* » corrente-

Nella applicazione di questo metodo, presso tutti gli autori che fin verso la fine del secolo XVIII ne fecero uso, si vede rappresentato uno solo degli assi coordinati (quello delle ascisse) ed a questo sono applicati segmenti (paralleli ad una direzione data), terminati alla curva.

La posizione di tale asse è sempre determinata in dipendenza della figura da studiare; e non si trova un sistema di assi fisso, cui si suppongano riferiti tutti i punti del piano, nè presso gli antichi, nè presso gli autori moderni che si considerano quali fondatori della geometria analitica ([63]).

Non mancano tuttavia, in altri rami della matematica, esempi di applicazione di un metodo delle coordinate che fa uso di un sistema di assi fisso, cui si suppongano riferiti tutti i punti del piano o dello spazio.

Tali sono le *coordinate geografiche*. Chi legga infatti in *Strabone* il passo ([64]).

«... Sembra opportuno pigliare due linee rette, le quali tagliandosi «fra di loro ad angoli retti, attraversino la Terra abitata; l'una se- «condo la maggiore lunghezza, l'altra secondo la maggiore larghezza: «e quella sarà uno dei paralleli, questa uno dei meridiani. Poi tornerà

mente usata nell'*Apollonio di Commandino*. CAVALIERI, TORRICELLI, e più tardi EULERO, invece di «*ordinata*» preferivano usare la voce «*applicata*», pure desunta da quella stessa frase di Apollonio.

([63]) L'affermazione che nella Geometria di Cartesio esista quel sistema di assi che è impropriamente detto *Cartesiano* (*un sistema di assi fisso dato una volta per tutte*), benchè confermata da storici autorevoli (Cfr. p. es. G. LORIA, *Le Scienze esatte nella antica Grecia*, Libro II. *Appendice*, n. I (Milano, 1914, pag. 425) non corrisponde ai fatti. Ciò è stato già osservato anche dall'ENESTRÖM (Biblioteca Math. 13, pag. 7) il quale, a proposito della Geometria analitica di Cartesio, dice: «und man könnte darum mit besserem «Rechte seine Analytische Geometrie eine *Ordinatengeometrie*, als eine *Koor- «dinaten-Geometrie nennen*». Cfr. anche E. BOMPIANI, «*Che cosa contiene la Géometria di Cartesio?*». Periodico di Matematica, Serie IV, v. I, 1921, pag. 316 ove si leggono le conclusioni seguenti:

«Risulta evidente dalla genesi che ho tentato di ricostruire, del pensiero di Cartesio:

1° che questi non fa una Geometria Analitica *del piano*, ma dà un metodo per studiare *una curva* nota la generazione meccanica;

2° che in conseguenza di ciò non hanno ragion d'essere le nozioni sistematiche che oggi si usa di premettere alla trattazione dei luoghi. *Gli assi dati a priori, indipendentemente da un determinato problema, non ci sono....*».

E' del pari insussistente che nella geometria di Cartesio sieno considerate coordinate negative. Lo stesso TANNERY (Notions de Mathematique, Paris, 1903, pp. 333-335) riconosce che: «On attribue souvent à tort à Descartes l'introdution de la invention de compter positivement ou négativement les coordonnées».

([64]) *Geografia*. Volgarizzata da *Francesco Ambrosoli* (Milano, 1832), Libro II (vol. II, pag. 258).

« bene l' immaginare altre linee parallele a ciascuna delle due predette...
« Come poi queste linee rette si debbano condurre per luoghi conosciuti,
« noi ne abbiamo già alcune, nelle quali questo requisito si trova, parlo
« delle due rette di mezzo che indicano la lunghezza e la larghezza.

« Le altre si potranno facilmente condurre col soccorso di queste,...
« e determinare gli altri accidenti dei siti abitabili rispetto al rimanente
« della Terra.... »,

ravviserà quivi la descrizione di un sistema di coordinate ortogonali, molto più simiglianti alle Cartesiane che non siano quelle che si trovano nella Geometria di Cartesio.

Ma l' uso delle coordinate geografiche non pare abbia avuto influenza alcuna sullo sviluppo del metodo delle Coordinate nella Geometria Analitica.

Nè maggior influenza ebbe la indicazione della costruzione di *grafiche* rappresentanti la successiva variazione di elementi dati, nello svolgimento di fenomeni naturali, che si trova presso alcuni scolastici medioevali, e segnatamente nel *Tractatus de latitudinibus formarum* scritto nella seconda metà del secolo XIV da ORESME, e pubblicato a Padova nel 1482 ([65]).

Ma non può dirsi sicuramente trascurabile l' influenza che sull' uso delle coordinate ebbe lo studio del movimento fisico iniziato dal GALILEO.

Nel terzo dei suoi celebri *Discorsi,* GALILEO rappresenta geometricamente il moto uniformemente accelerato prendendo il tempo per ascissa e la velocità per ordinata. Il luogo dei punti così ottenuti è una retta ed il cammino percorso è rappresentato dall' area di un triangolo.

Nel quarto *Discorso,* GALILEO trova che la traiettoria di un corpo pesante lanciato orizzontalmente con velocità data è una parabola, e che in un punto qualunque della traiettoria, il rapporto delle due velocità, orizzontale e verticale è eguale al rapporto $\frac{x}{p}$ del parametro alla ascissa (supposto che $x^2 = 2py$ sia l' equazione della parabola).

L'osservazione, fatta da TORRICELLI, che questo rapporto rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla parabola, e che quindi il rapporto delle velocità fornisce la determinazione Apolloniana della tangente, fu il punto di partenza del *Metodo delle Tangenti,* d' onde nacque il calcolo differenziale ([66]).

Torricelli.

Il metodo delle Coordinate, usato da APOLLONIO per lo studio delle Coniche si mostrò idoneo allo studio di curve più generali, in seguito

([65]) Cfr. WIELEITNER, Bibliotheca Mathematica, 13/3 pp. 115-145.

([66]) Cfr. H. ZEUTHEN, *Notes sur l' histoire des mathématiques,* VII. *Barrow le maître de Newton* (Boll. Acad. di Danimarca (1697), pag. 573.

alle ricerche che contemporaneamente venivano fatte, in Francia ed in Italia.

La prima generalizzazione, suggerita dalla forma delle equazioni Apolloniane della parabola e della iperbole, riguarda curve che furono dette *parabole ed iperboli generali,* rappresentate da equazioni del tipo

$$\begin{cases} y^m = ax^n \\ x^n y^m = a^n b^m. \end{cases}$$

In Italia tali curve furono principalmente studiate da CAVALIERI e da TORRICELLI.

Ed è notevole l' esposizione che ne fa il TORRICELLI nelle sue memorie intitolate: *De Infinitis hyperbolis* e *De Infinitis Parabolis* (67); poichè ivi il Torricelli dimostra la esistenza di superficie infinitamente estese ed aventi area finita; e, nella applicazione del metodo delle coordinate, usa come asse delle ascisse una retta che non è diametro, ma asintoto della curva.

Un' ulteriore applicazione del metodo delle Coordinate fatta dal TORRICELLI riguarda la *curva esponenziale* (68), la quale pure è riferita all' asintoto quale asse delle ascisse; mentre nella memoria *Su le infinite spirali* (69) egli fa uso di un sistema di *coordinate polari.*

Fra le più notevoli scoperte fatte dal Torricelli, con l' uso del metodo delle coordinate, è da ricordare anche quelle *dell' inviluppo di una famiglia di curve,* di cui egli per primo ha dato esempio nel suo Opuscolo *De motu proiectorum* (70).

Fermat e Cartesio.

Ma il passo definitivo verso lo stabilimento dell' odierno sistema di coordinate, fu fatto, in quell' epoca, dai matematici francesi P. DE FER-

(67) Cfr. *Opere di Torricelli.* Vol. I. Geometria. Pubblicato per cura di *Gino Loria.* Parte II (Faenza, 1919) pp. 231-328.

In questa memoria, dopo premessi alcuni lemmi per migliore intelligenza del testo, si dà la definizione generale delle curve in questione (pag. 240. Definitio). La stessa definizione insieme col Teor. I, si trovano ripetute alle pagine seguenti. Tali notevolissime proposizioni sono la traduzione latina della Definizione e del Teor. I dei *Racconti* XL, XLI (vol. III, pag. 24-25). (Cfr. l'*Avvertimento dell'Editore,* alla pag. 230, vol. I, parte II: « la de« finizione generale delle curve in questione, che si cerca indarno al prin« cipio della memoria seguente, si trova invece nel XL Racconto »).

(68) *De Hemyperbola Logaritmica.* Opere, loc. cit., vol. I, parte II, pagine 337-347.

(69) *De Infinitis Spiralibus,* loc. cit., pp. 351-410.

(70) Cfr. loc. cit., vol. II, pag. 178 (Prop. XXX). Vedi anche: E. BORTOLOTTI, *Gli inviluppi di linee curve...* (Periodico di Matematiche, serie IV, vol. I, 1921, pp. 263-276).

MAT ([71]) e R. DESCARTES ([72]) con la rappresentazione delle curve corrispondenti ad equazioni algebriche:

$$f(xy) = ax^n + bx^{n-1}y + ... = 0.$$

Il grado di tale equazione, fu allora riconosciuto come elemento opportuno alla classificazione delle curve e dei problemi ad esse attinenti, fu iniziata la ricerca sistematica delle curve mediante operazioni analitiche, da eseguire sulle equazioni loro e fu trasportato nel campo geometrico, l' uso del suggestivo simbolismo algebrico, e del linguaggio ad esso pertinente.

L' opera del FERMAT, benchè abbia moltissimi punti di contatto con quella di CARTESIO, si proponga gli stessi obbiettivi e sostanzialmente raggiunga il medesimo scopo con gli stessi mezzi, per esser stata pubblicata solo dopo la morte dell'Autore (40 anni dopo quella di Cartesio) ebbe notorietà assai minore e scarsa influenza su lo sviluppo di quella dottrina.

Quella di CARTESIO invece, fu subito conosciuta, discussa, divulgata in successive edizioni, arricchita di commenti, che non solo chiarivano il testo, ma lo completavano, lo estendevano, lo illustravano con svariatissime applicazioni, con molteplici esempi; e la sua fama andò crescendo col tempo, fino ad oscurare la fama di tutti quelli che prima di lui avevano trattato la stessa materia, di quelli che gli furono a lato e perfino di quelli che dopo di lui, per lungo volger d' anni, con paziente lavoro e geniali invenzioni, plasmarono nella forma che noi ora ammiriamo, la Geometria Analitica.

« *Cette Doctrine de Descartes* (esclamava uno storico illustre ([73]) *dont* « *aucun germe ne s' est trouvé dans les écrits des géomètres anciens est* « *la seule peut-être dont on puisse dire: Prolem sine matre creatam* ».

La critica storica, pur riconoscendo l'altissimo valore dell' opera Cartesiana, lo vuole ristretto nei suoi veri termini osservando che:

« Nulla di interamente nuovo è stato creato da Cartesio: ma egli ha « saputo con sicuro colpo d'occhio afferrare l' intimo significato di ciò che « da altri era stato sparsamente ritrovato, e le varie nozioni connettere in « corpo di scienza » ([74]).

Abbiamo già osservato che il *metodo delle Coordinate,* nella forma in cui fu usato da CARTESIO, risale ad APOLLONIO. La corrispondenza

([71]) *Ad locus planos et solidos isagoge.* (Pubblicato nel 1679; ma composto e divulgato prima del 1637).

([72]) *Discours de la méthode* (Leyde, 1637).

([73]) CHASLES, *Aperçu,* pag. 94.

([74]) WIELEITNER, *Auszug zur Erfindung der Analytischen Geometrie,* (Mathematisches Lesebuch 4. Band (1921), pag. 3. Cfr. anche ZEUTHEN, Geschichte der Math. im XVI und XVII Jahrh. pag. 201-202.

fra le proprietà geometriche delle figure e certe determinate relazioni metriche fra segmenti coordinati ad un elemento generico delle figure medesime, era nota agli antichi, ed era parimenti nota per lo meno in casi particolari assai interessanti, la applicazione di questa corrispondenza alla risoluzione, (per mezzo di intersezione di curve di data equazione), di questioni numeriche dipendenti da equazioni algebriche determinate. Quest' ultimo quesito occupa appunto la intiera *Parte III* della Geometria di CARTESIO.

Ma ciò che forma la più speciale caratteristica della Geometria di CARTESIO non è la risoluzione di questioni algebriche per mezzo di costruzioni geometriche, bensì la *risoluzione di questioni geometriche per mezzo di procedimenti algebrici.*

« Ogni problema geometrico, osserva CARTESIO, può facilmente esser « ridotto a tal termine che non occorra poi altro che la conoscenza della « lunghezza di alcuni segmenti per poterlo costruire ».

Posto il problema in equazione, se risulterà il numero delle equazioni eguale a quello delle incognite, si avrà una soluzione sola od un numero finito di soluzioni, il problema potrà dirsi *determinato,* e la costruzione avrà in mira di fissare la posizione di un punto, o di un numero finito di punti.

Ma se, al contrario, si avrà un numero di incognite superiore a quello delle equazioni « *non obstant qu' on n' omette rien de ce qui est* « *desiré en la question, cela temoigne* (dice CARTESIO) *qu' elle n' est pas* « *entièrèment déterminée* » (Liv. I, sect. IV).

Ed in tal caso: « *tous les points d' une même ligne peuvent être* « *pris pour celui qui est demandé* ».

Problemi determinati.

I problemi della prima specie, cioè i *Problemi determinati,* furono trattati « secundum algebram », fin dai primordi del calcolo algebrico. Ne troviamo esempio nella *Practica Geometriae* di LEONARDO PISANO (1220) ed una più estesa trattazione presso gli algebristi italiani del '500.

Ma, anche in questa dottrina, CARTESIO avrebbe, al dire degli storici, fatto un passo che fu decisivo, sia per l' ulteriore progresso della Analisi dei problemi determinati, sia per lo sviluppo della Teoria dei luoghi geometrici.

Si legge infatti che:

« Cartesio iniziando la geometria, sostituisce senz' altro ad un se« gmento la sua misura rispetto ad un altro.... Poi eseguisce geometri« camente sul segmento le operazioni algebriche elementari relative alle « misure di essi....

« Un vantaggio essenziale è in ciò: che *interpretando la potenza* « *di un numero come misura di un nuovo segmento,* si evita il lin« guaggio macchinoso dei Greci, corrispondente alla figurazione di x^2

« come un' area, di x^3 come un volume e si possono trattare anche pro-
« blemi di grado superiore al 3° riportandone la figurazione entro il
« dominio della costruzione piana ([75]).

« E questo modo di operare rappresenta *uno dei capitali progressi* « *dovuti a Cartesio,* cioè la *introduzione del segmento unità,* e con ciò « la possibilità di *rappresentare il prodotto di due segmenti con un nuovo* « *segmento* ([76]).

« E con ciò è *fatto il passo che era necessario affinchè il campo nu-* « *merico, ed i punti di una retta, potessero esser messi in reciproca cor-* « *rispondenza* » ([77]).

Questo passo, peraltro era stato fatto quasi un secolo prima, cioè verso la metà del secolo XVI dall' algebrista italiano Raffaele Bombelli.

L'« *Algebra di Raffaele Bombelli* » oltre i tre libri pubblicati nel 1572 a Bologna, contiene due libri geometrici, annunciati dal Bombelli a pag. 648 del suo volume ([78]) ma rimasti inediti, e tuttora conservati manoscritti in un Codice della Biblioteca Comunale di Bologna che risale alla metà del secolo XVI.

Ma alcune proposizioni di questi libri geometrici sono state dal Bombelli inserite nel Libro II dell' opera a stampa, e perciò la parte che ora mi interessa di rilevare non è rimasta totalmente inedita e non può dirsi sconosciuta.

L'opera geometrica del Bombelli, nell'edizione manoscritta, per quel che riguarda la costruzione di problemi determinati presenta molte analogie con quella di Cartesio.

Dopo aver, nelle prime 14 proposizioni, ricordato le fondamentali costruzioni di geometria piana, incomincia quella che può chiamarsi *Geometria Analitica,* con le proposizioni (carte 166):

15. Sommare de linee.
16. Sottrarre de linee.
17. Moltiplicare de linee.
18. Partire de linee.
19. A trovare il creatore (cioè la radice di dato indice) in linee.
20. Dimostratione del creatore in linee.
21. Dimostratione della lunghezza della dignità (della potenza) essendo nota la cosa (la radice).

L' introduzione del segmento unità è fatta fin dalla proposizione 18;

([75]) Cfr. *E. Bompiani,* loc. cit. (63).

([76]) A. Krazer, *Zur Geschichte der Graphischen Darstellung von Functionen.* Jahresbericht der Deutschen Math. Verinigung, 24 Bd (1916), pag. 363.

([77]) Cfr. Wieleitner, *Auszug zur Erfindung...,* loc. cit. (74), pag. 4. Cfr. anche Zeuthen, loc. cit. (74), pag. 205.

([78]) loc. cit. (10).

con l' avvertenza: *il partire di linee non si può fare se non è data una comune misura,...*

Ed è espressamente dichiarata nella « dimostratione della *lunghezza della dignità* » (carte 168):

Riporterò qui il passo che mi pare più significativo, a chiarimento del quale debbo premettere che, per indicare genericamente una quantità variabile, (ciò che noi ora rappresentiamo con la lettera x) gli algebristi italiani del '500 dicevano *il lato,* o *la cosa,* e rappresentavano tale quantità variabile con un segmento. Così la *valuta della cosa,* è *la lunghezza di un segmento,* la *valuta.... in numero,* è il numero che la misura. Le potenze della variabile erano dette *dignità;* la seconda potenza, *censo* o *quadrato,* la terza *cubo.* La *notazione esponenziale* fu introdotta dal Bombelli.

« Essendo nota la valuta della cosa rispettiva a una misura data, « si può *trovare in lunghezza tutte l' altre dignità.* Et perchè a qual- « cheduno non capirà, che, essendo nota la valuta della cosa, senz' altro « si possa trovare la valuta del censo, et dell' altre dignità; poichè nel- « l'operatione di Algebra in numero, data che si ha la valuta della cosa « subito si troverà la valuta del censo quadrando essa valuta; come sa- « rebbe se la cosa valesse 3 il censo valerà 9 senza cercare altro; et « in linee, addimandando una misura; dico che il procedere dell' uno non « è differente dal procedere dell' altro: perchè se la cosa vale 3, quel 3 è « numero rispetto l'unità, et tale proportione ha la detta unità al 3, « valuta dalla cosa, come 3 al 9 valuta dal censo, et così via procedendo « le proportioni rispetto a quella unità. Così la *misura data farà l' ef-* « *fetto della unità in numero* ».

In conseguenza, quando ciò torna opportuno, egli rappresenta con segmenti, il quadrato, il cubo,... e qualsiasi altra potenza di segmenti cogniti ed incogniti.

Così si spiega come, nella dimostrazione geometrica che egli dà delle formule di risoluzione della equazione cubica, egli rappresenti il binomio $x^3 + px = x(x^2 + p)$ con un rettangolo nel quale uno dei lati ha lunghezza x, l' altro è somma di due segmenti dei quali l' uno ha lunghezza x^2, l' altro lunghezza p.

Ciò non solo nel manoscritto, ma anche nell' opera a stampa (pagina 289); ove, questa dimostrazione è riportata, ed ove non mancano altre precise indicazioni di un tale suo modo di procedere ([79]). Quando si pensi alla grande notorietà che aveva in quel tempo l'Algebra di Bombelli in tutta Europa, il (Leibniz espressamente dichiara di aver formato sopra quel libro la sua educazione matematica) non si può in nessun modo escludere che o direttamente od indirettamente, quelle idee di Bombelli non siano pervenute al Cartesio e non è quindi lecito che

([79]) « Algebra », loc. cit. (10), alla pag. 286-287.

a quest' ultimo sia attribuito quel passo che al dir degli storici costituisce così essenziale progresso nella Rappresentazione analitica delle grandezze geometriche.

Aggiungeremo che a Bologna il BOMBELLI trovò imitatori e seguaci. Fra i quali ricorderemo PAOLO BONASONI, lettore allo Studio di Bologna dal 1586 al 1593, che ha lasciato un *Algebra Geometrica* (80) notevole per la sorprendente analogia con l'*Algebra geometrica* divinata dallo ZEUTHEN (anche il titolo è il medesimo), e per l' uso, nelle applicazioni dell' algebra alla geometria, dei simboli introdotti dal BOMBELLI per rappresentare l' incognita.

Egli indica cioè, il segmento incognito con simbolo della forma $A\cup^1$; e, se il problema involge più quantità incognite, adopera lettere diverse come $A\cup^1$, $G\cup^1$,.....

Infine, sempre fra coloro che a Bologna continuarono l' opera del BOMBELLI, ricorderemo PIETRO ANTONIO CATALDI, che, nella *Algebra Lineale,* pubblicata l'anno 1618, espose sistematicamente la costruzione geometrica delle espressioni algebriche, e la risoluzione, per mezzo dell' Algebra, di problemi geometrici determinati.

Luoghi geometrici.

Veniamo finalmente ai problemi geometrici non determinati, cioè alla costruzione dei *Luoghi geometrici.*

Qui veramente il CARTESIO (e con lui il FERMAT) si innalza al disopra di quanti prima di lui adoperarono l' algebra al sussidio della Geometria; di qui può dirsi che incominci la *Geometria Analitica* moderna.

Ed ecco come lo stesso Cartesio espone il suo concetto:

« Car ces lieux ne sont autre chose, sinon que lorsqu' il est question « de trouver quelque point, auquel il manque une condition pour être « determiné, ..., tous les points d'un même ligne peuvent être pris pour « celui qui est demandé. Et si cette ligne est droite ou circulaire on la « nomme un *lieu plan.* Mais, si c' est une parabole ou une hyperbole, « ou une ellipse, ou la nomme un *lieu solide.* Et toutes-fois et quantes « que cela est, on peut venir à une équation qui contient deux quan- « titez inconnues, et est pareille à quelqu' une de celle, que je viens de « resoudre. Que si la ligne qui determine ainsi le point cherché, est « d' un degré plus composée que les Sections coniques, on la peut nom- « mer en même façon un *lieu sursolide,* et ainsi des autres. Et s' il « manque deux condition à la determination de ce point, le lieu où il

(80) *Algebra Geometrica. Inventa* a PAULO BONASONI *Bononiensi.* (Opuscolo di carte 51 (pag. 102) diviso in tre libri (Mss. del secolo XVI).

« se trouve est une superficie, laquelle peut être de même ou plate, ou « spherique, ou plus composée ».

« Mais le plus haut but, qu' ayent eu les Anciens en cette matière « a été de parvenir à la composition des lieux solides: et il semble que « tout ce qu' *Apollonius* a écrit des Sections coniques, n' à été qu' à « dessein de la chercher » (81).

Ed è interessante il notare che, proprio nel punto ove l'opera sua offre la massima originalità, il CARTESIO, piuttosto che atteggiarsi a creatore, si presenti come continuatore degli antichi.

Ulteriori estensioni del Metodo delle Coordinate.

Da CARTESIO ad EULERO il *metodo delle Coordinate* fece lenti, ma continui progressi.

Nella *Introductio in Analysin Infinitorum* di EULERO (1748) si trovano gli assi coordinati indipendenti da ogni particolare questione proposta in istudio, e si trova l' indicazione del *segno delle coordinate*: qui veramente la nozione di coordinata è posta a fondamento di una esposizione sistematica della Geometria analitica.

Ma questa teoria non avrebbe potuto liberarsi dal groviglio dei casi particolari e conseguire, con la massima generalità, la più perfetta uniformità di metodo e perspicuità di forma, senza la effettiva introduzione degli *elementi immaginari* e degli *elementi improprii.*

Le nozioni di *punto e di retta immaginari* primamente esposti nella *Géométrie supérieure* di CHASLES (1852), e nei *Beiträge Zur Geometrie der Lage* di STAUDT (1856), trovarono un ulteriore sviluppo nelle opere di E. N. LAGUERRE (1870); ed il concetto di coordinata fu successivamente generalizzato, fino a comprendere in un solo concetto, ed a render soggetti ad un trattazione unica, tutti gli elementi, proprî ed improprî, reali ed immaginarî, dello spazio geometrico.

Dobbiamo al MÖBIUS la nozione di *Coordinate baricentriche* (82), al PLÜCKER (83) quella di *coordinate omogenee,* di *coordinate trilineari,* allo STAUDT di *coordinate proiettive.*

E nello stesso tempo che, col perfezionare il metodo delle coordinate, la Geometria Analitica rendeva più potenti e più sicuri i mezzi di rappresentazione e di indagine, estendeva il campo della sua attività con la acquisizione dei metodi e delle teorie pertinenti alla *Analisi Infinitesimale.*

Il *metodo delle Tangenti,* nato quasi contemporaneamente in Italia ed in Francia dalla applicazione del concetto galileiano della composi-

(81) Liv. II. Art. X. Des Lieux plans et solides, et de la manière de les connoître. (Nell' edizione commentata da RABUEL (1730) alla pag. 245).

(82) *Der barycentrische Calcul* (1827).

(83) J. PLÜKER, *Analytisch-geometrische Entwicklungen.*

zione dei moti e dai principî del calcolo degli indivisibili, posto dal NEWTON e dal LEIBNIZ a fondamento di una nuova scienza, il *Calcolo Differenziale,* dava alle Teorie Geometriche una generalità che non conosce confini.

La storia di queste scienze si identifica a questo punto con la storia del *Metodo Infinitesimale,* ed esce dai limiti, entro cui vuol esser compreso il presente discorso; il quale ha in mira di ricordare le antiche origini, piuttosto che di noverare i recenti progressi.

XL

PARTE I.

PUNTI, RETTE E PIANI

3

CAPITOLO I.

COORDINATE NELLE FORME DI PRIMA SPECIE

§ I. Nozioni fondamentali.

1. Forme geometriche elementari.

I *punti*, *le rette ed i piani* sono considerati come elementi fondamentali, primitivi, generatori delle figure geometriche. E per *figura o forma geometrica* si intende qualunque aggregato di punti, di rette e di piani.

Fra le figure geometriche si distinguono le *nove* seguenti, che si dicono *forme geometriche elementari*:

I. La *Punteggiata*: figura costituita dalla totalità dei punti di una retta.

II. Il *Fascio di rette*: figura formata dalla totalità delle rette di un piano, uscenti da un punto.

III. Il *Fascio di piani*: figura risultante dalla totalità dei piani uscenti da una retta.

Queste prime tre forme si dicono *forme di prima specie.*

IV. Il *Piano punteggiato*: figura risultante dalla totalità dei punti di un piano.

V. Il *Piano rigato*: figura costituita dall'insieme di tutte le rette del piano.

VI. La *Stella di raggi* (o di rette): figura formata dall'insieme di tutte le rette dello spazio uscenti da un punto.

VII. La *Stella di piani*: figura costituita dall'insieme di tutti i piani che hanno in comune uno stesso punto.

Le quattro forme ora nominate si dicono *forme di seconda specie.*

VIII. Lo *Spazio punteggiato*: figura risultante della totalità dei punti dello spazio.

IX. Lo *Spazio di piani*: figura risultante dalla totalità dei piani dello spazio.

Queste ultime due forme vengono dette di *terza specie.*

2. Si dice che un punto ed una retta si *appartengono* quando il punto è sulla retta (appartiene alla retta), o, in altri termini, quando la retta contiene il punto (appartiene al punto).

La retta cui appartengono i punti di una punteggiata si dice *sostegno* della punteggiata.

Il punto cui appartengono tutti i raggi di un fascio si dice *centro* del fascio.

La retta che appartiene a tutti i piani di un fascio di piani si dice *asse* del fascio di piani.

3. Elementi impropri. — Due rette complanari hanno, in generale, un punto comune ed uno solo. Fa eccezione a questo enunciato il caso di rette parallele; ma la eccezione si può togliere, considerando la direzione comune a due rette parallele come un punto appartenente ad entrambe le rette e situato su di esse a distanza infinita, il quale si dice **punto improprio**, a distinzione dei punti a distanza finita considerati nella geometria elementare, che si dicono *punti proprii.*

Ad ogni retta appartengono dunque infiniti punti proprii ed un solo punto improprio; e la retta viene raffigurata come una linea chiusa, che un punto può percorrere intieramente, sempre muovendosi nello stesso senso (passando pel punto improprio e tornando al punto di partenza).

Due punti determinano sulla retta cui appartengono due segmenti: quello di grandezza finita, che ordinariamente si considera, ed un altro di grandezza infinita, che contiene il punto improprio.

Tutte le rette di un piano parallele ad una medesima costituiscono un fascio di raggi avente per centro il punto improprio, direzione comune ad esse.

Tutte le rette dello spazio, parallele ad una medesima, costituiscono una stella di raggi, avente per centro il punto improprio definito dalla loro direzione comune.

4. I punti improprii di un piano si considerano come giacenti su di una **retta impropria**, che appartiene a tutti i piani paralleli ad esso ed immedesima la loro comune *giacitura.*

La totalità dei piani paralleli ad un medesimo piano (cioè appartenenti ad una stessa retta impropria) costituisce un fascio di piani che ha per asse la retta impropria definita dalla loro giacitura comune.

La totalità dei piani paralleli ad una stessa retta (cioè appartenenti ad uno stesso punto improprio) costituisce una stella di piani avente per centro il punto improprio determinato dalla direzione di quella retta.

Un punto improprio ed una retta impropria si appartengono quando una retta avente quella direzione risulta parallela ad un piano avente la data giacitura.

Due punti impropri determinano una retta impropria, e due rette improprie appartengono ad uno stesso punto improprio.

Tutte le rette improprie e tutti i punti improprii si considerano come appartenenti ad un piano, che si dice *piano improprio.*

§ II. Il concetto generale di coordinate.

5. La Geometria analitica si propone la ricerca di metodi generali per la rappresentazione e lo studio di tutte le proprietà metriche e grafiche delle figure geometriche, mediante procedimenti analitici (espressioni od equazioni numeriche, algebriche, differenziali,....).

Il più antico, il più elementare ed il più diffuso di tali metodi è quello detto delle *coordinate.*

Ad intendere il concetto generale di *coordinata* giovano le considerazioni seguenti:

6. Un aggregato $[a]$, comunque definito, di oggetti qualsivogliano, è detto **ordinato** quando con nota legge si può riconoscere quale di due elementi a', a'', distinti, appartenenti ad $[a]$, precede l'altro.

Si dice che fra due aggregati $[a]$, $[b]$, (non necessariamente ordinati) *intercede una* **corrispondenza biunivoca**, quando è nota una legge di dipendenza per la quale ad ogni elemento a' di $[a]$, corrisponde un elemento b' ed uno solo di $[b]$ e, reciprocamente, ad ogni elemento di $[b]$ corrisponde un elemento ed uno solo di $[a]$.

La corrispondenza fra due aggregati ordinati, $[a]$, $[b]$, si dice **ordinata**, se, dalla ipotesi che in una coppia generica a', a'', di elementi $[a]$, il primo a' preceda (segua o sia coincidente con) il secondo, venga come necessaria conseguenza che l'elemento b' corrispondente ad a' in $[b]$, debba precedere (seguire o coincidere con) l'elemento b'' corrispondente ad a''.

La corrispondenza fra due aggregati $[a]$, $[b]$ ordinati, si dice **continua**, se ad ogni coppia $\{[a'], [a'']\}$, di *classi contigue* formate con elementi estratti da $[a]$, corrisponde una coppia di classi contigue $\{[b'], [b'']\}$, formate con gli elementi corrispondenti nell'aggregato $[b]$.

7. La condizione di *continuità* per la corrispondenza di due *aggregati non ordinati* (quali sono per es. le forme di 2.ª e di 3.ª specie) non si può enunciare senza ricorrere a concetti di ordine alquanto più elevato; diremo che la *corrispondenza fra due aggregati* $[a]$, $[b]$ (*non necessariamente ordinati*) *è continua quando si può definire il concetto di elemento limite, e ad ogni elemento* α *limite di una classe* $[a']$ *di elementi di* $[a]$, *corrisponde l'elemento* β *di* $[b]$ *che è limite della classe* $[b']$ *formata con gli elementi corrispondenti.* Questa definizione per aggregati ordinati è equivalente a quella data al n.° 6.

8. Dalle definizioni poste risulta che: *Se* $[a]$, $[b]$, $[c]$ *sono tre aggregati e se fra le coppie di aggregati* $[a]$, $[b]$; $[b]$, $[c]$ *intercedono corrispondenze biunivoche* (*ordinate, continue*) *anche fra gli aggregati* $[a]$, $[c]$, *intercede una corrispondenza biunivoca* (*ordinata, continua*).

9. Poste queste definizioni è facile vedere che le tre forme di prima specie possono considerarsi come aggregati ordinati. Se riesciremo a stabilire una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua fra gli elementi di una forma di prima specie ed i numeri reali, diremo che *ad ogni elemento di quella forma è coordinato un numero reale,* il quale si dirà **coordinata** *di quell'elemento nel* **sistema di coordinate** *definito dalla corrispondenza fra gli elementi della forma ed i numeri reali, nel detto modo stabilita.*

Qualora poi si supponga che per ogni forma di prima specie si abbia un sistema idoneo di coordinate, è facile vedere che gli elementi di una forma di seconda specie possono essere posti in corrispondenza biunivoca e continua con l'aggregato di tutte le coppie di numeri reali.

Consideriamo per es. il piano punteggiato, e supponiamo di aver coordinato un numero reale a ad ogni elemento di un determinato fascio di raggi appartenente al piano, e, per ogni raggio del fascio, di aver coordinato un numero reale b ad ogni elemento della punteggiata che ha esso raggio per sostegno. Potremo allora coordinare ad ogni punto M del piano la coppia di numeri reali (a, b) che, rispettivamente, corrispondono nel fascio al raggio passante per M, e, nella punteggiata che ha per sostegno un tale raggio, all'elemento M di essa.

Reciprocamente, ad ogni coppia (a, b) di numeri reali, faremo corrispondere il punto M, che rimane determinato dal raggio del fascio che ha per coordinata a e dall'elemento, della punteggiata che ha per sostegno questo raggio, la cui coordinata è b.

Così dunque viene stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti M del piano e le coppie (a, b) dei numeri reali. Facilmente si vedrebbe poi che una tale corrispondenza è anche continua.

In generale, quando riesciremo a stabilire una corrispondenza biunivoca e continua fra gli elementi di una forma di 2.ª (o di terza) specie e tutte le possibili coppie (o terne) di numeri reali, diremo *coordinate* di un elemento della data forma, i due (tre) numeri reali che per tal modo ad esso vengono fatti corrispondere.

E, dalla possibilità di una tale corrispondenza, concluderemo che gli elementi di una forma di 1.ª specie (al pari dei numeri reali) costituiscono una infinità semplice od una totalità ∞^1, che quelli di una forma di seconda specie costituiscono una doppia infinità od una totalità ∞^2; quelli di terza specie, un'infinità tripla od una totalità ∞^3.

§ III. Identità segmentarie.

10. Gli elementi di una punteggiata sono dotati di due versi o sensi fra loro opposti. Quando si fissa uno di essi come verso diretto, o positivo, la punteggiata (o la retta che ne è sostegno) si dice **orientata.**

11. Ad ogni coppia di punti AB di una retta orientata si può far corrispondere un numero reale ed uno solo, quello cioè che ha per valore assoluto la misura della lunghezza del segmento AB, rispetto ad una prefissata unità di misura, e segno positivo se il verso AB è quello positivo della retta orientata, negativo se contrario.

Tale numero si dice distanza *dei punti* AB (nell'ordine in cui tali punti sono enunciati) e si indica con la notazione $\overline{AB}$.

12. *Invertendo l'ordine di due punti cambia il segno della loro distanza*, si ha cioè

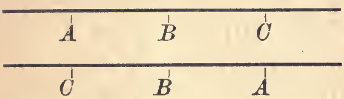
$$\overline{AB} = -\overline{BA}, \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Fra le mutue distanze di tre punti (proprii) A, B, C di *una retta orientata si ha sempre la relazione identica*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \tag{1}$$

qualunque sia la posizione reciproca di quei tre punti.

Ed infatti, se il punto B è supposto nel segmento (finito) AC, i numeri $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ hanno lo stesso segno e si ha



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

cioè

$$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

e, poichè questa relazione rimane inalterata comunque si permutino le lettere A, B, C, così essa sarà valida comunque si suppongano scambiati fra loro i punti A, B, C, cioè qualunque sia la loro posizione reciproca.

Ciò, del resto, si verifica immediatamente:

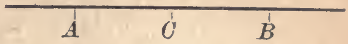
Consideriamo, infatti, le sei permutazioni possibili

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC,$$
$$CBA, \quad BCA, \quad CAB.$$

Quelle della seconda linea si ottengono dalla prima semplicemente col cambiare il verso positivo della retta orientata, cioè col cambiar segno a tutte le distanze, ed un tal cambiamento non può alterare la relazione (1).

Per la permutazione ABC, la relazione (1) è già stata verificata.

Per la ACB si ha

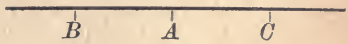


$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

da cui

$$\overline{AB} - \overline{AC} - \overline{CB} = 0, \quad \overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Infine per la BAC, si ha



$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$$

cioè

$$\overline{BC} - \overline{BA} - \overline{AC} = 0, \quad \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

La relazione (1) si può anche scrivere:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \tag{1'}$$

Dalla proposizione dimostrata risulta che se $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sono punti di una retta orientata, qualunque sia la loro reciproca posizione, si ha

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0. \tag{2}$$

§ IV. Coordinata ascissa.

13. Le distanze $\overline{OA} = a$ dei punti A di una punteggiata orientata da un punto O prefissato in essa, si dicono *coordinate ascisse* o semplicemente ascisse *dei punti della punteggiata nel sistema determinato dalla scelta del punto O* (origine), *del verso positivo della punteggiata e della unità di misura.*

Posta questa definizione, sappiamo dagli elementi [1] che in una data punteggiata, e per un determinato sistema di ascisse, ad ogni punto proprio A corrisponde un numero reale $a = \overline{OA}$

[1] Cfr. p. es. E. Bortolotti, *Aritm. gen. ed Algebra.* Vol. II, Ed. II, (1921), pag. 33.

coordinata ascissa del punto A; e ad ogni numero reale a corrisponde un punto A ed uno solo della punteggiata, quello la cui distanza da O è in grandezza e verso eguale ad a.

La corrispondenza degli elementi proprii della punteggiata con le rispettive ascisse è dunque *biunivoca*.

Inoltre, se il punto A precede B, nella punteggiata orientata, l'ascissa a di A è minore della ascissa b di B, cioè a precede b nella classe dei numeri reali.

Dunque la corrispondenza è *ordinata*.

Infine sappiamo che ad una coppia di classi contigue $\{[A], [B]\}$ di punti di una punteggiata, corrisponde una coppia di classi contigue $\{[a], [b]\}$ formata con le ascisse rispettive.

Dunque la corrispondenza è anche *continua*.

Concludiamo perciò che *le ascisse possono in effetto considerarsi come* coordinate *degli elementi della punteggiata.*

Il punto improprio, non è, a rigore di termini, un punto speciale della punteggiata, ma *la direzione* della retta che ne è il sostegno. Dunque al punto improprio non compete *ascissa* nel senso superiormente dato a questo vocabolo. Si conviene tuttavia di assegnare una ascissa anche al punto improprio, come se questo fosse la posizione limite di un punto che muovendo dalla origine O percorre la punteggiata, nell'uno o nell'altro senso, allontanandosi indefinitamente da essa, e di rappresentare questa ascissa col simbolo $\pm\infty$, che si usa in analisi per indicare il limite di una variabile il cui valore assoluto tende all'infinito.

14. *Distanza di due punti in funzione delle loro ascisse.*

Dati due punti A_1, A_2, appartenenti ad una punteggiata sulla quale è fissato un sistema di ascisse con origine O, per la relazione (1) potremo scrivere:

$$\overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2O} = 0$$

cioè

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= -\overline{OA_1} - \overline{A_2O} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}\\ &= a_2 - a_1.\end{aligned}$$

Da ciò si conclude: *la distanza $\overline{A_1A_2}$ di due punti di una punteggiata, è, nell'ordine in cui i punti sono enunciati, eguale al resto della sottrazione della ascissa del primo dalla ascissa del secondo.* Ciò vale qualunque sia il sistema delle coordinate ascisse cui i punti sono riferiti.

15. *Trasformazioni di coordinate.*

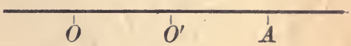
Abbiamo visto che il sistema delle coordinate ascisse sopra una data punteggiata è determinato dalla scelta del verso, della unità di misura e della posizione della origine.

Si verifica immediatamente che *cambiando il verso positivo della punteggiata le ascisse dei punti di essa cambiano segno, senza cambiar valore assoluto.*

Se si *cambia l'unità di misura*, e si assume come nuova unità il segmento OU, che, nel sistema primitivo, aveva per misura $\overline{OU} = u$; la misura di un segmento OA, che nel primitivo sistema era data dal numero $\overline{OA} = a$, sarà, nel nuovo sistema espressa dal quoziente $\frac{a}{u}$; dunque, in generale, si vede che: *le ascisse del nuovo sistema si ottengono da quelle del primitivo moltiplicando pel numero costante* $\frac{1}{u}$.

Supponiamo infine che *l'origine sia trasportata dal punto O al punto O'* ed indichiamo con α la distanza $\overline{OO'}$ (cioè l'ascissa della nuova origine O', nel sistema primitivo), con a l'ascissa di un punto A nel sistema primitivo, con a' l'ascissa dello stesso punto nel nuovo sistema.

La relazione



$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A},$$

che vale qualunque sia la posizione reciproca dei tre punti O, O', A, si può scrivere

$$a = \alpha + a'$$

od anche

$$a' = a - \alpha.$$

Queste sono appunto le *formule di trasformazione* dall'uno all'altro sistema di coordinate.

§ V. Elementi immaginari.

16. Una equazione a coefficienti reali del primo grado $ax + b = 0$ ha una radice reale ed una sola $x = -\frac{b}{a}$, perciò, fissato un sistema di coordinate ascisse, possiamo dire che *la* *equazione di 1.° grado* $ax + b = 0$ *rappresenta un punto* X *della punteggiata*: quello di ascissa $x = -\frac{b}{a}$.

Una equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha due radici; se queste sono reali e distinte, potremo considerarle come ascisse di punti di una punteggiata e dire che la equazione di 2.° grado $ax^2 + bx + c = 0$ *rappresenta due punti della punteggiata: i punti radici* di quella equazione.

Se le radici sono reali ed uguali, potremo fare la convenzione di riguardare l'unico *punto radice* della equazione proposta, come risultante dalla sovrapposizione di due punti coincidenti, e dire che la equazione $ax^2 + bx + c = 0$ rappresenta *due punti coincidenti.*

Ma la rappresentazione delle radici manca nel modo più assoluto, quando esse sono numeri complessi coniugati (cioè quando $b^2 - 4ac < 0$).

Peraltro, considerando che nella geometria analitica occorre di rappresentare con punti (od in generale con elementi geometrici) le radici di equazioni algebriche, e che non conviene il distinguere i vari casi che la risoluzione di quelle equazioni può presentare (spesso non è nemmeno possibile il fare a priori una tale distinzione) si è convenuto di chiamare **punti immaginari** *della punteggiata i valori complessi della coordinata ascissa*, cui gli elementi della punteggiata sono riferiti.

I punti della punteggiata che hanno una effettiva esistenza geometrica, a distinzione di questi elementi immaginari che per convenzione abbiamo così introdotti, si dicono *punti reali.*

I punti corrispondenti a numeri complessi coniugati si dicono *immaginari coniugati.*

17. Quando si eseguisce una trasformazione delle coordinate ascisse, ad esempio un mutamento di origine, ad uno stesso elemento X competono, nel sistema primitivo e nel nuovo, due coordinate x, x' le quali sono legate dalla relazione $x = \alpha + x'$: e due numeri x, x' legati da una tale relazione sono coordinate di uno stesso punto X. Ciò è stato dimostrato per punti reali.

Quando si tratti di punti immaginari, riconosceremo che due numeri complessi x, x' considerati come ascisse nei due sistemi di coordinate, rappresentano uno stesso punto, dalla esistenza della relazione $x = \alpha + x'$.

§ VI. Coordinata baricentrica.

18. Il rapporto delle distanze di un punto X di una punteggiata da due altri punti A, B dati in essa, si dice **rapporto semplice** dei tre punti A, B, X e si indica col simbolo

$$(ABX) = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}.$$

19. Il rapporto semplice (ABX) è uguale in valore assoluto ma contrario di segno, al rapporto dei due segmenti AX, XB, nei quali il segmento AB è diviso (internamente od esternamente) dal punto X.

Indicando quest'ultimo rapporto con r abbiamo dunque

$$r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = -(ABX).$$

Considerando A, B come punti fissi, X come elemento variabile nella punteggiata, si dice che il numero r è *coordinata* **baricentrica** *del punto X rispetto ai* **punti base** A, B.

Dunque: *la coordinata baricentrica del punto X nella punteggiata che ha per sostegno la retta AB* (rispetto ai punti base A, B) *è il rapporto*

$$r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$$

dei segmenti AX, BX in cui AB è diviso dal punto X.

Od altrimenti, la coordinata baricentrica del punto X è eguale in valore assoluto e contraria in segno al rapporto semplice (ABX),

$$r = -(ABX) = -\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}.$$

20. Per giustificare il nome di *coordinata* dato al numero r dianzi definito, dimostreremo che, se si tengono fissi i punti base A, B, e si considera X come elemento variabile nella punteggiata, ad ogni punto X corrisponde un valore di r ed uno solo, e, reciprocamente, ad ogni valore di r corrisponde un punto ed uno solo della punteggiata: vedremo inoltre che questa corrispondenza è ordinata e continua.

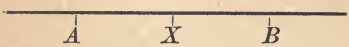
Ed infatti, se immaginiamo stabilito sulla punteggiata un sistema di coordinate ascisse, ed indichiamo con x l'ascissa di un punto generico X della punteggiata, con r la sua coordinata baricentrica, con a, b le ascisse dei punti base, si hanno le formule:

$$(3) \qquad r = \frac{x-a}{b-x}, \quad x = \frac{a+rb}{1+r}$$

le quali appunto dimostrano che fra le variabili $[r]$, $[x]$, intercede una corrispondenza biunivoca e continua, fatta eccezione tutt'al più per il valore $x=b$ della variabile x, e per il valore $r=-1$ della variabile r.

Ma sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca e continua fra i punti X della punteggiata ed i valori x delle rispettive ascisse; una corrispondenza di tale natura rimarrà dunque determinata anche fra l'aggregato di questi punti e quello delle loro coordinate baricentriche.

Per vedere se tale corrispondenza è *ordinata* ed in qual modo l'ordinamento debba essere inteso, consideriamo che nel primo punto fondamentale A si ritrova come valore della coordinata baricentrica $r_a=0$.

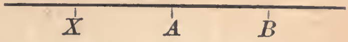


Se immaginiamo che un punto X si muova sulla punteggiata percorrendo il segmento finito AB nel verso AB, vediamo che il numero $r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$ va ordinatamente crescendo, diventa eguale ad 1 nel punto medio del segmento (per $\overline{AX} = \overline{XB}$), diventa grandissimo per X molto prossimo a B, e tende a $+\infty$ per X tendente a B.

Dunque *ai punti del segmento* (finito) AB *corrispondono ordinatamente tutti i numeri positivi da* 0 *a* $+\infty$.

Se, invece, il punto X percorre il segmento infinito AB, troviamo per r numeri negativi: precisamente, vediamo che per punti assai prossimi ad A il rapporto $r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}$ è negativo, ed in valore assoluto piccolissimo.

Se X si muove sulla punteggiata allontanandosi da A, e percorrendo il segmento infinito AB, per punti X appartenenti alla semiretta che ha origine in A, il valore assoluto di r va crescendo; ma si mantiene sempre minore di 1.

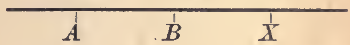


Per X tendente all'infinito, troviamo, come *coordinata baricentrica del punto improprio* l'espressione

$$\lim_{X \to \infty}\left(-\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}\right) = \lim_{X \to \infty}\left(-\frac{\overline{XB} - \overline{AB}}{\overline{XB}}\right) =$$
$$= \lim_{X \to \infty}\left(-1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{XB}}\right) = -1.$$

Se, dopo oltrepassato il punto improprio, il punto X continua a percorrere la punteggiata avvicinandosi a B, abbiamo

$$r = -\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = -\frac{\overline{AB} + \overline{BX}}{\overline{BX}},$$



cioè troviamo per r valori negativi, i cui valori assoluti sono superiori alla unità e vanno crescendo al tendere di X a B, fino a superare qualunque numero positivo.

Dunque *i punti del segmento infinito AB, corrispondono ordinatamente ai numeri negativi, da 0 a $-\infty$.*

Rimane così stabilito un ordinamento dei punti della punteggiata, per il quale risulta *ordinata* la corrispondenza con i valori della coordinata baricentrica.

21. Dall'esame della relazione

$$r = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{x - a}{b - x}$$

si ricava che la *coordinata baricentrica non muta, nè se si cambia il verso scelto come positivo sulla punteggiata, nè se si cambia l'unità di misura, nè, infine, se si muta l'origine delle ascisse* (qualora si vogliano riferire i punti ad un sistema di coordinate ascisse e calcolare con esse il valore di r).

Osserveremo ancora che la formula

$$x = \frac{a + rb}{1 + r}$$

per $r = \frac{n}{m}$, assume la forma omogenea

$$x = \frac{ma + nb}{m + n}$$

che dà la *ascissa del* **punto che divide il segmento** AB **nel rapporto** $\frac{n}{m}$.

Per $m = n$ si ha il punto di mezzo del segmento, la cui ascissa risulta eguale ad $\frac{a + b}{2}$, cioè alla *semisomma delle ascisse* degli estremi del segmento.

Infine noteremo che se A, B si considerano come punti materiali di pesi rispettivi m, n, il punto X, che divide il segmento AB nel rapporto $r = \frac{n}{m}$, è il *centro di gravità* (**baricentro**) del sistema AB di quei due punti: da ciò il nome di coordinata baricentrica dato al numero r.

22. Le formule

$$r = \frac{x - a}{b - x}, \quad x = \frac{a + br}{1 + r}$$

hanno senso anche se i numeri a, b, r, x non sono reali.

Da esse si ricava che: *se i punti base A, B sono punti reali, i punti reali hanno coordinata baricentrica reale, ed i punti immaginari hanno coordinata baricentrica complessa*; e, reciprocamente: *sono reali i punti la cui coordinata baricentrica è reale, e sono immaginari i punti la cui coordinata baricentrica è complessa.*

Si vede altresì che punti immaginari coniugati hanno per coordinate baricentriche numeri complessi coniugati, e reciprocamente.

Se i punti A, B sono immaginari, si definisce mediante la formula

$$x = \frac{a + rb}{1 + r}$$

il punto che divide il segmento AB nel rapporto r; in particolare, il punto di mezzo di un tale segmento è dato dal valore $\frac{a+b}{2}$ dell'ascissa.

Se i punti A, B sono immaginari coniugati, la somma $a+b$ è un numero reale: tale è anche la semisomma $\frac{a+b}{2}$, dunque concludiamo che: *se due punti sono immaginari coniugati, il loro punto di mezzo è reale.*

§ VII. Coordinata proiettiva.

23. Rapporto anarmonico o birapporto *di quattro punti A, B, C, D, di una punteggiata nell'ordine in cui essi sono enunciati è il rapporto dei due rapporti semplici che i due primi di essi rispettivamente formano con gli altri due.*

Si suole indicare il birapporto col rinchiudere fra parentesi le lettere che rappresentano i quattro punti, nell'ordine in cui sono dati. Si scrive cioè

$$(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}.$$

Se sulla punteggiata immaginiamo fissato un sistema di coordinate ascisse, avremo:

$$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b} \tag{4}$$

ed intendendo per *birapporto di quattro numeri a, b, c, d* il doppio rapporto

$$(a, b, c, d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b},$$

potremo dire che il *birapporto di quattro punti di una punteggiata è uguale al birapporto delle loro ascisse.*

Dalla definizione $(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}$ si vede che il birapporto è positivo se i punti C, D sono entrambi interni od entrambi esterni al segmento finito AB, negativo se l'uno di essi è interno, l'altro esterno; o, in altri termini, che il birapporto $(ABCD)$ *è positivo quando le coppie* (AB), (CD) *non si separano, negativo quando si separano.*

24. Se si considerano tre punti ABC come fissati, ed un quarto punto X variabile nella punteggiata, *ad ogni posizione del punto X corrisponderà un valore reale ed uno solo* $\lambda=(ABCX)$ *del birapporto,* dato dalla espressione

$$\lambda=(ABCX)=\frac{(ABC)}{(ABX)}.$$

Se assumiamo A, B, come punti base di un sistema di coordinate baricentriche, e poniamo

$$r=-(ABX)=\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$$

abbiamo le formule

$$\lambda=-\frac{(ABC)}{r}, \quad r=-\frac{(ABC)}{\lambda}$$

le quali dimostrano che fra le variabili λ, r intercede una corrispondenza biunivoca, ordinata, continua.

Ma (n.° 20) la variabile r è in corrispondenza biunivoca, ordinata, continua con gli elementi X della punteggiata: una corrispondenza di ugual natura rimane quindi stabilita fra i punti X della punteggiata ed il birapporto λ.

Perciò il birapporto λ può essere considerato come coordinata degli elementi della punteggiata, e vien detto **coordinata proiettiva,** *o coordinata birapporto.*

In particolare si noti che, se X coincide con A

$$(ABCA)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{0}{\overline{BA}}=\infty.$$

Se X coincide con B

$$(ABCB)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AB}}{0}=0.$$

Se X coincide con C

$$(ABCC)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=1.$$

Dunque *ai punti fondamentali* (punti base) A, B, C, *corrispondono per λ i valori ∞, 0, 1, rispettivamente.*

25. La relazione

$$\lambda = -(ABC)\frac{1}{r},$$

che lega la coordinata proiettiva con la coordinata baricentrica ci dice che *la coordinata proiettiva* λ (al pari della baricentrica) *rimane invariata al mutare del verso positivo della punteggiata, della unità di misura delle lunghezze, e della origine delle ascisse* (qualora si vogliano riferire i punti ad un sistema di ascisse e si voglia calcolare λ mediante i valori di tali ascisse).

26. *Se uno dei quattro punti A, B, C, D, si fa coincidere col punto improprio, il birapporto $(ABCD)$ si muta nel rapporto semplice degli altri tre punti.*

Ed infatti, se il quarto punto D è nel punto improprio D_∞, si ha

$$(ABCD_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD_\infty}}{\overline{BD_\infty}}.$$

Ora per ogni posizione propria del punto D, si ha

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{BD}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

ed al limite, per D tendente all'infinito,

$$\frac{\overline{AD_\infty}}{\overline{BD_\infty}} = 1;$$

dunque, infine

$$(ABCD_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = (ABC).$$

Similmente:

$$(ABC_\infty D) = \frac{\overline{AC_\infty}}{\overline{BC_\infty}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = 1 : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = (BAD)$$

$$(AB_\infty CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{B_\infty C}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{B_\infty D}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{B_\infty C}}{\overline{B_\infty D}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = (CDA)$$

$$(A_\infty BCD) = \frac{\overline{A_\infty C}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{A_\infty D}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_\infty C}}{\overline{A_\infty D}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = (DCB).$$

Se supponiamo di aver preso il primo punto fondamentale A nel punto improprio, e di aver riferito i punti della punteggiata ad un sistema di coordinate ascisse con origine nel punto B, verso positivo quello della terna ABC ed unità di misura la lunghezza $\overline{BC}$, nella relazione

$$\lambda = (A_\infty BCX) = (XCB) = \frac{b-x}{b-c}\ .$$

dobbiamo porre $b = 0$, $c = 1$, e così rimane

$$\lambda = x,$$

dunque: *la coordinata ascissa è un caso particolare della coordinata proiettiva*, essa si ottiene mandando il primo punto base A all'infinito, assumendo per secondo punto B l'origine delle ascisse, e per terzo punto C il *punto unità*, cioè l'estremo del segmento BC avente verso positivo e lunghezza eguale alla unità di misura.

Scrivendo che x è il birapporto delle quattro ascisse dei punti $A_\infty BCX$ superiormente considerati, si ha la relazione

$$(\infty,\ 0,\ 1,\ x) = x$$

che serve ad esprimere qualunque numero x sotto forma di birapporto.

Al n.° 24 abbiamo dimostrato che, in qualunque sistema di coordinate proiettive, le coordinate proiettive dei punti fondamentali sono

$$\begin{array}{llll} \text{per il punto} & A, & (ABCA) = \infty \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & B, & (ABCB) = 0 \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & C, & (ABCC) = 1. \end{array}$$

Indicando con λ la coordinata proiettiva $(ABCX)$ di un altro punto qualunque X della punteggiata si trova, come valore del birapporto di queste quattro coordinate proiettive,

$$(\infty,\ 0,\ 1,\ \lambda) = \lambda = (ABCX);$$

cioè: il birapporto λ dei quattro punti A, B, C, X è uguale a quello delle loro coordinate proiettive.

§ VIII. Valori diversi del birapporto, per tutte le possibili sostituzioni fra i quattro elementi.

27. Indichiamo con $X_1X_2X_3X_4$ quattro punti della punteggiata; se consideriamo il birapporto

$$\lambda = (X_1X_2X_3X_4)$$

come una funzione delle quattro lettere $f(X_1, X_2, X_3, X_4)$, vediamo che non tutti i valori di questa funzione corrispondenti alle 24 sostituzioni del gruppo totale, sono fra loro diversi. Volendo discutere i diversi valori dei quali essa è suscettibile, dovremo prima ricercare il gruppo di sostituzioni che lasciano formalmente invariata la funzione birapporto, ed, in secondo luogo, vedere se è possibile determinare particolari valori numerici di essa, i quali rimangano invariati anche per altre sostituzioni, oltre quelle del gruppo cui essa formalmente appartiene.

28. Per la prima parte osserveremo che *il birapporto* $(X_1X_2X_3X_4)$ *non varia* **invertendo** *ad un tempo i due primi ed i due ultimi elementi.*

Infatti si ha

$$(X_1X_2X_3X_4) = \frac{\overline{X_1X_3} \cdot \overline{X_2X_4}}{\overline{X_2X_3} \cdot \overline{X_1X_4}}$$

$$(X_2X_1X_4X_3) = \frac{\overline{X_2X_4} \cdot \overline{X_1X_3}}{\overline{X_1X_4} \cdot \overline{X_2X_3}}$$

e, dalla eguaglianza dei secondi membri, segue la proposizione enunciata.

Vediamo da ciò che la funzione birapporto ammette la sostituzione

$$S_1 = (1,\ 2)(3,\ 4).$$

Similmente si prova che *il birapporto non vària* **permutando** *contemporaneamente i due elementi medi ed i due estremi*: cioè che esso ammette la sostituzione

$$S_2 = (1,\ 4)(2,\ 3).$$

Il birapporto rimane invariato, dunque, anche per il prodotto di quelle sostituzioni

$$S_1 S_2 = (1,\ 3)(2,\ 4)$$

cioè *non varia nemmeno scambiando ordinatamente i due primi elementi coi due ultimi.*

E, poichè le sostituzioni

$$1,\ S_1,\ S_2,\ S_1 S_2$$

formano un gruppo del quarto ordine (gruppo quadrinomio) il birapporto potrà assumere solo $\frac{24}{4} = 6$ valori diversi.

29. Considerando ora che le sostituzioni S_1, S_2, $S_1 S_2$ operano su tutte e quattro le lettere, per avere i 6 valori diversi del birapporto, ci basterà tener ferma una delle lettere, per es. X_4 e permutare in tutti i modi le altre tre. I valori che così si trovano, $(X_1 X_2 X_3 X_4)$, $(X_2 X_1 X_3 X_4)$, $(X_1 X_3 X_2 X_4)$, $(X_3 X_1 X_2 X_4)$, $(X_2 X_3 X_1 X_4)$, $(X_3 X_2 X_1 X_4)$ sono quelli corrispondenti alle 6 sostituzioni del gruppo totale nelle tre lettere $X_1 X_2 X_3$.

Ma tutte queste sostituzioni possono immaginarsi generate dai due scambi (2, 1), (2, 3), che intercedono fra un determinato elemento e gli altri due. Questi scambi, singolarmente, corrispondono *all'invertire i due primi* (od i due ultimi) *e non gli altri due, e a permutare i medi* (o gli estremi) *e non gli altri due elementi.*

Ci basterà dunque di vedere se il birapporto rimane alterato ed in qual modo, da queste due operazioni.

30. Gioveranno a tale scopo i due teoremi seguenti:

1.° Teorema — *Invertendo i due primi* (od i due ultimi) *elementi, e non gli altri due, il birapporto si cambia nel suo inverso.*

Si ha infatti

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = \frac{\overline{X_1 X_3} \cdot \overline{X_2 X_4}}{\overline{X_2 X_3} \cdot \overline{X_1 X_4}} = \lambda$$

$$(X_2 X_1 X_3 X_4) = \frac{\overline{X_2 X_3} \cdot \overline{X_1 X_4}}{\overline{X_1 X_3} \cdot \overline{X_2 X_4}} = \frac{1}{\lambda}.$$

2.° Teorema — *Permutando i medi* (e non gli estremi) *o* *gli estremi* (e non i medi) *dei quattro elementi di un birapporto questo si cambia nel suo complemento alla unità.*

Si ha infatti

$$
\begin{aligned}
(X_1X_2X_3X_4)+(X_1X_3X_2X_4 &= \frac{\overline{X_1X_3}\cdot\overline{X_2X_4}}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}}+\frac{\overline{X_1X_2}\cdot\overline{X_3X_4}}{\overline{X_3X_2}\cdot\overline{X_1X_4}} \\
&= \frac{(\overline{X_1X_2}+\overline{X_2X_3})\overline{X_2X_4}}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}}-\frac{\overline{X_1X_2}\cdot\overline{X_3X_4}}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}} \\
&= \frac{\overline{X_1X_2}(\overline{X_2X_4}-\overline{X_3X_4})+\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_2X_4}}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}} \\
&= \frac{\overline{X_1X_2}\cdot\overline{X_2X_3}+\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_2X_4}}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}}=\frac{\overline{X_2X_3}(\overline{X_1X_2}+\overline{X_2X_4})}{\overline{X_2X_3}\cdot\overline{X_1X_4}}=1.
\end{aligned}
$$

La successiva applicazione di questi teoremi ci permette di trovare i 6 valori:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(X_1X_2X_3X_4)=\lambda \\
&(X_2X_1X_3X_4)=\frac{1}{\lambda} \\
&(X_1X_3X_2X_4)=1-\lambda \\
&(X_3X_1X_2X_4)=\frac{1}{1-\lambda} \\
&(X_2X_3X_1X_4)=1-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda} \\
&(X_3X_2X_1X_4)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

31. Poichè le operazioni che si sono eseguite sul birapporto λ per generare gli altri 5, costituiscono un gruppo; così, se invece di prendere come valore iniziale il birapporto λ si prendesse uno qualunque degli altri cinque, la applicazione di tali operazioni (cioè delle sostituzioni fra le 4 lettere) riprodurrebbe ancora i medesimi 6 valori superiormente scritti, solo ordinati in modo diverso.

32. Rimane ora da vedere se *esistono valori numerici particolari di λ per i quali due o più dei birapporti superiormente scritti risultino fra loro eguali.*

Considerando a tale scopo le 6 sostituzioni nei 3 elementi 1, 2, 3: cioè

$$\begin{cases} 1, \quad S_1 = (1,\ 2,\ 3), \quad S_2 = S_1^2 = (1,\ 3,\ 2), \\ S_3 = (1,\ 2), \quad S_4 = (2,\ 3), \quad S_5 = (1,\ 3), \end{cases}$$

vediamo che se una espressione rimane numericamente invariata pel ciclo S_1 rimane invariata anche pel quadrato di esso, S_2; e perciò non può assumere che 2 soli valori diversi.

Se una espessione rimane numericamente invariata per la sostituzione $S_3 = (1,\ 2)$, essa è capace di altri due (cioè in tutto di tre) valori diversi (quelli che si ottengono con la iterazione del ciclo S_1) i quali rimangono a lor volta invariati rispettivamente per la sostituzione S_4 (trasformata di S_3 mediante S_1) e per la S_5 (trasformata di S_3 mediante S_2).

Dunque, per la osservazione fatta al n.° 31 ci basterà di cercare valori numerici di λ i quali rimangano invariati per la $S_1 = (1,\ 2,\ 3)$, e valori che rimangano invariati per la $S_3 = (1,\ 2)$.

Per effetto della S_1 si ottiene da $(X_1 X_2 X_3 X_4) = \lambda$, il birapporto

$$(X_1 X_2 X_3 X_4) = \frac{\lambda - 1}{\lambda};$$

la condizione di invarianza per tale sostituzione è

$$\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

la quale conduce alla equazione

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

che ha per soluzioni i numeri

$$\lambda_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

che sono le radici cubiche complesse dell'unità negativa, dunque concludiamo che: *Se il birapporto di quattro elementi, presi in un ordine assegnato, risulta uguale ad una delle radici cubiche complesse della unità negativa, per qualunque sostituzione* *fra tali elementi esso birapporto non potrà assumere che due soli valori, fra loro diversi.*

Si verifica poi immediatamente che

$$1-\lambda_1=\lambda_2,\quad 1-\lambda_2=\lambda_1,$$
$$\frac{1}{\lambda_1}=\lambda_2,\qquad \frac{1}{\lambda_2}=\lambda_1,$$

cioè che λ_1 e λ_2 sono i due soli valori di cui, per ciascuna delle due radici, esso è suscettibile.

Questo caso è conosciuto col nome di **equianarmonico** (¹) e si dice *equianarmonico* un sistema $(X_1X_2X_3X_4)$ di quattro punti, il cui birapporto $(X_1X_2X_3X_4)$ è una delle radici cubiche complesse della unità negativa.

In secondo luogo, considerando che per effetto della $S_3=(1, 2)$, il birapporto $\lambda=(X_1X_2X_3X_4)$ si cambia nel suo reciproco $\frac{1}{\lambda}$; abbiamo come condizione di invarianza

$$\lambda=\frac{1}{\lambda}$$

cioè

$$\lambda^2=1.$$

Soluzioni di questa equazione sono i numeri

$$\lambda_3=1,\quad \lambda_4=-1.$$

Alla prima di queste soluzioni corrispondono pel birapporto i tre valori diversi

$$\lambda_3=1,\quad 1-\lambda_3=0,\quad \frac{1}{1-\lambda_3}=\infty.$$

Questo caso si presenta quando gli elementi non sono tutti distinti, e precisamente quando il terzo di essi, X_3, coincide col quarto X_4.

Finalmente alla seconda soluzione, $\lambda_4=-1$, corrispondono tre valori diversi

$$\lambda_4=-1,\quad 1-\lambda_4=2,\quad \frac{1}{1-\lambda_4}=\frac{1}{2}.$$

(¹) Cfr. Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* (Bologna, 1862), n.° 27, pag. 22.

Quest' ultimo caso è detto *caso armonico*, ed è il più interessante, quello che più particolarmente dovremo studiare.

§ IX. Caso armonico.

33. Si dice che quattro punti A, B, C, D formano un *gruppo armonico*, se il loro birapporto è uguale a -1, cioè, se

$$(ABCD) = -1.$$

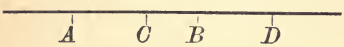
Segue da questa definizione che in un gruppo armonico $ABCD$ le coppie AB, CD, si separano (n.° 23): più propriamente si dice che *si separano armonicamente*; o, in altri termini, che *rispetto ad una di esse coppie, gli elementi dell' altra coppia sono fra loro coniugati armonicamente.* Si dice anche che *il punto D è quarto armonico dopo A, B, C.*

Relazioni fra le mutue distanze dei quattro punti di un gruppo armonico.

34. La relazione

$$-1 = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

può scriversi



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

e di qui si ricava che, *in un gruppo armonico due punti coniugati dividono il segmento degli altri due nello stesso rapporto, l' uno internamente, l' altro esternamente.*

Se i punti A, B si assumono come punti base di un sistema di coordinate baricentriche, la relazione trovata ci dice che se *due punti C, D sono coniugati armonicamente rispetto ai punti base, hanno coordinate baricentriche eguali in valore assoluto e contrarie di segno, e reciprocamente.*

Indicando con a, b, c, d le ascisse dei punti A, B, C, D e con r la coordinata baricentrica di C, quella di D sarà $-r$

ed avremo

$$\begin{cases} r = \dfrac{c-a}{b-c} \\ -r = \dfrac{d-a}{b-d}. \end{cases}$$

Da queste si ricava

(5) $$c = \frac{a+rb}{1+r}, \quad d = \frac{a-rb}{1-r}$$

(6) $$cd = \frac{a^2 - r^2b^2}{1-r^2}.$$

Le formule (5) ci forniscono, per ogni valore di r, le ascisse di una coppia di punti C, D, coniugati armonicamente ai punti A, B.

Per $r=1$, C è il punto di mezzo del segmento AB, D è il punto improprio, onde si ricava che *il coniugato armonico del punto di mezzo di un segmento AB rispetto agli estremi A, B del segmento stesso, è il punto improprio della retta AB.*

Dalla seconda delle formule (5), mettendo per r il valore $\dfrac{c-a}{b-c}$, si ricava $d = \dfrac{2ab-(a+b)c}{a+b-2c}$.

Di qui vediamo che, se non è $a=b=c$, (cioè se i tre punti A, B, C non sono coincidenti in uno solo), *il quarto armonico D, dopo tre dati punti A, B, C, è sempre unico e determinato. Esso è reale anche se i primi due di tali punti A, B, sono immaginari coniugati* (*ed il terzo C reale*) poichè in tale caso la somma $a+b$, ed il prodotto ab sono numeri reali.

Supponendo l'origine delle ascisse nel punto medio di AB, si ha $a=-b$, e la (6) si muta nella $cd=a^2$ cioè: *il quadrato della metà di un segmento è uguale al prodotto delle distanze del punto medio da una coppia di punti coniugati armonicamente rispetto agli estremi del segmento.*

Se, invece, supponiamo che l'origine delle ascisse sia in A, i numeri b, c, d rappresenteranno le distanze dei rimanenti punti da A; nelle formule (5) si dovrà fare $a=0$ ed esse si cambieranno nelle seguenti:

$$\frac{1}{c} = \frac{1+r}{rb}, \quad \frac{1}{d} = -\frac{1-r}{rb}$$

da cui

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{b}. \tag{7}$$

Questa formula ci dimostra che *in un gruppo armonico la distanza di un punto dal suo coniugato è media armonica fra le distanze di quel punto dagli altri due.*

Ed infatti, se poniamo:

$$\beta=\frac{1}{b},\quad \gamma=\frac{1}{c},\quad \delta=\frac{1}{d},$$

la (7) si muta nella

$$\gamma+\delta=2\beta,\quad \beta=\frac{\gamma+\delta}{2},$$

dunque β è media aritmetica fra γ e δ; la sua reciproca, cioè b, è quindi media armonica fra le reciproche $c=\frac{1}{\gamma}$, $d=\frac{1}{\delta}$.

§ X. Proiettività.

35. Una relazione fra due variabili x, x', della forma

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \tag{8}$$

quando il determinante $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\gamma\beta$ *sia diverso dallo zero*, fa corrispondere ad ogni valore della x un valore unico e determinato della x', e, mediante la formula di risoluzione

$$x=\frac{\beta-\delta x'}{\gamma x'-\alpha},$$

ad ogni valore della x' fa corrispondere un valore ed uno solo della x.

La relazione espressa dalla formula (8) vien detta **trasformazione lineare**, il determinante $\alpha\delta-\beta\gamma$ è detto **modulo** della trasformazione lineare, e dalle osservazioni fatte si deduce che: *una trasformazioue lineare a modulo diverso dallo zero stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le due variabili x, x'.*

Se x, x' rappresentano le coordinate dell'elemento variabile in due punteggiate, $[x]$, $[x']$, potremo anche dire che, per mezzo della formula (8) *le punteggiate* $[x]$, $[x']$ *si trasformano linearmente l'una nell'altra.*

TEOREMA. — *Se due punteggiate si possono dedurre l'una dall'altra mediante una trasformazione lineare, il rapporto anarmonico di quattro elementi dell'una è eguale al rapporto anarmonico degli elementi corrispondenti nella seconda.*

Poichè il rapporto anarmonico di quattro punti di una punteggiata è eguale a quello delle loro ascisse, basterà dimostrare che: *Se fra due variabili x, x', intercede una trasformazione lineare, il birapporto di quattro valori x_1, x_2, x_3, x_4 della variabile x, è eguale a quello dei corrispondenti valori della variabile x'.*

Si osservi perciò che si ha per ipotesi:

$$x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}, \quad x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}, \quad x_3' = \frac{\alpha x_3 + \beta}{\beta x_3 + \delta}, \quad x_4' = \frac{\alpha x_4 + \beta}{\gamma x_4 + \delta};$$

$$x_3' - x_1' = \frac{x_3 - x_1}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)}(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

$$x_3' - x_2' = \frac{x_3 - x_2}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_2 + \delta)}(\alpha\delta - \beta\gamma);$$

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{\gamma x_2 + \delta}{\gamma x_1 + \delta}.$$

Analogamente

$$\frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'} = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \cdot \frac{\gamma x_2 + \delta}{\gamma x_1 + \delta},$$

e, dividendo,

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

cioè

$$(x_1'x_2'x_3'x_4') = (x_1x_2x_3x_4).$$

36. Siano ora X_1, X_2, X_3, X_4 quattro punti di una punteggiata, x_1, x_2, x_3, x_4 le loro ascisse, e fissati due elementi base A, B, si determinino anche le loro coordinate baricentriche r_1, r_2, r_3, r_4.

La formula di trasformazione delle coordinate ascisse nelle coordinate baricentriche ha la forma

$$r = \frac{x - a}{-x + b}.$$

Si tratta dunque di una trasformazione lineare il cui determinante $\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -1 & b \end{vmatrix} = b - a$ non è nullo se i punti base sono distinti.

Dunque, pel teorema dimostrato, si avrà

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$

Ciò significa che *il rapporto anarmonico di quattro punti è uguale a quello delle loro coordinate baricentriche.*

Siano inoltre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ le coordinate proiettive di quegli stessi elementi, rispetto a tre punti fondamentali A, B, C. La formula

$$\lambda = (abcx) = \frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{x-b}{x-a}$$

è nuovamente una trasformazione lineare delle x nelle λ; il determinante della trasformazione è $\frac{c-a}{c-b}(b-a)$, e non è nullo se i punti base sono fra loro distinti; dunque, *anche il rapporto anarmonico delle quattro coordinate proiettive, avrà lo stesso valore di quello delle ascisse corrispondenti,* cioè si avrà

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (r_1 r_2 r_3 r_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

37. *Si dice* **proiettività** *una corrispondenza biunivoca fra due punteggiate, tale che il rapporto anarmonico di quattro elementi di una forma, sia sempre uguale al rapporto anarmonico dei quattro elementi corrispondenti dell'altra.*

Il teorema dimostrato al n.° 35 ci dice che la corrispondenza fra due punteggiate determinata dalla trasformazione lineare a determinante non nullo

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

è una proiettività; dimostreremo ora la proposizione reciproca, e cioè che: *affinchè due punteggiate si corrispondano in una proiettività, è necessario che fra le coordinate* $[x]$ *degli elementi dell'una e le corrispondenti coordinate* $[x']$ *degli elementi della seconda passi una relazione lineare a determinante non nullo*

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

La osservazione fatta al n.° 36 ci permette di lasciare arbitraria la scelta del tipo di coordinate (ascisse, baricentriche, proiettive) cui gli elementi delle date forme sono riferiti.

Dobbiamo dunque dimostrare che: assegnata una proiettività fra due punteggiate e fissati tre elementi della prima forma x_1, x_2, x_3 e gli elementi che ad essi corrispondono nella seconda x_1', x_2', x_3', se si indica con x, x' una quarta coppia variabile di elementi corrispondenti, tali cioè che si abbia

$$(x_1x_2x_3x) = (x_1'x_2'x_3'x')$$

le variabili x, x', risultano legate da una relazione lineare

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Ed infatti la relazione

$$(x_1x_2x_3x) = (x_1'x_2'x_3'x')$$

equivale alla

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x' - x_1'}{x' - x_2'}$$

o, ponendo $k = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$, alla

$$(x - x_1)(x' - x_2') = k(x' - x_1')(x - x_2)$$

cioè

$$xx'(k - 1) + x(x_2' - kx_1') + x'(x_1 - kx_2) + kx_1'x_2 - x_1x_2' = 0.$$

Ponendo $a = k - 1$, $b = x_2' - kx_1'$, $c = x_1 - kx_2$, $d = kx_1'x_2 - x_1x_2'$ si ha

$$axx' + bx + cx' + d = 0. \tag{9}$$

Da questa appunto si ricava

$$x' = -\frac{bx + d}{ax + c}, \quad x = -\frac{cx' + d}{ax' + b} \tag{10}$$

Il modulo della trasformazione

$$\begin{vmatrix} -b & -d \\ a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = k(x_1' - x_2')(x_1 - x_2)$$

è certamente diverso dallo zero se, in ciascuna terna, gli elementi x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3' sono fra loro distinti.

Vediamo dunque che la condizione espressa dalla formula (9) o dalle equivalenti formule (10) è necessaria perchè le punteggiate $[x]$, $[x']$ si corrispondano in una proiettività.

Abbiamo dimostrato al n.° 35 che tale condizione è anche sufficiente, concluderemo perciò che: *Ogni proiettività fra due punteggiate si traduce analiticamente in una trasformazione lineare, a modulo non nullo*, o, ciò che è lo stesso, *in una relazione bilineare*

$$axx' + bx + cx' + d = 0 \tag{9}$$

a determinante $ad - bc$ diverso dallo zero, fra le coordinate x, x' di due elementi variabili in esse punteggiate: e, reciprocamente, ogni tale relazione rappresenta una proiettività. Le trasformazioni lineari sono perciò anche dette: *trasformazioni proiettive.*

Si avverta che i simboli x, x' qui usati possono indifferentemente rappresentare ascisse, coordinate baricentriche, coordinate proiettive degli elementi delle rispettive punteggiate.

38. La relazione (9) si dice **equazione della proiettività**, essa contiene tre parametri essenziali (i rapporti di tre dei suoi coefficienti al quarto), ne segue che una proiettività è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti.

Ciò si è appunto verificato al n.° 37 ove si sono determinati i coefficienti della equazione della proiettività, in funzione delle coordinate delle terne di elementi corrispondenti x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3'. Praticamente si scrive la equazione della proiettività, considerando come simultanee le quattro equazioni lineari omogenee (nelle incognite a, b, c, d),

$$\begin{cases} axx' + bx + cx' + d = 0 \\ ax_1x_1' + bx_1 + cx_1' + d = 0 \\ ax_2x_2' + bx_2 + cx_2' + d = 0 \\ ax_3x_3' + bx_3 + cx_3' + d = 0 \end{cases}$$

e scrivendo la condizione di possibilità di un tale sistema, cioè:

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ x_1x_1' & x_1 & x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2 & x_2' & 1 \\ x_3x_3' & x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

39. Nel caso, fino ad ora escluso, in cui sia il determinante $ad - bc = 0$, cioè $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, si ha, *per qualsiasi valore di* x $\left(\textit{diverso da } -\frac{c}{a}\right)$,

$$\frac{b}{a} = \frac{bx + d}{ax + c}$$

cioè

$$x' = -\frac{bx + d}{ax + c} = -\frac{b}{a}$$

dunque, *a qualsiasi valore* x $\left(\textit{diverso da } -\frac{c}{a}\right)$ *corrisponde sulla seconda punteggiata sempre un medesimo punto di coordinata* $x' = -\frac{b}{a}$. *La proiettività si dice in tal caso,* **degenere.**

Per $x = -\frac{c}{a} = -\frac{d}{b}$, la espressione della coordinata x' assume forma indeterminata; possiamo subito verificare che tutti i punti della seconda punteggiata, $\left(\text{diversi da } x' = -\frac{b}{a}\right)$ corrispondono al medesimo punto $x = -\frac{c}{a}$ della prima.

40. Supponiamo ora che su la forma $[X]$ venga stabilito un sistema di coordinate proiettive mediante la scelta di tre elementi fondamentali A, B, C, e che su la seconda forma $[X']$ si stabilisca pure un sistema di coordinate proiettive, scegliendo, come elementi base, gli elementi A', B', C', corrispondenti ad A, B, C.

La coordinata proiettiva di un elemento X variabile nella prima forma sarà:

$$\lambda = (ABCX)$$

quella dell'elemento corrispondente nella seconda sarà

$$\lambda' = (A'B'C'X').$$

Ma, per la proiettività supposta fra le due forme, dovremo avere

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

cioè

$$\lambda = \lambda'$$

Ciò si esprime dicendo: *La coordinata proiettiva* λ *rimane invariata per trasformazioni proiettive.*

È importante osservare che, con la scelta del sistema di coordinate proiettive superiormente indicata, la *equazione della proiettività assume la forma semplicissima* $\lambda = \lambda'$.

41. Dall'esame delle formule

$$x = -\frac{cx' + d}{ax' + b}, \quad x' = -\frac{bx + d}{ax + c} \tag{12}$$

vediamo che *salvo il caso della proiettività degenere, che di regola sempre escluderemo,* all'elemento I' di coordinata $x' = -\frac{b}{a}$ della seconda punteggiata, corrisponde il punto improprio I_∞ della prima; ed all'elemento J di coordinata $x = -\frac{c}{a}$ della prima punteggiata corrisponde il punto improprio J_∞' della seconda.

I punti J, I', che nella proiettività corrispondono agli elementi impropri, si dicono **punti limiti, o punti di fuga.**

42. Se nelle due punteggiate si riferiscono gli elementi a sistemi di coordinate ascisse con l'origine nei rispettivi punti di fuga, le ascisse di tali punti saranno nulle, cioè si avrà

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = = 0.$$

Sarà dunque $b = c = 0$, e l'equazione della proiettività assumerà la forma

$$xx' = -\frac{d}{a}:$$

questo risultato si interpreta dicendo che *in due punteggiate proiettive il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti è costante.*

Questo numero costante si dice **potenza della proiettività.**

Se la potenza è positiva, x ed x' hanno segni uguali e la proiettività si dice **concorde**; se negativa, x ed x' hanno segni contrari e la proiettività si dice **discorde.**

Per proiettività degeneri, e per esse soltanto, la potenza è nulla.

43. Similitudine. — Supponiamo che nella equazione della proiettività, sia $a=0$: essa prenderà la forma

$$bx+cx'+d=0$$

e si verificherà la proprietà caratteristica che *il rapporto della distanza* x_1-x_2 *di due punti dell'una forma a quella* $x_1'-x_2'$ *dei punti corrispondenti della seconda è costante.*

Infatti dalle relazioni

$$\begin{cases} bx_1+cx_1'+d=0 \\ bx_2+cx_2'+d=0 \end{cases}$$

si ricava sottraendo

$$b(x_1-x_2)+c(x_1'-x_2')=0$$

da cui

$$\frac{x_1-x_2}{x_1'-x_2'}=-\frac{c}{b}.$$

Da questa proprietà viene il nome di **similitudine**, che in questo caso particolare è dato alla proiettività fra due forme.

Reciprocamente: *una corrispondenza biunivoca fra due punteggiate, nella quale è costante il rapporto fra le distanze di punti corrispondenti, è una similitudine.* Infatti da una relazione della forma $\frac{x-x_1}{x'-x_1'}=k$, si trae $x-kx'+(kx_1'-x_1)=0$.

Introducendo l'ipotesi $a=0$ nelle formule $x=-\frac{c}{a}$, $x'=-\frac{b}{a}$, che danno le coordinate dei punti limiti, vediamo che questi risultano situati nei punti improprii delle due punteggiate. Da ciò risulta che *nella similitudine gli elementi impropri si corrispondono*: reciprocamente, *una proiettività nella quale gli elementi improprii si corrispondano è una similitudine.*

Se il valore comune dei rapporti fra segmenti corrispondenti $\frac{c}{b}=\frac{x_1-x_2}{x_1'-x_2'}$, risulta positivo la similitudine si dice *diretta*, se negativo *inversa*.

44. Se il valore assoluto di quel rapporto è 1, i segmenti corrispondenti sono uguali, e la similitudine si dice più propriamente **congruenza**. E precisamente si dice *congruenza diretta* se quel rapporto ha valore $+1$; *congruenza inversa* se ha valore -1.

Nella congruenza diretta si ha $a = o$, $b = -c$, nella inversa $a = o$, $b = c$.

Reciprocamente: ogni proiettività per la quale nella equazione (9) è $a = 0$, $b = \pm c$, è una congruenza.

§ XI. Proiettività fra forme sovrapposte.

45. Due forme geometriche si dicono **sovrapposte** quando hanno lo stesso sostegno.

Data una proiettività fra due punteggiate sovrapposte c'è luogo a ricercare gli **elementi uniti**, *i punti cioè che, considerati come appartenenti ad una forma, coincidono col loro corrispondente nell' altra.*

46. *In nessuna proiettività, si possono dare più di due elementi uniti.*

Dimostreremo infatti che se in due forme proiettive sovrapposte si hanno tre o più elementi uniti, sono unite anche tutte le altre coppie di elementi corrispondenti e le due forme sono identiche.

Siano infatti, A, B, C tre elementi uniti in due forme proiettive sovrapposte. Indicando con D e D' due altri punti corrispondenti qualunque, per la supposta proiettività delle due forme si dovrà avere

$$(ABCD) = (ABCD')$$

dunque D e D' dovranno coincidere.

47. Per la ricerca dei punti uniti, immaginando i punti delle due punteggiate riferiti ad uno stesso sistema di coordinate, dovremo cercare valori di x ed x' eguali fra loro ed atti a soddisfare la equazione della proiettività.

Facendo in questa $x = x'$, ne ricaveremo la equazione di 2° grado

(13) $$ax^2 + (b + c)\,x + d = 0$$

la quale potrà avere due radici reali e distinte, reali ed uguali od immaginarie.

Nel primo caso la proiettività vien detta **iperbolica**, nel secondo **parabolica**, nel terzo **ellittica**.

48. Nel caso della similitudine è $a = 0$, la equazione di secondo grado ha, in tal caso, una radice infinita, corrispondente ai punti impropri i quali nella similitudine si corrispondono, ed una radice finita

$$x = -\frac{d}{b+c},$$

che è ascissa dell' unico punto unito proprio, il quale viene detto **centro della similitudine.**

Segue dalla proprietà dimostrata al n.° 43 che *le distanze del centro di similitudine da due punti corrispondenti hanno un rapporto costante ed eguale a* $-\frac{c}{b}$. Ciò giustifica la denominazione di *centro,* data al punto unito: la similitudine è in sostanza una **omotetia** rispetto a questo punto.

Fa eccezione il caso in cui sia $b + c = 0$; allora anche il centro diventa improprio; la similitudine, avendo un solo punto unito, è *parabolica* (n.° 47), d'altra parte, essendo $b = -c$ è una *congruenza diretta* (n.° 44). Fra coppie corrispondenti si ha la relazione $x_1' - x_2' = x_1 - x_2$, ossia $x_1' - x_1 = x_2' - x_2$.

Dunque i segmenti che vanno da ciascun punto della prima punteggiata al punto corrispondente della seconda sono tutti fra loro eguali in valore e segno — ossia: *la congruenza diretta fra due punteggiate sovrapposte è una* **traslazione.**

Il caso $b = c$, della *congruenza inversa,* non è eccezionale. Il centro di similitudine è a distanza finita, il rapporto di similitudine è -1, ossia *la congruenza inversa fra punteggiate sovrapposte è una* **simmetria** *rispetto ad un punto* (il centro di similitudine).

49. Indichiamo con U_1, U_2 i punti uniti di una proiettività fra due punteggiate sovrapposte. Se immaginiamo i punti delle due punteggiate riferiti ad un sistema di coordinate proiettive, aventi i primi due punti fondamentali nei punti U_1, U_2, a questi punti corrisponderanno (n.° 24) le coordinate proiettive $\infty, 0$.

La equazione della proiettività dovrà essere soddisfatta per i valori

$$x = x' = \infty, \quad x = x' = 0.$$

Per la prima condizione dovrà essere (nella (13)) $a=0$, per la seconda $d=0$, e la equazione (12) della proiettività si ridurrà alla

$$bx+cx'=0$$

cioè

$$\frac{x'}{x}=-\frac{b}{c}.$$

Indicando con X, X' due punti corrispondenti qualunque, con x, x' le loro coordinate proiettive nel sistema ora indicato avremo

$$(U_1U_2XX')=(\infty\, 0xx')=\frac{x'}{x}=-\frac{b}{c}.$$

Questo birapporto ha dunque lo stesso valore per tutte le coppie X, X'. Donde la proposizione:

Su due punteggiate proiettive sovrapposte è costante il birapporto dei punti uniti e di una coppia di punti corrispondenti qualunque.

È vera anche la reciproca, e cioè *una corrispondenza biunivoca fra punteggiate, tale che il birapporto di due punti fissi U_1, U_2 e di una coppia qualsiasi di punti corrispondenti abbia valore costante k, è una proiettività, ed i due punti U_1, U_2 sono punti uniti.*

Ed infatti, riferendo gli elementi della punteggiata ad un sistema di coordinate proiettive nel quale U_1, U_2 siano i primi due punti base, ed indicando con x, x' le coordinate di due punti corrispondenti X, X', si ha

$$(U_1U_2XX')=\frac{x'}{x}=k$$

da cui

$$x'-kx=0$$

questa è la equazione di una proiettività i cui punti uniti hanno per coordinate ∞, o, cioè sono i punti base U_1, U_2.

Il birapporto della quaderna costituita dagli elementi uniti e da una coppia di elementi corrispondenti qualsivogliano, è detto **invariante assoluto**, o **caratteristica** *della proiettività.*

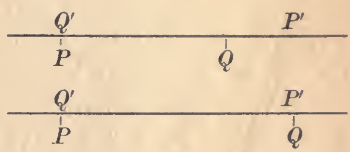
50. Facilmente si vede che *i punti uniti sono equidistanti dai punti limiti.* Si verifica, infatti, che i punti uniti ed i punti limiti hanno lo stesso punto medio. Ed invero le ascisse dei punti limiti sono $-\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$, e la loro semisomma (ascissa del punto medio) è $-\frac{b+c}{2a}$. Le ascisse dei punti uniti sono radici della equazione (13), la loro somma è dunque $-\frac{b+c}{a}$, e la semisomma $-\frac{b+c}{2a}$.

§ XII. Involuzione.

51. Siano date due punteggiate proiettive sovrapposte: un punto del sostegno comune potrà essere considerato sia come appartenente alla prima punteggiata, sia come appartenente alla seconda.

Se riguardiamo un tale punto P, come appartenente alla prima punteggiata, potremo determinarne il corrispondente P' nella seconda.

Se lo stesso punto lo riguardiamo come appartenente alla seconda punteggiata, e come tale lo indichiamo con la lettera Q' ne troveremo il corrispondente Q nella prima.



Se anche Q coincide con P' si dice che *i punti P e P' si corrispondono in doppio modo.*

Una proiettività nella quale tutte le coppie di elementi omologhi si corrispondano in doppio modo vien detta **involuzione.**

52. Dimostreremo che *se in una proiettività una coppia di elementi distinti si corrispondono in doppio modo, anche tutte le altre coppie si corrispondono in doppio modo e la proiettività è involutoria.*

Siano infatti h, k le coordinate di due elementi che si corrispondono in doppio modo: la equazione della proiettività (12) dovrà essere soddisfatta sia da $x = h$, $x' = k$, sia da $x = k$, $x' = h$: si dovrà avere cioè identicamente:

$$\begin{cases} ahk + bh + ck + d = 0 \\ akh + bk + ch + d = 0, \end{cases}$$

da queste per sottrazione.

$$b(h-k)+c(k-h)=0$$
$$(b-c)(h-k)=0$$

e, non essendo $h=k$ (perchè i due punti dati sono supposti distinti), dovrà essere

$$b=c$$

e la equazione della proiettività assumerà la forma simmetrica (rispetto ad x e ad x')

$$axx'+b(x+x')+d=0. \tag{14}$$

La simmetria di questa formula ci assicura appunto la corrispondenza in doppio modo di due elementi di coordinate x, x' ad essa soddisfacenti; poichè da essa si ricavano le formule

$$x=-\frac{bx'+d}{ax'+b'}, \quad x'=-\frac{bx+d}{ax+d}$$

le quali ci mostrano che x si ottiene da x' con la stessa trasformazione con la quale x' si ottiene da x.

Poichè l'equazione della involuzione (14) contiene due soli parametri essenziali, vediamo che *la involuzione è individuata da due sole coppie di elementi corrispondenti.*

Praticamente, date le coppie x_1, x_1'; x_2, x_2' di elementi corrispondenti, per scrivere la equazione della involuzione, cioè per determinare i coefficienti a, b, d nella formula (14), basta considerare come simultanee le tre equazioni

$$\begin{cases} axx'+b(x+x')+d=0 \\ ax_1x_1'+b(x_1+x_1')+d=0 \\ ax_2x_2'+b(x_2+x_2')+d=0, \end{cases}$$

lineari ed omogenee nelle tre incognite a, b, d, e scrivere la condizione di possibilità di un tale sistema sotto la nota forma:

$$\begin{vmatrix} xx' & x+x & 1 \\ x_1x_1' & x_1+x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2+x_2' & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{14'}$$

Questa appunto è la equazione cercata.

53. Due numeri x, x' qualunque possono sempre essere dati come radici di una equazione di 2.° grado

$$a_0 t^2 + a_1 t + a_2 = 0,$$

nella quale si faccia

$$x + x' = -\frac{a_1}{a_0}, \quad xx' = \frac{a_2}{a_0}.$$

Se supponiamo che le coppie x, x'; x_1, x_1'; x_2, x_2', siano date mediante le equazioni

$$\begin{cases} a_{00}t^2 + a_{01}t + a_{02} = 0 \\ a_{10}t^2 + a_{11}t + a_{12} = 0 \\ a_{20}t^2 + a_{21}t + a_{22} = 0 \end{cases}$$

la condizione perchè quelle tre coppie appartengano ad una stessa involuzione sarà espressa da

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{02}}{a_{00}}, & -\frac{a_{01}}{a_{00}}, & 1 \\ \frac{a_{12}}{a_{10}}, & -\frac{a_{11}}{a_{10}}, & 1 \\ \frac{a_{22}}{a_{20}}, & -\frac{a_{21}}{a_{20}}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè da

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa condizione equivale ad ammettere la esistenza di due numeri λ, μ, tali che

$$a_{00} = \lambda a_{10} + \mu a_{20}, \quad a_{01} = \lambda a_{11} + \mu a_{21}, \quad a_{02} = \lambda a_{12} + \mu a_{22},$$

cioè ad ammettere che la prima delle tre equazioni di secondo grado scritte, abbia la forma:

$$(14'') \qquad \lambda(a_{10}t^2 + a_{11}t + a_{12}) + \mu(a_{20}t^2 + a_{21}t + a_{22}) = 0.$$

Dunque, *date le equazioni di due coppie di una involuzione, la equazione di una terza coppia della involuzione può ottenersi come combinazione lineare delle prime due.*

La (14″) può considerarsi come la *equazione della involuzione determinata dalle coppie di punti date mediante le equazioni* $a_{10}t^2 + a_{11}t + a_{12} = 0$, $a_{20}t^2 + a_{21}t + a_{22} = 0$, perchè ad ogni coppia di valori dei parametri λ, μ (o ad ogni valore del loro rapporto $\lambda:\mu$) fa corrispondere una coppia di punti appartenente alla involuzione medesima; e, reciprocamente, ogni coppia di tali punti può essere rappresentata dalla (14″).

In particolare le coppie assegnate corrispondono ai valori $\lambda = 1$, $\mu = 0$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

La involuzione sopra la punteggiata, rappresentata nel modo anzidetto, viene designata col nome di **fascio di coppie di punti.**

54. I punti uniti della involuzione (*punti doppi*) si ottengono risolvendo la equazione

$$ax^2 + 2bx + d = 0. \tag{15}$$

Al pari della proiettività la involuzione è detta *iperbolica* se i punti uniti sono reali e distinti, *ellittica* se sono immaginari.

La involuzione parabolica è sempre degenere. Ciò perchè la condizione affinchè l'equazione (15) abbia due radici uguali è

$$b^2 - ad = 0$$

e coincide con la condizione dell'annullamento del modulo della trasformazione proiettiva rappresentata dalla (14).

Nella involuzione i *punti limiti* coincidono in un unico punto che ha per coordinata $-\frac{b}{a}$ e viene detto **centro della involuzione.**

Il centro della involuzione è in generale un punto proprio. Diviene improprio se $a = 0$, ossia nel caso della **similitudine involutoria** (n.° 43), e poichè in tal caso il rapporto di similitudine è $-\frac{c}{b} = -1$, si vede che *la similitudine involutoria è una simmetria* (n.° 48). Escluso questo caso, assumendo il centro della involuzione come origine di un sistema di coordinate ascisse, la equazione della involuzione prende la forma

$$xx' = -\frac{d}{a},$$

dunque: *il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dal centro della involuzione ha un valore costante, che vien detto* **potenza della involuzione.**

55. Si vede immediatamente (analogamente a quanto fu fatto al n.° 50) che *il centro della involuzione è il punto medio del segmento terminato ai due punti doppi. Questo punto è sempre reale anche se i punti doppi sono immaginari coniugati* (n.° 22).

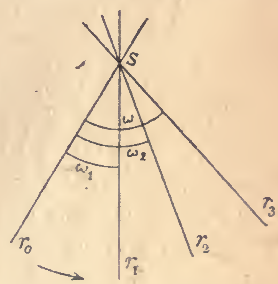
Infine dalla proprietà dimostrata pel caso generale della proiettività al n.° 49 che il birapporto dei punti doppi e di una coppia di punti corrispondenti ha il valore costante $-\frac{b}{c}$, si deduce, pel caso della involuzione, che tale rapporto è -1, ossia che: *in una involuzione i punti doppi separano armonicamente qualsiasi coppia di punti corrispondenti.* E si dimostra immediatamente la proposizione reciproca:

se gli elementi di due punteggiate sovrapposte si corrispondono biunivocamente, ed esistono due punti U_1, U_2 che separano armonicamente ogni coppia di elementi corrispondenti, la corrispondenza è involutoria, ed U_1, U_2 sono i punti doppi in tale involuzione.

§ XIII. Fascio di raggi.

56. I raggi di un fascio con centro proprio S sono dotati di due versi fra loro opposti. Fissato il verso positivo ed un raggio origine r_0, la posizione di un raggio qualunque r è determinata dall'angolo che questo forma col raggio fisso r_0. La misura ω di questo angolo, che supporremo espressa in radianti, viene detta **anomalia** e si indica scrivendo

$$\omega = \widehat{r_0 r},$$



nella qual notazione l'ordine in cui si seguono le due lettere $r_0 r$ corrisponde al verso della rotazione nell'angolo considerato.

57. *Ad ogni valore della anomalia* (positivo o negativo) *corrisponde un raggio r ed uno solo; ma ad ogni raggio r del* *fascio corrispondono infiniti valori della anomalia differenti fra loro per un multiplo di* π.

Ed infatti un raggio mobile che ruoti intorno ad S partendo dalla posizione r_0 si sovrappone ad r dopo aver compiuto una rotazione θ minore di π, ma poi, continuando a ruotare sempre nello stesso verso, torna nuovamente in r_0 dopo aver compiuto le rotazioni $\theta+\pi$, $\theta+2\pi$, $\theta+3\pi \ldots$.

Indicando con ω', ω'' due di tali rotazioni e con k un determinato numero intero (positivo o negativo) si avrà

$$\omega' = \omega'' + k\pi,$$

o, con la notazione in uso per le congruenze numeriche,

$$\omega' \equiv \omega'' \pmod{\pi}$$

o, più semplicemente

$$\omega' \equiv \omega''.$$

Le anomalie corrispondenti ad uno stesso raggio sono congrue fra loro (mod π).

Corrispondentemente alle *identità segmentarie* date al n.° 11 avremo dunque le **congruenze angolari**:

$$\widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_1} \equiv 0, \quad \widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_3} + \widehat{r_3 r_1} \equiv 0 \ldots.$$

le quali potranno considerarsi come vere identità

$$\widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_1} = 0, \quad \widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_3} + \widehat{r_3 r_1} = 0 \ldots,$$

quando (come ordinariamente si fa) non si considerino valori della anomalia superiori, in valore assoluto, a π.

58. La corrispondenza fra gli elementi del fascio e la anomalia ω non è *biunivoca*; può essere resa tale solo limitando la variabilità di ω da 0 a π. Dunque, mediante la anomalia, i raggi del fascio possono essere posti in corrispondenza biunivoca solo con una parte dei numeri reali; perciò, invece di assumere come coordinata del fascio di raggi la variabile ω (*anomalia*) si assume solitamente una funzione trigonometrica di ω che abbia per periodo π e che, al variare di ω da 0 a π assuma tutti i valori del campo reale. Tale è la *tangente*; considereremo dunque come coordinata dell'elemento variabile del fascio la tangente trigonometrica

$$m = \operatorname{tg} \omega.$$

La coordinata tangente al variare del raggio nel fascio assume ordinatamente tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$. La corrispondenza fra la coordinata tangente ed i raggi del fascio è biunivoca ed ordinata: si vede subito che è anche continua $\left(\text{sola eccezione alla continuità è il valore di } \omega,\ \omega = \frac{\pi}{2}\right)$.

59. Coordinate nei fasci di rette orientate. — È spesso utile, nelle applicazioni pratiche, di considerare i raggi di un *fascio* come *rette orientate.* Una retta orientata che, ruotando nel verso positivo, percorra il fascio, ritorna alla posizione primitiva (direzione e senso) dopo compiuto un intero giro.

I valori delle *anomalie che in un fascio di rette orientate corrispondono ad uno stesso elemento, differiscono fra di loro per un multiplo di* 2π; le congruenze angolari esposte al n.° 57 vanno dunque riferite al mod 2π, e sono da considerare come identità angolari quando la anomalia s'intenda limitata all'intervallo $0, \ldots, 2\pi$.

La *coordinata tangente* in un fascio di rette orientate, determina la direzione e non il verso dell'elemento cui si riferisce.

60. Osserveremo ancora che, *quando si dovrà considerare solo il coseno dell'angolo di due rette orientate, si potrà omettere di scegliere il verso positivo delle rotazioni, poichè*

$$\cos\omega = \cos(2\pi - \omega).$$

E, siccome dei due angoli che vengono a considerarsi non fissando il verso delle rotazioni, ω, $2\pi - \omega$, uno è sempre non superiore a π, *tutte le volte che si deve considerare solo il coseno dell'angolo di due rette orientate, si può intendere, per angolo di tali rette, quello non maggiore di* π, *formato dai versi positivi di esse.*

61. Angolo di due raggi dati mediante le loro coordinate tangenti.

Dati due raggi r_1, r_2 di coordinate tangenti m_1, m_2 dalla congruenza angolare

$$\widehat{r_1 r_2} \equiv \widehat{r_0 r_2} - \widehat{r_0 r_1}$$

si ricava

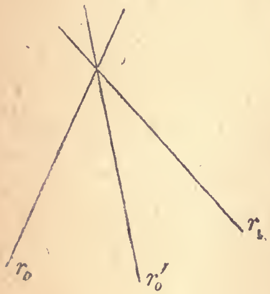
$$\operatorname{tg} \widehat{r_1 r_2} = \operatorname{tg}(\widehat{r_0 r_2} - \widehat{r_0 r_1}) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \tag{16}$$

La **condizione di perpendicolarità** delle due rette r_1, r_2, è che divenga infinito il valore della tangente del loro angolo, cioè che si annulli il denominatore della formula (16): è quindi espressa dalla relazione

(17) $$1 + m_1 m_2 = 0.$$

62. Formula di trasformazione delle coordinate tangenti.

Il sistema di coordinate tangenti in un fascio di raggi dipende dalla scelta del raggio origine r_0. Se questo si trasporta in r_0' e si conosce la tangente



$$\operatorname{tg} \widehat{r_0 r_0'} = k,$$

la coordinata tangente di un raggio r, che nel primo sistema era m_1 si muterà in un'altra che indicheremo con m_1'.

Per trovare la relazione fra m_1 ed m_1' partiremo dalla relazione

$$\widehat{r_0' r_1} = \widehat{r_0 r_1} - \widehat{r_0 r_0'}$$

d'onde

$$\operatorname{tg} \widehat{r_0' r_1} = \operatorname{tg} (\widehat{r_0 r_1} - \widehat{r_0 r_0'})$$

o

(18) $$m_1' = \frac{m_1 - k}{1 + k m_1}.$$

Questa è appunto la formula richiesta, di trasformazione delle antiche nelle nuove coordinate.

63. Birapporto di quattro raggi di un fascio.

La formula (18) è, come si vede, una trasformazione lineare, il cui modulo

$$\begin{vmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 + k^2$$

è diverso dallo zero.

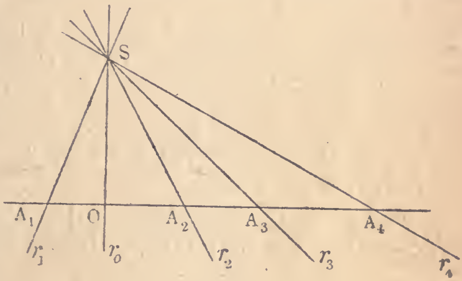
Di qui si vede (n.° 35) che *il birapporto delle coordinate tangenti di quattro raggi del fascio è indipendente dalla scelta del raggio origine.* Assumeremo perciò questo valore come **birapporto dei quattro raggi**; scriveremo cioè

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = (m_1 m_2 m_3 m_4).$$

Assunti come fissi tre raggi determinati $r_1 r_2 r_3$, ed indicato con r l'elemento generico del fascio, il birapporto $\mu = (r_1 r_2 r_3 r)$ può considerarsi come *coordinata di r*, e vien detto **coordinata proiettiva**.

64. Sezione del fascio con una trasversale.

Se si segano quattro raggi $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ di un fascio proprio, con una traversale qualunque, non passante pel centro, che li incontri nei punti $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ il birapporto $(A_1\, A_2\, A_3\, A_4)$ dei quattro punti di intersezione è sempre uguale a quello $(r_1 r_2 r_3 r_4)$ dei quattro raggi.



Ed infatti assumiamo come raggio origine in un sistema di coordinate tangenti del fascio la perpendicolare SO calata dal centro su la retta secante e come punto origine in un sistema di ascisse sulla punteggiata $A_1\, A_2 \ldots$, il piede O di questa perpendicolare.

Per un raggio r qualunque, e pel punto A di sezione con la traversale si avrà

$$\overline{OA} = \overline{SO} \operatorname{tg} \widehat{r_0 r}$$

cioè

$$a = \overline{SO} \cdot m. \tag{19}$$

Poichè $\overline{SO}$ è un numero costante, la formola trovata è una trasformazione proiettiva (a modulo diverso da zero) della variabile m nella variabile a; il birapporto di quattro elementi m sarà dunque sempre uguale al birapporto dei quattro corrispondenti valori della variabile a, onde si avrà

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = (m_1 m_2 m_3 m_4);$$

ma si ha

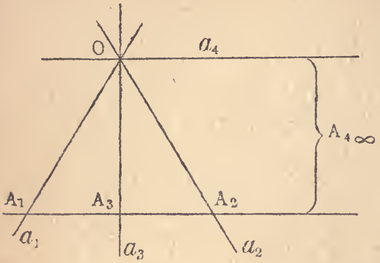
$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (a_1 a_2 a_3 a_4), \quad (r_1 r_2 r_3 r_4) = (m_1 m_2 m_3 m_4)$$

dunque, in fine

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$

Dalla proposizione dimostrata in particolare si deduce che: *le bisettrici $a_3\, a_4$ degli angoli adiacenti $\widehat{a_1 a_2}$, $\widehat{a_2 a_1}$ formati da due*

raggi a_1, a_2 incidenti in O separano armonicamente i raggi che comprendono gli angoli bisecati, e, reciprocamente, che se i raggi $a_3\, a_4$ del fascio considerato sono ortogonali fra loro e separano armonicamente altri due raggi a_1, a_2, essi sono le bisettrici degli angoli $\widehat{a_1 a_2}$, $\widehat{a_2 a_1}$ formati da questi ultimi due.



E difatti se seghiamo il fascio con una normale ad a_3, e sono $A_1 A_2 A_3 A_4$ i punti sezione, vediamo che, nel primo enunciato, A_4 è il punto improprio della retta secante, ed A_3 è il punto medio di $A_1 A_2$ e che perciò il gruppo $A_1 A_2 A_3 A_4$ è armonico.

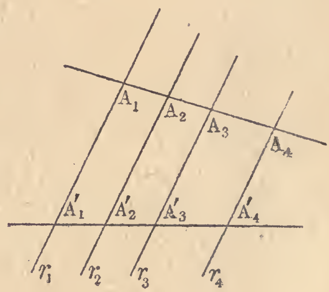
Nel secondo enunciato, dalla ipotesi $(A_1 A_2 A_3 A_4) = -1$ si deduce che a_3 è bisettrice dell'angolo $\widehat{a_1 a_2}$.

65. Se il *fascio è a centro improprio*, cioè se tutti i raggi sono fra loro paralleli, segando con diverse trasversali che incontrino i raggi del fascio nei rispettivi punti $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots A_1' A_2' A_3' A_4' \ldots$, i segmenti intercetti sono proporzionali.

La proporzionalità fra due variabili $x_1 x_1'$ si traduce nella formula

$$x = ax'$$

che è un caso particolare di trasformazione proiettiva.



Quindi anche i birapporti di due quaterne di punti corrispondenti sono uguali:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (A_1' A_2' A_3' A_4')$$

perciò, ed in conformità a quanto è stato dimostrato per fasci proprii, si definisce come ***birapporto di quattro raggi paralleli in un fascio il birapporto dei quattro punti in cui essi segano una trasversale qualunque.***

66. Anche nel fascio di raggi si considerano *elementi immaginari*, intendendo per raggio immaginario l'elemento corrispondente ad un valore complesso (non reale) della coordinata tangente (o della anomalia).

La relazione

$$a = \overline{SO} \cdot m$$

che lega la coordinata tangente di un fascio con la coordinata ascissa della punteggiata che è sezione del fascio con una retta determinata, ci dice che a raggi immaginari corrispondono punti immaginari, ed a raggi reali, punti reali.

Raggi immaginari coniugati sono quelli che corrispondono a valori complessi coniugati della coordinata.

Le bisettrici degli angoli formati da raggi immaginari coniugati sono rette reali; ed, in generale, *è reale il raggio quarto armonico dopo due raggi immaginari coniugati ed un raggio reale.*

67. Proiettività fra due fasci di raggi, *è una corrispondenza biunivoca fra i raggi di due fasci che conserva il birapporto*; tale cioè che il birapporto di quattro raggi dell'un fascio sia uguale al birapporto dei quattro raggi corrispondenti nell'altro.

Poichè il birapporto di quattro raggi è uguale al birapporto delle loro coordinate tangenti, ripetendo le riflessioni fatte pel caso della proiettività fra punteggiate, troveremo che:

Ogni proiettività fra due fasci di raggi, si traduce analiticamente in una relazione bilineare:

$$amm' + bm + cm' + d = 0 \tag{20}$$

fra le coordinate tangenti m, m', di due elementi variabili nei due fasci, fra loro corrispondenti: e, reciprocamente, ogni relazione di tale natura rappresenta una proiettività.

Questa relazione è *la equazione della proiettività fra due fasci di raggi.* E, poichè non è formalmente diversa da quella che esprime la proiettività fra due punteggiate, le conseguenze che da essa derivano sono le medesime che furono stabilite nello studio della proiettività fra punteggiate. In particolare osserveremo che: la proiettività fra fasci, al pari di quella fra punteggiate, è *degenere* se il determinante $ad - bc$ è nullo.

Le punteggiate che risultano dalle sezioni, mediante rette, di due fasci proiettivi, sono proiettive. I fasci che si ottengono proiettando da punti (esterni al sostegno) punteggiate proiettive, sono proiettivi.

In particolare: sono proiettive le punteggiate che si ottengono segando uno stesso fascio con rette diverse, e sono proiettivi i fasci che si ottengono proiettando una stessa punteggiata da centri diversi.

Se i fasci hanno lo stesso sostegno si dicono *sovrapposti,* e, nella proiettività fra fasci sovrapposti, la ricerca dei **raggi uniti** è ridotta alla risoluzione della equazione

$$am^2 + (b + c)m + d = 0: \tag{21}$$

secondo che le radici di tale equazione sono reali e distinte, reali ed uguali, od immaginarie, la proiettività si dice *iperbolica*, *parabolica* od *ellittica.*

Come al n.° 49 proveremo che: *in due fasci proiettivi sovrapposti è costante il birapporto formato dai raggi uniti e da una coppia di raggi corrispondenti.*

Una proiettività fra due fasci sovrapposti, nella quale gli elementi si corrispondono in doppio modo è detta **involuzione.**

L'equazione della involuzione ha la forma simmetrica:

$$amm' + b(m + m') + d = 0. \tag{22}$$

La ricerca dei **raggi doppi** si traduce analiticamente nella risoluzione della equazione

$$am^2 + 2bm + d = 0$$

e, dalla natura delle radici, la involuzione vien detta *iperbolica* (raggi doppi reali e distinti) od *ellittica* (raggi doppi immaginari).

Le considerazioni fatte al n.° 55 valgono anche pel caso presente, a dimostrare che in una involuzione di raggi, *i raggi doppi separano armonicamente qualunque coppia di raggi corrispondenti.* Si scorge poi immediatamente che un'involuzione in un fascio di raggi determina una involuzione sulla punteggiata che si ottiene segando il fascio con una retta qualunque.

68. La proiettività fra due fasci di raggi si dice **congruenza** (*diretta od inversa*) se, presi due raggi qualunque r_1, r_2 del primo fascio ed i corrispondenti r_1', r_2' del secondo, sono eguali

(od eguali e contrari) gli angoli omologhi

$$\widehat{r_1 r_2} = \pm \widehat{r_1' r_2'}.$$

Od, indicando con θ, θ' le anomalie di raggi corrispondenti nei due fasci, se

$$\theta_2 - \theta_1 = \pm (\theta_2' - \theta_1')$$

ossia

$$\theta_1' \mp \theta_1 = \theta_2' \mp \theta_2.$$

Dunque *la condizione perchè la proiettività sia una congruenza è che sia costante la differenza* (*o la somma*) $\theta' \mp \theta$ *delle anomalie di raggi corrispondenti.*

Indicando con m, m' le coordinate tangenti, e con p, q costanti determinate, si dovrà avere

$$\frac{m' \mp m}{1 \pm m'm} = \frac{p}{q},$$

od ancora

$$\pm pmm' \pm qm - qm' + p = 0.$$

Verifichiamo così che la congruenza è in effetto una proiettività, e, dal confronto di questa formula con la equazione (20) generale della proiettività fra due fasci di raggi, si vede che *la condizione perchè una proiettività sia una congruenza diretta, è che, nella equazione* (20) *ad essa relativa, sia* $a = d$, $b = -c$; *perchè sia una congruenza inversa, che sia* $a = -d$, $b = c$.

Se i due fasci sono sovrapposti, la congruenza diretta risulta una proiettività ellittica; e la relazione $\theta' - \theta =$ costante, mostra che essa è una **rotazione** dell'angolo costante $\theta' - \theta$ attorno al centro del fascio.

La congruenza inversa è *iperbolica*: essa è una simmetria rispetto a ciascuno dei due raggi uniti (reali) che sono fra loro ortogonali.

69. Coppia ortogonale in una involuzione di raggi. Data una involuzione di raggi c'è luogo a cercare se esistono coppie di raggi corrispondenti fra loro ortogonali.

Se m, m' sono le coordinate tangenti di tali raggi, per esse dovranno essere ad un tempo soddisfatte, l'equazione della involuzione e la condizione di perpendicolarità, cioè le due:

$$\begin{cases} amm' + b(m + m') + d = 0 \\ mm' + 1 = 0; \end{cases}$$

eliminando da questa la m', si trova:

$$bm^2 + (d - a)m - b = 0. \tag{23}$$

Questa equazione fornisce due valori ***sempre reali*** per m. Indicando con $m_1 m_2$ tali valori vediamo dalla (23) che il loro prodotto è

$$m_1 m_2 = -\frac{b}{b} = -1 \quad \text{cioè} \quad m_1 m_2 = -1.$$

I raggi corrispondenti a tali valori sono dunque ortogonali e costituiscono *la* **coppia ortogonale** *di raggi corrispondenti nella involuzione proposta.*

Da note proprietà delle equazioni di secondo grado ricaviamo che se la (23) avesse altre soluzioni, oltre le m_1, m_2 e diverse da queste, essa dovrebbe ridursi ad una identità numerica. Tutti i suoi coefficienti dovrebbero cioè essere uguali a zero, e si avrebbe

$$b = 0, \quad a = d;$$

con ciò la equazione della proiettività si ridurrebbe alla

$$amm' + a = 0$$

cioè

$$mm' + 1 = 0$$

che è la condizione di ortogonalità. *La nostra involuzione sarebbe costituita dunque da coppie tutte ortogonali fra loro.*

Considereremo a parte questa speciale involuzione e concluderemo intanto che *escluso questo caso eccezionale, una involuzione di raggi ha sempre una coppia ortogonale ed una sola.*

Sappiamo che i raggi doppi separano armonicamente ogni coppia di raggi corrispondenti, ed in particolare, quindi, anche la coppia ortogonale.

Da ciò si deduce (n.° 64) che *in una involuzione di raggi, la coppia ortogonale è costituita dalle bisettrici degli angoli formati dai raggi doppi.*

E, poichè la coppia ortogonale esiste sempre (anche per involuzioni ellittiche), abbiamo qui una conferma del fatto già osservato (n.° 66) che, *le bisettrici di due raggi immaginari coniugati, sono rette reali.*

70. Involuzione ortogonale di raggi.

L'involuzione di raggi che ha per equazione

$$mm' + 1 = 0$$

fa corrispondere ad ogni raggio di un fascio quello ad esso perpendicolare, viene perciò detta **involuzione degli angoli retti** *od* **involuzione ortogonale**, *o circolare, o* **ciclica.**

Tale involuzione è *ellittica* poichè i raggi doppi sono dati dalla equazione

$$m^2 + 1 = 0$$

che ha per radici i numeri immaginari

$$m_1 = i, \quad m_2 = -i:$$

i raggi immaginari corrispondenti si dicono **rette isotrope** o **rette cicliche.**

La involuzione ortogonale è una particolare congruenza diretta, corrispondente ad una rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

Per le proprietà dei raggi doppi nella involuzione di raggi, avremo che: *due raggi corrispondenti in una involuzione ortogonale dividono armonicamente le rette isotrope uscenti dal loro punto d'incontro, e che due rette sono ortogonali se dividono armonicamente le rette isotrope che escono dal loro punto d'incontro.*

L'involuzione ortogonale determina sulla retta impropria una involuzione (indipendente dal centro del fascio) che viene detta **involuzione assoluta**, e le rette isotrope segano la retta impropria nei punti doppi di tale involuzione, i quali punti vengono detti **punti ciclici.**

I punti ciclici sono dunque *i punti improprii delle rette isotrope uscenti da un punto qualunque del piano.*

71. Definizione proiettiva dell'angolo. Formula di Laguerre.

Siano r_1, r_2 due raggi di un fascio a centro proprio; assumiamo r_1 come origine nel fascio, indichiamo con θ la anomalia $\widehat{r_1 r_2}$, e con m_2 la coordinata tangente, $m_2 = \operatorname{tg} \theta$, di r_2; la coordinata tangente di r_1 sarà $m_1 = 0$, e, se indichiamo con s_1, s_2 le rette isotrope uscenti dal centro del fascio, le coordinate tangenti di tali rette saranno i, $-i$.

Il birapporto $M=(r_1, r_2, s_1, s_2)$ dei quattro raggi r_1, r_2, s_1, s_2, sarà dato da

$$M=(r_1, r_2, s_1, s_2)=(0, \operatorname{tg}\theta, i, -i)$$

da cui

$$M=\frac{i+\operatorname{tg}\theta}{i-\operatorname{tg}\theta}. \tag{24}$$

Di qui si ricava:

$$\operatorname{tg}\theta=i\frac{M-1}{M+1}. \tag{25}$$

Questa formula dà una definizione proiettiva della tangente dell'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ di due direzioni, *la qual tangente viene espressa razionalmente* (*mediante una trasformazione lineare*) *in funzione del birapporto che le due rette formano con le rette isotrope uscent dal vertice dell'angolo.*

Ma, ricorrendo alla formula

$$\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta=e^{i\theta}. \tag{26}$$

nota col nome di *Teorema di Eulero*, che esprime la relazione fra le funzioni trigonometriche e la esponenziale, si può ricavare anche il valore di θ, in funzione del birapporto M.

Infatti la (24) si può scrivere,

$$M=\frac{\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=\frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}}=e^{-2i\theta}$$

ossia

$$\theta=\frac{\log M}{2}i$$

cioè

$$\widehat{r_1 r_2}=\frac{\log(r_1, r_2, s_1, s_2)}{2}i. \tag{27}$$

È questa la *formula di* LAGUERRE, e si enuncia dicendo:

L'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ di due rette si ottiene moltiplicando per $\frac{i}{2}$ il logaritmo naturale del birapporto $M=(r_1, r_2, s_1, s_2)$ che le due rette formano con le rette isotrope, s_1, s_2 uscenti dal vertice, ed aventi per coordinata tangente ordinatamente i, e $-i$.

72. La formula (25), (o la equivalente formula di Laguerre) serve a dimostrare l'importante teorema: *se due fasci* *sovrapposti sono direttamente eguali il birapporto di due raggi corrispondenti r, r' e delle rette isotrope uscenti dal centro è costante.*

Questo birapporto è infatti espresso dalla formula

$$M = \frac{i + \operatorname{tg} \widehat{rr'}}{i - \operatorname{tg} \widehat{rr'}}$$

e l'angolo $\widehat{rr'}$ è, per ipotesi, costante.

Da ciò si deduce che, *in due fasci sovrapposti direttamente congruenti i raggi isotropi sono raggi uniti.* Ciò del resto si verifica direttamente (n.° 68).

Reciprocamente. *Se in due fasci proiettivi sovrapposti i raggi isotropi sono i raggi uniti, i due fasci sono direttamente congruenti.*

Sappiamo infatti (n.° 67) che: in due fasci proiettivi sovrapposti è costante il birapporto $M = (r, r', s_1, s_2)$ formato dai raggi uniti e da una coppia di raggi corrispondenti, ma si ha $\operatorname{tg}(\widehat{rr'}) = i\,\dfrac{M-1}{M+1}$; dunque anche l'angolo $\widehat{rr'}$ è costante.

Il medesimo vale anche per fasci non sovrapposti, e si ha in generale il TEOREMA: *Una proiettività fra due fasci di raggi, nella quale i raggi isotropi si corrispondono è una congruenza.*

Ed infatti: dalla eguaglianza dei birapporti

$$(r_1, r_2, s_1, s_2) = (r_1', r_2', s_1', s_2')$$

si deduce, per la formula (25), la eguaglianza degli angoli $\widehat{r_1 r_2} = \widehat{r_1' r_2'}$ formati dai raggi corrispondenti: cioè la *congruenza diretta* dei due fasci.

Se poi si suppone che i raggi isotropi $s_1 s_2$ corrispondano rispettivamente ai due $s_2' s_1'$ (cioè che al primo raggio isotropo di un fascio corrisponda il secondo raggio isotropo dell'altro e reciprocamente) si ha

$$\begin{aligned}(r_1, r_2, s_1, s_2) &= (r_1', r_2', s_2', s_1') \\ &= (r_2', r_1', s_1', s_2')\end{aligned}$$

e di qui si ricava la eguaglianza degli angoli

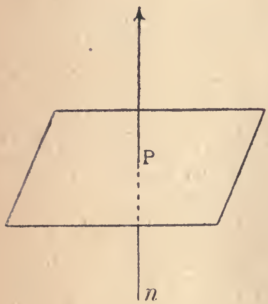
$$\widehat{r_1 r_2} = \widehat{r_2' r_1'} = -\widehat{r_1' r_2'},$$

e così si dimostra che i due fasci sono *inversamente congruenti.*

§ XIV. Fascio di piani.

73. Se in un punto qualunque P di un piano dato, immaginiamo condotta la normale n al piano e su questa fissiamo il verso positivo, potremo distiguere nel piano due pagine o facce, quella che guarda verso la semiretta n positiva avente la origine in P e quella opposta.

Di queste due pagine si suole assumere come **pagina positiva** quella che guarda al verso positivo della normale; come **pagina negativa** l'altra.



Fissata la pagina positiva sopra ciascuno di due piani dati α e α' e fissato il senso delle rotazioni, intorno alla loro intersezione (che si suppone orientata); potremo dare un significato più preciso alla locuzione: **angolo** $\widehat{\alpha\alpha'}$ **di quei due piani**, intendendo di considerare *la rotazione, nel verso positivo, minore di* 2π *che deve compiere il piano* α *perchè la sua pagina positiva venga a coincidere con la faccia positiva di* α'.

Considerando che quest'angolo è uguale a quello delle normali n, n', considerate queste come rette orientate, potremo far corrispondere ai piani di un fascio di piani (in ciascuno dei quali sia fissata la pagina positiva) le rette del fascio di rette orientate (n.° 59) costituito dalle normali ai piani del fascio condotte per un punto dato dell'asse.

Od altrimenti: immaginando segato il fascio di piani con un piano normale all'asse avremo sopra questo, nella pagina positiva rispetto al verso dell'asse, un fascio di rette, e l'angolo di due piani sarà dato dall'angolo delle due corrispondenti rette del fascio.

Assumendo nel fascio di piani un piano origine α_0, scegliendo nel fascio di raggi per origine il corrispondente raggio r_0, ed il concorde verso positivo; poichè ad ogni piano del fascio corrisponde un raggio, e ad ogni raggio del fascio sezione un piano; potremo usare per i piani del fascio, le stesse coordinate che servono per fissare l'elemento variabile nel fascio di raggi, e cioè l'**anomalia**

$$\omega = \widehat{\alpha_0\alpha}$$

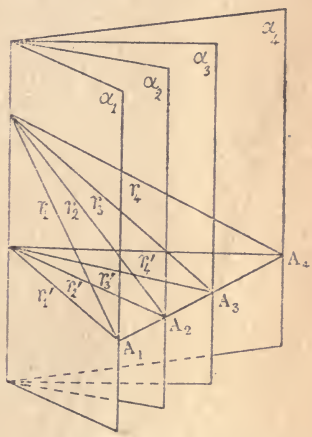
o la **coordinata tangente**

$$m = \operatorname{tg} \widehat{\alpha_0\alpha}.$$

Il birapporto di quattro piani del fascio, si definisce per mezzo del birapporto dei quattro raggi corrispondenti di una sezione retta ed è uguale perciò a quello delle corrispondenti coordinate tangenti.

E, come per fasci di raggi, il birapporto $\mu = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha)$ formato da tre piani fissi $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e da un quarto α variabile nel fascio, si dice **coordinata proiettiva** dell'elemento variabile nel fascio.

Teorema. — *Se si sega un fascio di piani con un piano qualunque* (anche non perpendicolare alla costola) *il birapporto di quattro raggi della sezione è uguale a quello dei 4 piani corrispondenti.* Basterà infatti dimostrare che quel birapporto è uguale a quello dei quattro corrispondenti raggi di una sezione retta.



Siano perciò $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ i quattro piani, $r_1r_2r_3r_4$ le sezioni di essi con un piano qualunque, $r_1'r_2'r_3'r_4'$ le sezioni con un piano perpendicolare all'asse, $A_1A_2A_3A_4$ i punti dove i raggi r_1r_1', r_2r_2', r_3r_3', r_4r_4' rispettivamente si incontrano.

Questi ultimi punti saranno sulla retta intersezione dei piani delle due sezioni (la sezione retta e la obliqua) ed applicando la proposizione data al n.° 64, avremo

$$(r_1r_2r_3r_4) = (A_1A_2A_3A_4)$$
$$(r_1'r_2'r_3'r_4') = (A_1A_2A_3A_4),$$

da cui

$$(r_1r_2r_3r_4) = (r_1'r_2'r_3'r_4'),$$

come appunto volevamo dimostrare.

Si vede ancora che, *segando il fascio di piani con una retta qualunque, il birapporto di quattro punti di questa* $(A_1A_2A_3A_4)$ *è eguale al birapposto dei quattro corrispondenti piani* $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

Possiamo, dunque, in generale, concludere che: *le operazioni di proiezione e sezione applicate a forme fondamentali di prima specie conservano il birapporto.*

§ XV. Coordinate omogenee.

74. Consideriamo un sistema di coordinate in una forma di prima specie ed ammettiamo che il birapporto di quattro elementi della forma sia eguale a quello delle corrispondenti coordinate; ciò che effettivamente avviene per l'ascissa, la coordinata baricentrica, la coordinata proiettiva, la coordinata tangente.... La coordinata x dell'elemento generico della forma potrà in infiniti modi esser posta sotto la forma di rapporto

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

di due numeri, i quali per ogni valore di x risulteranno determinati a meno di un fattore di proporzionalità ρ; essendo, per ogni valore di ρ,

$$x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho x_1}{\rho x_2}.$$

Reciprocamente, data una coppia di numeri $x_1 x_2$, (non nulli ad un tempo) il valore di x risulta determinato dal rapporto $x = \frac{x_1}{x_2}$. Le coppie (x_1, x_2) costituiscono le **coordinate omogenee** dell'elemento variabile nella data forma di prima specie.

Se x è *coordinata proiettiva*, i numeri $x_1 x_2$, costituiscono le *coordinate proiettive omogenee*; i valori di tali coordinate pei tre elementi fondamentali sono (a meno di un fattore di proporzionalità) 1, 0; 0, 1; 1, 1.

Teorema. — *Fissati, in una forma di prima specie, due elementi distinti di coordinate omogenee* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *ogni altro elemento della forma ha, nello stesso sistema, coordinate omogenee espresse da combinazioni lineari, della forma:*

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \end{cases}$$

e, reciprocamente, per ogni coppia di numeri λ, μ, arbitrariamente scelti, le formule scritte rappresentano coordinate omogenee di un elemento della forma.

I numeri λ, μ, sono le coordinate proiettive omogenee dello stesso elemento rispetto agli elementi fondamentali (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Infatti, se i dati elementi sono distinti si ha $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, cioè $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; e perciò il sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \end{aligned}$$

ammette per λ, μ un sistema di soluzioni ed uno solo.

La reciproca è immediata, perchè per ogni coppia λ, μ, si ha una coppia $x_1 x_2$, cui corrisponde nella forma l'elemento di coordinata (non omogenea) $\frac{x_1}{x_2}$.

Se poi assumiamo (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ come elementi fondamentali nella data forma, indicando con $\frac{\lambda}{\mu}$ la coordinata proiettiva non omogenea dell'elemento (x_1, x_2), sarà

$$\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{a_1}{a_2}, \ \frac{b_1}{b_2}, \ \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}, \ \frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{x_2 a_1 - x_1 a_2}$$

e di qui appunto

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda a_1 + \mu b_1}{\lambda a_2 + \mu b_2}.$$

75. In coordinate omogenee, l'equazione della proiettività fra forme di prima specie assume la forma:

$$a \frac{x_1 x_1'}{x_2 x_2'} + b \frac{x_1}{x_2} + c \frac{x_1'}{x_2'} + d = 0$$

ossia

$$a x_1 x_1' + b x_1 x_2' + c x_1' x_2 + d x_2 x_2' = 0$$

o, risolvendo rispetto ad $\frac{x_1'}{x_2'}$,

$$\frac{x_1'}{x_2'} = -\frac{b x_1 + d x_2}{a x_1 + c x_2},$$

questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x_1' = \rho(-bx_1 - dx_2) \\ x_2' = \rho(ax_1 + cx_2) \end{cases}$$

od all'altro

$$\begin{cases} x_1 = \rho(cx_1' + dx_2') \\ x_2 = -\rho(ax_1' + bx_2') \end{cases}$$

dove ρ indica un arbitrario fattore di proporzionalità.

Possiamo dunque concludere:

Le proiettività fra forme di prima specie sono le trasformazioni lineari ed intere fra le coordinate omogenee dei loro elementi.

CAPITOLO II.

PUNTI E RETTE NEL PIANO

§ I. Proiezioni ortogonali.

76. **Proiezione ortogonale** *di un punto* P sopra una retta propria orientata x (**asse di proiezione**), è il punto P' dove il piano π, condotto per P normalmente ad x, incontra questa retta.

Segue da questa definizione che *tutti i punti del piano proiettante* π *hanno la stessa proiezione sull'asse.*

77. *Proiezione di un segmento* PQ è il segmento $P'Q'$ determinato dalle proiezioni degli estremi P, Q del segmento obbiettivo su l'asse.

Assumendo come concordi i versi di due rette parallele, dalla data definizione e da note proprietà di geometria elementare si deduce che: *le proiezioni di uno stesso segmento su assi paralleli sono eguali* (in grandezza ed in segno).

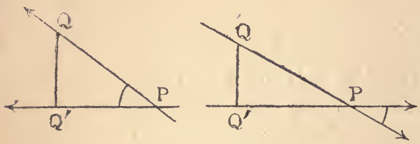
78. Nelle proposizioni che vogliamo stabilire occorrerà parlare del coseno degli angoli di due rette orientate: ricordando le riflessioni fatte al n.° 60 intenderemo per **angolo** $\widehat{r_1 r_2}$ **di due rette orientate** r_1, r_2, *l'angolo non maggiore di* π *formato dai versi positivi di dette rette*, cioè l'angolo fra 0 e π contenuto da due semirette uscenti da un punto qualunque dello spazio, nelle direzioni positive di r_1, r_2.

79. Teorema. — *Il numero* $\overline{P'Q'}$ *che misura (in grandezza e segno) il segmento* $P'Q'$ **proiezione** *di un dato segmento* PQ, *appartenente ad una retta orientata* r, *sopra un dato asse* x, *è uguale al prodotto del numero* $\overline{PQ}$ *che misura il segmento obbiettivo, moltiplicato pel coseno dell'angolo* $\widehat{rx}$ (**angolo di proiezione**) *della retta cui appartiene il segmento obbiettivo e dell'asse di proiezione.*

Cioè

(1) $$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \cos \widehat{rx}.$$

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che si può sempre supporre spostato l'asse di proiezione parallelamente a sè stesso, in modo che passi per uno dei punti estremi del segmento obbiettivo, p.es. per P: la proiezione P' sul nuovo asse sarà coincidente con P e dal triangolo PQQ' ricaveremo per i valori assoluti $|PQ|$, $|P'Q'|$ la relazione



(2) $$|\overline{P'Q'}| = |\overline{PQ}| \cos QP'Q'.$$

Ora si osservi che, se i segmenti PQ, $P'Q'$ sono, nel verso, entrambi concordi od entrambi discordi con le rette orientate r, x, cui appartengono, i numeri PQ, $P'Q$ risultano di segni uguali, ed è

$$\widehat{QPQ'} = \widehat{rx}$$

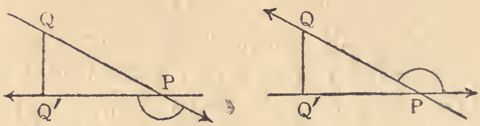
onde dalla (2) si ricava

$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \cos \widehat{rx}.$$

Se poi uno dei segmenti ha verso concorde con quello della retta cui appartiene, e l'altro discorde, i numeri $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$ risulteranno di segni contrari; si avrà poi

$$\widehat{QPQ} = \pi - \widehat{rx}$$

onde, anche in questo caso



$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \cos \widehat{rx}.$$

Il Teorema rimane dunque dimostrato in ogni caso.

80. Osservazione I. — Poichè il coseno non muta cambiando il segno dell'arco, potremo anche scrivere.

(1') $$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \cos \widehat{xr}.$$

Il confronto delle due formule (1), (1') ci avverte che la lunghezza della proiezione rimane la medesima, tanto se si suppone che il segmento obbiettivo PQ sia sull'asse r e che da questo si proietti su x, quanto se si suppone che sia sull'asse x e cha di qui si proietti su r.

OSSERVAZIONE II. — *Se le rette r, x sono parallele e concordi si ha*

$$\widehat{xr} = 0$$

e quindi

$$\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$$

cioè *il segmento obbiettivo è uguale alla sua proiezione.*

Se le rette r, x sono perpendicolari, cioè *se il segmento P, Q è normale all'asse di proiezione, è*

$$\widehat{rx} = \frac{\pi}{2}$$

e la proiezione $P'Q'$ è nulla.

81. Siano P_1, P_2, ... P_{n-1}, P_n, punti comunque dati nello spazio: consideriamo la poligonale chiusa costituita dai segmenti P_1P_2, P_2P_3 .... $P_{n-1}P_n$, P_nP_1. Proiettando questa poligonale sopra un asse x qualunque, ed indicando con P_1', P_2' .... P_n', le proiezioni dei punti dati, dalla identità segmentaria

$$(3) \qquad \overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} + \overline{P_n'P_1'} = 0$$

si deduce che:

La somma algebrica delle proiezioni dei lati di una linea poligonale chiusa sopra un asse qualunque é identicamente nulla.

L'identità (3) si può anche scrivere:

$$(4) \qquad \overline{P_1'P_2'} + \overline{P_2'P_3'} + \ldots + \overline{P_{n-1}'P_n'} = \overline{P_1'P_n'}$$

e di qui, considerando che P_1P_n è la risultante della poligonale aperta P_1P_2 .... P_n, si ricava la proposizione:

La somma delle proiezioni dei lati di una linea poligonale qualunque è eguale alla proiezione della risultante.

Segue ancora che:

Se due linee poligonali hanno in comune gli estremi, la somma delle proiezioni dei lati dell'una è uguale alla somma delle proiezioni dei lati dell'altra.

82. Proiezione ortogonale di un'area piana sopra un piano dato.

Dato un piano π, che diremo **piano di proiezione**, se dai punti P_1, P_2..., dello spazio si conducono le perpendicolari P_1P_1', P_2P_2'.... a π, le traccie P_1', P_2'..., di queste perpendicolari si dicono *proiezioni ortogonali su* π *dei punti* P_1, P_2,....

I punti di una figura comunque situata nello spazio, si proiettano nei punti di una figura piana che si dice *proiezione della figura data sul piano* π.

I punti di una retta si proiettano nei punti di una retta; perciò se si suppone fissato l'orientamento di tutte le rette dello spazio, per le proiezioni ortogonali di segmenti sopra un dato piano, vale un teorema analogo a quello dato al n.° 79.

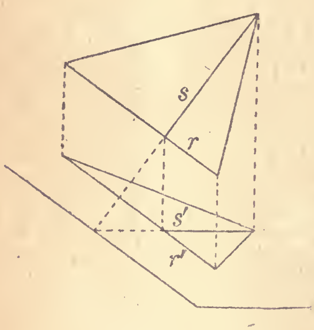
Per le proiezioni ortogonali di figure piane, vale il

Teorema: *L'area della proiezione ortogonale di una figura piana è eguale all'area della figura obbiettiva moltiplicata pel coseno del diedro formato dal piano obbiettivo e dal piano di proiezione.*

Osserviamo: 1.° la proiezione di un segmento r parallelo al piano di proiezione e contenuto nel piano obbiettivo α è un segmento r' eguale e parallelo ad r e parallelo anche alla retta intersezione dei due piani.

2.° Un segmento s normale ad r si proietta in un segmento s' normale ad r' e l'angolo $\widehat{ss'}$ è il rettilineo del diedro $\widehat{\alpha\pi}$.

3.° La lunghezza del segmento s' si ottiene da quella del segmento obbiettivo con la solita relazione



$$\bar{s}' = \bar{s} \cos \widehat{ss'}.$$

Ciò posto sia S l'area di una figura del piano α, S' quella della sua proiezione ortogonale su π. Se la figura obbiettiva è un triangolo con un lato r parallelo al piano di proiezione, ed è s la sua altezza, si avrà

$$\bar{s}' = \bar{s} \cos \widehat{ss'}$$

cioè

$$\bar{s}' = \bar{s} \cos \widehat{\alpha\pi}$$

ed

$$S' = \frac{1}{2}\overline{r's'} = \frac{1}{2}\overline{rs}\cos\widehat{\alpha\pi} = S\cos\widehat{\alpha\pi}.$$

Un triangolo qualunque dato su α si scompone in due triangoli che hanno un lato parallelo a π, mediante una parallela a π condotta per uno dei vertici; e scrivendo che l'area della figura data è somma delle aree di questi due triangoli, rimane dimostrata la formula proposta.

La proposizione si estende immediatamente alle aree di figure poligonali, le quali mediante diagonali si scompongono in triangoli.

E, per figure limitate da contorni curvilinei, considerando le aree di queste come limiti di aree di figure poligonali inscritte, con un facile passaggio al limite si potrà dimostrare la proposizione enunciata.

§ II. Coordinate cartesiane.

83. Abbiamo visto al Cap. I, che nelle forme di prima specie, un elemento variabile vien determinato mediante un numero (coordinata) che esprime la relazione di posizione di esso rispetto ad elementi prefissati ed invariabili nella forma; vedremo ora che nel piano punteggiato l'elemento variabile (punto) può essere fissato mediante una coppia di numeri che ne determinano la posizione rispetto ad elementi prefissati ed invariabili del piano.

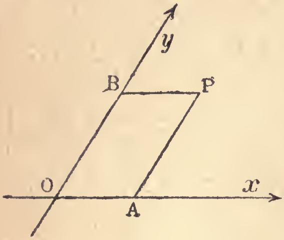
Questa determinazione può farsi in più modi mediante opportuni sistemi di coordinate (n.° 9), dei quali il più comunemente usato è quello detto **sistema cartesiano**, di cui ora faremo parola.

84. Si considerino due rette orientate x, y, del piano, le quali si incontrino in un punto proprio O. Chiameremo questo punto **origine**, le due rette assi e, più propriamente *asse delle x*, o *asse x* la prima, *asse delle y* od *asse y* la seconda.

Fissata l'unità di misura delle lunghezze, per ogni punto P dato nel piano si conducano le due parallele PA, PB agli assi e si misurino i segmenti da esse intercettati sugli assi. Le lunghezze (in valore e segno) di questi segmenti

$$x = \overline{OA}, \quad y = \overline{OB}$$

si chiamano *coordinate del punto P nel sistema di assi cartesiani* Ox, Oy: la prima $x = \overline{OA}$ vien detta più propriamente **coordinata** x o **ascissa**, la seconda $y = \overline{OB}$ **coordinata** y od **ordinata.**

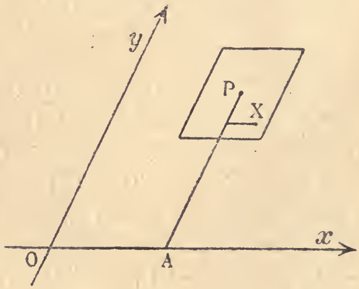


Per tal modo, *ad ogni puuto P del piano si fa corrispondere una coppia di numeri x, y*: « **coordinate di** P ».

Per indicare che al punto P competono le coordinate x, y, si suol scrivere $P(xy)$.

Reciprocamente, *ad ogni coppia di numeri reali x, y comunque dati corrisponde un punto del piano ed uno solo.*

Infatti, in corrispondenza di due tali numeri vengono determinati sugli assi i punti A, B, e quindi anche il punto P, quarto vertice del parallelogramma $OAPB$, che ha per lati adiacenti OA, OB.



La corrispondenza fra i punti $[P]$ del piano e le coppie $[a, b]$ di numeri reali è dunque *biunivoca.*

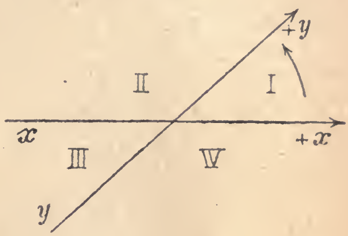
Facilmente si vede che essa è anche *continua*, osservando che i punti $X(xy)$ le cui coordinate differiscono da quelle di P per meno di un dato numero positivo δ, sono situati entro un parallelogramma col centro in P e coi lati paralleli agli assi ed eguali, in lunghezza, a 2δ.

85. Osservazione. — Per determinare le coordinate di P, basta condurre per P una delle due parallele agli assi, per es. la PA e poi misurare i segmenti OA, AP. E, reciprocamente, data la coppia di numeri reali x, y, per trovare il punto $P(xy)$ basta costruire la spezzata OAP, con $\overline{OA} = x$, $\overline{AP} = y$.

86. Analogamente a ciò che si fece per le forme di prima specie, *considereremo, anche nel piano punteggiato, elementi* (punti) *immaginari*, individuati da coppie (x, y) di numeri complessi (uno almeno dei quali non sia reale).

87. Il piano è diviso dagli assi in quattro *regioni angolari* con angoli minori di π, delle quali si considera come *prima* quella limitata dai semiraggi positivi, e le altre si seguono nel senso in cui, entro la prima regione, ruota l'asse delle x intorno a 0 per sovrapporsi all'asse y. I segni delle coordinate nelle quattro regioni sono:

regione	I	$x+$	$y+$
»	II	$-$	$+$
»	III	$-$	$-$
»	IV	$+$	$-$



88. I punti dell'asse x hanno ordinata nulla, cioè per essi è $y=0$, ed i punti di ordinata nulla sono su l'asse x; si può dire dunque che l'asse x è il luogo dei punti per i quali è $y=0$, od, in altri termini, che la equazione $y=0$ è soddisfatta da tutti i punti dell'asse x e da questi soli; diremo più brevemente che *la equazione dell'asse x è $y=0$.*

Similmente si vede che *la equazione dell'asse y è $x=0$.*

La *equazione della bisettrice dell'angolo degli assi è $x=y$.*

La equazione della bisettrice dell'angolo adiacente a quello degli assi (nella II e IV regione) è $x=-y$.

Tutti i punti della retta AP hanno la stessa ascissa $x=\overline{OA}$, e tutti i punti che hanno ascissa $x=\overline{OA}$ sono sulla retta AP. Similmente: tutti i punti che hanno ordinata $y=\overline{OB}$ sono quelli della retta BP e sono questi soli. Cosicchè, quando si dice che il punto P ha coordinate x, y si afferma che esso si trova sulla intersezione delle rette AP, BP, parallele agli assi.

Il piano, in questo sistema di coordinate, vien dunque immaginato come ricoperto da un reticolato di rette parallele agli assi, ed ogni punto occupa un nodo del reticolato.

89. L'angolo $\widehat{xy}$ degli assi può essere qualunque, purchè maggiore di 0 e minore di π. Per solito lo si suppone retto, *si suppongono cioè gli assi perpendicolari fra loro; ed in tale ipotesi le coordinate si dicono* **ortogonali.**

Le quattro regioni in cui gli assi cartesiani ortogonali dividono il piano vengono dette **quadranti.**

§ III. Piano orientato.

90. Il verso secondo cui, nella prima regione (cioè entro un angolo minore di π), ruota la parte positiva dell'asse x per andare a sovrapporsi sulla parte positiva dell'asse y, si assume come *verso positivo delle rotazioni nel fascio di centro O.*

Resta così fissato anche il verso positivo in ogni altro fascio del piano, se in questo si assume come positivo il senso in cui si muove uno dei suoi raggi, il quale si mantenga parallelo ad un raggio che descriva il fascio di centro O nel verso positivo.

Un piano sul quale si è fissato il verso positivo delle rotazioni si dice **piano orientato.**

91. *Per determinare l'orientamento del piano, basta,* per quanto abbiamo detto, *che in esso sia fissato un sistema di coordinate cartesiane.*

Un osservatore che sia collocato lungo la normale al piano condotta nell'origine O sopra la pagina ove supponiamo tracciati gli assi (cioè sulla pagina del piano xy scelta come positiva), rivolto verso la parte positiva dell'asse x, può vedere la parte positiva dell'asse y alla sua sinistra od alla sua destra.

Nel primo caso egli vedrà le rotazioni del piano avvenire dalla destra verso la sinistra, nel secondo caso, dalla sinistra alla destra.

Si dice che il sistema è, nel primo caso, **sinistrorso**, nel secondo **destorso.**

Due sistemi di assi coordinati, entrambi sinistrorsi, od entrambi destrorsi si dicono **concordi.**

D'ordinario si considerano sistemi sinistrorsi, cioè si *considerano positive le rotazioni sinistrorse del piano.*

Avendo stabilito il verso positivo delle rotazioni nel fascio che ha centro nell'origine O delle coordinate, ed il senso positivo dell'asse delle x, *qualunque retta r del fascio stesso può considerarsi come orientata,* quando la si consideri come una posizione particolare di un raggio mobile che, partendo dalla posizione inizialmente fissata pel raggio x, giri intorno ad O nel senso positivo delle rotazioni di un angolo minore di π, fino a sovrapporsi ad r.

Anche *qualsivoglia retta r' del piano potrà ricevere l'orientamento dall'asse x, se si conviene di attribuirle verso concorde con quello della parallela r, uscente dalla origine.*

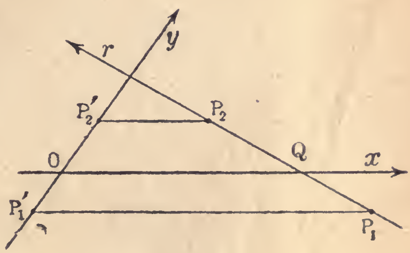
Osservazione I. — Se in una retta orientata r si fissa un punto proprio qualunque Q, la retta medesima può considerarsi come scomposta da questo punto e dal punto improprio in due parti, delle quali l'una a *partire da Q* è percorsa nel verso positivo, l'altra, pure a partire da Q, è percorsa nel verso negativo.

Potremo dire la prima **parte positiva** della retta r, la seconda **parte negativa**, *rispetto al punto Q.*

Ciò posto: come conseguenza delle convenzioni da noi fatte circa l'orientamento delle rette del piano avremo che: *se consideriamo i due semipiani che l'asse x determina nel piano xy; quello di essi che contiene la parte positiva dell'asse y, contiene anche la parte positiva di qualunque retta del piano, rispetto al punto Q dove questa retta incontra l'asse delle x.*

Perciò il *semipiano che contiene la parte positiva dell'asse y*, sarà da noi, quando occorra, indicato col nome di **semipiano positivo.**

E potremo, per fissare l'orientamento di una retta r del piano che incontri l'asse x in un punto proprio, dire che *il verso positivo della retta r è quello secondo cui un punto che percorra la retta, attraversa l'asse x andando dal semipiano negativo al positivo.*



Osserveremo ancora che, se consideriamo due punti qualunque P_1, P_2, i quali si seguano nel verso positivo della retta r orientata al modo anzidetto, le parallele all'asse delle x, P_1P_1', P_2P_2' condotte per questi punti, incontrano l'asse delle y in due punti P_1', P_2' i quali pure si seguono nel verso positivo: cioè *l'ordinata OP_2' del secondo punto è sempre maggiore della ordinata OP_1' del primo punto.*

Si vede anche immediatamente che *se i punti P_1, P_2 sono tali che la ordinata del primo sia minore della ordinata del secondo, essi punti si seguono nel verso positivo della retta cui appartengono.*

Ciò si esprime dicendo che le *rette del piano sono orientate nel senso delle* **ordinate crescenti.**

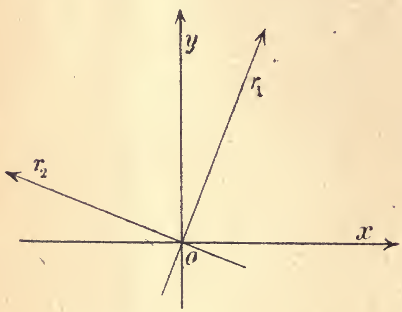
Questo enunciato non comprende le *rette parallele all' asse delle* x, per le quali *la ordinata è costante.* Tali rette hanno orientamento concorde con quello dell'asse x, e perciò potranno dirsi *orientate nel senso delle ascisse crescenti.*

Osservazione II. — Dalla convenzione fatta circa l'orientamento delle rette del piano, riferite ad un sistema di assi cartesiani, segue che *l'angolo formato dalle parti positive di rette orientate al modo anzidetto è sempre minore, in valore assoluto, di* π.

Se il sistema cartesiano è *ortogonale*, possiamo inoltre affermare che *l'angolo che la parte positiva di una retta del piano forma con la parte positiva dell'asse delle* y *è sempre, in valore assoluto, minore od eguale a* $\frac{\pi}{2}$.

Dunque, *in coordinate ortogonali, il coseno dell'angolo* $\widehat{ry}$ *formato dalla parte positiva di una retta del piano con la parte positiva dell'asse* y *è sempre positivo o nullo.*

92. Angolo di due rette. — *Per angolo* $\widehat{r_1 r_2}$ *di due rette del piano, assumeremo l'angolo formato dalle parti positive di due parallele ad esse rette condotte per l'origine.*



Tale angolo è sempre in valore assoluto minore di π, ed è positivo o negativo, secondo che le parallele ad r_1, r_2 si seguono nel verso positivo delle rotazioni, o nel verso contrario.

Ricordando la *definizione proiettiva dell'angolo* (data al n.° 71) si vede che il segno dell'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ di due rette del piano date in un ordine assegnato, dipende dall'ordine in cui si seguono i punti ciclici, che rispettivamente corrispondono ai coefficienti angolari i, $-i$, su la retta impropria; cioè dal verso scelto come positivo su la retta impropria: e, reciprocamente. Dunque, fissato il verso positivo in un determinato fascio del piano, rimane fissato il verso positivo su la retta impropria, e quindi il verso positivo delle rotazioni in ogni fascio, col centro in un punto qualunque del piano. Ciò a conferma della convenzione fatta al n.° 91.

93. Per gli angoli formati da rette $r_1, r_2, r_3, \ldots$, comunque date nel piano, si hanno le **identità angolari**:

$$\widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_1} = 0$$

$$\widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_3} + \widehat{r_3 r_1} = 0,$$

$$\widehat{r_1 r_2} + \widehat{r_2 r_3} + \widehat{r_3 r_4} + \widehat{r_4 r_1} = 0, \ldots.$$

94. Distanza di due punti. — Siano $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ i due punti dei quali si vuol trovare la distanza $\delta = \overline{P_1 P_2}$.

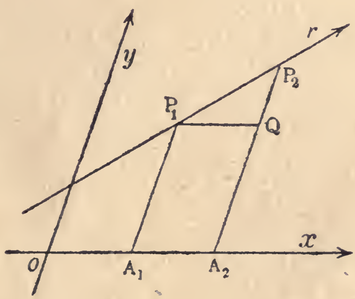
Si conducano per P_1, P_2 le parallele $P_1 Q$, $P_2 Q$ agli assi x, y, rispettivamente, e sia Q il loro punto d'incontro. Avremo:

$$\overline{P_1 Q} = x_2 - x_1, \quad \overline{Q P_2} = y_2 - y_1.$$

Proiettando ortogonalmente la spezzata $P_1 Q P_2$ su la retta $P_1 P_2$, che indicheremo con r e supporremo orientata al modo detto, avremo

$$\delta = (x_2 - x_1) \cos \widehat{xr} + (y_2 - y_1) \cos \widehat{yr}. \tag{5}$$

Questa formula dà, in valore e segno, la distanza $P_1 P_2$ dei due punti dati.



Ma poichè essa è poco comoda per le applicazioni, ne dedurremo un'altra più pratica, proiettando anche su gli assi x, y la medesima spezzata; avremo così

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \cos \widehat{xr} = x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) \cos \widehat{xy} \\ \delta \cos \widehat{yr} = (x_2 - x_1) \cos \widehat{xy} + y_2 - y_1. \end{array} \right. \tag{6}$$

Moltiplicando i due membri della (5) per δ e sostituendo i valori dati dalle (6) si trova

$$\delta^2 = (x_2 - x_1) \{ x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) \cos \widehat{xy} \} +$$
$$+ (y_2 - y_1) \{ (x_2 - x_1) \cos \widehat{xy} + y_2 - y_1 \}$$

o, riducendo,

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y_2 - y_1) \cos \widehat{xy}$$

da cui

$$(7) \qquad \delta = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \widehat{xy}}.$$

Nel caso degli assi ortogonali, si ha

$$\cos \widehat{xy} = 0$$

e la formula (7) si riduce alla

$$\delta = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

la quale è la traduzione analitica del teorema di Pitagora.

95. Il segno da attribuire a δ sarà positivo se il senso P_1P_2 è concorde col verso positivo della retta r orientata al modo indicato, negativo se discorde.

E per sapere, anche senza aver tracciata la figura, quale dovrà essere tale segno, basta ricordare che in una retta orientata secondo le nostre ipotesi, il verso positivo è quello secondo cui le ordinate vanno crescendo.

Dunque *il segmento determinato dai punti P_1P_2 avrà verso concorde con quello della retta cui appartiene se la ordinata del secondo punto è maggiore di quella del primo.*

D'onde la regola: *Il segno di $\delta = \overline{P_1P_2}$ dato dalla formula* (7) *dovrà esser preso positivo* se $y_2 > y_1$, *negativo* se $y_2 < y_1$.

Se poi si suppone $y_2 = y_1$, si ha semplicemente (anche nel segno, secondo le nostre convenzioni):

$$\delta = x_2 - x_1 .$$

Se fosse anche $x_2 = x_1$ sarebbe $\delta = 0$ ed i due punti P_1P_2 sarebbero coincidenti.

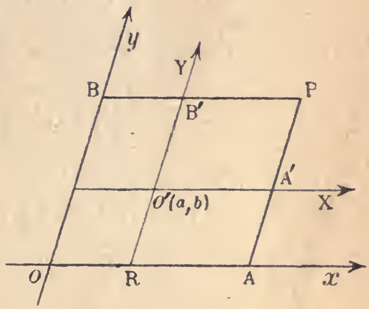
In particolare *un segmento OP uscente dalla origine è misurato da un numero $\delta = \overline{OP}$ positivo se la ordinata y di $P(x, y)$ è* *positiva*, cioè se P è nel semipiano positivo, *negativo se questa ordinata è negativa.*

Se la ordinata y è zero, il segmento $\overline{OP}$ appartiene all'asse x ed $\overline{OP}$ è l'ascissa x del punto P.

§ IV. Trasformazioni di coordinate.

96. Traslazione degli assi.

Dato un sistema di assi cartesiani Ox, Oy e preso un punto O' di coordinate a, b, si riferiscano i punti del piano ad un altro sistema con l'origine in $O'(a, b)$ e cogli assi $O'X$, $O'Y$ paralleli e concordi con gli assi primitivi Ox, Oy. *Calcolare le coordinate XY di un punto P nel nuovo sistema, conoscendo le coordinate di questo punto nel sistema primitivo.*



Si suol dire che *il sistema primitivo si è trasformato nel nuovo mediante la traslazione* (a, b), (o questo in quello mediante la traslazione $(-a, -b)$); ed il problema enunciato è quello della *trasformazione delle coordinate per una* **traslazione degli assi.**

La risposta al quesito proposto si ottiene immediatamente osservando che le coordinate di P nel sistema primitivo sono:

$$x = \overline{OA}, \quad y = \overline{AP} = \overline{OB}$$

e, nel nuovo

$$\begin{cases} X = \overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'} = x - a \\ Y = \overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'} = y - b. \end{cases}$$

Le relazioni

$$(8) \qquad \begin{cases} X = x - a, \\ Y = y - b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

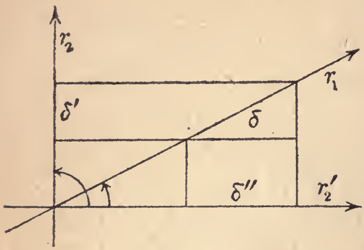
sono appunto *le formule richieste, di trasformazione delle coordinate per la traslazione* (a, b) *degli assi cartesiani.*

97. Rotazione degli assi.

Supposto ancora dato il sistema di assi coordinati Ox, Oy si vogliano riferire i punti del piano ad un nuovo sistema OX, OY

che ha col primo in comune la origine, ma nel quale gli assi X, Y formano angoli dati coi primitivi.

Si dice, in questo caso, che il sistema primitivo si è trasformato nel nuovo per **rotazione degli assi**: cerchiamo le relative *formule di trasformazione* delle coordinate.



Faremo prima l'osservazione di ordine generale che, quando sono date due rette orientate r_1, r_2, e si vuol *proiettare un segmento* δ *appartenente ad* r_1 *sopra un asse* r_2' *normale ad* r_2, occorre considerare l'angolo

$$\widehat{r_2'r_1} = \widehat{r_2'r_2} + \widehat{r_2r_1} = \widehat{r_2'r_2} - \widehat{r_1r_2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{r_1r_2};$$

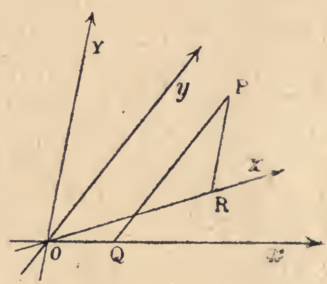
volendo calcolare il coseno di questo angolo si ha

$$\cos \widehat{r_2'r_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{r_1r_2}\right) = \operatorname{sen} \widehat{r_1r_2}$$

dunque, infine, *la proiezione di un segmento* δ *appartenente alla* r_1 *sopra un asse* r_2' *normale ad* r_2 *è data da*

$$\delta'' = \delta \operatorname{sen} \widehat{r_1r_2}.$$

Ciò premesso, preso un punto P del piano, e costruite le spezzate OQP, ORP, le quali nel sistema primitivo e nel nuovo servono alla determinazione delle coordinate di P, proiettando entrambe queste spezzate sopra uno stesso asse, poichè esse hanno la stessa risultante OP, la somma delle proiezioni dei lati dell'una sarà uguale alla somma delle proiezioni dei lati dell'altra.



Proiettiamo dunque quelle due spezzate sopra un asse normale alla retta Oy: ne verrà

$$x \operatorname{sen} \widehat{xy} = X \operatorname{sen} \widehat{Xy} + Y \operatorname{sen} \widehat{Yy}.$$

Proiettando invece, le stesse spezzate sopra un asse normale all'asse x, avremo

$$y \operatorname{sen} \widehat{yx} = X \operatorname{sen} \widehat{Xx} + Y \operatorname{sen} \widehat{Yx}.$$

Da queste dividendo per $\operatorname{sen} \widehat{xy}$, che è diverso dallo zero, abbiamo le formule di trasformazione

$$(9) \qquad \begin{cases} x = X \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{Xy}}{\operatorname{sen} \widehat{xy}} + Y \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{Yy}}{\operatorname{sen} \widehat{xy}} \\[2ex] y = X \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{Xx}}{\operatorname{sen} \widehat{yx}} + Y \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{Yx}}{\operatorname{sen} \widehat{yx}}. \end{cases}$$

Se si fanno, allo stesso modo, le proiezioni su assi normali ai nuovi assi X, Y, si hanno analogamente le formule

$$(10) \qquad \begin{cases} X = x \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{xY}}{\operatorname{sen} \widehat{XY}} + y \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{xY}}{\operatorname{sen} \widehat{XY}} \\[2ex] Y = x \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{xX}}{\operatorname{sen} \widehat{YX}} + y \dfrac{\operatorname{sen} \widehat{yX}}{\operatorname{sen} \widehat{YX}}. \end{cases}$$

Le (9), (10) sono appunto le formule richieste di *trasformazione delle coordinate per rotazione degli assi.*

98. **Rotazioni degli assi ortogonali.** — Le formule trovate si semplificano assai nel caso, che solitamente si presenta, di *assi ortogonali.*

In tal caso, difatti, è

$$\widehat{xy} = \widehat{XY} = \frac{\pi}{2}$$

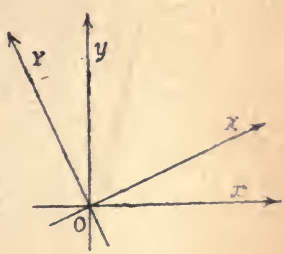
quindi

$$\operatorname{sen} \widehat{xy} = \operatorname{sen} \widehat{XY} = 1$$
$$\operatorname{sen} \widehat{yx} = \operatorname{sen} \widehat{YX} = -1.$$

Inoltre ponendo

$$\widehat{xX} = \alpha$$

e supponendo i due sistemi egualmente orientati, avremo



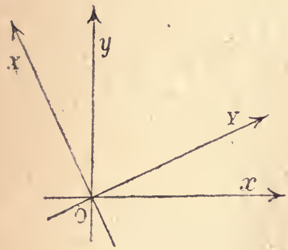
$$\begin{cases} \widehat{yY} = \widehat{xX} = \alpha \\[1ex] \widehat{xY} = \widehat{xX} + \widehat{XY} = \alpha + \dfrac{\pi}{2} \\[1ex] \widehat{Xy} = \widehat{xy} - \widehat{xX} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \end{cases}$$

e, sostituendo,

$$(9') \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

$$(10') \qquad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Se, invece, si suppongono gli assi primitivi orientati in senso discorde coi nuovi, si hanno le formule



$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha - Y\cos\alpha \end{cases}$$

e le altre che esprimono X ed Y in funzione di x, y:

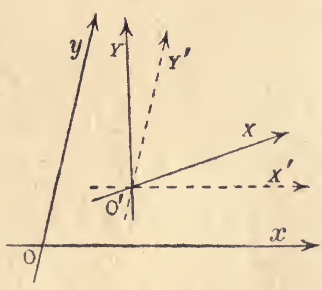
$$\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = x\,\mathrm{sen}\,\alpha - y\cos\alpha. \end{cases}$$

99. Formule generali di trasformazione. — Supposto che il nuovo sistema di coordinate abbia l'origine in un punto $O'(a, b)$ del piano, e che i nuovi assi XY formino angoli dati coi primitivi; considereremo un sistema ausiliario $O'X'Y'$ con l'origine in O' e gli assi paralleli ai primitivi.

Passeremo dal sistema primitivo all'ausiliario con la traslazione (a, b) e quindi avremo

$$\begin{aligned} x &= X' + a \\ y &= Y' + b. \end{aligned}$$

Dall'ausiliario OX', OY' al nuovo OX, OY, con una rotazione, ed avremo



$$\begin{cases} X' = X\dfrac{\mathrm{sen}\,\widehat{Xy}}{\mathrm{sen}\,\widehat{xy}} + Y\dfrac{\mathrm{sen}\,\widehat{Yy}}{\mathrm{sen}\,\widehat{xy}} \\[2ex] Y' = X\dfrac{\mathrm{sen}\,\widehat{Xx}}{\mathrm{sen}\,\widehat{yx}} + Y\dfrac{\mathrm{sen}\,\widehat{Yx}}{\mathrm{sen}\,\widehat{yx}}. \end{cases}$$

Infine

$$(11)\qquad \begin{cases} x = X\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{Xy}}{\operatorname{sen}\widehat{xy}} + Y\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{Yy}}{\operatorname{sen}\widehat{xy}} + a \\[2ex] y = X\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{Xx}}{\operatorname{sen}\widehat{yx}} + Y\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{Yx}}{\operatorname{sen}\widehat{yx}} + b. \end{cases}$$

Analogamente

$$(12)\qquad \begin{cases} X=(x-a)\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{xY}}{\operatorname{sen}\widehat{XY}} + (y-b)\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{yY}}{\operatorname{sen}\widehat{XY}} \\[2ex] Y=(x-a)\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{xX}}{\operatorname{sen}\widehat{YX}} + (y-b)\dfrac{\operatorname{sen}\widehat{yX}}{\operatorname{sen}\widehat{YX}}. \end{cases}$$

Le formule (11), (12) sono appunto le formule generali di trasformazione di coordinate cartesiane.

È da notare che esse hanno la forma

$$(13)\qquad \begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + b_1 \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + b_2 \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} X = A_{11}x + A_{12}y + B_1 \\ Y = A_{21}x + A_{22}y + B_2 \end{cases}$$

sono cioè trasformazioni lineari i cui determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

sono diversi dallo zero (come subito si verifica).

100. Infine osserveremo che, *se le coordinate x, y di un punto generico del piano sono legate da una relazione della forma*

$$f(xy) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n + b_1x^{n-1} + ... + k = 0$$

cioè da una equazione algebrica del grado n complessivo nelle x, y, tale relazione, per una trasformazione d'assi, si muterà in una equazione algebrica

$$F(XY) = A_0X^n + A_1X^{n-1}Y + ... A_nY^n + B_1X^{n-1} + ... + K = 0$$

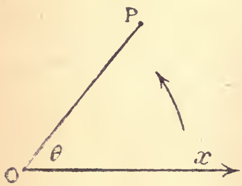
dello stesso grado nelle nuove coordinate XY.

Ed infatti, una trasformazione della forma (13) eseguita sulla $f(xy)$ non può far accrescere il grado nel polinomio trasformato, perchè le x ed y sono funzioni di primo grado delle XY.

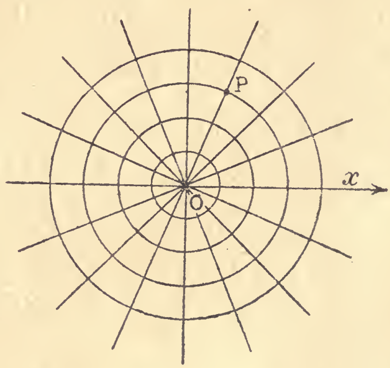
Non può nemmeno diminuirlo, perchè se ciò avvenisse e quindi la $F(XY)$ avesse grado inferiore ad n, la trasformazione inversa (14), che pure è lineare, eseguita sulla $F(XY)$ dovrebbe generare un polinomio di grado superiore $f(xy)$, il che non è possibile.

§ VI. Coordinate polari.

101. Si assumano come elementi di riferimento un punto fisso O del piano, che diremo **polo**, ed una retta orientata, cioè una semiretta Ox per O, pure fissa, che diremo **asse polare**; la posizione di un punto P del piano sarà, allora, determinata, quando si conosca il valore assoluto dalla distanza $|\overline{OP}|=\rho$ del punto P dal polo, che diremo **raggio vettore** del punto P, e l'angolo θ, che, nel verso positivo delle rotazioni (sinistrorso), la semiretta OP forma con l'asse polare. Quest' angolo è la **anomalia** del semiraggio OP nel fascio che ha per centro O, quando si assuma Ox come origine.



Per ogni punto P la anomalia rimane determinata a meno di un multiplo di 2π; ma, quando non si avverta il contrario, si conviene di considerare il solo valore di essa compreso fra 0 e 2π, cosicchè le congruenze angolari considerate ai n.[i] 57-59 si potranno considerare come identità angolari per le anomalie.



Tutti i punti che hanno lo stesso raggio vettore ρ, cioè che hanno ugual distanza dal polo, sono sopra un cerchio col centro nel polo e raggio eguale a ρ.

Tutti i punti che hanno la stessa anomalia θ sono sulla semiretta uscente da O e che forma angolo θ coll'asse polare.

Il punto P viene dunque determinato come intersezione di quel cerchio e di questo semiraggio.

Nel sistema di coordinate polari si immagina il piano ricoperto da un reticolato formato da cerchi concentrici e da semiraggi uscenti dal centro comune; ed ogni punto del piano è figurato come uno dei nodi di questo reticolato, cioè come intersezione di un determinato cerchio e di un semiraggio determinato.

In questa rappresentazione il punto O *polo*, è un *punto singolare*, poichè in esso il raggio vettore è nullo, e la anomalia può essere assegnata a piacere.

102. Ad ogni punto P del piano corrisponde una coppia ρ, θ di coordinate polari, e ad ogni coppia di numeri ρ, θ, scelti in modo che ρ sia positivo (o nullo) e θ sia compreso fra O e 2π, corrisponde un punto P ed uno solo.

Questa corrispondenza è dunque *biunivoca*, ed è anche *in generale continua. Fa eccezione alla continuità l'intiero asse polare.*

Infatti: due punti $P_1 P_2$, simmetrici rispetto a questo asse, hanno anomalie misurate da espressioni come θ, $2\pi - \theta$, le quali differiscono fra di loro per $2\pi - 2\theta$, cioè per un numero tanto più grande e tanto più prossimo a 2π quanto più i punti sono vicini fra loro.

Similmente due punti simmetrici rispetto al polo hanno anomalie differenti di π, per quanto essi siano vicini l'uno all'altro.

Per ovviare tale inconveniente si può *lasciare che ρ e θ varino liberamente* da $-\infty$ a $+\infty$. Ma allora la corrispondenza *non è più biunivoca.*

Ad ogni coppia ρ, θ corrisponde un punto ed un punto solo; il quale si determina facendo prima ruotare il raggio mobile a partire da Ox, nel verso positivo o nel negativo, a seconda il segno di θ, di un angolo eguale alla anomalia. Il verso positivo della retta r che così si ottiene, viene definito dal verso positivo dell'asse Ox.

In questa retta, a partire da O, si porta una lunghezza $\overline{OP}$ eguale, in valore e segno, a ρ; e così rimane determinato il punto P.

Ma ad ogni punto P corrispondono infinite coppie di valori ρ, θ.

E, precisamente; se ρ_0, θ_0, è una di queste coppie, se ne hanno infinite altre espresse dalle formule

$$\rho_0, \quad \theta_0 + 2k\pi$$

oppure

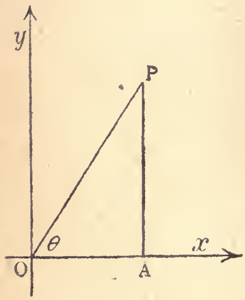
$$-\rho_0, \quad \theta_0 + \pi + 2k\pi = \theta + (2k+1)\pi$$

dove k è un numero intero qualunque.

Considerato al modo ora accennato, il sistema di coordinate è detto delle **coordinate polari generali.**

103. Trasformazione delle coordinate cartesiane nelle polari e di queste in quelle.

Possiamo sempre supporre di aver trasformato un sistema dato di coordinate cartesiane in un altro che abbia gli assi ortogonali, la origine nel polo O del sistema polare dato e l'asse x coincidente, nella sua parte positiva, con l'asse polare.



Ciò fatto, dall'esame della figura si ricava immediatamente

$$\overline{OA} = OP\cos\theta, \quad \overline{AP} = \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2}, \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$$

cioè

(15) $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

(16) $$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

e sono queste appunto le formule richieste.

§ VII. Rappresentazione analitica di curve piane (Grafiche).

104. Fissato un sistema di coordinate cartesiane nel piano (che per maggior semplicità supporremo ortogonali), ed indicate con x, y le coordinate di un punto $P(xy)$ del piano medesimo, supponiamo data una relazione analitica fra x ed y, espressa da un'equazione come

$$f(xy) = 0$$

dove f è simbolo di *funzione continua* delle due variabili x, y.

Il luogo dei punti del piano, le cui coordinate soddisfano ad una tale equazione, è, in generale, una curva (**grafica** della equazione $f(xy) = 0$).

L'equazione stessa può servire a *tracciare tale curva per punti*, poichè ad ogni valore scelto per x, entro certi limiti, essa fa corrispondere uno o più valori di y, che, accoppiati col dato valore di x, determinano uno o più punti della curva da tracciare.

Vedremo che, *dallo studio delle proprietà analitiche della funzione $f(xy)$ si possono dedurre le proprietà geometriche della curva che essa rappresenta,* e sarà questo appunto lo scopo principale del nostro corso.

Ed in questo studio, procederemo per gradi, incominciando da funzioni $f(xy)$ razionali intere, del 1° e del 2° grado.

Il problema inverso: *trovare la equazione $f(xy)$, che rappresenta una curva determinata da assegnate proprietà geometriche o meccaniche*, è per sua natura più complesso e non comporta soluzioni di carattere generale; ma va particolarmente studiato, nei vari rami delle discipline matematiche dove esso necessariamente si presenta.

Qui converrà solo dare i fondamenti ed il metodo.

Prima di incominciare la trattazione sistematica di questi argomenti, faremo alcune considerazioni di ordine generale e daremo alcuni esempi.

Ciò unicamente allo scopo di dar materia agli studiosi di facili esercitazioni, atte ad abituarli alla interpretazione geometrica di proprietà analitiche ed all'esame sistematico delle figure.

Le cose qui fuggevolmente accennate saranno a luogo opportuno debitamente svolte e dimostrate; e questo paragrafo (qui introdotto per convenienze didattiche) potrà anche essere tralasciato senza che ne soffra il nesso logico della teoria.

105. CONSIDERAZIONI INTUITIVE SUL TRACCIAMENTO DELLE GRAFICHE.

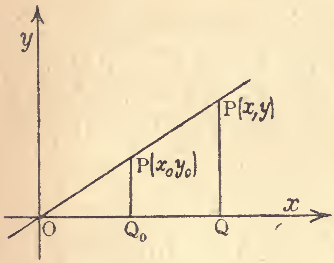
I. - *La proporzionalità diretta della ordinata alla ascissa,* *cioè una equazione come*

$$y = mx$$

rappresenta una retta per la origine.

E difatti, trovata una coppia di valori $x_0 y_0$, tali che

$$y_0 = mx_0$$



e congiunto il punto $P_0(x_0 y_0)$ con la origine, per ogni punto $P(xy)$ di questa congiungente si ha

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Q_0 P_0}}{\overline{OQ_0}} \quad \text{cioè} \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = m$$

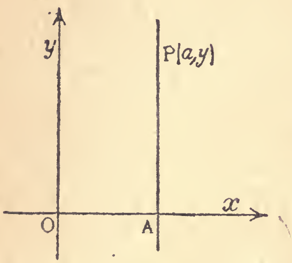
da cui appunto

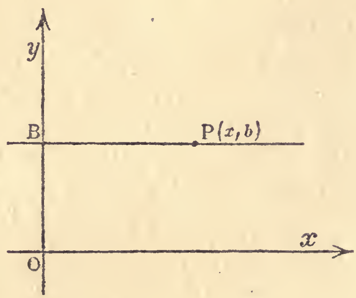
$$y = mx.$$

Reciprocamente se $y = mx$ si ha $\frac{y}{x} = m$ ed il punto $P(xy)$ è sulla retta OP_0.

II. - Tutti i punti $P(xy)$ di una retta parallela all'asse della y hanno la stessa ascissa $OA = a$.

E tutti i punti la cui ascissa è a sono su questa retta;





dunque *l'equazione* $x = a$ *rappresenta la retta parallela all'asse delle* y *condotta per un punto* A, *di ascissa* $x = a$.

Similmente si vede che la *equazione*

$$y = b$$

rappresenta la retta parallela all'asse delle x per un punto B di ordinata $y = b$.

III. - Campi di esistenza. — *Non esistono punti della curva $f(xy) = 0$ situati nella striscia determinata dalle rette $x = a$, $x = b$, parallele all'asse y, se a valori di x compresi fra a e b corrispondono, nella $f(xy) = 0$, valori immaginari della y.*

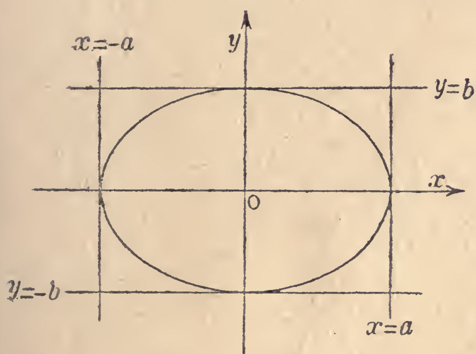
E parimenti, *non esistono punti della curva $f(xy) = 0$ situati nella striscia determinata dalle rette $y = c$, $y = d$, se ai valori di y compresi fra c e d corrispondono valori immaginari di x.*

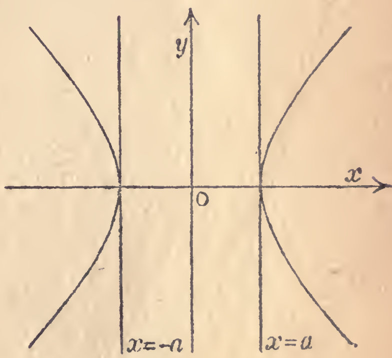
Es. 1.° Non esistono punti della curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

fuori del rettangolo determinato dalle rette

$$x = \pm a$$
$$y = \pm b.$$





Es. 2.° Non esistono punti della curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

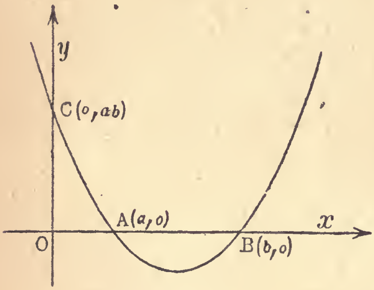
nella striscia determinata dalle due rette

$$x = -a$$
$$x = a.$$

IV. - **Intersezioni con gli assi coordinati.** — *Se la equazione $f(xy) = 0$ è soddisfatta per $x = 0$, $y = 0$, la curva passa per la origine.*

In particolare ciò avviene se $f(xy)$ è un polinomio mancante del termine noto.

Se nella funzione $f(xy)$ si fa $y = 0$, la equazione in x risultante, $f(x, 0) = 0$, ha per radici le ascisse dei punti nei quali la curva taglia l'asse delle x.



In particolare se l'equazione della curva ha la *forma esplicita* $y = f(x)$ i punti in cui essa taglia l'asse delle x hanno per ascisse le radici della equazione $f(x) = 0$.

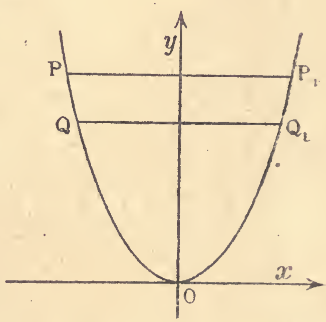
Parimenti *le radici della equazione $f(0, y) = 0$ che si ottiene facendo $x = 0$ nella equazione della curva, sono le coordinate dei punti dove essa curva taglia l'asse delle y.*

Es. La curva

$$y = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

taglia l'asse delle x nei punti A, B di ascissa $x = a$, $x = b$ e l'asse delle y nel punto C, di ordinata ab.

V. - **Assi di simmetria.** — *Se la funzione $f(xy)$ rimane inalterata col cambiare x in $-x$* (in particolare se f è un polinomio che contiene solo potenze pari della x) *la curva $f(xy) = 0$ è simmetrica rispetto all'asse delle y.*

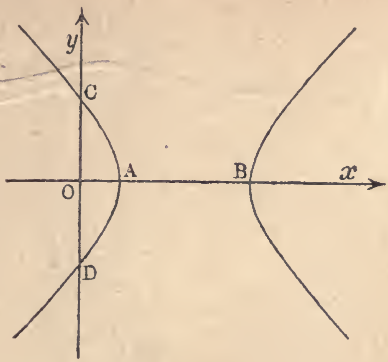


Cioè qualunque retta perpendicolare all'asse delle y, che incontri la curva, determina su questa punti egualmente distanti dall'asse.

Es. La curva $y - ax^2 = 0$, è simmetrica rispetto all'asse della y.

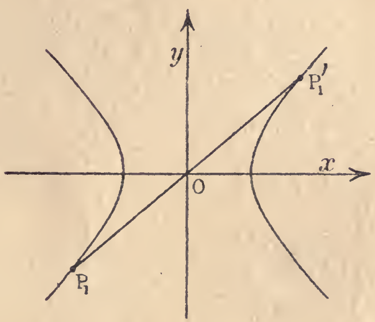
Parimenti, *se la funzione $f(xy)$ rimane invariata col cambiare y in $-y$, la curva $f(xy) = 0$ è simmetrica rispetto all'asse delle x.*

Es. La curva $(x-a)^2-y^2=1$ è simmetrica rispetto all'asse delle x. Essa taglia quest'asse nei punti A, B di



ascissa $x=a\pm 1$ e taglia l'asse y nei punti C, D, di ordinata $\pm\sqrt{a^2-1}$.

VI. - **Centri di simmetria.** — *Se la funzione $f(xy)$ rimane invariata quando si cambia contemporaneamente x in $-x$, ed y in $-y$, la curva $f(xy)=0$ è simmetrica rispetto alla origine;*

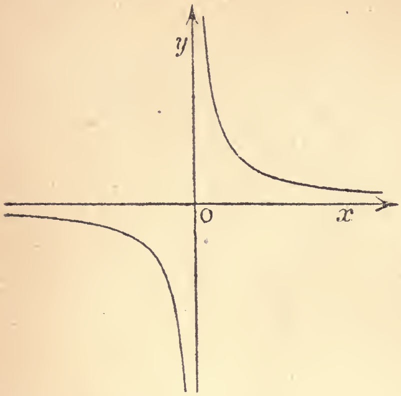


cioè qualunque retta passante per la origine che incontri la curva, determina su questa due punti P_1, P_1' equidistanti dalla origine.

Es. La curva $x^2-y^2=1$.

VII. - **Asintoti paralleli agli assi coordinati.** — Se, al tendere di x ad un valore dato a, il valore corrispondente di y tende all'infinito, la curva tende ad accostarsi alla retta $x=a$ ed è tangente a questa retta nel suo punto improprio. La retta $x=a$ si dice *asintoto della curva.*

Similmente, se per y tendente ad un dato valore b, il valore corrispondente di x tende all'infinito, la curva ha per asintoto la retta $y=b$ (parallela all'asse x, per un punto di ordinata b).



Es. 1°. La equazione

$$y=\frac{1}{x}$$

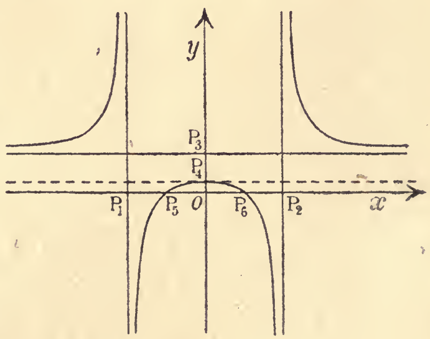
(*che rappresenta la* **proporzionalità inversa** *fra l'ascissa e l'ordinata*) rappresenta una curva che ha per asintoti gli assi coordinati, cioè le rette $y=0$, $x=0$.

Questa curva è, inoltre, simmetrica rispetto all'origine.

Es. 2.° La curva

$$y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$$

ha due asintoti paralleli all'asse delle y uscenti da punti P_1, P_2 di ascisse $x=\pm 2$, ha un asintoto parallelo all'asse delle x uscente da un punto P_3 di ordinata $y=1$. Questa curva è simmetrica rispetto all'asse y, taglia quest'asse nel punto $P_4\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e taglia l'asse delle x nei punti $P_5(-1, 0)$, $P_6(1, 0)$.



Nella striscia compresa fra le parallele all' asse x, $y=\frac{1}{4}$, $y=1$, non esistono punti della curva, perchè ai valori di y compresi fra $\frac{1}{4}$ ed 1 corrispondono valori negativi di x^2, cioè valori immaginari per x.

VIII. - **Curve che degenerano in un sistema di rette per la origine.** — Abbiamo visto che *la equazione* $y=mx$ *rappresenta una retta passante per la origine.* Se due punti $P(xy)$, $P_1(x_1y_1)$ sono allineati con la origine, vi sarà dunque un valore di m pel quale

$$y = mx, \quad y_1 = mx_1$$

e quindi

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$$

od, indicando con t il valor comune di questi rapporti

$$y = ty_1, \quad x = tx_1.$$

Se scriviamo la equazione della retta per la origine sotto la forma

$$y - mx = 0$$

vediamo che essa è *lineare ed omogenea* nelle due variabili x, y. Si ha una proposizione generale la quale afferma che: *la curva rappresentata da una equazione algebrica $f(xy) = 0$ omogenea nelle due variabili x, y, si spezza in un sistema di rette* (una o più) *passanti per l'origine.*

Per verificare questa proposizione ricorderemo che una funzione $f(xy)$ si dice *omogenea* (col grado m di omogeneità), nelle due variabili x, y, quando, per qualsiasi valore della variabile t, è soddisfatta identicamente la relazione

$$f(tx, ty) = t^m f(xy).$$

Da questa definizione risulta anzitutto che se la $f(xy)$ è omogenea, *la curva $f(xy) = 0$ passa per l'origine*; ed infatti, per $t = 0$, si ha

$$f(0, 0) = 0.$$

Supposto poi che un punto $P_1(x_1y_1)$ appartenga a questa curva, si vede che tutti i punti $P(xy)$, appartenenti alla retta per l'origine e per P_1, sono sulla curva.

Infatti pei punti di tale retta si ha

$$y = ty_1, \quad x = tx_1$$

e per la condizione di omogeneità

$$f(xy) = f(tx_1, ty_1) = t^m f(x_1y_1) = 0.$$

Se la curva $f(xy) = 0$ contiene anche un altro punto $P_2(x_2y_2)$ non appartenente a questa retta, dimostreremo analogamente che la curva contiene tutta la retta per l'origine e per P_2.

Così continuando troveremo infine che la curva è spezzata in un certo numero di rette, tutte uscenti dalla origine.

In particolare si noti che, *se la* $f(xy)$ *si scompone in un prodotto di fattori di primo grado, come*

$$f(xy) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) \ldots (a_rx + b_ry)$$

la curva $f(xy) = 0$ *si spezza nelle* r *rette uscenti dalla origine, che hanno per equazione, rispettivamente:*

$$a_1x + b_1y = 0, \quad a_2x + b_2y = 0, \ldots, a_rx + b_ry = 0.$$

Esempio. La curva $x^2 - 4y^2 = 0$ si spezza nelle due rette $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$.

La curva $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = 0$ cioè $(x^2 - y^2)(x + 2y) = 0$ si spezza nelle tre rette $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x + 2y = 0$.

Ed, in generale, *se il primo membro* $f(xy)$ *della equazione di una curva* $f(xy) = 0$ *si scinde nel prodotto di più fattori:*

$$f(xy) = \varphi_1(xy) \cdot \varphi_2(xy) \ldots \varphi_r(xy);$$

la curva si spezza nelle curve singolarmente rappresentate dalle equazioni

$$\varphi_1(xy) = 0, \quad \varphi_2(xy) = 0, \ldots \varphi_r(xy) = 0.$$

106. Esempi di luoghi geometrici.

I. - **Equazione del cerchio**, luogo dei punti del piano che da un punto $C(\alpha, \beta)$ hanno distanza data r.

Indicando con $P(xy)$ un punto del luogo e ricordando la formula che dà la distanza di due punti, avremo, in coordinate ortogonali (n.° 94)

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Questa appunto è la *equazione del cerchio di raggio* r, *con centro in* $C(\alpha, \beta)$.

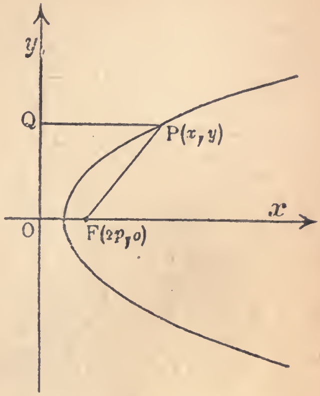
Se il *centro è nella origine*, cioè se $\alpha = \beta = 0$, si ha più semplicemente

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

II. - *Luogo dei punti egualmente distanti da un punto dato e da una retta data.*

Assumiamo la retta data come asse delle y, facciamo passare l'asse delle x pel punto dato F, ed indichiamo con $2p$ l'ascissa di questo punto.

La distanza $\overline{QP}$ di un punto $P(xy)$ dalla retta data, sarà data dalla ascissa x di un tale punto, e, per le condizioni del luogo, si dovrà avere:



$$\overline{QP} = \overline{FP}$$

cioè

$$x = \sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$$
$$x^2 = x^2 - 4px + 4p^2 + y^2$$

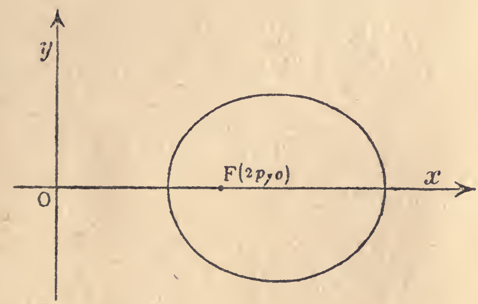
e infine

$$y^2 = 4p(x-p).$$

Questa è la equazione del luogo.

La curva è detta *parabola*; la retta data *direttrice*, ed il punto dato *fuoco*.

III. - *Luogo dei punti che da una retta data hanno distanza doppia di quella che hanno da un punto dato* $F(2p, 0)$.



In modo analogo a quello tenuto al caso precedente si ritroverà

$$x = 2\sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$$
$$x^2 = 4x^2 + 16p^2 - 16px + 4y^2$$

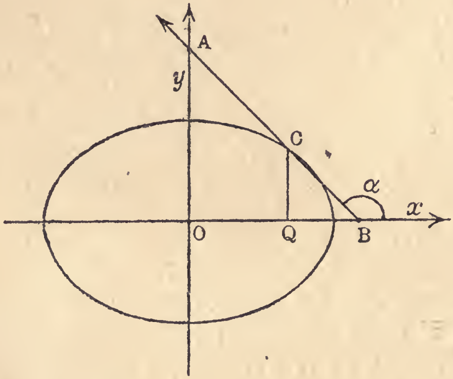
cioè

$$3x^2 + 4y^2 - 16px + 16p^2 = 0.$$

Questa è l'equazione della curva, la quale è un'*ellisse*, ed F è uno dei *fuochi* di essa.

IV. - *Un segmento AB, di lunghezza $\overline{AB} = a + b$, si muove in modo che i suoi estremi rimangano sempre su gli assi coordinati: trovare il luogo di un punto C di esso segmento le cui distanze dagli estremi sono*

$$\overline{AC} = a, \quad \overline{CB} = b.$$



Indicando con α l'angolo che la retta cui il segmento appartiene forma con l'asse della x, avremo

$$x = \overline{OQ} = \overline{AC} \cos\alpha = a \cos\alpha$$
$$y = \overline{QC} = \overline{BC} \operatorname{sen}\alpha = -b \operatorname{sen}\alpha.$$

Da cui

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{b} = -\operatorname{sen}\alpha;$$

quadrando e sommando si ha

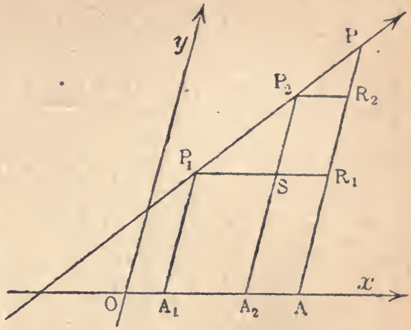
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La curva cercata è una ellisse, e gli assi coordinati sono gli assi della ellisse.

§ VIII. - Varie forme della equazione della retta.

107. Retta per due punti. — Dati i punti $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ e considerato un punto $P(xy)$ generico appartenente alla retta P_1P_2, si costruiscano le solite spezzate $P_1 A_1 O$, $P_2 A_2 O$,

PAO, che servono alla determinazione delle coordinate dei punti P_1, P_2, P. Poi si conduca per P_1 la parallela P_1SR_1 all'asse x.



Dall' esame dei triangoli simili P_1SP_2, P_1R_1P si ricava

(17) $R_1P : SP_2 = P_1R_1 : P_1S$

cioè

(18) $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

che scriveremo

(18′) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Questa è una equazione di primo grado in x, y la quale è soddisfatta dalle coordinate di qualunque punto $P(xy)$ allineato con P_1P_2.

Reciprocamente: se le coordinate di un punto $P(xy)$ soddisfano alla (18), il punto P soddisfa alla relazione (17) e, pel teorema di Talete, è allineato coi punti P_1P_2:

Dunque la equazione (18) è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti della retta P_1P_2 e da questi soli, essa viene perciò detta **equazione della retta** P_1P_2.

108. Alla equazione (18) conduce anche la risoluzione del problema: *Determinare sulla retta P_1P_2 un punto $P(xy)$ che divida il segmento P_1P_2 nel rapporto dato $r = \frac{n}{m}$.*

Ed infatti, sempre come applicazione del teorema di Talete, si vede che, per un tale punto si deve avere la relazione:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1R_1}{R_2P_2} = \frac{R_1P}{PR_2}$$

(19) $$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Da cui

$$\frac{r}{r+1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

che, se si suppone r variabile ad arbitrio, non differisce dalla (18).

Dalla (19) si ricava

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \tag{20}$$

o, sotto forma omogenea, per $r = \frac{n}{m}$,

$$x = \frac{m x_1 + n x_2}{m + n}, \quad y = \frac{m y_1 + n y_2}{m + n} \tag{21}$$

e si ha così l'espressione delle coordinate del punto che divide **il segmento P_1P_2 nel rapporto $\frac{n}{m}$.**

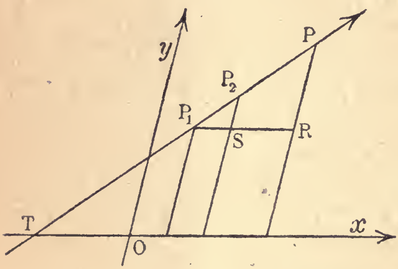
Reciprocamente, ad ogni punto $P(xy)$ della retta P_1P_2 corrisponde un valore di r, dato dalle formule (19). Dunque le formule (20) stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra i punti $P(xy)$ della retta P_1P_2 ed il parametro r.

Si dice perciò che *le formule* (20) *ci danno le* **equazioni parametriche della retta P_1P_2.**

In queste formule *il parametro r è la coordinata baricentrica dell'elemento variabile sulla punteggiata P_1P_2, rispetto ai punti base P_1, P_2.*

109. Coefficiente angolare.

Nella equazione della retta per due punti,



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{18'}$$

ha speciale importanza il coefficiente al secondo membro

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}. \tag{21}$$

Supponiamo che i punti P_1, P_2 si seguano nel verso positivo (n.° 91) della retta P_1P_2, che indicheremo con r, l'esame diretto della figura ci mostra che

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{SP_2}{P_1S} = \pm \frac{\operatorname{sen} SP_1P_2}{\operatorname{sen} P_1P_2S},$$

ove il segno superiore vale pel caso (rappresentato nella figura) che sia $\widehat{xr} < \widehat{xy}$, l'inferiore pel caso $\widehat{xr} > \widehat{xy}$.

Ora si ha:

$$\widehat{SP_1P_2} = \widehat{xr}, \quad \widehat{P_1P_2S} = \widehat{ry}$$

oppure

$$\widehat{SP_1P_2} = \widehat{xr} - \pi, \quad \widehat{P_1P_2S} = \widehat{ry},$$

secondo che $\widehat{xr}$ è minore o maggiore di $\widehat{xy}$; dunque, in ogni caso

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{xr}}{\operatorname{sen} \widehat{ry}}. \tag{22}$$

Si noti che cambiando il verso secondo cui i punti P_1P_2 si seguono su la retta orientata r, o cambiando l'orientamento della r, cambiano segno entrambi i termini del secondo membro; questo quindi non rimane per nulla alterato.

Il nostro ragionamento cade in difetto per $\widehat{xr} = \widehat{xy}$, cioè per rette parallele all'asse y, per le quali e $m = \infty$.

Indicando con α l'angolo $\widehat{xr}$, con ω l'angolo degli assi $\widehat{xy}$, dalla

$$\widehat{xy} = \widehat{xr} + \widehat{ry}$$

si ricava

$$\widehat{ry} = xy - xr = \omega - \alpha$$

e la (22) si muta nella

$$m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\omega - \alpha)}.$$

Questa formula può anche scriversi

$$m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \omega \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \omega} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \omega - \operatorname{tg} \alpha \cos \omega}$$

da cui

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \operatorname{sen} \omega}{1 + m \cos \omega} \tag{24}$$

o, rimettendo $\widehat{xy}$ al posto di ω, $\widehat{xr}$ al posto di α

$$\operatorname{tg} \widehat{xr} = \frac{m \operatorname{sen} \widehat{xy}}{1 + m \cos \widehat{xy}}. \tag{24'}$$

Nel caso delle *coordinate ortogonali*, che è quello che d'ordinario si considera, si ha

$$\omega = \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$$

dunque

$$m = \operatorname{tg} \widehat{xr}. \tag{24''}$$

Il numero m nella equazione della retta *caratterizza la direzione*, cioè *determina il punto improprio*, ed è detto **coefficiente angolare.**

Il coefficiente angolare m **di una data retta** r *è dunque eguale al quoziente dei seni degli angoli* $\widehat{xr}$, $\widehat{ry}$ *formati dalla retta* r *coi due assi coordinati. Nel caso delle coordinate ortogonali, il coefficiente angolare della retta* r *è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo* $\widehat{xr}$ *che essa forma con l'asse delle* x.

Se sono noti due punti $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ della retta, *il coefficiente angolare è espresso dal rapporto della differenza delle ordinate alla differenza delle corrispondenti ascisse*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Da quanto abbiamo detto segue che: *Tutte le rette parallele fra loro hanno lo stesso coefficiente angolare, e, tutte le rette di egual coefficiente angolare sono parallele.*

110. Retta per un punto, con dato coefficiente angolare.

Dato il coefficiente angolare m di una retta, e date le coordinate x_1y_1 di un punto $P_1(x_1y_1)$ ad essa appartenente, mettendo nella (18′) m al posto di $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ si ha l'equazione della retta proposta sotto la forma

$$(18'') \qquad y - y_1 = m(x - x_1).$$

Anche in questo caso possiamo dire che la retta è determinata da due dei suoi punti, e cioè dal punto $P_1(x_1y_1)$ e dal punto improprio, corrispondente alla direzione caratterizzata da

$$m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\omega - \alpha)}.$$

111. Equazione del fascio di rette con centro nel punto proprio $P_1(x_1y_1)$.

L'equazione

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

per ogni valore di m rappresenta una retta del fascio di centro $P_1(x_1y_1)$, e **reciprocamente** ad ogni retta di questo fascio corrisponde un valore di m pel quale la retta è rappresentata dalla equazione scritta.

Se consideriamo m come parametro variabile, la equazione

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{18''}$$

è dunque *la equazione del fascio di rette con centro nel punto proprio* $P_1(x_1 y_1)$; o, se così vogliamo, *è la* **equazione di una retta generica passante per il punto** $P_1(x_1 y_1)$.

112. Retta per l'origine. — *Se il punto* $P_1(x_1 y_1)$ *è nella origine delle coordinate*, cioè se

$$x_1 = y_1 = 0$$

l'equazione trovata assume la forma semplice

$$y = mx. \tag{18'''}$$

Da questa si ricava

$$m = \frac{y}{x}$$

cioè, *per le* **rette passanti per l'origine** *il coefficiente angolare è eguale al rapporto costante dell'ordinata alla ascissa di uno qualunque dei suoi punti.*

Osservazione. — In un sistema di coordinate i *punti improprii* del piano non possono essere rappresentati da coppie di valori (x, y), le quali per qualsiasi punto improprio, che non sia appartenente agli assi coordinati, sarebbero sempre (∞, ∞); ma sono rappresentati dal coefficiente angolare m corrispondente alla direzione individuata dal dato punto improprio. Per ogni valore di m si ha una determinata direzione, cioè un punto improprio, e per ogni punto improprio si ha un valore di m ed uno solo.

113. Rette parallele agli assi coordinati.

Se la retta proposta è parallela all'asse x, è sen $\widehat{xr} = 0$, dunque $m = 0$, e l'equazione della retta ha la forma

$$y = y_1$$

cioè *l'ordinata dei punti di una retta parallela all'asse x ha valore costante.*

Se è parallela all'asse delle y è

$$\widehat{ry} = 0$$

dunque (form. 22)

$$\frac{1}{m} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{ry}}{\operatorname{sen} \widehat{xr}} = 0$$

scrivendo la (18″) sotto la forma

$$x - x' = \frac{1}{m}(y - y_1)$$

ne ricaviamo in questo caso l'equazione

$$x = x_1.$$

Per punti di una retta parallela all'asse delle y l'ascissa x è costante.

Gli **assi coordinati** hanno per equazione rispettivamente

$$y = 0$$

per l'asse delle x, ed

$$x = 0$$

per l'asse delle y.

114. Ordinata alla origine.

L'equazione

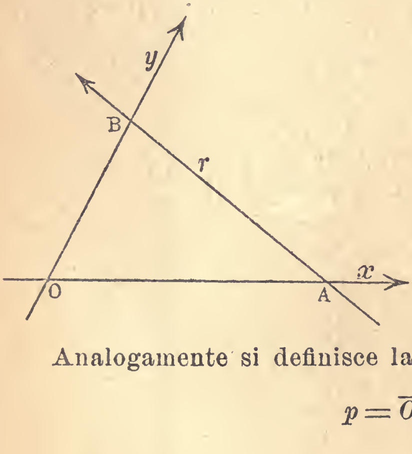
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

si può scrivere

$$y = mx + y_1 - mx_1.$$

Per $x = 0$, il valore corrispondente della y è la misura del segmento $\overline{OB}$ che la retta stacca sull'asse delle y.

Questo numero si chiama **ordinata alla origine**, noi lo indicheremo con la lettera q cioè porremo



$$(25) \qquad q = y_1 - mx_1.$$

Sostituendo questo valore nella equazione della retta, questa assume la forma detta **forma ridotta**

$$(18^{\text{IV}}) \qquad y = mx + q.$$

Analogamente si definisce la **ascissa alla origine**

$$p = \overline{OA},$$

e si trova, facendo $y=0$ nella equazione della retta,

$$p = x_1 - \frac{1}{m} y_1. \tag{26}$$

115. FASCIO DI RETTE PARALLELE.

L'equazione ridotta

$$y = mx + q,$$

se in essa si considera m fisso e q variabile, per ogni valore di q rappresenta una retta parallela alla $y=mx$, cioè una retta del fascio avente per centro il punto improprio m: ad ogni retta di questo fascio corrisponde, reciprocamente, uno speciale valore di q (ordinata alla origine di tale retta) dunque, quando si consideri q come parametro variabile, la equazione scritta rappresenta il fascio di rette parallele avente il centro nel punto improprio m.

116. FORMA SEGMENTARIA *della equazione della retta.*

L'equazione di una retta non passante per l'origine assume una forma, che in molti casi è assai comoda, quando la si consideri come determinata dai punti A, B dove essa sega gli assi coordinati.

Le coordinate di tali punti sono:

$$\begin{array}{llll} \text{per il punto} & P_1 = A, & x_1 = p, & y_1 = 0, \\ \text{» » »} & P_2 = B, & x_2 = 0, & y_2 = q; \end{array}$$

ponendo questi valori nella equazione (18′) della retta per due punti P_1P_2, avremo

$$y = \frac{q}{-p}(x-p) = -\frac{q}{p}x + q$$

che potremo scrivere (dividendo per q)

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \tag{18^{v}}$$

ed è questa la **forma segmentaria** *della equazione della retta che stacca sugli assi coordinati, a partire dalla origine, segmenti di lunghezza* p, q.

§ VIII. Forma generale della equazione della retta.

117. Esaminando le varie forme $\{(18') \dots (18^{v})\}$ date al § precedente per la equazione della retta, vediamo che tutte possono rappresentarsi con la equazione

$$ax + by + c = 0 \tag{27}$$

dove a, b, c sono numeri determinati. Vedremo ora che:

Reciprocamente *ogni equazione della forma*

$$ax + by + c = 0$$

rappresenta una linea retta.

Si osservi anzitutto che non si può supporre ad un tempo $a = 0$, $b = 0$ senza che sia anche $c = 0$ e che la (27) perda ogni significato. Ciò posto: *se b è diverso dallo zero,* dividendo per b scriveremo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

e dal confronto con la forma ridotta (18^{IV}) concluderemo: *l'equazione generale*

$$ax + by + c = 0$$

rappresenta una retta con coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$, ed ordinata alla origine $q = -\frac{c}{b}$.

Se $b = 0$, non potendo essere contemporaneamente anche $a = 0$, rimarrà

$$ax + c = 0$$

cioè

$$x = -\frac{c}{a},$$

equazione di una retta parallela all'asse delle y, con ascissa alla origine $p = -\frac{c}{a}$,

La nostra proposizione è dunque verificata in ogni caso.

118. Condizione perchè tre punti sieno allineati. Se esista una retta

$$ax + by + c = 0$$

su cui giacciano tre dati punti $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$, $P_3(x_3y_3)$, le coordinate di questi punti dovranno soddisfare la equazione della retta, cioè si dovrà avere

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0\,. \end{cases}$$

Si osservi che qui le coordinate x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 sono numeri dati, e sono da considerare come incogniti i coefficienti a, b, c, della retta che dovrebbe appartenere a quei tre punti.

Le equazioni scritte formano dunque un sistema di tre equazioni lineari ed omogenee nelle tre incognite a, b, c.

La condizione di possibilità è espressa dall'annullarsi del determinante dei coefficienti, cioè dalla relazione

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ y_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è dunque la condizione richiesta di *allineamento dei tre punti dati.*

La (28) esprime, in sostanza, la condizione perchè un punto P_3 sia allineato con due punti dati P_1P_2.

Se consideriamo P_1, P_2 come punti fissi e P_3 come variabile nel piano, la (28) esprimerà la condizione cui deve soddisfare P_3 perchè esso sia sulla retta degli altri due. Rappresentando, al solito modo, un punto generico del piano con $P(xy)$, (anzichè con $P_3(x_3y_3)$, avremo dunque *la equazione della retta per i due punti P_1P_2, espressa dalla equazione*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o dall'altra equivalente

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

la quale, sviluppata, coincide con la forma (18) trovata al n.° 107.

119. Intersezione di due rette. — Il punto $P(x, y)$ comune a due rette r, r_1, date mediante le loro equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

dovrà avere coordinate xy soddisfacenti entrambe queste equazioni. I loro valori si otterranno dunque facendo sistema delle equazioni date e risolvendole rispetto alle incognite x, y.

Si otterrà in tal modo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}. \tag{30}$$

Da queste formule si scorge che x, y hanno valore determinato e finito se il determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ è diverso dallo zero.

Se questo determinante è nullo, e non sono nulli i numeratori, i valori di x, y, sono da considerarsi come infiniti, ciò significa che le rette, in tale supposizione, si incontrano nel punto improprio, cioè sono parallele.

Ed infatti dalla ipotesi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b = 0$$

si ricava

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b_1}{a_1}$$

le due rette hanno dunque, in tal caso, coefficienti angolari $m = -\frac{b}{a}$, $m_1 = -\frac{b_1}{a_1}$ eguali, e perciò sono parallele.

120. Concludiamo che la **condizione di parallelismo** *fra due rette date mediante le loro equazioni*

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

è l'annullarsi del determinante dei coefficienti delle variabili

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se, oltre al determinante a denominatore si annullassero anche i determinanti al numeratore nelle formule (30), cioè se fosse

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} = 0$$

la matrice dei coefficienti avrebbe caratteristica 1, le due equazioni non sarebbero distinte e le rette che esse rappresentano sarebbero sovrapposte. Ciò spiega la forma indeterminata che, in questa ipotesi, assumono le formule (30).

121. Condizione perchè tre rette passino per un punto.

Affinchè esista un punto $P(xy)$ appartenente alle tre rette r_1, r_2, r_3, date mediante le loro equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \end{cases}$$

è necessario che queste equazioni sieno ad un tempo soddisfatte da una stessa coppia di valori x, y.

Ma il sistema dato è possibile solo se si annulla il determinante dei coefficienti e dei termini noti.

La condizione richiesta è dunque espressa dalla formula

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa condizione è soddisfatta anche se le rette sono parallele (cioè se hanno lo stesso punto improprio); poichè in tal caso sono nulli tutti i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

122. Forma generale della equazione del fascio di rette.

La condizione

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

trovata al n.° precedente per la esistenza di un punto (proprio od improprio) comune a tre rette date mediante le loro equazioni:

$$(33) \qquad \begin{cases} A = ax + by + c = 0 \\ A_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ A_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

esprime, in sostanza, la condizione perchè una di esse rette appartenga al fascio col centro nel punto di incontro delle altre due.

D'altra parte, la condizione trovata, analiticamente, richiede che una delle equazioni (33) si ottenga da una combinazione lineare delle altre due, cioè richiede l'esistenza di due numeri λ, μ, tali che

$$(34) \qquad \begin{cases} a = \lambda a_1 + \mu a_2 \\ b = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ c = \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

ossia

$$ax + by + c = \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2).$$

Supponendo che le rette $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ sieno prefissate per ogni coppia di valori λ, μ, si otterrà, mediante le formule (34), una retta del fascio che ha per centro il punto di incontro delle rette date $A_1 = 0$. $A_2 = 0$. La fatta dimostrazione ci afferma che, reciprocamente, ad ogni retta del fascio corrisponde una determinazione di λ e μ.

Scrivendo

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = 0 \tag{35}$$

od anche

$$A_1 + \frac{\mu}{\lambda} A_2 = 0 \tag{36}$$

abbiamo dunque l'equazione del fascio espressa in funzione del parametro $m = \frac{\mu}{\lambda}$.

Per $\mu = 0$ si ha la retta $A_1 = 0$
» $\lambda = 0$ » » » $A_2 = 0$

e queste rette si dicono *rette fondamentali del fascio.*

Prendendo come rette fondamentali due parallele agli assi: $A_1 = y - y_1 = 0$, $A_2 = x - x_1 = 0$ si ha l'equazione del fascio sotto la forma nota (n.° 111):

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

123. Se le rette fondamentali sono parallele, ogni altra retta del fascio deve risultare parallela ad esse; ed infatti subito si verifica ehe, se

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

si ha anche

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè la retta $\lambda A_1 + \mu A_2 = 0$ risulta, per ogni coppia λ, μ, parallela alla retta $A_2 = 0$.

§ IX. Angolo di due rette.

124. *Per angolo* $\widehat{r_1 r_2}$ *di due rette* r_1, r_2 *comunque date nel piano, si intende l'angolo minore di* π *formato dalle loro parallele uscenti dalla origine* O, il quale è da considerarsi come positivo se il verso $r_1\, r_2$ è concorde con quello delle rotazioni positive, negativo se discorde (cfr. n.° 92).

Dalla identità angolare

$$\widehat{r_1 r_2} = \widehat{x r_2} - \widehat{x r_1}$$

si ricava

$$\operatorname{tg} \widehat{r_1 r_2} = \frac{\operatorname{tg} \widehat{x r_2} - \operatorname{tg} \widehat{x r_1}}{1 + \operatorname{tg} \widehat{x r_2} \cdot \operatorname{tg} \widehat{x r_1}}.$$

Ma, come è noto dalla formula (24')

$$\operatorname{tg} \widehat{x r_1} = \frac{m_1 \operatorname{sen} \widehat{xy}}{1 + m_1 \cos \widehat{xy}}, \quad \operatorname{tg} \widehat{x r_2} = \frac{m_2 \operatorname{sen} \widehat{xy}}{1 + m_2 \cos \widehat{xy}}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{x r_2} - \operatorname{tg} \widehat{x r_1} = \frac{(m_2 - m_1) \operatorname{sen} \widehat{xy}}{(1 + m_1 \cos \widehat{xy})(1 + m_2 \cos \widehat{xy})}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{x r_2} \operatorname{tg} \widehat{x r_1} = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sen}^2 \widehat{xy}}{(1 + m_1 \cos \widehat{xy})(1 + m_2 \cos \widehat{xy})}.$$

Sostituendo e riducendo si ha

$$(37) \qquad \operatorname{tg} \widehat{r_1 r_2} = \frac{(m_2 - m_1) \operatorname{sen} \widehat{xy}}{1 + (m_2 + m_1) \cos \widehat{xy} + m_2 m_1},$$

la quale formula ci dà *la tangente trigonometrica dell' angolo* $\widehat{r_1 r_2}$ *di due rette* $r_1 r_2$ *delle quali si conoscono i coefficienti angolari* $m_1 m_2$.

Se le equazioni delle rette $r_1 r_2$ sono date sotto la forma generale

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

si ha

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \quad m_2 = -\frac{a_2}{b_2},$$

onde sostituendo

$$(37') \qquad \operatorname{tg} \widehat{r_1 r_2} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) \operatorname{sen} \widehat{xy}}{a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \widehat{xy}}.$$

125. Le formule trovate si semplificano assai nel caso delle *coordinate ortogonali*, poichè in tal caso è $\operatorname{sen} \widehat{xy} = 1$,

$\cos\widehat{xy} = 0$, epperò

$$\operatorname{tg}\widehat{r_1r_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} \tag{37''}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{r_1r_2} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}. \tag{37'''}$$

126. Condizioni di parallelismo e di ortogonalità. La condizione di parallelismo delle rette r_1r_2, è espressa dall'annullarsi della tangente del loro angolo, cioè dalla condizione ben nota

$$m_2 - m_1 = 0,$$

oppure

$$a_2b_1 - a_1b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La **condizione di perpendicolarità** delle rette r_1r_2 si ha scrivendo che è nullo il denominatore della frazione che esprime la tangente dell'angolo $\widehat{r_1r_2}$ da esse formato, cioè è espressa dalla relazione

$$1 + (m_2 + m_1)\cos\widehat{xy} + m_1m_2 = 0 \tag{38}$$

oppure

$$a_1a_2 + b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\widehat{xy} = 0. \tag{38'}$$

Queste formule, nel caso delle coordinate ortogonali, diventano:

$$1 + m_1m_2 = 0 \tag{38''}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \tag{38'''}$$

La prima di queste, di uso frequentissimo, può enunciarsi dicendo: *Se gli assi coordinati sono ortogonali, la condizione necessaria e sufficiente perchè due rette r_1, r_2 siano perpendicolari è che il prodotto m_1m_2 dei loro coefficienti angolari sia eguale all'unità negativa: $m_1m_2 = -1$.*

Ciò, del resto, segue anche da ciò che si è visto al n.° 61, perchè il coefficiente angolare, in coordinate ortogonali, ha lo stesso valore della *coordinata tangente.*

127. Coseni direttori. — Spesso è utile determinare la direzione di una retta mediante i coseni degli angoli che essa forma con gli assi. Questi coseni si dicono *coseni direttori della data retta.*

Indicando con α, β gli angoli $\widehat{xr}$, $\widehat{ry}$ che la retta r forma con gli assi coordinati, i coseni direttori di r, saranno dunque:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{xr}, \quad \cos\beta = \cos\widehat{ry}.$$

Particolarmente interessante è il caso delle *coordinate ortogonali*; poichè in tal caso

$$\widehat{xr} + \widehat{ry} = \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}.$$

epperò

$$\cos\widehat{ry} = \text{sen}\,\widehat{xr}$$

da cui

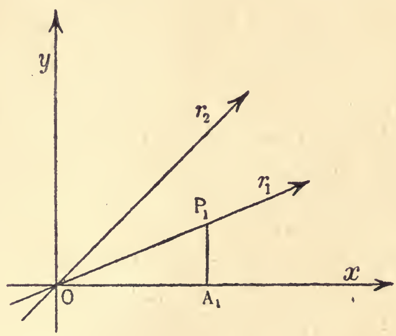
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

In coordinate ortogonali la somma dei quadrati dei coseni direttori di una data retta è uguale ad 1.

L'angolo di due rette, delle quali si conoscono i coseni direttori, si esprime, *in coordinate ortogonali*, mediante una formula semplicissima che spesso viene adoperata.

Per trovare questa formula osserveremo che, date due direzioni r_1, r_2 (che supporremo uscenti dalla origine) mediante i loro coseni, $r_1(\cos\alpha_1, \cos\beta_1)$, $r_2(\cos\alpha_2, \cos\beta_2)$, e preso un punto P_1 qualunque sopra r_1, posto $\overline{OP_1} = d$ ed abbassata la perpendicolare P_1A_1 si ha:

$$OA_1 = d\cos\alpha, \quad A_1P_1 = d\cos\beta_1.$$



Proiettando la spezzata OA_1P_1 su r_2 e scrivendo che la proiezione della risultante è eguale alla somma delle proiezioni delle componenti si ha

$$d\cos\widehat{r_1r_2} = OA_1\cos\alpha_2 + A_1P_1\cos\beta_2,$$

e mettendo per OA_1, A_1P_1 i valori trovati

$$d \cos \widehat{r_1 r_2} = d \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + d \cos \beta_1 \cos \beta_2$$

infine

$$\cos \widehat{r_1 r_2} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 . \tag{39}$$

Questa appunto è la formula cercata.

§ X. Area di un poligono piano in funzione delle coordinate dei vertici.

128. Segno di un'area piana. — Il contorno di un'area limitata da una linea chiusa convessa, sopra un piano orientato, può essere percorso da un punto in due versi opposti, dei quali si dice positivo quello che coincide col verso positivo delle rotazioni del piano.

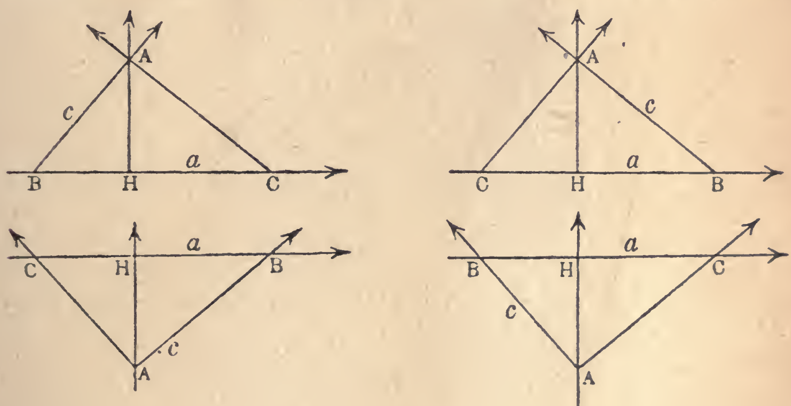
Si conviene di assumere tanto l'area quanto il numero che la misura come positivi o negativi, secondo che il contorno si immagina percorso da un punto nel verso positivo o nel verso negativo.

129. Converremo di rappresentare con $\overline{ABC}$ il numero che misura l'area del triangolo ABC, presa col segno + o col segno — secondo che il verso ABC del perimetro è positivo o negativo.

Da ciò, in particolare, si deduce:

$$\overline{ABC} = \overline{BCA} = \overline{CAB} = -\overline{ACB} = -\overline{CBA} = -\overline{BAC}.$$

130. Dalle convenzioni ora fatte e da quelle che circa l'orientamento delle rette del piano rispetto ad un dato sistema



di assi cartesiani, si fecero al n.° 91 risulta che, indicando con a, c, le rette orientate cui appartengono i segmenti BC, BA, l'angolo $\widehat{CBA}$ risulta eguale all'angolo $\widehat{ac}$, se BC e BA sono entrambi concordi od entrambi discordi con l'orientamento delle rette cui appartengono, risulta invece eguale ad $\widehat{ac} - \pi$, uno di essi è concorde, l'altro discorde.

Da ciò risulta che *il prodotto* $\overline{BC}\ \overline{BA} \operatorname{sen} \widehat{ac}$ *ha sempre il segno di* $\operatorname{sen} \widehat{CBA}$.

131. Se ora si considera che il senso in cui si percorre il contorno $\widehat{ABC}$ coincide col verso dell'angolo $\widehat{CBA}$ e perciò anche il segno dell'area $\overline{ABC}$ col segno del seno $\widehat{CBA}$; dalla nota formula.

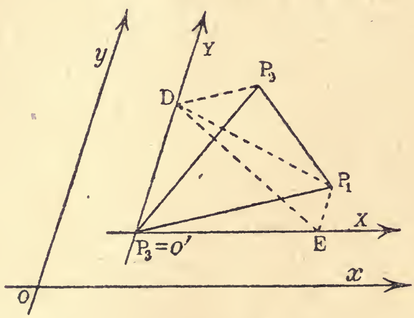
$$(40) \qquad \left|\overline{ABC}\right| = \left|\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{BA} \operatorname{sen} \widehat{ac}.\right|$$

in ogni caso si ricava:

$$(40') \qquad \overline{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{BA} \operatorname{sen} \widehat{ac}.$$

132. Proponiamoci ora di *calcolare l'area* $\overline{P_1P_2P_3}$ *di un triangolo date le coordinate dei suoi tre vertici* $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$, $P_3(x_3y_3)$.

Supponiamo eseguita una traslazione di assi che trasporti l'origine in uno dei vertici, per es. P_3, del dato triangolo.



Indicando con X, Y le coordinate nel nuovo sistema; pel punto P_3 avremo le coordinate

$$P_3(X_3, Y_3), \quad X_3 = 0, \quad Y_3 = 0,$$

e per gli altri vertici,

$$(41) \qquad \begin{cases} P_1(X_1 Y_1), & X_1 = x_1 - x_3, \quad Y_1 = y_1 - y_3 \\ P_2(X_2 Y_2), & X_2 = x_2 - x_3, \quad Y_2 = y_2 - y_3 . \end{cases}$$

Tirata la DP_2, parallela al lato P_3P_1, avremo

$$\overline{DP_3P_1} = \overline{P_1P_2P_3}.$$

Tirata la P_1E parallela alla base DP_3, avremo

$$\overline{DP_3E} = \overline{DP_3P_1}.$$

Avremo infine, per la formula (40')

$$(42) \quad \overline{P_1P_2P_3} = \overline{DP_3E} = \frac{1}{2}\,\overline{P_3E}\cdot\overline{P_3D}\,\mathrm{sen}\,\widehat{XY} = \frac{1}{2}\,\overline{O'E}\cdot\overline{O'D}\,\mathrm{sen}\,\widehat{xy}.$$

Ora si vede, dalla costruzione fatta, che

$$O'E = X_1:$$

per calcolare $\overline{O'D}$ si consideri questa come ordinata alla origine della retta DP_2 nel sistema di assi $O'XY$; e per scrivere l'equazione di questa retta, si osservi che essa passa per $P_2(X_2Y_2)$ e che, per essere parallela a P_3P_1, ha per coefficiente angolare

$$m = \frac{Y_1}{X_1}.$$

La equazione della retta DP_2 è dunque

$$Y - Y_2 = \frac{Y_1}{X_1}(X - X_2),$$

ossia

$$Y = \frac{Y_1}{X_1}X + Y_2 - \frac{Y_1}{X_1}X_2.$$

La sua ordinata all'origine risulta perciò data da

$$O'D = Y_2 - \frac{Y_1}{X_1}X_2.$$

Mettendo i valori trovati per $O'E$, $O'D$ nella espressione dell'area data dalla formula (42), avremo

$$\overline{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} X_1 \left(Y_2 - \frac{Y_1}{X_1} X_2 \right) \operatorname{sen} \widehat{xy}$$
$$= \frac{1}{2} (X_1Y_2 - X_2Y_1) \operatorname{sen} \widehat{xy}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \operatorname{sen} \widehat{xy}$$

e mettendo per X_1Y_1, X_2Y_2 i valori dati dalle formule (8) di trasformazione degli assi, avremo infine:

$$P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \operatorname{sen} \widehat{xy} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \operatorname{sen} \widehat{xy}.$$

Da ciò si deduce: **L'area del triangolo** $P_1P_2P_3$ *è data dalla formula*

$$\overline{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \operatorname{sen} \widehat{xy} \tag{43}$$

nella quale le linee del determinante sono formate con le coordinate dei vertici, seguentisi nell'ordine stesso in cui i vertici si suppongono disposti lungo il contorno.

133. In coordinate ortogonali si ha semplicemente

$$\overline{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

134. L'area è nulla quando i tre vertici sono allineati, e noi abbiamo appunto dimostrato che l'annullarsi del determinante al secondo membro è la condizione di allineamento dei tre punti P_1, P_2, P_3.

135. Area di un poligono piano.

Teorema. — *Se* $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$...., $P_n(x_ny_n)$ *sono vertici di un poligono piano ed* $M(xy)$ *è un punto qualunque del piano del* *poligono, la somma delle aree triangolari*

$$S = \overline{MP_1P_2} + \overline{MP_2P_3} + \dots + \overline{MP_{n-1}P_n} + \overline{MP_nP_1}$$

è costante in valore e segno. È indipendente cioè dalle coordinate del punto M.

Ed infatti sviluppando i determinanti nella formula

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \widehat{xy} \left\{ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \Big| + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} \right\},$$

si vede che i coefficienti di x ed y risultano rispettivamente uguali a

$$y_1 - y_2 + y_2 - y_3 + \dots + y_{n-1} - y_n + y_n - y_1 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{n-1} - x_n + x_n - x_1 = 0$$

e rimane perciò

$$(44) \qquad S = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \widehat{xy} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}$$

o, sviluppando

$$(44') \qquad S = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \widehat{xy} \{ y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \dots$$

$$\dots + y_{n-1}(x_{n-2} x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

Il valore di S è dunque indipendente dalla scelta del punto M.

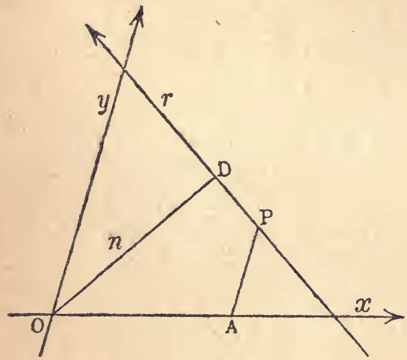
Se il poligono è convesso, ed M interno al poligono, si vede immediatamente, dall'esame della figura, che S è l'area del poligono; *si conviene perciò di assumere il valore di S, dato da una delle formule* (44) (44'), *come* **misura dell'area del poligono** P_2P_2, ..., $P_{n-1}P_n$, *qualunque* (convesso, concavo od anche intrecciato) *nel quale il contorno si immagini percorso nel verso in cui si seguono i vertici $P_1P_2 \dots P_n$.*

§ XI. Forma normale della equazione della retta.

136. Se dalla origine O abbassiamo la perpendicolare OD sopra una retta data r, e per un punto P qualsiasi della retta si costruisce la solita spezzata OAP, indicando con n la normale OD e proiettando su questa la spezzata OAP si ha la relazione

$$\overline{OA}\cos\widehat{xn} + AP\cos\widehat{ny} = \overline{OD}.$$

Indicando con δ la distanza $\overline{OD}$ della origine dalla retta data r si ha dunque



$$x\cos\widehat{xn} + y\cos\widehat{ny} = \delta. \tag{45}$$

Questa relazione che vale per tutti i punti $P(xy)$ della retta r e per questi soli è la *equazione della retta r nella* **forma normale.**

Il segno della distanza $\overline{OD} = \delta$ risulta determinato dalla posizione del punto D rispetto agli assi, secondo quanto si è visto al n.° 95 e cioè $\overline{OD} = \delta$ *è positivo o negativo secondo che la ordinata y del punto D è positiva o negativa, e, quando la ordinata di D è zero, secondo che è positiva o negativa la ascissa.*

137. La forma normale della equazione della retta è particolarmente vantaggiosa nel caso delle **coordinate ortogonali**, *caso che noi d'ora innanzi vogliamo esclusivamente considerare.*

E difatti, se

$$\widehat{xy} = \widehat{xn} + \widehat{ny} = \frac{\pi}{2}$$

ponendo

$$\widehat{xn} = \alpha$$

ne viene

$$\cos\widehat{ny} = \operatorname{sen}\alpha$$

e l' **equazione normale** *della retta assume la forma*

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = \delta, \tag{45'}$$

nella quale α *è l'angolo* $\widehat{xn}$ *che l'asse* x *forma con la normale* n *alla retta* r *e* δ *è, in valore e segno, la distanza* $\overline{OD}$ *della origine dalla retta* r.

138. Riduzione a forma normale della equazione generale

$$(27) \qquad ax + by + c = 0.$$

Scriveremo invece della (27) la equazione equivalente

$$kax + kby = -kc$$

e ci proporremo di determinare k ed un angolo reale α in modo che sia

$$ka = \cos\alpha, \quad kb = \operatorname{sen}\alpha;$$

o, quadrando e sommando,

$$k^2a^2 + k^2b^2 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

da cui

$$k^2 = \frac{1}{a^2+b^2}, \quad k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$(46) \quad \cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \delta = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Rimane da determinare il segno da attribuire al radicale $\sqrt{a^2+b^2}$. Ciò si fa osservando che, essendo per le convenzioni fatte al n.° 91 l'angolo $\alpha = \widehat{xn}$ sempre positivo e minore di π, il seno di α deve sempre risultare positivo: ma si ha $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, **dunque il segno del radicale dovrà essere concorde con quello di** b.

Se $b = 0$, *la retta è parallela all'asse delle* y, *ed il segno del radicale dovrà essere concorde con quello di* a.

Al medesimo risultato si giunge considerando che il segno della distanza $\delta = OD$ è positivo o negativo secondo che la ordinata y del punto D risulta positiva o negativa (n.° 95), cioè secondo che la ordinata alla origine $p = \overline{OB}$ della r è positiva o negativa.

Ma si ha

$$p = -\frac{c}{b}$$

e, poichè il segno di $\delta = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ deve essere concorde con quello di p, il segno del radicale dovrà essere concorde con quello di b.

Concludendo:

L'equazione generale

$$ax + by + c = 0$$

si **riduce a forma normale,** *scrivendola sotto la forma*

$$ax + by = -c$$

e moltiplicando ambo i membri pel fattore di normalità

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

nel quale il segno del radicale deve essere concorde con quello di b (e, se $b = 0$ il segno del radicale deve essere concorde con quello di a).

139. Ricordando il significato dei coefficienti nella forma normale, avremo ancora: **L'angolo** α **che l'asse** x **forma con la normale ad un retta** r**, data mediante la equazione generale** $ax + by + c = 0$, *è determinato dalle relazioni*

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

e la **distanza** δ **di questa retta dalla origine** *è data dalla formula*

$$\delta = \frac{-c}{\mp\sqrt{a^2+b^2}}$$

il segno del radicale essendo concorde con quello del coefficiente b nella data equazione quando è $b \neq 0$; concorde con quello di a quando è $b = 0$.

140. In un sistema obliquo di assi, il fattore k per cui va moltiplicata l'equazione generale $ax + by + c = 0$ affinchè assuma la forma normale

$$x \cos\widehat{xn} + y \cos\widehat{ny} = \delta$$

è

$$k = \frac{\operatorname{sen} \widehat{xy}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{xy}}}$$

e si ha quindi:

$$\cos\widehat{xn} = \frac{a \operatorname{sen} \widehat{xy}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{xy}}}$$

$$\cos\widehat{ny} = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{xy}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{xy}}}$$

$$\delta = \frac{-c \operatorname{sen} \widehat{xy}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{xy}}}.$$

141. DISTANZA DI UN PUNTO $P_1(x_1 y_1)$ DA UNA RETTA $ax + by + c = 0$. Supposta abbassata da P_1 la perpendicolare P_1D sulla retta data, assumeremo per distanza d del punto P_1 dalla retta r, la lunghezza (in valore e segno) del segmento P_1D; cioè il numero $d = \overline{P_1D}$.

Per calcolare questo numero assumiamo due nuovi assi coordinati XY con l'origine in P_1, paralleli e concordi con i primitivi x, y.

Le formule di trasformazione sono

$$x = X + x_1, \quad y = Y + y_1$$

e, per esse, l'equazione della retta r nel nuovo sistema diventa

$$aX + bY + ax_1 + by_1 + c = 0,$$

nella quale il termine noto è rappresentato dal trinomio $ax_1 + by_1 + c$.

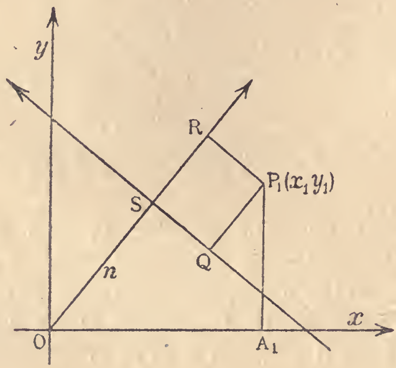
Calcolando, mediante questa equazione, la distanza P_1D (distanza della origine P_1 dalla retta r), avremo per la formula (46)

$$(47) \qquad d = P_1D = \frac{-(ax_1 + by_1 + c)}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Di qui la regola:

Per avere la **distanza** $d = P_1D$ **di un punto** $P_1(x_1 y_1)$ **da una** *retta* r $(ax + by + c = 0)$ *si sostituiscono, nella equazione della retta, le coordinate del punto* $x_1 y_1$ *alle variabili* x, y, *si cambia segno al risultato che si ottiene e si moltiplica pel fattore di nor-*

malità $k = \dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, (con l'avvertenza di dare al radicale, che qui comparisce, segno concorde con quello del secondo coefficiente b della equazione della retta data; e se $b = 0$ concorde col segno di a).



Al medesimo risultato si giunge direttamente proiettando sulla normale n alla retta data la spezzata OA_1P_1; si ha infatti:

$$\overline{OR} = x_1 \cos\alpha + y_1 \operatorname{sen}\alpha$$
$$d = \overline{P_1Q} = \overline{RS} = \overline{RO} - \overline{SO} = -(\overline{OR} - \overline{OS})$$
$$= -(x_1 \cos\alpha + y_1 \operatorname{sen}\alpha - \delta).$$

Se la equazione della retta è già ridotta alla forma normale

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - \delta = 0$$

per avere la distanza di un punto $P_1(x_1 y_1)$ *da essa, basterà dunque sostituire nel primo membro di detta equazione al posto delle variabili* x, y *le coordinate* x_1, y_1 *del punto* P_1 *poi cambiar segno al risultato* (¹).

(¹) In una equazione normale, della forma (45') deve, secondo le nostre convenzioni, risultare positivo il segno del coefficiente di y, cioè di $\operatorname{sen}\alpha$.

Si potrebbe invece considerare come equazione normale quella in cui è essenzialmente positivo (o nullo) il valore di δ. Ma questa seconda convenzione non sempre si concilia con la proposizione supe-

142. In un sistema di assi *non ortogonali* si ha la formula

$$d = \frac{(ax_1 + by_1 + c)\operatorname{sen}\widehat{xy}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{xy}}} \tag{47'}$$

e si conserva il teorema: *la distanza di un punto $P_1(x_1y_1)$ da una retta r, data mediante la equazione normale*

$$x\cos\widehat{xn} + y\cos\widehat{ny} - \delta = 0,$$

si ottiene sostituendo, nella equazione della retta, alle variabili xy le coordinate del punto, e cambiando segno al numero risultante.

143. Equazione della retta in coordinate polari. Se nella forma normale

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = \delta$$

poniamo

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta$$

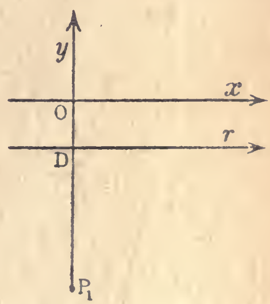
ne verrà

$$\rho(\cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) = \delta$$

cioè

$$\rho\cos(\alpha - \theta) = \delta.$$

riormente enunciata, la quale è generalmente ammessa. E, difatti volendo scrivere per es. la equazione normale della retta r parallela all'asse x, distante da quest'asse della lunghezza -1, si dovrebbe, secondo quest'ultima convenzione, usare la forma $-y-1=0$.



La distanza $d = \overline{P_1D}$ del punto $P_1(0, -4)$ da questa retta dovrebbe risultare perciò

$$d = \overline{P_1D} = -\{-(-4) - 1\} = -3.$$

Ma, invece, il segmento P_1D concorde con la direzione dell'asse y ha per lunghezza il numero positivo 3.

Secondo quanto da noi è stato avvertito, la equazione normale della stessa retta, dovrà scriversi invece $y+1=0$ e di qui verrà appunto:

$$d = \overline{P_1D} = -\{-4+1\} = 3.$$

Questa *è la equazione in coordinate polari della retta la cui normale forma angolo α con l'asse polare e la cui distanza dal polo è δ*; in essa ρ e θ sono il modulo e l'anomalia di un punto generico $P(\rho, \theta)$ della retta.

§ XII. Punti e rette immaginarie nel piano.

144. Fissato il sistema degli assi cartesiani oxy, una coppia di numeri complessi x_1y_1 (uno dei quali almeno) determina un *punto immaginario* $P(x_1y_1)$ nel piano.

A sistemi diversi di coordinate oxy, OXY corrispondono, per uno stesso punto reale, coppie diverse di numeri reali xy, XY, le quali sono legate dalla relazione espressa mediante le formule di trasformazione (n.° 99)

$$(13)\qquad \begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + b_1 \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + b_2, \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Diremo perciò che *due coppie di numeri complessi xy, XY rappresentano lo stesso punto immaginario* (riferito ai due sistemi diversi oxy, OXY) se esse sono legate dalle relazioni

$$\begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + b_1 \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + b_2. \end{cases}$$

145. Due punti $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ si dicono *immaginari coniugati,* se, rispettivamente, le coordinate x_1, x_2; y_1, y_2 sono numeri complessi coniugati.

La proprietà, per due punti, di essere immaginari coniugati, è indipendente dagli assi di riferimento.

Ed infatti, sappiamo che un numero complesso $\alpha + i\beta$, si ottiene dal suo coniugato col cambiare il segno di i.

Ora, nelle formule (13) i coefficienti $a_{11}a_{12}b_1$, $a_{21}a_{22}b_2$, sono numeri reali, cioè non apparisce in essi la lettera i.

Se dunque nei secondi membri di quelle formule, si mette, al posto di XY una coppia di numeri ad essi coniugati, questo avrà per effetto di cambiare nei secondi membri di dette formule il segno di tutti i termini che contengono i.

Ciò equivale a cambiare, anche nei primi membri il segno della i; cioè a sostituire alle x e y le espressioni ad esse rispettivamente coniugate.

Osservando che due numeri coniugati $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ non possono avere ugual valore senza che sia $\beta = 0$, senza cioè che essi siano reali, si conclude che *due punti immaginari coniugati non possono coincidere, a meno che essi non sieno reali.*

146. Una equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

a *coefficienti reali,* rappresenta, come sappiamo, una retta, che diremo *retta reale.* Tale equazione, ad ogni valore (reale o complesso) dato ad x fa corrispondere un valore di y (pure reale o complesso) che, insieme col dato costituiscono una coppia di coordinate xy relativa ad un punto $P(xy)$ della retta.

Si dice che *un punto immaginario sta sopra una retta se le coordinate del punto soddisfano la equazione della retta.*

Concludiamo dunque che, *sopra una retta reale esistono infiniti punti reali, ed infiniti punti immaginari.*

Con riflessioni analoghe a quelle fatte al n.° 145 si vede immediatamente che: *se una retta reale contiene un punto immaginario, contiene anche il coniugato di esso.*

147. Possiamo togliere, per i coefficienti a, b, c la condizione della realità, ed allora si intenderà *per retta* $r\,(ax + by + c = 0)$ *l'insieme di tutti i punti* (*reali e immaginari*) *le cui coordinate soddisfono la equazione a coefficienti in generale complessi,*

$$ax + by + c = 0;$$

ed, avendo dette *reali* le rette $r\,(ax + by + c = 0)$ a coefficienti tutti reali, si diranno *immaginarie* le altre.

148. *Una retta passante per due punti reali è una retta reale.* E difatti, se $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ sono due punti reali appartenenti alla retta, l'equazione della retta è $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ed ha tutti i suoi coefficienti reali.

Facilmente si vede che *esiste sempre un punto reale* (proprio od improprio) *ed uno solo sopra ogni retta immaginaria.*

Sia difatti

$$(a' + ia'')x + (b' + ib'')y + (c' + ic'') = 0$$

l'equazione della retta: da questa si ricava (per x reale)

$$y = \frac{-(c' + ic'') - (a' + ia'')x}{b' + ib''} = -\frac{c' + a'x + i(c'' + a''x)}{b' + ib''}$$

$$y = -\frac{\{c' + a'x + i(c'' + a''x)\}(b' - ib'')}{b'^2 + b''^2}$$

$$y = -\frac{c'b' + a'b'x + c''b'' + a''b''x + i(b'c'' + a''b'x - c'b'' - a'b''x)}{b'^2 + b''^2}.$$

Affinchè ad un valore reale di x corrisponda un valore reale delle y occorre che sia nullo il coefficiente di i, cioè che

$$b'c'' + a''b'x - c'b'' - a'b''x = 0$$

da cui

$$x = \frac{c'b'' - b'c''}{a''b' - a'b''}.$$

Sostituendo nella formula che dà il valore di y si ricava

$$y = \frac{a'c'' - a''c'}{a''b - b''a}$$

ed immediatamente si verifica che questi valori sono le soluzioni comuni alle due equazioni

$$\begin{cases} (a' + ib'')x + (b' + ib'')y + (c' + ic'') = 0 \\ (a' - ib'')x + (b' - ib'')y + (c' - ic'') = 0 \end{cases}$$

e cioè che sono le coordinate del punto di incontro della retta data r con la sua coniugata.

Di qui risulta che: *Due rette immaginarie coniugate si intersecano in un punto reale.*

Scrivendo l'equazione della retta per due punti (reali o complessi) $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$, sotto la forma (n.° 118)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

vediamo che *la retta congiungente due punti immaginari coniugati è reale.*

§ XIII. Coordinate nel piano rigato.

149. Stabilito un sistema cartesiano di coordinate nel piano, l'equazione di una retta non passante per l'origine è data da

$$ax + by + c = 0$$

dove è c diverso dallo zero.

Dividendo per c, possiamo scrivere:

$$\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + 1 = 0$$

od anche

$$ux + vy + 1 = 0, \quad u = \frac{a}{c}, \quad v = \frac{b}{c}.$$

Ad ogni retta r corrisponde una coppia di numeri u, v tali che $ux + vy + 1 = 0$ rappresenta l'equazione cartesiana della retta e ad ogni coppia di numeri u, v corrisponde una retta r, data mediante l'equazione $ux + vy + 1 = 0$.

I numeri u, v si dicono perciò coordinate della retta r e, più precisamente, **coordinate tangenziali o plückeriane della retta.**

Paragonando la $ux + vy + 1 = 0$ con la forma segmentaria $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, si scorge che *le coordinate plückeriane u, v della retta r sono numeri inversi e contrari, $u = -\frac{1}{p}$, $v = -\frac{1}{q}$, di quelli che misurano i segmenti che la r stacca su gli assi a partire dalla origine.*

Indicheremo che la retta r ha le coordinate u, v, scrivendo $r(u, v)$. Ricordando il significato di u, v si vede che *il coefficiente angolare m della retta $r(u, v)$ è dato da*

$$m = -\frac{u}{v}.$$

La condizione di parallelismo di due rette $r(u, v)$, $r_1(u_1, v_1)$ è dunque data da

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La condizione di ortogonalità è

$$mm_1 + 1 = 0 \quad \text{ossia} \quad uu_1 + vv_1 = 0.$$

Una retta r per la quale la prima coordinata u è nulla, è parallela all'asse x. Se invece si suppone nulla la seconda coordinata $v = 0$, la r è parallela all'asse delle y. La retta impropria ha entrambe le coordinate nulle, $u = 0$, $v = 0$.

Le rette passanti per l'origine hanno entrambe le coordinate infinite, dunque *il sistema di coordinate plückeriane non può servire a rappresentare una retta passante per l'origine.*

Questo fatto è correlativo all'altro che si riscontra nelle coordinate cartesiane, riguardo alla rappresentazione dei punti improprii.

La retta impropria ha coordinate plukeriane 0, 0 (come l'origine in coordinate cartesiane).

150. Equazione del punto *in coordinate tangenziali.*

Dato un punto $P_1(x_1y_1)$, la relazione

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0$$

è soddisfatta dalle coordinate u, v di tutte le rette passanti per x_1y_1 e da queste sole.

Essa è dunque *la equazione del punto $P_1(x_1y_1)$ in coordinate tangenziali.* La relazione

$$u_1x_1 + v_1y_1 + 1 = 0 \tag{48}$$

esprime la *condizione di appartenenza del punto $P_1(x_1y_1)$ e della retta $r_1(u_1v_1)$.*

In generale una equazione lineare

$$ax + by + c = 0$$

esprime la **condizione di appartenenza** *del punto $P(xy)$ di coordinate cartesiane x, y, alla retta $r\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ di coordinate plückeriane $u = \frac{a}{c}$, $v = \frac{b}{c}$.*

La equazione del punto **intersezione delle rette** $r_1(u_1v_1)$ $r_2(u_2v_2)$, *è data da*

$$v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(u - u_1)$$

ossia

$$(v_2 - v_1)u - (u_2 - u_1)v = (v_2 - v_1)u_1 - (u_2 - u_1)v_1$$

$$\frac{v_2 - v_1}{(v_2 - v_1)u_1 - (u_2 - u_1)v_1}u - \frac{u_2 - u_1}{(v_2 - v_1)u_1 - (u_2 - u_1)v_1}v = 1.$$

Le coordinate del punto di incontro $P(xy)$ delle rette $r_1(u_1v_1)$ $r_2(u_2v_2)$ sono dunque:

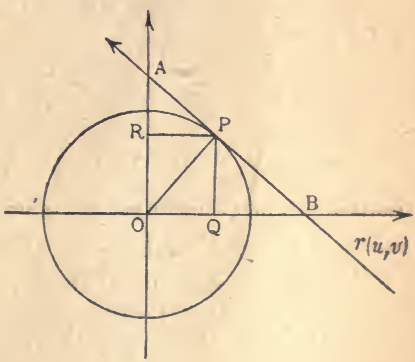
$$x = \frac{v_2 - v_1}{(v_2 - v_1)v_1 - (u_2 - u_1)_1 v}, \quad y = -\frac{u_2 - u_1}{(v_2 - v_1)u_1 - (u_2 - u_1)v_1}.$$

151. *Equazioni di* **inviluppi** *in coordinate di rette.* Le rette $r(u, v)$ le cui coordinate soddisfano una data equazione $f(u, v) = 0$ costituiscono, in generale, la totalità delle tangenti ad una curva piana, ossia, come suol dirsi, un *inviluppo di rette.* E, reciprocamente la condizione perchè una retta generica risulti tangente ad una data curva può, in generale, rappresentarsi analiticamente con una equazione della forma $f(u, v) = 0$. Una tale equazione vien detta equazione dell'*inviluppo.*

Se la equazione dell'inviluppo è razionale ed intera, ed il grado complessivo di essa nelle due variabili u, v è n, si dice che **l'inviluppo è di classe** n.

Proponiamoci come esempio, di cercare *l'equazione dell'inviluppo delle tangenti al cerchio col centro nella origine e raggio r.*

Sia $r(u, v)$ una retta tangente al cerchio, P il punto di contatto, $\overline{OB} = -\frac{1}{u}$, $\overline{OA} = -\frac{1}{v}$, i segmenti che essa stacca su gli assi coordinati.



Dal triangolo rettangolo OPB si ricava

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OQ}$$

da cui

$$\overline{OB} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OQ}}, \quad -u = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}^2}.$$

Similmente, dal triangolo OPA si ricava

$$-v = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}^2} = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}^2}.$$

Dalle due

$$-u = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}^2}, \quad -v = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}^2}$$

quadrando e sommando si ricava

$$u^2 + v^2 = \frac{\overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2}{\overline{OP}^4} = \frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{1}{r^2}.$$

L'equazione $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$ rappresenta appunto l'inviluppo considerato.

§ XIV. Coordinate omogenee.

152. Consideriamo, sopra un piano proprio, un sistema di coordinate cartesiane. Le coordinate di un punto P, qualunque, potranno in infiniti modi rappresentarsi sotto la forma di rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, di tre numeri $x_1 x_2 x_3$, ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}: \tag{49}$$

ed i tre numeri $x_1 x_2 x_3$ rimarranno determinati, *a meno di un fattor arbitrario* ρ, *di* proporzionalità, perchè, trovata una terna $x_1 x_2 x_3$ soddisfacente la (49), per qualunque valore di ρ si avrà ancora

$$x = \frac{\rho x_1}{\rho x_3}, \quad y = \frac{\rho x_2}{\rho x_3}.$$

Viceversa, data una terna $x_1 x_2 x_3$ di numeri non tutti nulli rimangono determinate le coordinate $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ di un punto $P(xy)$, che corrisponde alla terna data.

Le terne $x_1 x_2 x_3$ di numeri reali si possono, nel senso ora spiegato, considerare come coordinate dei punti del piano; ed hanno il nome di *coordinate cartesiane omogenee.*

È bene ripetere che in una qualunque di queste terne, i numeri possono variare per un fattore comune arbitrariamente scelto, senza che la terna cessi dal rappresentare il medesimo punto.

In particolare si può scegliere ad arbitrio uno dei tre valori della terna, determinando poi opportunamente gli altri, mediante la (49).

Se si suppone $x_3 = 1$, rimane $x = x_1$, $y = x_2$, cioè: *Per passare dalle coordinate omogenee $x_1 x_2 x_3$ di un punto P, alle coordinate ordinarie dello stesso punto, basta supporre uguale ad* 1 *la terza coordinata omogenea x_3, ed assumere per x, y i valori delle due prime coordinate x_1, x_2.*

Se si suppone di far variare una sola delle tre coordinate, per es. x_3 e di tener fissi i valori delle altre due, il punto $P(x_1 x_2 x_3)$ varierà corrispondentemente, descrivendo una determinata linea del piano.

Per conoscere la natura di questa linea basta eliminare x_3 dalle (49); ciò che si fa formando il rapporto

$$\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}$$

da cui

$$y = \frac{x_2}{x_1} x$$

dunque al variare di x_3 il punto $P(x_1 x_2 x_3)$ percorre la retta per l'origine di coefficiente angolare

$$m = \frac{x_2}{x_1}.$$

A valori di x_3 piccolissimi corrispondono valori $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ grandissimi, cioè punti P della retta sempre più lontani dalla origine; al tendere di x_3 allo zero, x ed y tendono all'infinito, ed alla coordinata $x_3 = 0$ corrisponde il punto improprio della retta.

Diremo dunque che *il punto improprio che corrisponde alla direzione determinata del coefficiente angolare $m = \frac{x_2}{x_1}$ ha per coordinate cartesiane omogenee $(x_1\ x_2\ 0)$.*

E, poichè è lecito sostituire alle coordinate di una terna numeri ad essi proporzionali, potremo anche assumere come coordinate del punto improprio della retta $y = mx$, la terna $(1, m, 0)$; ed in generale, come coordinate del punto improprio della retta

$$ax + by + c = 0,$$

la terna $(-b, a, 0)$.

Diremo perciò che il punto improprio dell'asse x è $(1, 0, 0)$, che quello dell'asse y è $(0, 1, 0)$, che quello della bisettrice del primo quadrante è $(1, 1, 0)$, ecc..

153. Equazione della retta in coordinate omogenee. Mettendo per xy i valori espressi dalle (49), l'equazione generale assume la forma

$$a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

o l'altra, omogenea,

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

a questa equazione soddisfano non solo le coordinate omogenee di tutti i punti proprii della retta, ma anche quelle del punto improprio $(-b, a, 0)$.

Osserveremo ancora che, mentre nella forma non omogenea della equazione della retta $ax + by + c = 0$ è necessariamente escluso il caso di $a = 0$, $b = 0$, questa eccezione non ha più luogo per la forma omogenea: infatti la (50), in tale caso particolare, si riduce ad

$$x_3 = 0$$

e *rappresenta tutti i* **punti impropri del piano.**

Poichè le coordinate di questi punti soddisfano ad una equazione lineare, essi si comportano analiticamente come se fossero allineati: troviamo così giustificata la convenzione che riguarda i punti improprii del piano come costituenti una retta.

Possiamo dunque dire che $x_3 = 0$ è **la equazione della retta impropria.**

154. Scrivendo l'equazione della retta r in coordinate omogenee sotto la forma

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0 \qquad (51)$$

potremo (analogamente a quanto si è detto nel § XIII) interpretare i numeri ξ_1, ξ_2, ξ_3, come *coordinate omogenee plückeriane della retta* r e rappresentare questa scrivendo:

$$r(\xi_1\xi_2\xi_3).$$

La (51) potrà allora interpretarsi, sia come **equazione della retta** $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ ***in coordinate di punto***, sia come **equazione del punto** $P(x_1x_2x_3)$ ***in coordinate di retta.***

155. *Le condizioni di parallelismo e di ortogonalità* di rette, date mediante le loro coordinate omogenee, sono le seguenti:

Due rette $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$, $r''(\xi_1''\xi_2''\xi_3'')$ sono **parallele**, quando si ha

(52)
$$\xi_1':\xi_1''=\xi_2':\xi_2''$$

cioè

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' \\ \xi_1'' & \xi_2'' \end{vmatrix}=0$$

sono **ortogonali** quando

(53)
$$\xi_1'\xi_1''+\xi_2'\xi_2''=0.$$

Queste condizioni possono direttamente ricavarsi dalla equazione (51), e non sono diverse da quelle che abbiamo dato al n.° 149 per coordinate di retta non omogenee.

156. L'equazione della retta generica $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ per $P'(x_1'x_2'x_3')$ si ha facendo sistema delle due

$$\begin{cases} \xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0 \\ \xi_1x_1'+\xi_2x_2'+\xi_3x'_3=0, \end{cases}$$

di cui la prima è la equazione della retta, l'altra esprime la condizione che essa passi per P'; moltiplicando la prima per x_3' la seconda per x_3 e sottraendo, si ha l'**equazione di una retta generica per** $P'(x_1'x_2'x_3')$

(54)
$$\xi_1(x_1x_3'-x_1'x_3)+\xi_2(x_2x_3'-x_2'x_3)=0$$

ossia

$$\xi_1x_3'x_1+\xi_2x_3'x_2-(\xi_1x_1'+\xi_2x_2')x_3=0.$$

Dunque: *le coordinate di una retta per il punto* $P(x_1'x_2'x_3')$, *cioè* *della retta generica del fascio che ha per centro P', hanno la forma*

$$\xi_1 x_3', \quad \xi_2 x_3', \quad -(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2');$$

essendo ξ_1, ξ_2 quantità arbitrarie.

157. L'equazione della *retta per i due punti $P'(x_1' x_2' x_3')$, $P''(x_1'' x_2'' x_3'')$* è data da

$$(55) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

§ XV. Coordinate proiettive.

158. Equazioni parametriche della retta. La condizione perchè il punto $P(x_1 x_2 x_3)$ sia allineato con altri due punti $P'(x_1' x_2' x_3')$, $P''(x_1'' x_2'' x_3'')$ è che esistano tre numeri $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ atti a soddisfare contemporaneamente le tre equazioni lineari ed omogenee

$$\begin{aligned} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 &= 0 \\ \xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' &= 0 \\ \xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Perciò occorre e basta che si annulli il determinante dei coefficienti, cioè che sia

$$(55) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Questa appunto è la equazione della retta per $P'P''$ scritta al n.° precedente. La condizione (55) se i punti P', P'' sono distinti, cioè se le coordinate x_1', x_2', x_3' non sono ordinatamente proporzionali alle x_1'', x_2'', x_3'', equivale a supporre che la prima linea del determinante sia una combinazione lineare delle altre due: essa equivale quindi alle altre

$$(56) \qquad x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$$

dove λ e μ sono parametri arbitrari.

Queste dunque sono le **equazioni parametriche della retta** per $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$: esse servono ad esprimere le coordinate omogenee di un punto qualsiasi della punteggiata $P'P''$ in funzione delle coordinate di due punti distinti di essa e di due parametri arbitrari λ, μ.

Ponendo $\frac{\lambda}{\mu}=h$ e ricordando che sono equivalenti le terne di coordinate omogenee che differiscono per un fattore di proporzionalità, potremo anche scrivere le equazioni parametriche della retta $P'P''$ sotto la forma

$$x_1 = hx_1' + x_1'',\quad x_2 = hx_2' + x_2'',\quad x_3 = hx_3' + x_3''. \tag{57}$$

159. COORDINATE PROIETTIVE IN UNA FORMA DI PRIMA SPECIE.

Se consideriamo i rapporti

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{\lambda x_1' + \mu x_1''}{\lambda x_3' + x\mu_3''},\quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{\lambda x_2' + \mu x_2''}{\lambda x_3' + \mu x_2''}$$

ed in questi facciamo $x_3 = x_3' = x_3'' = 1$, e scriviamo x, y, in luogo di $x_1 x_2$, troviamo le formule

$$x=\frac{\lambda x' + \mu x''}{\lambda+\mu},\quad y=\frac{\lambda y' + y\mu''}{\lambda+\mu}$$

le quali confrontate con le formule (21) trovate al n.° 108 ci dicono che il *punto P divide il segmento $P'P''$ nel rapporto* $r=\mu:\lambda$.

E potremo anche dire che il *punto P divide il segmento $P''P'$, nel rapporto inverso $h=\lambda:\mu$.*

Dunque il parametro h che figura nelle formule (57) *è la coordinata baricentrica dei punti della punteggiata rispetto ai punti base P'', P'.*

In particolare i punti P', P'' corrispondono ai valori di h:

$$\begin{array}{lll} P', & h=\infty & (\lambda=1,\ \mu=0) \\ P'', & h=0 & (\lambda=0,\ \mu=1). \end{array}$$

Sappiamo che il birapporto di quattro punti $(P_1P_2P_3P_4)$ della punteggiata è eguale a quello $(h_1h_2h_3h_4)$ dei corrispondenti valori di h: ora, se si prendono per $P_1P_2P_3$ i punti P', P''

(punti fondamentali) ed il punto E (punto unità) corrispondente al valore $h=1$, questi, insieme con un altro punto generico P di coordinata h sulla punteggiata, determinano il birapporto

$$(P'P''EP)=(\infty,\ 0,\ 1,\ h)=h.$$

Ciò dimostra che *il parametro h, che comparisce nelle formule* (57) **è coordinata proiettiva** *degli elementi della punteggiata, rispetto ai punti base $P'P''E$* (n.° 26 e 74).

Le medesime considerazioni si estendono immediatamente a fasci di raggi e si trova così che: *Date le coordinate di due rette distinte $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$, $r''(\xi_1''\xi_2''\xi_3'')$, le coordinate di ogni retta del fascio determinato da $r'r''$, sono date dalle formule*

(59) $$\xi_1=\lambda\xi_1'+\mu\xi_1'',\quad \xi_2=\lambda\xi_2'+\mu\xi_2'',\quad \xi_3=\lambda\xi_3'+\mu\xi_3'',$$

nelle quali λ, μ sono parametri arbitrari.

Un elemento variabile nel fascio è determinato dal valore del rapporto $h=\frac{\lambda}{\mu}$.

Questo valore è la *coordinata proiettiva* dell'elemento variabile nel fascio, rispetto agli elementi base r', r'', e, (e retta unità, corrispondente a $\lambda=1$, $\mu=1$).

Osservazione. — Se invece del numero $h=\frac{\lambda}{\mu}$, si considerano i numeri λ, μ, i quali sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità, si hanno le **coordinate proiettive omogenee** λ, μ *nella forma di 1.ª specie considerata*, (v. n.° 74).

160. Coordinate generali proiettive nel piano. Siano $x_1x_2x_3$, coordinate cartesiane omogenee di un punto nel piano. Si scelgano a piacere 9 numeri $a_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ tali che il determinante

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sia diverso dallo zero, e si eseguisca sulle x_1, x_2, x_3 la *sostituzione lineare*

(60) $$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3. \end{cases}$$

Poichè $A \neq 0$, ponendo $\alpha_{ik} = \frac{A_{ik}}{A}$, dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} in A, ricaveremo le x_1, x_2, x_3 dalle y_1, y_2, y_3 mediante la ***sostituzione inversa***

$$(61) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 \\ x_2 = \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{32}y_3 \\ x_3 = \alpha_{13}y_1 + \alpha_{23}y_2 + \alpha_{33}y_3 . \end{cases}$$

Ad ogni terna $x_1x_2x_3$ corrisponde dunque una terna $y_1y_2y_3$ e reciprocamente. Cioè ad ogni punto $P(x_1x_2x_3)$ del piano, corrisponde, a meno di un fattore di proporzionalità, una terna $y_1y_2y_3$, e ad ogni terna $y_1y_2y_3$ di numeri non tutti nulli, corrisponde un punto del piano.

Potremo considerare perciò le $y_1y_2y_3$ come coordinate del punto nel piano, e le chiameremo **coordinate omogenee proiettive.**

Ad una relazione lineare omogenea

$$(62) \qquad \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$$

fra le $x_1x_2x_3$, corrisponde, per la sostituzione (60), una relazione lineare omogenea fra le $y_1y_2y_3$:

$$(63) \qquad \eta_1y_1 + \eta_2y_2 + \eta_3y_3 = 0$$

e reciprocamente.

Ciò significa che le coordinate proiettive $y_1y_2y_3$ dei punti allineati lungo la retta $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ soddisfano l'equazione

$$\eta_1y_1 + \eta_2y_2 + \eta_3y_3 = 0$$

e reciprocamente.

Questa dunque è la *equazione della retta r in coordinate proiettive di punti.*

I suoi coefficienti $\eta_1\eta_2\eta_3$ si diranno **coordinate omogenee proiettive della retta** r, e si scriverà $r(\eta_1\eta_2\eta_2)$.

Tenendo conto che si è ottenuta la (63) applicando alla (62) la sostituzione (60), avremo

$$\begin{cases} \eta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 \\ \eta_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3 \\ \eta_3 = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 , \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 \\ \xi_2 = a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 \\ \xi_3 = a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 \end{cases}$$

le quali formule servono per la trasformazione delle coordinate omogenee di retta nelle proiettive, e per la trasformazione inversa.

E siccome tutte queste trasformazioni sono lineari, così ricordando le formule (56) potremo concludere che: *dati due punti* $P'(y_1'y_2'y_3')$, $P''(y_1''y_2''y_3'')$ *di una punteggiata mediante le loro coordinate proiettive, le coordinate proiettive di un punto qualunque P della punteggiata si esprimono mediante le formule:*

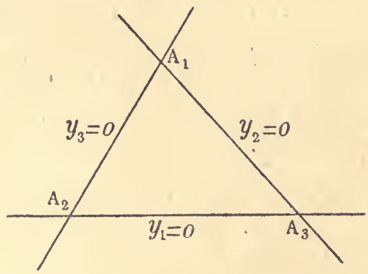
$$(64) \qquad y_1 = \lambda y_1' + \mu y_1'', \quad y_2 = \lambda y_2' + \mu y_2'', \quad y_3 = \lambda y_3' + \mu y_3''.$$

Ed una analoga proposizione si ha per il fascio di raggi.

161. Significato geometrico delle coordinate proiettive. La condizione $A \neq 0$ ci assicura che le tre rette $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, non appartengono ad un fascio, e perciò determinano un triangolo $A_1A_2A_3$, che chiameremo **triangolo fondamentale.**

Indicando con A_i il vertice opposto al lato $y_i = 0$, avremo per le coordinate proiettive dei vertici

$$A_1(1,\ 0,\ 0), \quad A_2(0,\ 1,\ 0), \quad A_3(0,\ 0,\ 1)$$

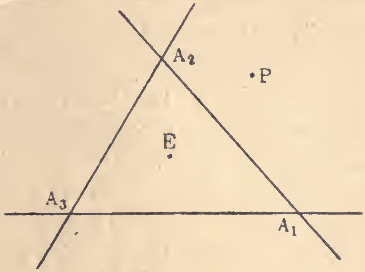


chiameremo questi: *punti fondamentali*, ed insieme con questi considereremo un quarto punto, $E(1\ 1\ 1)$, che diremo *punto unità*.

Dato dunque il sistema delle coordinate mediante le formule (60), rimane determinata la quaterna $A_1A_2A_3E$.

Dimostreremo ora reciprocamente che: *dato il triangolo fondamentale* $A_1A_2A_3$ *e stabilito il punto* E, *rimangono determinate le formule di trasformazione* (60), *cioè il sistema di coordinate proiettive.*

Dato un punto $P(y_1 y_2 y_3)$ del piano, da un vertice qualsiasi p. es. A_1 del triangolo fondamentale proiettiamo gli altri due vertici $A_2 A_3$, il punto E ed il punto P; vogliamo calcolare il valore del birapporto di questi quattro raggi, il quale birapporto indicheremo col simbolo $A_1(A_2 A_3 EP)$.



La retta A_1A_2 od $y_3 = 0$ ha per coordinate $(0\ 0\ 1)$
» » A_1A_3 » $y_2 = 0$ » » » $(0\ 1\ 0)$.

Le coordinate di qualsivoglia altra retta del fascio che ha queste per raggi base (dovendo avere la forma $\lambda\eta_i' + \mu\eta_i''$, $(i = 1, 2, 3)$ saranno $(0, \mu, \lambda)$; e l'equazione di una tale retta in coordinate proiettive di punti sarà quindi

$$\mu y_2 + \lambda y_3 = 0.$$

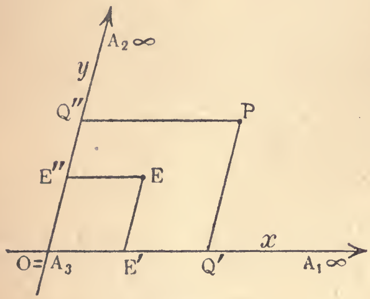
Da ciò segue che il rapporto $\frac{\lambda}{\mu} = h$ ha il valore $h = -1$ per la retta A_1E; d'altra parte esso ha il valore $-\frac{y_2}{y_3}$ per la retta A_1P, ed ha come sappiamo, il valore ∞ per A_1A_2, ed il valore 0 per la A_1A_3.

Sarà dunque

$$\left\{\begin{aligned} A_1(A_2A_3EP) &= \left(\infty,\ 0,\ -1,\ -\frac{y_2}{y_3}\right) = \frac{y_2}{y_3} \\ A_2(A_3A_1EP) &= \left(\infty,\ 0,\ -1,\ -\frac{y_3}{y_1}\right) = \frac{y_3}{y_1}. \\ A_3(A_1A_2EP) &= \left(\infty,\ 0,\ -1,\ -\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_1}{y_2} \end{aligned}\right.$$

Da ciò concludiamo che *per ogni punto P del piano, i rapporti* $\frac{y_i}{y_k}$ *delle coordinate proiettive omogenee pertinenti ad un tale punto sono rispettivamente eguali ai birapporti dei quattro raggi che proiettano i due vertici omonimi* $A_i A_k$ *del triangolo fondamentale, il punto unità E ed il punto dato P dal terzo vertice dello stesso triangolo.*

Le coordinate proiettive dipendono dunque unicamente dai quattro punti di riferimento $A_1 A_2 A_3 E$, cioè dai vertici del triangolo fondamentale e dal punto unità.



Se uno dei lati del triangolo fondamentale è la retta impropria, si ricade nelle ordinarie coordinate cartesiane. Per es. se $y_3 = 0$ è la retta impropria, possiamo identificare il lato $y_2 = 0$ con l'asse x, il lato $y_1 = 0$ con l'asse y, ed il punto A_3 con l'origine, e, dette E', E'' le proiezioni del punto E sugli assi x, y (secondo direzioni parallele agli assi y, x), potremo assumere i segmenti A_3E', A_3E'' come unità di misura delle lunghezze sugli assi stessi. In particolare, per restare nel caso ordinario in cui l'unità di misura è la stessa pei due assi cartesiani, potremo supporre $\overline{A_3E'} = \overline{A_3E''} = 1$.

Si vede subito che in tali ipotesi, è

$$\frac{y_2}{y_3} = A_{1\infty}(A_{2\infty}A_3EP) = (A_{2\infty}A_3E''Q'') = (\infty,\ 0,\ 1,\ y) = y,$$

$$\text{cioè } \frac{y_2}{y_3} = y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\frac{y_1}{y_3} = A_{2\infty}(A_{1\infty}A_3EP) = (A_{1\infty}A_3E'Q') = (\infty,\ 0,\ 1,\ x) = x,$$

$$\text{cioè } \frac{y_1}{y_3} = x = \frac{x_1}{x_3}.$$

Si vede poi immediatamente che se le formule (60) hanno la forma

$$y_1 = a_{11}x_1$$
$$y_2 = a_{22}x_2$$
$$y_3 = a_{33}x_3$$

con $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, cioè se per coordinate proiettive si assumono le ordinarie coordinate cartesiane omogenee, il triangolo fondamentale è formato dagli assi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e dalla retta impropria $x_3 = 0$.

Le coordinate cartesiane si presentano dunque come caso particolare di coordinate proiettive.

162. Trasformazione delle coordinate proiettive. Assegnato un triangolo fondamentale $A_1A_2A_3$, e scelto un punto unità E, rimangono determinate le coordinate proiettive $y_1y_2y_3$ di ogni punto $P(y_1y_2y_3)$ del piano.

Se si sceglie un altro triangolo fondamentale $A_1'A_2'A_3'$ ed un altro punto unità E', le coordinate di P assumeranno valori diversi $y_1'y_2'y_3'$.

Per trovare la relazione fra le nuove coordinate e le primitive, si scelga un sistema cartesiano qualsivoglia $x_1x_2x_3$. Sappiamo che le $y_1y_2y_3$ sono funzioni lineari omogenee delle $x_1x_2x_3$, e che le $x_1x_2x_3$ sono funzioni lineari omogenee delle $y_1'y_2'y_3'$, date da formule del tipo (n.° 160)

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}'y_1' + \alpha_{21}'y_2' + \alpha_{31}'y_3' \\ x_2 &= \alpha_{12}'y_1' + \alpha_{22}'y_2' + \alpha_{32}'y_3' \\ x_3 &= \alpha_{13}'y_1' + \alpha_{23}'y_2' + \alpha_{33}'y_3'. \end{aligned}\right.$$

Si esprimeranno dunque le $y_1y_2y_3$ in funzione delle $y_1'y_2'y_3'$ mediante la sostituzione composta di quelle due, la quale avrà la forma:

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= b_{11}'y_1' + b_{12}'y_2' + b_{13}'y_3' \\ y_2 &= b_{21}'y_1' + b_{22}'y_2' + b_{23}'y_3' \\ y_3 &= b_{31}'y_1' + b_{32}'y_2' + b_{33}'y_3'. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Sviluppando le b_{ik}, si trova

$$b_{ik} = a_{i1}\alpha_{k1}' + a_{i2}\alpha_{k2}' + a_{i3}\alpha_{k3}' \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

cioè si verifica che i coefficienti della sostituzione composta si formano con la stessa legge del prodotto dei determinanti, e più precisamente moltiplicando ordinatamente e successivamente le tre orizzontali del quadro relativo alla prima sostituzione per le tre verticali della seconda.

Da ciò risulta che il *modulo della sostituzione composta è uguale al prodotto dei moduli delle sostituzioni componenti*: perciò nel caso nostro è esso pure diverso dallo zero.

Reciprocamente: Se sopra le $y_1'y_2'y_3'$ si eseguisce una qualunque sostituzione lineare a modulo diverso dallo zero, le nuove y che se ne ricavano sono pure coordinate proiettive, perchè funzioni lineari omogenee delle coordinate cartesiane $x_1x_2x_3$.

Si conclude da ciò che: *Ogni trasformazione delle coordinate generali proiettive si eseguisce mediante una sostituzione lineare omogenea, ed una qualunque sostituzione lineare omogenea sopra coordinate proiettive può interpretarsi come una trasformazione di coordinate.*

Si consideri infine che, *se si suppone fisso il sistema delle coordinate, una sostituzione lineare omogenea stabilisce una corrispondenza biunivoca fra gli elementi* $[y_1y_2y_3]$, *e gli elementi* $[y_1'y_2'y_3']$ *cioè* **trasforma il piano punteggiato** $[P(y_1y_2y_3)]$ **nel piano punteggiato** $[P'(y_1y_2y_3)]$.

Se invece consideriamo gli elementi del piano come fissi ed invariabili, quella medesima sostituzione lineare cambia gli elementi di riferimento, cioè *trasforma il sistema delle coordinate proiettive primitivo in un nuovo sistema di coordinate proiettive.*

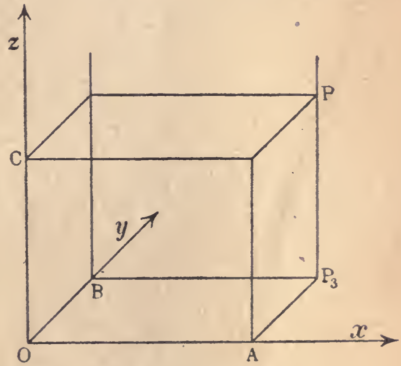
CAPITOLO III.

PUNTI, PIANI E RETTE NELLO SPAZIO

§ I. Coordinate cartesiane.

163. Si assumano come elementi di riferimento tre rette orientate Ox, Oy, Oz (*assi coordinati*) uscenti da un punto O (*origine*), e non giacenti in uno stesso piano. I piani Oyz, Ozx, Oxy che gli assi determinano a due a due, si dicono *piani coordinati.*

Fissate le *direzioni positive* su gli assi Ox, Oy, Oz, scegliamo come *pagine positive* dei piani coordinati yz, zx, xy, quelle volte rispettivamente ai versi positivi degli assi x, y, z e per le **rotazioni positive** sui piani coordinati, fissiamo quelle che procedono da destra a sinistra sulle pagine positive dei piani rispettivi, in conformità di quanto è stato detto al n.° 90.



Dato un punto qualunque P nello spazio, si conducano per P i tre piani paralleli ai piani coordinati yz, zx, xy, ed, indicati con A, B, C i punti dove questi incontrano gli assi x, y, z, si misurino (in grandezza e segno) i segmenti

$$x = \overline{OA}, \quad y = \overline{OB}, \quad z = \overline{OC}:$$

i numeri x, y, z, così ottenuti si dicono *coordinate cartesiane del punto P nel sistema Oxyz.*

Ad ogni punto corrisponde una terna di numeri x, y, z, coordinate del punto, e ad ogni terna di valori dati ad x, y, z

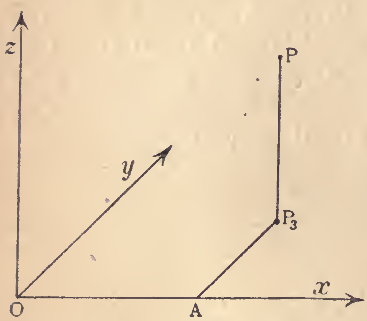
corrisponde un punto P, ed uno solo, il qual punto è il vertice opposto ad O nel parallelepipedo $OABCP$, determinato dai tre segmenti OA, OB, OC, i quali sui tre assi coordinati hanno per misure i tre numeri x, y, z, assegnati.

Indicheremo con $P(xyz)$ il punto che ha per coordinate i numeri x, y, z.

Praticamente si determina il punto $P(xyz)$ costruendo la spezzata OAP_3P coi lati OA sull'asse x, AP_3 su di una parallela per A all'asse y, P_3P sopra una parallela per P_3 all'asse z, essendo

$$\overline{OA} = x, \quad \overline{AP_3} = y, \quad \overline{P_3P} = z.$$

I punti del piano xy, hanno la coordinata z eguale allo zero, ed i punti pei quali è $z = 0$ sono sul piano xy, perciò si dice che la *equazione del piano xy è* $z = 0$.



Similmente, *la equazione del piano yz è* $x = 0$; *la equazione del piano zx è* $y = 0$.

I punti pei quali è contemporaneamente $z = 0$, $y = 0$ sono nella intersezione dei due piani xy, zx, cioè sono sull'asse x; e reciprocamente, per tutti i punti di quest'asse si ha contemporaneamente $z = 0$, $y = 0$, perciò si dice che

le equazioni dell'asse x sono $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

» » » y » $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

» » » z » $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

L'origine ha per coordinate $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

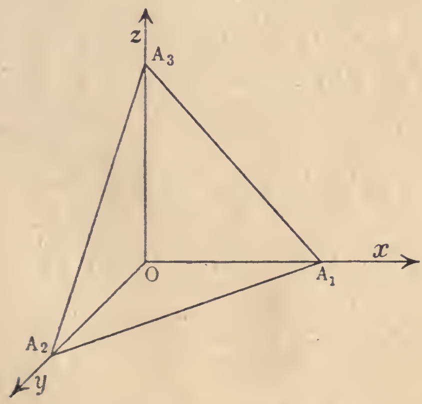
Tutti i punti proprii sono così rappresentati analiticamente in modo unico; ma non è possibile, con questo sistema di coordinate, di rappresentare i diversi punti improprii dello spazio.

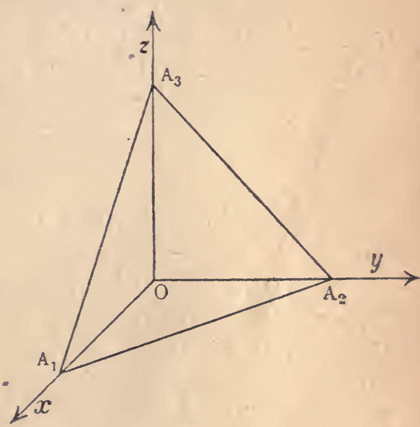
164. Orientazione di un triedro. Il triedro formato dai tre semiassi positivi Ox, Oy, Oz si dice per solito **triedro coordinato** o **triedro fondamentale**.

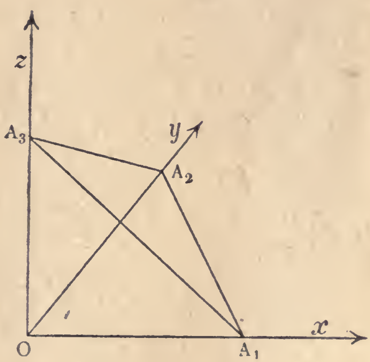
Se consideriamo tre rette orientate qualunque non complanari r_1, r_2, r_3, uscenti dalla origine O, ed immaginiamo che un osservatore si disponga lungo la retta r_3 coi piedi in O e col capo nel verso positivo; guardando la parte positiva di r_1 egli avrà la parte positiva di r_2 alla propria destra od alla propria sinistra. Diremo, nel primo caso, che il triedro $r_1 r_2 r_3$, nell'ordine in cui gli spigoli sono enunciati, è **destrorso**, nel secondo caso che è **sinistrorso**.

Così il triedro fondamentale Ox, Oy, Oz rappresentato dalla prima figura è *destrorso*, quello della seconda *sinistrorso*: anche quello della terza è *sinistrorso*.

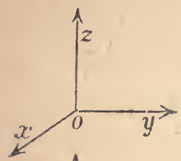
Un piano che incontri le parti positive dei tre assi nei punti A_1, A_2, A_3 determina il triangolo $A_1A_2A_3$. Un osser-

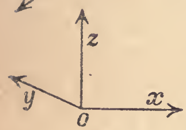


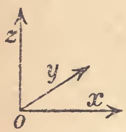




vatore che camminando sulla pagina del piano rivolta verso le parti positive degli assi (pagina positiva) percorra il contorno nel verso $A_1 A_2 A_3$ avrà l'area alla sua sinistra se il triedro xyz è sinistrorso, alla sua destra se destrorso.







È indifferente il supporre che il triedro fondamentale sia destrorso o sinistrorso. Per analogia a quanto fu fatto per le figure piane, noi *supporremo che il triedro fondamentale sia* **sinistrorso** *e supporremo altresì che sia sinistrorso il verso delle rotazioni positive intorno ad un asse orientato.*

Supporremo poi sempre che **gli assi coordinati** *siano fra loro* **ortogonali**, e quindi che il triedro fondamentale sia trirettangolo.

In molte applicazioni della geometria analitica alla meccanica si suppone *destrorso* il triedro fondamentale; il che non reca difficoltà alcuna. La rappresentazione del triedro fondamentale *sinistrorso* si fa al modo indicato da una delle tre figure poste qui accanto.

§ II. Orientazione di rette e di piani nello spazio.

165. Dato un sistema cartesiano $O(xyz)$ consideriamo la *stella di raggi* col centro in O. Se un raggio r di questa stella appartiene al piano xy, poichè su questo piano esiste il sistema cartesiano $O(xy)$ l'orientamento di r è fissato da quanto è stato detto al n.° 91.

Un raggio r qualunque della stella, non appartenente al piano xy, forma insieme con gli assi x, y un triedro, $O(xyr)$, il quale, secondo il verso in cui r è percorso, sarà, per orientamento, concorde o discorde col triedro fondamentale $O(xyz)$.

Assumeremo come **verso positivo** di r *quello che rende il triedro* $O(xyr)$ *concorde col triedro fondamentale* $O(xyz)$, cioè, insieme con questo, sinistrorso (od eventualmente destrorso).

Ogni raggio della stella risulta così necessariamente orientato. E praticamente, per determinare questo orientamento si può osservare che il piano xy divide lo spazio in due regioni, delle quali l'una contiene la parte positiva dell'asse z (quella i cui punti hanno coordinata z positiva) l'altra contiene la parte negativa.

Anche sopra ogni retta r passante per O non appartenente al piano xy, possiamo considerare una parte positiva ed una negativa (a partire da O) determinate dal verso di r.

Questo verso va fissato in guisa che la parte positiva di r sia contenuta nella stessa regione dove è contenuta la parte positiva di z.

Anche l'orientamento di qualsiasi raggio dello spazio rimane fissato, quando si ammetta che esso debba essere concorde con quello del raggio parallelo uscente da O.

E, se sopra qualsiasi raggio r non contenuto nel piano xy distinguiamo due parti, a partire dal punto dove r incontra il piano xy (supponendo posto in questo punto l'origine di un sistema di ascisse sulla r col verso medesimo che viene attribuito ad r per le nostre convenzioni), vediamo che *le parti positive di tutti questi raggi r* (quelle cioè che contengono punti con ascissa positiva) *sono tutte nella regione dello spazio, dove è contenuta la parte positiva dell'asse z.*

166. Segno delle distanze. Ricordando la espressione della diagonale del parallepipedo rettangolo, abbiamo la formula

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

che ci da il *valore assoluto* della **distanza** $|\overline{OP}|$ **che un punto** $P(xyz)$ **ha dalla origine.**

Quanto al **segno** *da attribuirsi alla distanza* $\overline{OP}$ è da considerare che questo risulterà positivo o negativo *secondo che il verso del segmento OP è concorde o discorde con quello della retta r* cui questo segmento appartiene.

Ora, per le convenzioni fatte al n.° 164 il verso positivo della retta r rimane determinato in modo che i triedri $O(xyz)$, $O(xyr)$ risultino concordemente orientati, perciò, se il punto P sarà in quella delle due regioni in cui il piano xy divide lo spazio, ove è la parte positiva dell'asse z, la lunghezza $\overline{OP}$ sarà positiva; se nell'altra negativa.

Dunque: *se $P(xyz)$ non è sul piano xy, la distanza $\overline{OP}$ sarà positiva o negativa secondo che è $z > 0$ oppure $z < 0$. Se poi supponiamo $z = 0$* (cioè P sul piano xy) *la $\overline{OP}$ risulterà positiva o negativa* secondochè $y > 0$ od $y < 0$.

Infine, se *ad un tempo fosse* $z = 0$, $y = 0$ (cioè P sull'asse x), *la distanza* $\overline{OP}$ *risulterà positiva o negativa, secondochè è* $x > 0$ *od* $x < 0$.

La distanza $\overline{P_1P_2}$ *fra due punti qualunque*, in funzione delle coordinate di tali punti, sarà determinata più innanzi, mediante le formule di trasformazione delle coordinate cartesiane.

Possiamo intanto osservare che **il segno di** $\overline{P_1P_2}$ *sarà concorde con quello della differenza* $z_2 - z_1$, *e se questa differenza è nulla, con quello della differenza* $y_2 - y_1$; *finalmente, se sarà ad un tempo* $z_2 - z_1 = 0$, $y_2 - y_1 = 0$, *il segno di* $\overline{P_1P_2}$ *dovrà concordare con quello di* $x_2 - x_1$.

167. Piano orientato. Un piano qualunque π dello spazio risulta *orientato* pel fatto che, essendo determinato il verso positivo di una sua normale, resta fissata sul piano la **pagina positiva** (quella che guarda verso la parte positiva delle normale); su tale pagina positiva, rimane fissato *il verso positivo delle rotazioni, e il segno delle aree* relativamente al senso in cui se ne immagina percorso il contorno, ed infine rimane determinata quella delle due regioni in cui il piano π divide lo spazio, la quale deve essere detta **regione positiva** *rispetto al piano* π nel senso che la distanza $\overline{MP}$ dal piede della normale calata da uno qualsiasi dei punti P di tale regione sul piano, al punto P stesso, risulta sempre positiva; mentre è negativa per punti della regione opposta, ed è nulla pei punti del piano.

Si può anche osservare che il piano π interseca almeno uno dei tre assi coordinati: ora la *pagina positiva del piano* π è quella che guarda verso la parte positiva dell'asse z, se questo è intersecato del piano; altrimenti quella che guarda verso la parte positiva dell'asse y; o infine, se il piano è parallelo al piano zy, quella che guarda verso la parte positiva dell'asse x.

168. Segno degli angoli. *Per* **angolo di due rette** r_1r_2 *comunque date nello spazio, intenderemo quello formato dalle parti positive di due rette orientate,* r_1', r_2' *condotte per la origine e rispettivamente parallele alle* r_1, r_2, *sulla pagina positiva del loro piano.*

Tale angolo risulterà *positivo o negativo, secondo che sarà positivo o negativo* (nel piano $r_1'r_2'$) *il senso della rotazione che deve compiere* r_1' *per venire a coincidere con* r_2'.

Od, altrimenti, condotta la normale r' al piano delle $r_1'r_2'$, l'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ sarà positivo o negativo secondo che *il triedro* $r_1' r_2'' r'$ *risulterà sinistrorso o destrorso.*

Si può inoltre osservare che *l'angolo che una retta qualunque fa con l'asse z è sempre in valore assoluto minore, od eguale, a $\frac{\pi}{2}$*; ciò posto, se consideriamo un piano π per l'origine O e la sua normale r', pure uscente da O, avremo che le parti positive, (rispetto ad O) delle rette r', z sono entrambe nella stessa regione dello spazio rispetto a π: dunque, se $r_1' r_2'$ sono due rette qualunque del piano π uscenti da O, *i triedri* $O(r_1' r_2' r')$, $O(r_1' r_2' z)$ *saranno egualmente orientati.* Ne segue che per determinare il verso positivo delle rotazioni sul piano π *ci si può giovare indifferentemente della normale r o dell'asse z* (dato che l'asse z non appartenga a π). Potremo dunque anche dire che l'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ sarà positivo o negativo, secondo che risulterà sinistrorso o destrorso il triedro $O(r_1' r_2' z)$.

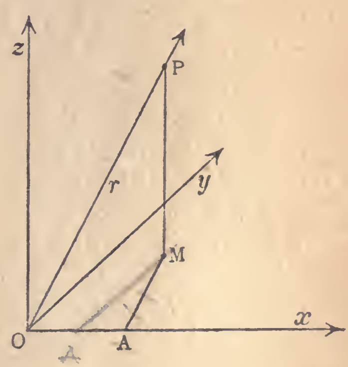
Se poi l'asse z appartiene a π, basterà in quanto si è detto sostituire y a z; e se infine il piano π è il piano $\overline{zy}$, occorrerà considerare l'asse x.

§ III. Angoli.

169. Coseni di direzione. Sopra una retta orientata r passante per l'origine si prenda un punto P, e si costruisca la solita spezzata $OAMP$ i cui lati ci danno in grandezza e segno le coordinate x, y, z di P. Indichiamo con ρ il numero $\overline{OP}$ e poniamo

$$a = \cos \widehat{rx}, \quad b = \cos \widehat{ry}, \quad c = \cos \widehat{rz},$$

avremo allora



(1) $\quad x = \rho a, \quad y = \rho b, \quad z = \rho c.$

Proiettando la spezzata su r si ha

(2) $\quad \rho = xa + yb + zc$

e mettendo in questa i valori di a, b, c che si ricavano dalle (1),

$$\rho = \frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho} + \frac{z^2}{\rho}$$

cioè

$$(3) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

come già abbiamo visto al n.° 166.

Mettendo invece nella stessa (2) i valori di x, y, z dati dalla (1), si ricava

$$(4) \qquad 1 = a^2 + b^2 + c^2.$$

I numeri

$$a = \cos \widehat{rx}, \quad b = \cos \widehat{ry}, \quad c = \cos \widehat{rz}$$

si dicono **coseni di direzione** *della retta* r; la formula (4) esprime una relazione notevole fra i coseni di direzione di una retta qualunque: la *somma dei quadrati dei tre coseni di direzione è uguale alla unità.*

Ricordando quanto si è osservato al n.° 168, che l'angolo che una retta fa con l'asse z è sempre in valore assoluto $\leqq \frac{\pi}{2}$, possiamo aggiungere che quando quest'angolo è proprio $\frac{\pi}{2}$, è in valore assoluto minore od eguale a $\frac{\pi}{2}$ l'angolo che la retta fa con l'asse y; e, finalmente, se anche questo è eguale a $\frac{\pi}{2}$, la retta coincide con l'asse x. Dunque: sarà sempre $\cos \widehat{rz} \geqq 0$; se $\cos \widehat{rz} = 0$, sarà $\cos \widehat{ry} \geqq 0$; se anche $\cos \widehat{ry} = 0$, sarà $\cos \widehat{rx} = 1$; in altri termini: **il primo dei tre coseni** c, b, a, **che non è nullo, è sempre positivo.**

Se nella (1) si suppone $\rho = \overline{OP} = 1$, si ha

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

cioè: *i coseni di direzione della* r *sono le coordinate di un punto* P *che appartiene alla* r *ed ha dalla origine la distanza unitaria* (positiva).

170. Osserveremo ancora che il dare i valori dei tre coseni equivale all'assegnare una determinata direzione, cioè un determinato punto improprio. *Ad ogni punto improprio corrisponde una terna di coseni direttori* a, b, c; *e ad ogni terna di coseni soddisfacenti alla* (4) *corrisponde un punto improprio.*

Data una retta r qualunque, non passante per la origine, assumereremo come *coseni direttori di* r, i coseni direttori della parallela ad r per la origine.

171. Dati i coseni direttori a, b, c, la retta r orientata uscente dalla origine è perfettamente individuata, e per costruirla basta determinare il punto $P(a, b, c)$ che ha per coordinate a, b, c, e congiungere questo con la origine.

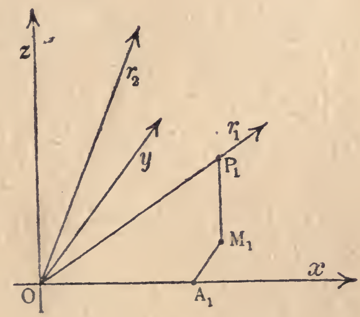
Reciprocamente: *Dato il punto $P(xyz)$ i coseni direttori della retta OP sono dati dalle formule*

$$a = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad b = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$c = \frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

che si ottengono dalle (1), (3), e nelle quali il segno $\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ deve essere concorde con quello di z, analogamente a quanto è stato detto al n.° 169.

172. Angolo di due direzioni. *Date due direzioni $r_1(a_1b_1c_1)$, $r_2(a_2b_2c_2)$ mediante i coseni direttori, si vuol l'angolo $\widehat{r_1r_2}$ da esse compreso.*



Consideriamo perciò un punto $P_1(x_1y_1z_1)$ su la r_1, e costruita la solita spezzata $OA_1M_1P_1$ che ne determina le coordinate, proiettiamo questa su r_2; indicando con ρ_1 il segmento $\overline{OP_1}$, avremo

$$\rho_1 \cos \widehat{r_1r_2} = x_1a_2 + y_1b_2 + z_1c_2$$

da cui

$$\cos \widehat{r_1r_2} = \frac{x_1}{\rho_1}a_2 + \frac{y_1}{\rho_1}b_2 + \frac{z_1}{\rho_1}c_2$$

infine

(5) $$\cos \widehat{r_1r_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2;$$

formula molto importante, che dà il *coseno dell'angolo di due direzioni* $r_1(a_1b_1c_1)$, $r_2(a_2b_2c_2)$ *in funzione dei coseni direttori di esse.*

Le direzioni sono ortogonali se $\cos\widehat{r_1r_2}=0$, dunque **la condizione di ortogonalità** fra due direzioni $r_1(a_1b_1c_1)$, $r_2(a_2b_2c_2)$ è data dalla relazione

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0. \tag{6}$$

Per calcolare anche il seno dell'angolo $\widehat{r_1r_2}$, scriveremo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\widehat{r_1r_2}&=1-\cos^2\widehat{r_1r_2}=\\ &=\begin{vmatrix}1 & \cos\widehat{r_1r_2}\\ \cos\widehat{r_1r_2} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2{}_1+b^2{}_1+c^2{}_1, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a^2{}_2+b^2{}_2+c^2{}_2\end{vmatrix}=\\ &=\begin{Vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{Vmatrix}^2=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2\end{aligned}$$

in fine

$$\operatorname{sen}\widehat{r_1r_2}=\pm\sqrt{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2}, \tag{7}$$

nella qual formula è da dare al radicale il segno positivo se r_1, r_2 si seguono nel verso positivo delle rotazioni, nel senso chiarito al n.° 168: il segno negativo nel caso contrario.

È facile vedere che *questo segno concorda con quello del determinante* $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$, ed, ove questo determinante sia zero, col segno di quello dei due determinanti $\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}$ che non è nullo.

(Si noti che se tutti quei determinanti fossero nulli le direzioni r_1r_2 coinciderebbero).

Per dimostrare il nostro asserto supponiamo prima che le rette r_1r_2, uscenti dalla origine, appartengano al piano yz. In tal caso sarà $a_1=a_2=0$, ed occorrerà considerare il determinante $\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=b_1c_2-b_2c_1$.

Ora, nel caso presente, si ha

$$\begin{aligned}b_1&=\cos\widehat{r_1y}, & c_1&=\cos\widehat{r_1z}=\operatorname{sen}\widehat{yr_1}\\ b_2&=\cos\widehat{r_2y}, & c_2&=\cos\widehat{r_2z}=\operatorname{sen}\widehat{yr_2},\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}b_1c_2-b_2c_1=\cos\widehat{r_1y}\operatorname{sen}\widehat{yr_2}-\cos\widehat{r_2y}\operatorname{sen}\widehat{yr_1}&=\operatorname{sen}(\widehat{r_1y}-\widehat{r_2y})\\ &=\operatorname{sen}\widehat{r_1r_2},\end{aligned}$$

e ciò prova l'enunciato. Analoga dimostrazione si fa nella ipotesi che le rette date appartengano al piano zx.

In secondo luogo supponiamo che le rette r_1, r_2 uscenti dalla origine non appartengano nè al piano yz, nè al piano zx.

Consideriamo, insieme con le rette date, le loro proiezioni r_1'', r_2'' sul piano xy. È facile verificare che il segno dell'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ è eguale o contrario a quello dell'angolo $\widehat{r_1'' r_2''}$ secondochè le parti positive di r_1, r_2 giacciono nella stessa regione dello spazio, rispetto al piano zx, od in regioni opposte.

Per determinare le proiezioni $r_1'' r_2''$ basta considerare i punti $P_1(a_1 b_1 c_1)$, $P_2(a_2 b_2 c_2)$ della sfera unitaria appartenenti alle r_1, r_2: le proiezioni di questi punti sul piano xy saranno $P_1''(a_1 b_1)$, $P_2''(a_2 b_2)$; ed, indicando con $\rho_1 \rho_2$ le distanze $\rho_1 = \overline{OP_1''}$, $\rho_2 = \overline{OP_2''}$, si avrà che anche i segni dei numeri ρ_1, ρ_2 saranno eguali o contrari, secondo che le parti positive di r_1, r_2 sono, rispetto al piano zx, nella stessa regione, od in regioni opposte.

Dunque: *i numeri* sen $\widehat{r_1 r_2}$, $\rho_1 \rho_2$ sen $r_1'' r_2'''$ *hanno sempre lo stesso segno.*

D'altra parte:

$$\begin{cases} \cos r_1''x = \dfrac{a_1}{\rho_1} \\ \text{sen}\, r_1''x = \dfrac{b_1}{\rho_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos r_2''x = \dfrac{a_2}{\rho_2} \\ \text{sen}\, r_2''x = \dfrac{b_2}{\rho_2}, \end{cases}$$

dunque

$$\begin{aligned} \text{sen}\, \widehat{r''_1 r_2''} &= \text{sen}\,(r_1''x - r_2''x) = \frac{1}{\rho_1 \rho_1}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

cioè $\rho_1 \rho_2\, \text{sen}\, \widehat{r_1'' r_2''} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$: dunque, per quanto precede, risulta provato che il segno di sen $\widehat{r_1 r_2}$ coincide con quello del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

173. Direzione normale a due date. Date le direzioni $r_1(a_1 b_1 c_1)$ $r_2(a_2 b_2 c_2)$, che individueremo mediante rette passanti per l'origine, cerchiamo i coseni α, β, γ della direzione $r(\alpha\beta\gamma)$ perpendicolare al piano delle due date.

Dovendo essere r normale ad r_1 e ad r_2, si avranno le relazioni di condizione

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0 \end{cases}$$

da cui, indicando con k un fattore di proporzionalità che rimane ancora da determinare, si avrà

$$k\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad k\beta = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad k\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

cioè (formule (1) e (7)),

$$k^2 = \operatorname{sen}^2 \widehat{r_1 r_2}, \quad k = \pm \operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2}$$

infine

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = \pm \dfrac{1}{\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \pm \dfrac{1}{\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2}} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \\ \gamma = \pm \dfrac{1}{\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ricordando che la prima delle tre quantità γ, β, α, che non è nulla, è sempre positiva, si vede che il segno da assumere in queste formule è quello di $\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, e, se questo determinante è zero, quello di $\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, ed, infine, se anche il determinante $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ è zero, quello di $\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, dunque si conclude (n.° 172) che *il segno da assumere nelle formule* (8) *è sempre il superiore.*

174. Determinante dei nove coseni. Siano $r_1(a_1 b_1 c_1)$, $r_2(a_2 b_2 c_2)$, $r_3(a_3 b_3 c_3)$ tre direzioni uscenti dall'origine O.

Indicheremo come al n.° precedente con $r(\alpha, \beta, \gamma)$ la direzione ortogonale al piano delle prime due r_1, r_2. Considerando l'angolo $\widehat{r r_3}$, avremo

$$\cos \widehat{r r_3} = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{r_1 r_2}} \left\{ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

cioè

$$\cos\widehat{rr_3} = \frac{1}{\operatorname{sen} r_1 r_2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Il determinante

$$\Delta(r_1 r_2 r_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\widehat{r_1 r_2}\cos\widehat{rr_3}$$

è detto **determinante dei nove coseni.**

175. Il determinante dei nove coseni si annulla se è nullo uno dei fattori al secondo membro delle (9). Cioè se è $\operatorname{sen}\widehat{r_1 r_2} = 0$ oppure se è $\cos\widehat{rr_3} = 0$.

Nel primo caso le rette $r_1 r_2$ sono sovrapposte, nel secondo caso r_3 è perpendicolare ad r, normale al piano delle due r_1, r_2; cioè r_3 è nel piano delle altre due r_1, r_2: in ogni caso le $r_1 r_2 r_3$ risultano complanari.

Concluderemo dunque che *l'annullarsi del determinante dei nove coseni dà la condizione perchè tre direzioni $r_1 r_2 r_3$ uscenti dal punto comune O siano* **complanari.**

176. Quando le tre rette r_1, r_2, r_3 non sono complanari, il determinante dei nove coseni non è nullo; se supponiamo che r_1, r_2 si seguano nel verso positivo delle rotazioni, il segno di $\operatorname{sen}\widehat{r_1 r_2}$ sarà positivo, ed il segno del determinante coinciderà con quello di $\cos\widehat{rr_3}$, sarà quindi positivo o negativo secondo che l'angolo $\widehat{rr_3}$ è acuto od ottuso.

Nel primo caso le direzioni positive di r_3 e di r stanno dalla stessa parte del piano $Or_1 r_2$, cioè il triedro $O(r_1 r_2 r_3)$ al pari del triedro $O(r_1 r_2 r)$ (n.° 168) è sinistrorso; nel secondo caso, detto triedro è destrorso.

Se poi supponiamo che r_1, r_2 si seguano nel verso negativo, cambierà il segno di $\operatorname{sen}\widehat{r_1 r_2}$, e, ad un tempo cambierà l'orientamento del triedro; dunque, in ogni caso: *Se il determinante dei nove coseni delle direzioni $r_1 r_2 r_3$ è positivo, il triedro $O(r_1 r_2 r_2)$ è* **concorde col triedro fondamentale** (sinistrorso), *se negativo,* **discorde** (destrorso): e viceversa.

Se il triedro è trirettangolo si ha $\operatorname{sen}\widehat{r_1 r_2} = \pm 1$, $\cos\widehat{rr_3} = \pm 1$, ed il valore del determinante dei nove coseni sarà 1 o -1 secondo che il triedro è sinistrorso o destrorso.

In un sistema cartesiano ortogonale sinistrorso, il determinante dei nove coseni ha valore 1 per ogni triedro trirettangolo sinistrorso, ha valore — 1 per ogni triedro trirettangolo destrorso.

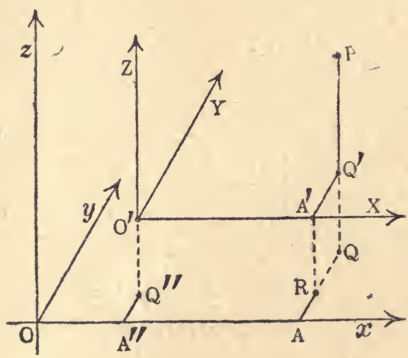
In ogni caso il determinante dei nove coseni ha valore assoluto non maggiore dell'unità. Si può dunque sempre determinare un angolo Ω il cui seno sia uguale al valore del determinante $\Delta(r_1 r_2 r_3)$: il seno di questo angolo viene spesso indicato col nome di **seno del triedro** $O(r_1 r_2 r_3)$, e si scrive

$$\operatorname{sen}(r_1 r_2 r_3) = \Delta(r_1 r_2 r_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 4. Trasformazione delle coordinate.

177. Ci proponiamo ora di determinare come varino le coordinate di ciascun punto dello spazio per un cambiamento del sistema di assi cartesiani.

Osserveremo a tal uopo che qualsivoglia trasformazione di assi può eseguirsi in due tempi: 1° con una *traslazione* che, conservando la direzione degli assi, porti la origine primitiva nella nuova origine; 2° con una *rotazione* intorno alla nuova origine, che porti gli assi primitivi a sovrapporsi ai nuovi.



Traslazione di assi. Si scorge immediatamente che se la nuova terna $O'(XYZ)$ ha gli assi rispettivamente paralleli agli antichi $O(xyz)$, e la nuova origine ha nel sistema primitivo le coordinate a_0, b_0, c_0, le nuove coordinate XYZ di un punto P

sono legate alle primitive x, y, z, dalle relazioni

$$(11)\quad \begin{cases} x = \overline{OA''} + \overline{A''A} = \overline{OA''} + \overline{O'A'} \\ y = \overline{AR} + \overline{RQ} = \overline{A''Q''} + \overline{A'Q'} \\ z = \overline{QQ'} + \overline{Q'P} = \overline{Q''O'} + \overline{Q'P} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_0 + X \\ y = b_0 + Y \\ z = c_0 + Z. \end{cases}$$

Cambiamento di direzioni. Il nuovo sistema $O(XYZ)$ abbia con l'antico in comune la origine, ed i nuovi assi abbiano direzioni determinate dai coseni direttori indicati nella tabelletta qui unita.

	x	y	z
X	a_1	b_1	c_1
Y	a_2	b_2	c_2
Z	a_3	b_3	c_3

Indichiamo con XYZ le coordinate di un punto P nel nuovo sistema, con xyz quelle dello stesso punto nel sistema primitivo, e supponiamo tracciata la spezzata $OAMP$ che serve a determinare le coordinate XYZ.

Proiettando questa spezzata successivamente sui tre assi del sistema primitivo si ottiene

$$(12)\quad \begin{cases} x = a_1X + a_2Y + a_3Z \\ y = b_1X + b_2Y + b_3Z \\ z = c_1X + c_2Y + c_3Z \end{cases}$$

e sono queste le relazioni richieste.

Se invece si costruisce la spezzata che serve a determinare le coordinate x, y, z, e si proietta questa spezzata successivamente sui nuovi assi X, Y, Z, si ottiene

$$(13)\quad \begin{cases} X = a_1x + b_1y + c_1z \\ Y = a_2x + b_2y + c_2z \\ Z = a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

Queste sono appunto le formule richieste.

178. Osservazione. Le formule (12), (13) *sono sostituzioni lineari a determinante* (modulo) *eguale all'unità*; la (13) è la sostituzione inversa della (12), e reciprocamente la (12) è la inversa della (13).

Per indicare una sostituzione basta scrivere il quadro dei coefficienti, che di solito si rinchiude fra parentesi al modo seguente

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Nella sostituzione (12), (13), i coefficienti soddisfano le relazioni:

$$(14)\quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

e, reciprocamente, *se i nove coefficienti soddisfano tali relazioni, possono considerarsi come coseni di tre direzioni ortogonali, ed una tale sostituzione puo riguardarsi come trasformazione di assi ortogonali ad assi ortogonali.*

Perciò una sostituzione lineare i cui coefficienti soddisfino le relazioni anzidette vien detta **sostituzione ortogonale.**

Da quanto abbiamo visto risulta che *il modulo di una sostituzione ortogonale ha sempre per valore assoluto 1 ed ha anche segno positivo se il triedro dei nuovi assi è concorde col primitivo.*

179. Caso generale. Se le coordinate della nuova origine O' sono $a_0 b_0 c_0$, ed i nuovi assi, che indicheremo ancora con $O'(XYZ)$ hanno, rispetto agli antichi, coseni direttori indicati dalla tabella data al n.° 177 si avranno le formule generali di trasformazione

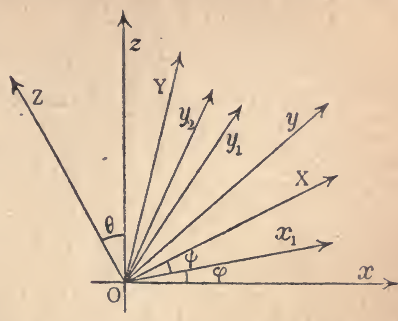
$$(15)\quad \begin{cases} x = a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, \\ y = b_0 + b_1 X + b_2 Y + b_3 Z, \\ z = c_0 + c_1 X + c_2 Y + c_3 Z, \end{cases}$$

180. Angoli di Eulero. I nove coefficienti che figurano in una sostituzione ortogonale sono legati dalle 6 relazioni (14), sicchè essi dipendono da tre soli parametri indipendenti. In generale si assumono, come parametri, tre angoli, detti *angoli di Eulero*, che sono le misure delle rotazioni da eseguire nel passaggio dall'una alla successiva delle terne

$$O(xyz),\quad O(x_1 y_1 z),\quad O(x_1 y_2 Z),\quad O(XYZ)$$

determinate al modo seguente:

Ox_1 è l'intersezione dei due piani Oxy, OXY, ed il verso positivo di Ox_1 viene scelto in modo che il triedro $O(x_1zZ)$ sia sinistrorso. Rotando la terna $O(xyz)$ intorno ad Oz immobile di un angolo $\widehat{xx_1} = \varphi$ nel verso positivo delle rotazioni, ne risulterà una nuova terna $O(x_1y_1z)$ [l'asse Oy_1 sarà nel piano Oxy]. Questa terna si faccia rotare intorno ad Ox_1 di un angolo $\theta = \widehat{zZ}$ finchè Oz si sovrapponga ad OZ, ne verrà la nuova terna Ox_1y_2Z [la y_2 sarà nel piano OXY dove è anche Ox_1, ed in questo piano essa sarà normale ad Ox]. Facendo rotare la terna $O(x_1y_2z)$ intorno ad OZ dell'angolo $\widehat{x_1X} = \psi$, essa verrà finalmente a sovrapporsi con la terna $O(XYZ)$.



Si avverta che l'orientamento degli assi OX, OY, OZ non è in generale quello che per la scelta del sistema $O(xyz)$ viene imposto a ciascun raggio dello spazio (n.° 165) ma deve intendersi scelto a piacere, cosicchè mentre l'angolo θ è per la costruzione fatta, compreso fra 0 e π, gli angoli φ e ψ possono essere qualunque nell'intervallo $0 \vdash 2\pi$.

Ciò posto, le sostituzioni ortogonali che servono nei successivi passaggi sono

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\operatorname{sen}\varphi, & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi, & \cos\varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\theta, & -\operatorname{sen}\theta \\ 0, & \operatorname{sen}\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\operatorname{sen}\psi, & 0 \\ \operatorname{sen}\psi, & \cos\psi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

Componendole nell'ordine scritto secondo la regola nota troviamo infine i nove coefficienti della sostituzione composta (12) dati dalle formule:

$$\left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} \\ \multicolumn{2}{c}{b_1 = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} \\ \multicolumn{2}{c}{c_1 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi} \\ a_2 = -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi & a_3 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ b_2 = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & b_3 = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ c_2 = \operatorname{sen}\theta\cos\psi & c_3 = \cos\theta. \end{array}\right.$$

181. *Se il sistema* $O(XYZ)$ *è* **obliquo**, varranno ancora le formule (12); quelle del gruppo (13) si otterranno, per risoluzione algebrica, dalle (12) e saranno perciò:

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{A_1}{\Delta} x + \frac{B_1}{\Delta} y + \frac{C_1}{\Delta} z \\ Y &= \frac{A_2}{\Delta} x + \frac{B_2}{\Delta} y + \frac{C_2}{\Delta} z \\ Z &= \frac{A_3}{\Delta} x + \frac{B_3}{\Delta} y + \frac{C_3}{\Delta} z \end{aligned}\right.$$

dove le lettere A_i, B_i, C_i, indicano i complementi algebrici dei corrispondenti elementi $a_i b_i c_i$ del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

il quale è necessariamente diverso dallo zero, chè altrimenti le direzioni $O(XYZ)$ sarebbero complanari (n.° 175).

Passaggio da assi obliqui ad altri assi obliqui aventi la stessa origine. Dati due sistemi cartesiani $O(xyz)$, $O(XYZ)$ con la medesima origine, inseriamo un terzo sistema con la stessa origine ed *ortogonale* $O(\xi, \eta, \zeta)$. Passeremo da questo al sistema $O(xyz)$ con formule del tipo

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= a_1'\xi + a_2'\eta + a_3'\zeta \\ y &= b_1'\xi + b_2'\eta + b_3'\zeta \\ z &= c_1'\xi + c_2'\eta + c_3'\zeta \end{aligned}\right.$$

a determinante non nullo

$$D = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

E le ξ, η, ζ si esprimeranno in funzione delle XYZ con formule, pure a determinante non nullo, del tipo

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= a_1''X + b_1''Y + c_1''Z \\ \eta &= a_2''X + b_2''Y + c_2''Z \\ \zeta &= a_3''X + b_3''Y + c_3''Z. \end{aligned}\right.$$

Le (16), (17) sono *sostituzioni lineari*, e dalla composizione di esse si ottengono le espressioni delle xyz, in funzione delle XYZ, mediante formule del tipo

$$(18)\qquad \begin{cases} x = a_1'''X + a_2'''Y + a_3'''Z \\ y = b_1'''X + b_2'''Y + b_3'''Z \\ z = c_1'''X + c_2'''Y + c_3'''Z \end{cases}$$

nelle quali formule, come è noto (n.° 162), *i coefficienti si formano con la stessa legge con cui si forma il prodotto dei determinanti, e più precisamente moltiplicando ordinatamente e successivamente le tre orizzontali della prima sostituzione per le tre verticali della seconda.*

Infine, per passare da un sistema cartesiano qualunque $O(xyz)$ ad un altro, pure qualunque, $O'(XXZ)$ (con origine in generale non coincidente con la primitiva), si hanno formule generali di trasformazione del tipo lineare,

$$(19)\qquad \begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + b_1 \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + b_2 \\ z = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + b_3 \end{cases}$$

a determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

182. Distanza di due punti. Dati due punti $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$ mediante le loro coordinate ortogonali, per trovare la distanza $\overline{P_1P_2}$ supponiamo trasportata, con una traslazione di assi, la origine O' nel punto P_1; il punto P_2 avrà, nel nuovo sistema, coordinate $X_2Y_2Z_2$ espresse dalle formule

$$\begin{cases} X_2 = x_2 - x_1 \\ Y_2 = y_2 - y_1 \\ Z_2 = z_2 - z_1 . \end{cases}$$

Ma nel nuovo sistema, la distanza di P_2 dalla origine, cioè da P_1 è espressa dalla formula

$$(\overline{O'P_2})^2 = (\overline{P_1P_2})^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2.$$

Si avrà dunque:

$$\overline{P_1P_2} = \pm \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$$

cioè

(20) $$\overline{P_1P_2} = \pm \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Quanto al segno, ricordiamo quanto si è detto al n.° 166:

Il segno di $\overline{P_1P_2}$ *concorda con quello della differenza* $z_2 - z_1$ *e, se questa differenza è nulla, con quello della differenza* $y_2 - y_1$*: finalmente, se è ad un tempo* $z_2 - z_1 = 0$, $y_2 - y_1 = 0$, *il segno di* $\overline{P_1P_2}$ *concorda con quello di* $x_2 - x_1$.

183. Equazione della Sfera. Se nella equazione (20) consideriamo come fissa la distanza $|\overline{P_1P_2}| = r$ e variabili le coordinate del punto $P_2(x_2y_2z_2)$: intendendo queste come coordinate di un punto generico dello spazio, la relazione

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

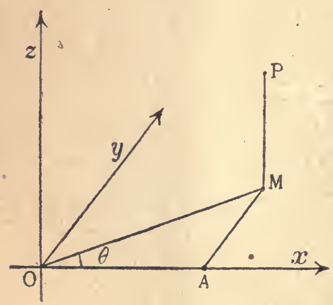
o l'altra equivalente

(21) $$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

esprime la condizione perchè il punto $P(xyz)$ abbia distanza r da un punto fisso $P_1(x_1y_1z_1)$, cioè perchè il punto P sia sulla sfera di raggio r e col centro in P.

La formula (21) è dunque *la equazione della sfera che ha il centro nel punto* $P_1(x_1y_1z_1)$ *ed il cui raggio è* r.

184. Coordinate cilindriche. La posizione di un punto P dello spazio, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale, viene determinata con la costruzione della spezzata $OAMP$. Ora la posizione del punto $M(xy)$ sul piano xy, oltre che dalle sue coordinate cartesiane del piano x, y, può essere fissata mediante le sue coordinate polari ρ, θ, riferite ad un sistema, avente l'origine O come polo ed il semiasse positivo Ox come asse polare.



Ad ogni punto P, si fa allora corrispondere la terna ρ, θ, z, formata dai valori ρ, θ che determinano la sua proiezione $M(\rho\theta)$ sul piano xy, e dal valore z della sua terza coordinata cartesiana.

E ad ogni terna ρ, θ, z corrisponde un punto $P(\rho, \theta, z)$ dello spazio ed uno solo.

Questo sistema di coordinate, spesso usato, specialmente in meccanica, si dice sistema di **coordinate cilindriche**: perchè i punti per i quali ρ è costante si trovano sul cilindro di rotazione che ha per asse z e per raggio di base ρ.

I punti pei quali θ è costante sono sul semipiano del fascio che ha per asse Oz, corrispondente alla anomalia θ (essendo il semipiano Oxz situato dalla parte delle x positive quello di anomalia nulla).

Infine i punti per i quali è z costante appartengono ad un piano parallelo al piano xy.

Ogni punto P viene dunque considerato come intersezione di una terna di superfici nel sistema triplo ortogonale costituito:

1° Dai cilindri di rotazione intorno all'asse Oz_1.

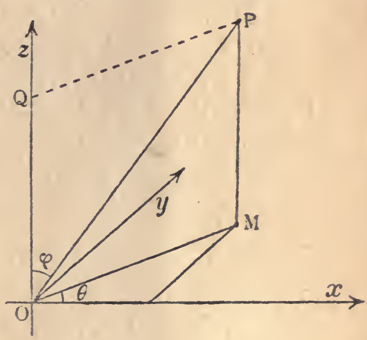
2° Dai semipiani del fascio che ha per asse Oz.

3° Dai piani normali all'asse Oz.

Le formule di trasformazione delle coordinate cilindriche nelle corrispondenti coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z. \end{cases}$$

186. Coordinate polari dello spazio. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ed il corrispondente sistema di coordinate cilindriche.



Per fissare la posizione di un punto P dello spazio, dopo aver determinata la sua proiezione $M(\rho\vartheta)$ sul piano xy, mediante le coordinate polari del piano ρ, θ, possiamo considerare il punto P come appartenente al semipiano OzM, che ha per anomalia θ, e, per fissare la posizione di P su questo semipiano, giovarci di un sistema di coordinate polari con polo nell'origine O, e con asse polare Oz.

Indicando con φ l'angolo $\widehat{zOP}$, che si dovrà far variare da 0 a π, con r il valore assoluto della distanza $\overline{OP}$, si ha

$$\begin{cases} \rho = |\overline{OM}| = |\overline{OP}| \operatorname{sen} \varphi = r \operatorname{sen} \varphi \\ z = \overline{OQ} = r \cos \varphi \\ x = \rho \cos \theta = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi . \end{cases}$$

Ad ogni punto P corrisponde una terna di valori r, θ, φ; ed ogni terna di tali valori determina un punto.

Questo modo di determinazione dei punti dello spazio costituisce il ***sistema di coordinate polari dello spazio***, che viene anche detto ***delle coordinate sferiche*** o delle ***coordinate geografiche.***

L'angolo θ infatti corrisponde alla *longitudine* del punto P, l'angolo φ alla *colatitudine* sulla sfera che ha per centro la origine e raggio r.

I punti per i quali r è costante sono quelli che hanno distanza $\pm r$ dalla origine, cioè sono sopra una sfera di raggio r col centro nella origine.

I punti per i quali θ è costante sono sul semipiano del fascio con asse Oz che ha per anomalia θ.

I punti per i quali φ è costante sono sopra una superficie conica che ha per asse Oz, ed è generata dalla rotazione di una semiretta uscente da O, la quale formi con Oz angolo costante ed uguale a φ.

Il sistema triplo ortogonale di superfici coordinate è dunque formato:

1° Da sfere di centro O.

2° Da superfici coniche di rotazione con asse Oz.

3° Da semipiani del fascio con asse Oz.

Le formule di trasformazione delle coordinate sferiche nelle corrispondenti cartesiane ortogonali sono:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi . \end{cases}$$

Per avere corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio e le terne r, φ, θ, bisogna far variare r nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv +\infty$ θ nell'intervallo $0 \vdash 2\pi$, φ nell'intervallo $0 \vdash \pi$.

§ V. Equazione del piano.

187. Dato un piano, comunque disposto rispetto agli assi coordinati, consideriamo la normale n condotta ad esso per la origine, e sia N il piede di essa sul piano.

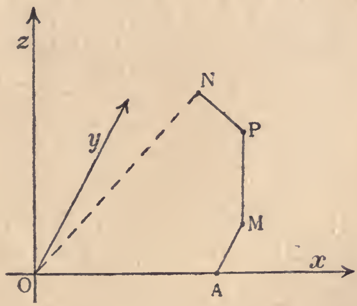
Indichiamo con

$$\alpha = \widehat{xn}, \quad \beta = \widehat{yn}, \quad \gamma = \widehat{zn}$$

gli angoli della normale al piano con gli assi coordinati, e con

$$\delta = \overline{ON}$$

la distanza (in valore e segno) dalla origine del piano.



Considerando un punto generico $P(xyz)$ del piano e la solita spezzata $OAMP$ che serve a determinarne le coordinate, proiettiamo questa spezzata su la normale ON e ne verrà la relazione

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \delta \tag{23}$$

la quale vale per tutti i punti del piano la cui normale n forma con gli assi angoli α, β, γ, e dal quale la origine ha distanza $ON = \delta$, e solo per i punti di questo piano.

La relazione (23), nella quale xyz si considerino come quantità variabili, è dunque *la equazione del piano.* Questa equazione nella forma da noi trovata vien detta **forma normale** *della equazione del piano.*

Osservazione. *In una equazione di forma normale il coefficiente della z è sempre positivo o nullo.*

Ed infatti i coefficienti $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$, sono i coseni direttori della normale n, dunque (n.° 169) il primo di essi che non è nullo, è positivo.

Se il coefficiente della z è nullo, cioè se $\cos\gamma = 0$, la normale n condotta per O al piano risulta ortogonale all'asse z, cioè appartiene al piano xy, ed è perciò perpendicolare anche alla intersezione del piano dato col piano xy.

La equazione del piano assume allora la forma

$$x \cos\alpha + y \cos\beta = \delta$$

od anche

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = \delta$$

e considerata come equazione nelle sole x, y, è la equazione normale (n.° 137) della retta intersezione del piano dato col piano xy.

Finalmente, *se sono zero ad un tempo $\cos\gamma$, e $\cos\beta$*, la normale *n al piano coincide con l'asse x*, ed è $\cos\alpha = 1$, cioè *il coefficiente di x risulta positivo.*

188. L'equazione del piano.

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \delta$$

da noi trovata è di primo grado nello coordinate x, y, z; dimostreremo, reciprocamente che *ogni equazione di primo grado*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{24}$$

nelle coordinate x, y, z, rappresenta un piano.

Scriviamo infatti la (24) nella forma

$$Ax + By + Cz = -D:$$

poichè i coefficienti A, B, C non possono essere tutti contemporaneamente nulli, dividendo per $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ scriveremo

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y +$$
$$+ \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Quanto al segno da attribuire a questo radicale, esso sarà concorde col segno di C, e qualora C sia zero, sarà concorde col segno di B; infine se fosse $C=0$, $B=0$ il segno del radicale si assumerebbe concorde con quello di A.

Con questa avvertenza avremo soddisfatto le condizioni enunciate al n.° 169, e potremo porre

$$(25)\quad \cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \delta=\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ed avremo l'equazione

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\delta$$

equivalente alla proposta.

Ma questa rappresenta un piano la cui normale ha per coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e che dalla origine ha distanza δ: potremo dunque concludere:

La *equazione lineare*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

rappresenta un piano la cui normale ha per coseni direttori

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

e che ha dalla origine distanza

$$\delta=\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

il segno del radicale essendo concorde con quello dei tre numeri C, B, A, che per primo non è nullo.

Il numero $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, così determinato, si dice **fattore di normalizzazione** della equazione $Ax+By+Cz+D=0$.

Osservazione. — La distanza δ dalla origine, del piano $Ax+By+Cz+D=0$ ha segno concorde col quoziente $\dfrac{-D}{C}$.

189. Posizione del piano rispetto agli assi.

1° *Se è nullo il termine costante* D *è anche* $\delta = 0$ *ed il piano passa per l'origine.* E se il piano passa per l'origine, nella sua equazione è nullo il termine costante.

2° Se è nullo uno dei coefficienti delle variabili, per es. se è $C = 0$, la normale n risulta ortogonale all'asse z, ed il piano è parallelo a quest'asse; dunque concluderemo: *se nella equazione del piano* $Ax + By + Cz + D = 0$ *è nullo il coefficiente di una delle variabili, il piano è parallelo all'asse coordinato corrispondente.*

3° *Se sono nulli ad un tempo due dei coefficienti delle variabili, il piano*, dovendo essere contemporaneamente parallelo ai due assi coordinati che corrispondono a tali variabili, *dovrà essere parallelo al piano di quei due assi.*

Per es. l'equazione $Ax + D = 0$ rappresenta un piano parallelo al piano yz.

190. Forma segmentaria della equazione del piano.

Data l'equazione di un piano, sotto la forma generale

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

si vuol determinare il segmento $p = \overline{OP}$ che esso stacca sull'asse x a partire dalla origine.

Perciò si consideri che i punti che appartengono all'asse delle x hanno le coordinate y, z nulle; e perciò le coordinate del punto P devono soddisfare ad un tempo le condizioni $y = 0$, $z = 0$ e la equazione del piano $Ax + By + Cz + D = 0$.

Fatto sistema di queste tre equazioni risulta

$$Ax + D = 0$$

la quale equazione ha una radice che indicheremo con:

$$p = -\frac{D}{A}.$$

Questo appunto è *il segmento cercato, che il piano stacca su l'asse delle* x.

Tale segmento diventa infinito per $A = 0$, cioè per piani paralleli all'asse x.

Similmente si ritrova che *il piano* $Ax + By + Cz + D = 0$

stacca su l'asse delle y un segmento $\overline{OB} = q$, *dato da*

$$q = -\frac{D}{B}$$

e sull'asse delle z un segmento $\overline{OC} = r$

$$r = -\frac{D}{C}.$$

Ciò posto, sia dato il piano

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Supponendo i coefficienti tutti diversi dallo zero, potremo scrivere

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$$

od anche

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1,$$

infine avremo l'equazione del piano sotto la forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \tag{26}$$

la quale è detta **forma segmentaria** *della equazione del piano, perchè i numeri* p, q, r *sono in grandezza e segno, le misure dei segmenti che il piano stacca sugli assi a partire dalla origine.*

191. Parallelismo di due piani. Due piani

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sono paralleli quando sono rispettivamente eguali i coseni direttori delle loro normali, cioè quando si ha:

$$\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$
$$\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$
$$\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

infine, quando

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Condizione di parallelismo ***fra due piani è dunque che nelle loro equazioni i coefficienti delle variabili sieno direttamente proporzionali.***

Questa condizione può ancora rappresentarsi scrivendo che ***debbono essere nulli i determinanti di secondo ordine***

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=0$$

della matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

OSSERVAZIONE. Se tutti i determinanti di secondo ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{vmatrix}$$

formata coi coefficienti e coi termini noti delle equazioni di due piani fossero nulli, tali equazioni non sarebbero distinte, ed i due piani sarebbero coicidenti.

192. PIANO PER UN DATO PUNTO. Indichiamo con $P_1(x_1y_1z_1)$ il punto dato. L'equazione generica

$$Ax+By+Cz+D=0$$

deve essere soddisfatta dalle coordinate di P_1 cioè deve aversi la identità

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

e per sottrazione,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{27}$$

Tale è dunque la forma che deve assumere la equazione di qualsiasi piano per P_1. Reciprocamente: questa equazione, qualunque siano i numeri posti al luogo di A, B, C, rappresenta sempre piani passanti per P_1; infatti essa è soddisfatta identicamente per $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$.

L'equazione (27) contiene tre coefficienti A, B, C, che possiamo considerare come parametri variabili (parametri essenziali sono soltanto due, cioè i rapporti di due di tali quantità alla terza), ed in tale senso potremo dire che *la equazione*

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

rappresenta la **stella di piani con centro nel punto** $P_1(x_1y_1z_1)$.

Piano per un dato punto, parallelo ad un piano dato. Sia $P_1(x_1y_1z_1)$ il punto dato, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ il piano dato.

Poichè il piano cercato deve passare per P_1, la sua equazione avrà la forma

$$(27)\qquad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0.$$

La condizione di parallelismo col piano dato si traduce nelle relazioni

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}.$$

Indicando con k un coefficiente di proporzionalità, potremo scrivere:

$$A=A_1k,\quad B=B_1k,\quad C=C_1k$$

e, sostituendo nella (27)

$$k\{A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)\}=0.$$

Infine avremo l'equazione del piano cercato sotto la forma

$$(28)\qquad A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0.$$

193. Angolo di due piani. Dati due piani

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

le normali n_1, n_2 avranno per coseni direttori

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \quad \cos\beta_2 = \frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$
$$\cos\gamma_2 = \frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

L'angolo dei due piani è l'angolo $\widehat{n_1 n_2}$ delle loro normali, ma si ha (n.° 172)

$$\cos\widehat{n_1 n_2} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$
$$\operatorname{sen}^2\widehat{n_1 n_2} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}^2.$$

dunque, per l'angolo dei due piani, si hanno le formule

$$(29)\quad \begin{cases} \cos\widehat{n_1 n_2} = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \\[2ex] \operatorname{sen}^2\widehat{n_1 n_2} = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2}{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}. \end{cases}$$

Il *segno* da assumere nelle prime formule sarà determinato a norma di quanto si è detto al n.° 188.

Dalla prima di queste due formule in particolare si ricava che: **La condizione di ortogonalità** *di due piani*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

è data dalla relazione

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

194. Distanza di un punto da un piano. Sia

$$Ax+By+Cz+D=0$$

il piano dato. Poichè sappiamo che la distanza dalla origine di questo piano è data da $\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\delta$, se si vuole la distanza di un punto $P_1(x_1y_1z_1)$ da quel medesimo piano, basterà, con una traslazione di assi, portare la origine delle coordinate nel punto $P_1(x_1y_1z_1)$.

Le coordinate XYZ nel nel nuovo sistema saranno legate alle antiche dalle note relazioni

$$x=X+x_1,\quad y=Y+y_1,\quad z=Z+z_1,$$

l'equazione del piano dato assumerà la forma

$$AX+BY+CZ+Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

e la distanza dalla origine delle nuove ordinate (cioè di P_1) *di tale piano, sarà in valore e segno, data da*

$$\overline{P_1N}=\frac{-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{30}$$

il segno del radicale essendo uguale a quello del coefficiente C nella equazione del piano, se $C=0$, a quello di B, infine se $C=0$, $B=0$, a quello di A. Si ha dunque la **regola pratica:**

Per avere la distanza di un punto $P_1(x_1y_1z_1)$ da un piano

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

basta sostituire nel primo membro della equazione del piano alle coordinate correnti quelle del punto dato; cambiare il segno al numero che ne risulta e moltiplicare questo pel fattore di normalizzazione della equazione del piano $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

195. Condizione perchè quattro punti siano in uno stesso piano. Sieno $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$, $P_3(x_3y_3z_3)$, $P_4(x_4y_4z_4)$ i punti dati. Vogliamo vedere se è possibile determinare quattro numeri A, B, C, D, tali che il piano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

appartenga a tutti e quattro i punti dati.

Le incognite del nostro quesito sono ora le quantità A, B, C, D, e le relazioni cui queste debbono soddisfare sono:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0. \end{cases}$$

Si hanno dunque quattro equazioni lineari ed omogenee nelle quattro incognite A, B, C, D: la condizione di possibilità di un tale sistema è l'annullarsi del determinante dei coefficienti

$$(31) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tale è dunque *la condizione perchè i quattro punti dati siano complanari.*

Se consideriamo tre di quei punti P_1, P_2, P_3 come fissi, ed il quarto come un punto generico dello spazio, $P(xyz)$, la formula trovata esprime la condizione perchè un punto generico $P(xyz)$ appartenga al piano di tre punti dati $P_1P_2P_3$ ossia è la **equazione del piano per tre punti dati** $P_1P_2P_3$.

Scriveremo dunque tale equazione sotto la forma

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I coefficienti A, B, C, D, in questa equazione hanno la forma

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Cioè *i coefficienti delle variabili x, y, z nella equazione del piano pei tre punti $P_1P_2P_3$ sono, in valore e segno, eguali rispettivamente al doppio dell'area delle proiezioni del triangolo $P_1P_2P_3$ sui tre piani coordinati $x=0$, $y=0$, $z=0$.*

Inoltre si può osservare che *la distanza δ dalla origine del piano $P_1P_2P_3$ ha segno concorde con quello del quoziente:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

196. Osservazione. *Se i tre punti $P_1P_2P_3$ sono allineati, la matrice*

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ha caratteristica minore di tre, e la equazione (32) *è identicamente soddisfatta da ogni terna xyz.*

Infatti se i tre punti $P_1P_2P_3$ sono allineati, le tre direzioni OP_1, OP_2, OP_3 sono complanari ed è nullo il determinante dei nove coseni, quindi anche il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

in cui gli elementi di ogni linea sono proporzionali agli elementi corrispondenti nel determinante dei nove coseni (171).

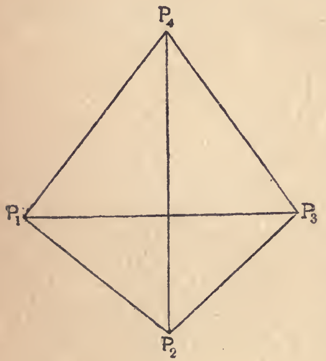
Inoltre nella ipotesi supposta, sono allineate anche le proiezioni di $P_1P_2P_3$ sui tre piani coordinati, perciò sono nulli tutti e tre i determinanti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dunque, infine, tutti i determinanti del terzo ordine della data matrice sono identicamente nulli.

È vera anche la proposizione reciproca, e cioè *se la matrice* (33) *ha caratteristica minore di* 3, *i tre punti* $P_1P_2P_3$ *sono allineati*: ciò risulta dal fatto che, in questa supposizione la equazione (32) è soddisfatta da qualunque terna xyz; cioè che, in quella supposizione, i tre punti $P_1P_2P_3$ ed un quarto punto P, comunque preso nello spazio, sone sempre situati in un medesimo piano.

197. Volume del tetraedro. Qualunque sia la caratteristica della matrice (33) possiamo sempre affermare che l'annullarsi del determinante Δ esprime la condizione perchè i quattro punti $P_1P_2P_3P_4$ sieno in uno stesso piano.



Se quel determinante non è zero, quei quattro punti adunque non saranno complanari, e potranno essere considerati come vertici di un tetraedro.

Dimostreremo che il *determinante D rappresenta il sestuplo del volume di un tale tetraedro preso col segno cambiato.*

198. Per dimostrare questa proposizione occorre premettere alcune considerazioni circa *il segno del volume del tetraedro.*

Sieno $P_1P_2P_3P_4$ i vertici del tetraedro, consideriamo la base $P_1P_2P_3$ ed il vertice opposto P_4.

Un osservatore che *rimanendo nella regione dello spazio dove è* P_4, percorra il contorno $P_1P_2P_3$ nel senso indicato dagli indici, potrà avere l'interno dell'area alla sua sinistra od alla sua destra; nel primo caso il tetraedro si dice *sinistrorso*, nel secondo *destrorso.*

È evidente, per quanto si è detto al n. 164 che il tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ è sinistrorso o destrorso insieme col triedro

$$P_4(P_1P_2P_3)$$

che ha il vertice in P_4.

Converremo di assumere come positivo il volume dei tetraedri sinistrorsi, come negativo il volume dei tetraedri destrorsi.

Il segno del volume dipende dunque dall'ordine in cui si immaginano disposti i suoi vertici.

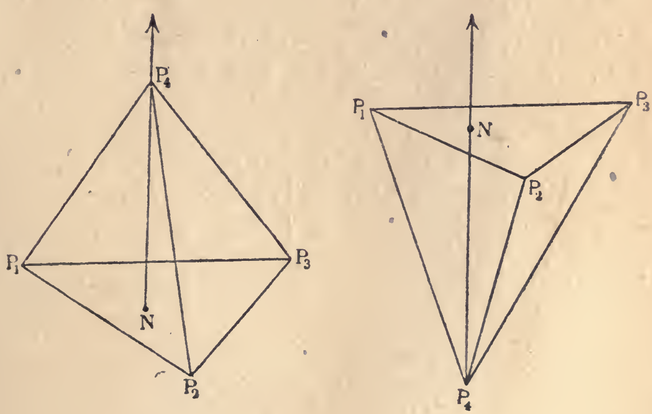
Indicheremo il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ col simbolo $\overline{P_1P_2P_3P_4}$, il quale ci ricorda l'ordine in cui i vertici si suppongono disposti.

Si vede immediatamente che il numero $\overline{P_1P_2P_3P_4}$ non cambia per qualsiasi permutazione di classe pari operata sugli indici degli elementi $P_1P_2P_3P_4$ e cambia segno per una permutazione di classe dispari. Cioè che la espressione $\overline{P_1P_2P_3P_4}$, considerata come funzione degli indici, rimane invariata per le permutazioni del gruppo alternante nei quattro elementi 1, 2, 3, 4.

199. Teorema. *Se dal vertice P_4 del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ si conduce la normale P_4N su la base opposta, il volume del tetraedro è espresso, in valore e segno dalla formula*

$$\overline{P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{3}\,\overline{NP_4}\cdot\overline{P_1P_2P_3}. \tag{34}$$

E difatti, se il punto P_4 si trova nella regione positiva dello spazio, rispetto al piano $P_1P_2P_3$ (n. 167) il numero $\overline{NP_4}$ è positivo, l'orientamento positivo del tetraedro concorda col verso positivo delle rotazioni sul piano $P_1P_2P_3$; quindi i numeri $\overline{P_1P_2P_3P_4}$, $\overline{P_1P_2P_3}$ sono entrambi positivi od entrambi negativi, e la formula (34), vera certamente per i valori assoluti dei due membri, si trova verificata anche pel segno.



Se invece il punto P_4 si trova nella regione negativa, la lunghezza $\overline{NP_4}$ è negativa, mentre poi, a rotazione sinistrorsa $P_1P_2P_3$ corrisponde tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ destrorso, e *reciprocamente.* Dunque i numeri $\overline{P_1P_2P_3}$, $\overline{P_1P_2P_3P_4}$ hanno segni contrari ed anche in questo caso la formula (34) è verificata.

200. Riprendiamo ora il determinante Δ, che, togliendo la prima linea dalle rimanenti, potremo scrivere

$$\Delta = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

ed eseguiamo una trasformazione di assi, portando la nuova origine in P_1 ed il piano OXY sul piano $P_1P_2P_3$, e scegliendo il verso dell'asse Z in modo che il nuovo triedro fondamentale sia concorde col primitivo. Le formule di trasformazione saranno (n. 179)

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1X + a_2Y + a_3Z \\ y = y_1 + b_1X + b_2Y + b_3Z \\ z = z_1 + c_1X + c_2Y + c_3Z \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x - x_1 = a_1X + a_2Y + a_3Z \\ y - y_1 = b_1X + b_2Y + b_3Z \\ z - z_1 = c_1X + c_2Y + c_3Z. \end{cases}$$

Mediante queste formule Δ assume la forma

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_1X_2 + a_2Y_2 + a_3Z_2 & b_1X_2 + b_2Y_2 + b_3Z_2 & c_1X_2 + c_2Y_2 + c_3Z_2 \\ a_1X_3 + a_2Y_3 + a_3Z_3 & b_1X_3 + b_2Y_3 + b_3Z_3 & c_1X_3 + c_2Y_3 + c_3Z_3 \\ a_1X_4 + a_2Y_4 + a_3Z_4 & b_1X_4 + b_2Y_4 + b_3Z_4 & c_1X_4 + c_2Y_4 + c_3Z_4 \end{vmatrix}$$

cioè

$$\Delta = -\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ma è noto (n. 176) che

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Dunque rimane

$$\Delta = -\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix}$$

Poichè i punti P_2, P_3 sono sul piano XY, è $Z_2 = Z_3 = 0$, perciò

$$\Delta = -\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & 0 \\ X_3 & Y_3 & 0 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = -Z_4 \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Z_3 \end{vmatrix} = -Z_4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ma Z_4 è in valore e segno eguale ad $\overline{NP_4}$, ed è sempre

$$2\overline{P_1P_2P_3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

dunque infine (form. (34)),

$$-\Delta = 2\overline{NP_4} \cdot \overline{P_1P_2P_3} = 6\overline{P_1P_2P_3P_4}$$

e questa formula dimostra appunto la proposizione enunciata al n.° 197, cioè che

$$\overline{P_1P_2P_3P_4} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

201. Fascio di piani. Consideriamo due piani π_1 π_2 dati mediante le loro equazioni

$$F_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad F_2 = A_2x + B_1y + C_2z + D = 0. \tag{36}$$

Se i due piani sono distinti, la matrice

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix}$$

ha caratteristica 2. Se non sono paralleli, ha caratteristica 2 la matrice

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix};$$

in ogni caso (purchè siano distinti) i piani π_1 π_1 possono essere riguardati come *i* **piani fondamentali di un fascio** (il cui asse sarà proprio od improprio) *e l'equazione di un tale fascio sarà*

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = 0 \tag{37}$$

dove λ e μ sono parametri arbitrari.

Infatti se i due piani non sono paralleli, i valori di xyz che soddisfano contemporaneamente le $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sono coordinate di punti sulla retta intersezione dei piani π_1, π_2. Cotesti valori soddisfano sempre la $\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$; ma questa, per ogni coppia di valori λ, μ è la equazione di un piano, il quale dunque contiene la retta intersezione di $\pi_1\pi_2$, cioè è un piano del fascio considerato.

Reciprocamente: qualunque piano del fascio è rappresentato dalla $\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$, per una scelta opportuna di λ e μ.

Infatti un piano del fascio è determinato quando si assegni un punto $P_1(x_1 y_1 z_1)$ cui esso appartenga.

Fissato un tale punto, dalla relazione

$$\lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D) + \mu(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0$$

si ricava

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}$$

ed è questo il valore che conviene dare al rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, perchè il piano $\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ il quale per ogni valore di $\frac{\lambda}{\mu}$ appartiene sempre al fascio, passi pel punto P_1.

La frazione al secondo membro ha denominatore zero se $P_1(x_1 y_1 z_1)$ è sul piano π_1, ha numeratore zero se P_1 è sul piano π_2, dunque *ai piani fondamentali* $\pi_1\pi_2$ *corrispondono rispettivamente i valori* $\mu = 0$, $\lambda = 0$, ciò che si verifica anche direttamente.

Se poi i piani $\pi_1\pi_2$ sono paralleli, si ha

$$A_1 : B_1 : C_1 :: A_2 : B_2 : C_2 :: \lambda A_1 + \mu A_2 : \lambda B_1 + \mu B_2 : \lambda C_1 + \mu C_2$$

cioè anche il piano $\lambda F_1 + \mu F_2$, per ogni coppia λ, μ è parallelo ad essi, ed appartiene perciò al fascio (con asse improprio) da essi determinato.

202. Possiamo enunciare il risultato ottenuto dicendo che la *condizione necessaria e sufficiente affinchè un piano* π_3 *di equazione* $F_3 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$, *appartenga al fascio determinato da due dati piani* $\pi_1\pi_2$ *è che la* F_3 *si esprima linearmente per mezzo della* F_1F_2. cioè che la matrice

$$(38) \qquad \begin{Vmatrix} A_2 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix}$$

abbia caratteristica 2.

203. PUNTO COMUNE A TRE PIANI. Quando i tre piani $\pi_1\pi_2\pi_3$ non appartengono ad uno stesso fascio, e non coincidono, la matrice scritta ha caratteristica 3. I piani hanno un punto comune ed uno solo e le coordinate di un tale punto si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Si vede da ciò che, se la matrice (38) ha caratteristica 3, se il determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

è diverso dallo zero, i tre piani hanno un punto comune proprio: se è zero, improprio, cioè le loro intersezioni sono parallele.

In quest'ultimo caso esistono valori, non contemporaneamente nulli, di x, y, z, che risolvono le equazioni omogenee

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z = 0. \end{cases}$$

Queste rappresentano tre piani, paralleli ai dati, passanti per l'origine. Poichè c'è un punto comune a questi tre piani, diverso dalla origine, essi saranno dunque tre piani di un fascio, e l'asse di questo fascio è la retta uscente dalla origine, parallela alla direzione comune alle mutue intersezioni dei piani dati, cioè alla direzione del punto improprio comune ad essi.

204. Stella di piani. Dati tre piani $\pi_1\pi_2\pi_3$ mediante le loro equazioni $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, se essi non appartengono ad uno stesso fascio, cioè se la matrice (38) ha caratteristica 3, determinano un punto $P_1(x_1y_2z_1)$ (proprio od improprio) che è la loro comune intersezione. Se scriviamo l'equazione

$$\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F_3 = 0 \tag{39}$$

questa, per ogni terna λ, μ, ν rappresenta un piano passante per P_1, cioè un piano della stella che ha il centro in P_1.

Un piano qualsiasi della stella è determinato dalla condizione di passare per P_1 e per due altri punti P_2, P_3, scelti ad arbitrio, purchè non allineati con P_1. Fissàti questi due punti, le condizioni

$$\begin{cases} \lambda F_1(x_2y_2z_2) + \mu F_2(x_2y_2z_2) + \nu F_3(x_2y_2z_2) = 0 \\ \lambda F_1(x_3y_3z_3) + \mu F_2(x_3y_3z_3) + \nu F_3(x_3y_3z_3) = 0 \end{cases}$$

serviranno a determinare i rapporti di due delle λ, μ, ν alla terza di esse, cioè a calcolare i coefficienti della equazione (39) che rappresenta un tale piano.

La (39) è dunque *la equazione della* **stella di piani** *che ha per piani fondamentali* $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$.

§ VI. Retta nello spazio.

205. Gli elementi che abbiamo fino ad ora considerati nello spazio sono punti e piani. Per determinare analiticamente una retta potremo, giovandoci delle cognizioni fino ad ora acquisite, assegnare due punti di essa e cercare le relazioni che le coordinate di un punto variabile su la retta deve avere coi due dati: oppure potremo considerare la retta come intersezione di due piani, dati mediante le loro equazioni.

Abbiamo perciò due tipi di rappresentazioni analitiche della retta, i quali corrispondono ai due modi di concepire la retta: come *insieme di punti* (sostegno della punteggiata), come *intersezione di piani* (asse del fascio di piani).

206. Equazioni della retta per due punti. Dati due punti $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$, indichiamo con α, β, γ, gli angoli che la retta P_1P_2 formano coi tre assi coordinati.

Proiettando il segmento P_1P_2 sui tre assi, abbiamo

$$\text{(40)}\qquad \begin{cases} x_2 - x_1 = \overline{P_1P_2}\cos\alpha, \\ y_2 - y_1 = \overline{P_1P_2}\cos\beta, \\ z_2 - z_1 = \overline{P_1P_2}\cos\gamma; \end{cases}$$

abbiamo inoltre:

$$\text{(41)}\qquad \overline{P_1P_2} = \pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

dove il segno del radicale deve essere concorde con quello di $z_2 - z_1$ (n.° 166).

Dalle (40), (41) si ricavano le espressioni dei *coseni direttori della retta* P_1P_2:

$$\text{(42)}\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}. \\ \cos\gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \end{cases}$$

Sia $P(xyz)$ un punto qualunque allineato coi punti P_1P_2.

Proiettando il segmento P_1P sopra gli assi coordinati, abbiamo:

$$\text{(43)}\qquad \begin{cases} x - x_1 = \overline{P_1P}\cos\alpha \\ y - y_1 = \overline{P_1P}\cos\beta \\ z - z_1 = \overline{P_1P}\cos\gamma, \end{cases}$$

da cui

$$\text{(44)}\qquad \frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Le coordinate x, y, z di un punto qualunque $P(xyz)$ allineato con P_1P_2, debbono dunque soddisfare alle relazioni (44).

Reciprocamente: *Se un punto P soddisfa tali relazioni, la congiungente P_1P forma con gli assi angoli α, β, γ, eguali a quelli formati dalla retta P_1P_2.* E ciò risulta scrivendo

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{\pm\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}=\overline{P_1P}.$$

Dunque potremo dire che le (44) sono *le equazioni della data retta.* La forma sotto cui le equazioni della retta sono espresse mediante le (44) è detta *forma normale.*

Le equazioni trovate rappresentano ancora la *retta per due punti* $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_0(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, dei quali il secondo appartiene alla sfera unitaria (determinato da tre coseni direttori).

Se poniamo

$$d=\overline{P_1P_2},$$

abbiamo le equazioni della retta sotto la *forma parametrica*,

$$x=x_1+d\cos\alpha,\quad y=y_1+d\cos\beta,\quad z=z_1+d\cos\gamma. \tag{45}$$

Ponendo nelle (44) i valori dati dalle (42), avremo le equazioni della retta per due punti proprii P_1P_2, sotto la forma

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{46}$$

207. Dal confronto delle (40), (43), si ricava:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

E, per una nota proprietà dei rapporti eguali, *dividendo* (secondo la nomenclatura Euclidea), avremo

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}.$$

Indicando con r il rapporto $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, potremo, dalle formule trovate, ricavare *le coordinate del punto $P(xyz)$ che divide il segmento P_1P_2 in un dato rapporto r*, sotto la forma:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1+r}. \tag{47}$$

Il parametro r è la *coordinata baricentrica* dei punti della punteggiata P_1P_2, rispetto ai punti base P_1 e P_2.

Prendendo $h = \frac{1}{r}$, si ha

$$x = \frac{hx_1 + x_2}{1+h}, \quad y = \frac{hy_1 + y_2}{1+h}, \quad z = \frac{hz_1 + z_2}{1+h}, \tag{47'}$$

e, come al n.° 159, si vede che *h è la* **coordinata proiettiva** *dei punti della punteggiata, rispetto ai punti base P_1 e P_2, ed al punto unità, corrispondente al valore $h = 1$.*

208. Dalle equazioni (44) (46), facendo $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, si hanno le *equazioni di una* **retta per la origine** sotto una delle forme:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}, \tag{44'}$$

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2}. \tag{46'}$$

209. Le equazioni di una **retta generica per un punto** *dato* $P_1(x_1y_1z_1)$, sia nella formula (44) che nella (46), hanno la forma

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \tag{48}$$

Dimostreremo che, reciprocamente, *per ogni terna di numeri reali l, m, n, le equazioni* (48) *rappresentano una retta per $P_1(x_1y_1z_1)$ con coseni direttori:*

$$\cos\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \tag{49}$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

(dove il segno del radicale è concorde con quello di n).

Ed infatti potremo scrivere le (48) sotto la forma

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=\frac{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

cioè

$$\frac{x-x_1}{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}=\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\frac{y-y_1}{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}=\frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\frac{z-z_1}{\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}=\frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Ricordando le espressioni dei coseni direttori della retta P_1P, date dalle formole (42), vediamo che per punti $P(xyz)$ le cui coordinate soddisfino le (48), il *segmento* P_1P *forma con gli assi coordinati angoli* α, β, γ, *costanti*, i cui coseni sono appunto quelli espressi dalle formule (49).

In particolare le equazioni

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},$$

rappresentano *una retta per la origine, con coseni direttori dati dalle* (49).

210. Retta determinata dalla intersezione di due piani. Il sistema delle due equazioni di primo grado

$$(50)\qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

determina una retta, come intersezione dei piani rappresentati dalle equazioni

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

ogni qualvolta questi piani siano distinti e non paralleli. Ciò richiede che la matrice

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$$

abbia per caratteristica 2.

In questa supposizione vogliamo *trovare i* coseni direttori *della retta rappresentata dal sistema* (50).

Osserviamo perciò che questi coseni saranno gli stessi che sono pertinenti alla retta, parallela alla data e passante per l'origine, che è intersezione dei piani paralleli ai dati e passanti per l'origine:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0. \end{cases}$$

Questo sistema, poichè la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2, può rappresentarsi sotto la forma equivalente

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}:$$

i coseni direttori della nostra retta saranno dunque (formula 49):

$$(51)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_1 & C_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2}} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2}} \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2}}. \end{cases}$$

Il segno del radicale deve essere concorde con quello del determinante $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ e, ove questo sia zero, con quello del determinante $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$: infine se entrambi tali determinanti fossero uguali allo zero, il segno del radicale dovrebbe essere uguale a quello del determinante $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

I coseni direttori della retta intersezione di due piani, sono proporzionali ai minori della matrice dei coefficienti delle variabili, nelle equazioni dei piani medcsimi.

211. Forma ridotta delle equazioni della retta. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

rispetto alle x, y si ottiene un sistema equivalente, della forma

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases} \tag{52}$$

con

$$m = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad n = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

La prima delle equazioni (52) rappresenta il piano passante per la retta data e parallelo all'asse $0y$ (N. 178) cioè perpendicolare al piano xz: o, in altri termini, il piano proiettante la retta data sul piano xz. Se si considera la medesima equazione

$$x = mz + a$$

come una relazione fra le coordinate x, z di punti appartenenti al piano $y = 0$, essa rappresenta *la equazione della proiezione della retta data sul piano* xz.

Similmente si vede che la *equazione*

$$y = nz + b$$

nello spazio rappresenta il piano proiettante la retta data sul piano yz, *e su questo essa rappresenta la proiezione della retta data.*

I coefficienti m, n che compariscono nelle equazioni ridotte, sono dunque i coefficienti angolari delle proiezioni della retta data sui piani xz, yz, rispettivamente, e perciò si dicono *coefficienti angolari della retta data.*

I numeri a, b sono i valori che assumono le coordinate x, y del punto variabile sulla retta, per $z=0$, cioè pel punto T, dove la retta incontra il piano xy; *essi rappresentano dunque le coordinate della traccia T della retta data sul piano xy.*

212. Per avere i *coseni direttori* di una retta le cui equazioni sono date sotto forma ridotta, gioveranno le formule generali date al N. 210; e si potrà anche direttamente farne il calcolo scrivendo tali equazioni sotto la forma:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{1},$$

da cui

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}. \tag{53}$$

213. La condizione di parallelismo di due rette, date mediante le equazioni loro in forma ridotta, è *la eguaglianza dei coefficienti angolari.* Se le equazioni delle rette sono date invece sotto la forma generale

$$\begin{cases} A_{11}x+B_{11}y+C_{11}z+D_{11}=0 \\ A_{21}x+B_{21}y+C_{21}z+D_{21}=0\end{cases},\qquad \begin{cases} A_{12}x+B_{12}y+C_{12}z+D_{12}=0 \\ A_{22}x+B_{22}y+C_{22}z+D_{22}=0\end{cases}$$

la condizione di parallelismo risiede nella proporzionalità dei minori della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & C_{11} \\ B_{21} & C_{21}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_{12} & C_{12} \\ B_{22} & C_{22}\end{vmatrix} :: \begin{vmatrix} C_{11} & A_{11} \\ C_{21} & A_{21}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_{12} & A_{12} \\ C_{22} & A_{22}\end{vmatrix} :: \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} \\ A_{21} & B_{21}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22}\end{vmatrix}.$$

314. Angolo di due rette. Se le equazioni delle due rette r_1, r_2, sono date sotto la forma normale

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},\quad \frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2},$$

si ha immediatamente

$$\begin{cases} \cos \widehat{r_1 r_2} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \\ \operatorname{sen}^2 \widehat{r_1 r_2} = \begin{Vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \end{Vmatrix}^2 . \end{cases}$$

Se invece le rette sono date come intersezioni di due piani, basterà calcolare prima i loro coseni direttori con le formule (51) (53), poi applicare le formule or ora scritte.

In particolare, per rette $r_1 r_2$ date mediante le equazioni in forma ridotta, avremo:

$$(54) \qquad \cos \widehat{r_1 r_2} = \frac{1 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{1 + m_2^2 + n_2^2}},$$

$$(55) \qquad \operatorname{sen}^2 \widehat{r_1 r_2} = \frac{(m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 + (m_1 n_2 - n_1 m_2)^2}{(1 + m_1^2 + n_1^2)\ (1 + m_2^2 + n_2^2)} .$$

Da queste formule, in particolare, si deduce che *la condizione di ortogonalità di due rette date mediante le loro equazioni in forma ridotta*, è:

$$1 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

215. Angolo di una retta con un piano. Dato il piano π

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

e la retta r, mediante le sue equazioni normali

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma},$$

considerando che *l'angolo λ di inclinazione della retta col piano* è uguale al complemento dell'angolo che la retta forma con la normale al piano, indicando questa normale con n ed i suoi coseni direttori con $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, avremo

$$\operatorname{sen} \lambda = \cos \widehat{rn} = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 ,$$

cioè

$$(56) \qquad \operatorname{sen} \lambda = \frac{A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^3}};$$

il segno del radicale essendo concorde con quello di C.

Dalla formula trovata si deduce che: **la condizione di parallelismo** *della retta r al piano* π è data da

(57) $$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

e quella di **perpendicolarità** da

(58) $$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{array}\right.$$

Se la retta data passa per l'origine e quindi ha le equazioni

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

la condizione di parallelismo è $Al + Bm + Cn = 0$, e quella di perpendicolarità è $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

Se le equazioni della retta sono date sotto forma ridotta, l'angolo λ di inclinazione col piano è dato da

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{Am + Bn + C}{\pm\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

216. Punto di incontro di una retta con un piano. Dato il piano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

assumiamo le equazioni della retta sotto la *forma parametrica* (n.° 206)

(45) $$x = x_1 + d\cos\alpha, \quad y = y_1 + d\cos\beta, \quad z = z_1 + d\cos\gamma$$

e proponiamoci di determinare il parametro d (distanza $\overline{P_1P}$) in modo che il punto $P(xyz)$ sia sul piano dato.

Sostituendo le (45) nella equazione del piano, dovremo avere

$$A(x_1 + d\cos\alpha) + B(y_1 + d\cos\beta) + C(z_1 + d\cos\gamma) + D = 0,$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + d(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) = 0,$$

da cui

$$d = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma} \tag{59}$$

Questa formula ci dà un valore unico e determinato per la distanza $d = \overline{P_1P}$ del punto P_1 dal punto P dove la retta incontra il piano: mettendo il valore trovato nelle formule (45), si ritrovano le coordinate del punto cercato, traccia della retta sul piano dato.

Un caso di eccezione si presenta quando il denominatore del secondo membro è zero. In tale caso l'eguaglianza

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

ci dice (form. (57)) *che la retta è parallela al piano.*

Se, in tale ipotesi, si ammette inoltre che sia zero anche il numeratore,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

ciò significa che il punto $P_1(x_1y_1z_1)$ appartiene al piano. La retta data, parallela al piano per un punto P_1 del piano stesso, è in tal caso contenuta nel piano.

Se la retta è data come intersezione di due piani

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

il problema proposto è quello di *cercare il punto comune a tre piani dati,* e si risolve (come si è visto al n.° 203) facendo sistema delle tre equazioni

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

217. Condizione di complanarità di due rette. Per verificare se due rette sono complanari, basta scegliere, ad arbitrio, due punti P_1P_2 su di una retta, altri due punti $P_1'P_2'$ su la seconda, e, con l'applicazione della regola data al n.° 195, verificare se questi quattro punti appartengono ad uno stesso piano.

Supposto che le equazioni delle rette abbiano la forma parametrica

$$x = x_1 + d\cos\alpha,\quad y = y_1 + d\cos\beta,\quad z = z_1 + d\cos\gamma$$
$$x = x_1' + d'\cos\alpha',\quad y = y_1' + d'\cos\beta',\quad z = z_1' + d'\cos\gamma'$$

prenderemo i punti corrispondenti ai valori 0, 1, del parametro:

$$P_1(x_1 y_1 z_1)\quad P_2(x_1 + \cos\alpha,\ y_1 + \cos\beta,\ z_1 + \cos\gamma)$$
$$P_1'(x_1' y_1' z_1')\quad P_2'(x_1' + \cos\alpha',\ y_1' + \cos\beta',\ z_1' + \cos\gamma')$$

e la condizione richiesta sarà espressa dalla formula

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_1 + \cos\alpha & y_1 + \cos\beta & z_1 + \cos\gamma & 1 \\ x_1' + \cos\alpha' & y_1' + \cos\beta' & z_1' + \cos\gamma' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o, sottraendo la prima linea dalla seconda e dalla terza, e la seconda dalla quarta:

$$(60)\qquad D = \begin{vmatrix} x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & z_1' - z_1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Questa è appunto la condizione di complanarità delle due date rette.

Se le equazioni delle rette hanno la forma ridotta

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}\qquad \begin{cases} x = m'z + a' \\ y = n'z + b' \end{cases}$$

scriveremo la condizione trovata sotto la forma

$$(61)\qquad \begin{vmatrix} a - a' & b - b' & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a' & b - b' \\ m - m' & n - n' \end{vmatrix} = 0.$$

§ VII. Momento di due rette.

218. Minima distanza di due rette sghembe. Se le due rette date r, r' non sono complanari, il determinante (60) non si annulla.

Dimostreremo che *il valore di questo determinante è eguale al prodotto della minima distanza* $\overline{P_1P_1'} = \delta_{rr'}$ *della retta* r *dalla* r' *per il seno dell'angolo* $\widehat{rr'}$, *delle due rette medesime, nell'ordine in cui le due rette sono enunciate.*

A tale scopo osserveremo anzitutto che D *rimane invariato comunque si spostino, lungo le rette* r, r', *i punti* $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_1'(x_1'y_1'z_1')$, *le cui coordinate figurano nella prima linea.*

Ciò si verifica immediatamente osservando che le coordinate di due punti qualunque $P(xyz)$, $P'(x'y'z')$ delle due rette sono date da

$$\begin{aligned} x &= x_1 + d\cos\alpha \qquad & x' &= x_1' + d'\cos\alpha' \\ y &= y_1 + d\cos\beta \qquad & y' &= y_1' + d'\cos\beta' \\ z &= z_1 + d\cos\gamma \qquad & z' &= z_1' + d'\cos\gamma' \end{aligned}$$

e sostituendo questi valori alle coordinate $x_1y_1z_1$, $x_1'y_1'z_1'$ nella prima linea del determinante medesimo.

Possiamo dunque supporre che i punti P, P', siano quelli dove la perpendicolare comune incontra le rette r, r'; ed allora, indicando con λ, μ, ν i coseni direttori di questa perpendicolare comune, e posto $\delta_{rr'} = \overline{P_1P_1'}$, avremo: (form. (40))

$$x_1' - x_1 = \delta_{rr'}\lambda, \quad y_1' - y_1 = \delta_{rr'}\mu, \quad z_1' - z_1 = \delta_{rr'}\nu.$$

Ma sappiamo (n.° 173, pag. 148) che

$$\lambda = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{rr'}}\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{rr'}}\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix},$$

$$\nu = \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{rr'}}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix},$$

dunque, sostituendo,

$$D = \frac{\delta_{rr'}}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\delta_{rr'}}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} \left\{ \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}^2 \right\}$$

e, ricordando la formula che dà $\operatorname{sen} \widehat{rr'}$,

$$D = \delta_{rr'} \operatorname{sen} \widehat{rr'}.$$

219. Dalla formula trovata si trova per la **minima distanza** *delle rette* r, r' la espressione

$$(62) \qquad \delta_{rr'} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} \begin{vmatrix} x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & z_1' - z_1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}$$

ove $P(x_1 y_1 z_1)$, $P'(x_1' y_1' z_1')$ sono due punti qualunque appartenenti, rispettivamente, alle rette r, r', e $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ sono i coseni direttori di tali rette.

220. Momento di due rette r, r'.

Indicando con ε *un fattore che ha il valore assoluto* 1 *ed il cui segno concorda con quello di* $\cos rr'$, la espressione

$$(63) \qquad \left\{ \begin{aligned} M = \varepsilon D = \varepsilon & \begin{vmatrix} x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & z_1' - z_1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} \\ = \varepsilon \delta_{rr'} & \operatorname{sen} \widehat{rr'}, \end{aligned} \right.$$

si chiama **momento** *delle due rette* r, r'.

Si vede subito che *il momento di due rette rimane numericamente invariato per qualunque trasformazione degli assi di riferimento.*

Ed infatti cambiando gli assi non muta nè il valore assoluto della distanza $\delta_{rr'}$ nè quello dell'angolo $\widehat{rr'}$.

Si può inoltre verificare che *cambiando il sistema degli assi di riferimento rimane invariato anche il segno di* M.

Ed infatti il segno di M concorda con quello di $\delta_{rr'} \operatorname{tg} \widehat{rr'}$, e quindi non muta, nè per le trasformazioni di assi che mutano il verso di una o di entrambe le rette r, r', nè per quelle che fanno cambiare il segno di $\delta_{rr'}$. Poichè cambiando il verso di una delle rette r, r', l'angolo $\widehat{rr'}$ aumenta o diminuisce di π, e ciò non influisce sul valore di $\operatorname{tg} \widehat{rr'}$, ed, in secondo luogo, cambiando il verso positivo della perpendicolare comune alle r, r', cambia anche il verso positivo delle rotazioni nel piano delle parallele alle r, r' per l'origine, e perciò il segno dell'angolo $\widehat{rr'}$ (n.° 168, pp. 142, 143).

Infine il momento M *non muta scambiando fra loro le rette* r, r'; poichè con ciò muta ad un tempo il segno di $\delta_{rr'}$ e quello di $\widehat{rr'}$.

Il momento di due rette rappresenta dunque una **proprietà intrinseca** (*indipendente dagli assi di riferimento*) **della coppia delle rette** *medesime.*

221. Coppie di rette destrorse e sinistrorse. È facile vedere a quale particolarità geometrica inerente ad una data coppia di rette corrisponda il segno (positivo o negativo) del momento. E precisamente si trova che un osservatore disposto lungo una delle due rette (che si suppone non siano nè parallele nè ortogonali fra loro), in un verso di essa scelto a piacere, coi piedi nel punto ove questa retta è incontrata dalla perpendicolare comune e rivolto verso la seconda retta, vede un punto che muovendosi su questa seconda retta si innalzi rispetto all'osservatore stesso, dirigersi da sinistra verso a destra se il momento è positivo, nel senso opposto se è negativo.

Perciò le coppie a momento positivo si dicono **coppie destrorse**, quelle a momento negativo, **coppie sinistrorse**.

222. Se le equazioni delle due rette date non hanno la forma normale, per calcolare il momento basterà mettere nella (63) per $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ i valori dati dalle formule (51).

In particolare per il *caso della forma ridotta* prendendo come punti $P_1 P_1'$ le traccie $P_1(a, b, 0)$, $P_1'(a', b', 0)$ si ha

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{1+m'^2+n'^2}} \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & 0 \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}$$

ossia

(64) $$D = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}\sqrt{1+m'^2+n'^2}} \begin{vmatrix} a'-a & b'-b \\ m-m' & n-n' \end{vmatrix}$$

indi $M = \varepsilon D$: e per la minima distanza,

(65) $$\delta_{rr'} = \frac{D}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} = \frac{\begin{vmatrix} a'-a & b'-b \\ m-m' & n-n' \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{(m-m')^2+(n-n')^2+(mn'-nn')^2}}.$$

223. Nuova formula per il volume del tetraedro. Se consideriamo la retta r come data mediante due dei suoi punti $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$ e la r' mediante $P_1'(x_1'y_1'z_1')$ $P_2'(x_2'y_2'z_2')$ possiamo esprimere i coseni direttori mediante le formule (40) (pag. 177) e troveremo così

$$\delta_{rr'} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} \begin{vmatrix} x_1'-x_1 & y_1'-y_1 & z_1'-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_2'-x_1' & y_2'-y_1' & z_2'-z_1' \end{vmatrix} \frac{1}{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1'P_2'}},$$

ossia

$$\delta_{rr'} = \frac{1}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1'P_2'}}$$

e per la formula (35) trovata al n.° 20 (pag. 173) pel *volume del tetraedro*, avremo:

$$\delta_{rr'} = \frac{-6}{\operatorname{sen} \widehat{rr'}}\cdot\overline{P_1P_1'P_2P_2'}\cdot\frac{1}{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1'P_2'}}.$$

Da cui

(66) $$6\cdot\overline{P_1P_1'P_2P_2'} = -\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1'P_2'}\cdot\delta_{rr'} \operatorname{sen} \widehat{rr'},$$

cioè: *il volume di un tetraedro è in valore assoluto espresso dalla sesta parte del prodotto di due spigoli opposti per il momento delle due rette cui essi appartengono.* Proposizione nota col nome di teorema di Chasles.

La formula (66) dà *in valore e segno* il volume del tetraedro. Il secondo membro di tale formula dovrà dunque essere (n.° 198) positivo o negativo secondo che il tetraedro $P_1P_2P_1'P_2'$ è sinistrorso o destrorso. Si verifica subito che tale espressione conserva anche il segno, qualunque trasformazione si faccia nel sistema degli assi di riferimento. Ed infatti, se per una trasformazione di assi cambia il verso positivo di una delle due rette, p. es. della r, cambiano ad un tempo i segni di $\operatorname{sen}\widehat{rr'}$ e di $\overline{P_1P_2}$; se poi cambia il verso di $\delta_{rr'}$ cambia anche il segno dell'angolo $\widehat{rr'}$, come si è visto al n.° 220.

224. Distanza di un punto $P_2(x_2y_2z_2)$ dalla retta r, *data mediante le sue equazioni parametriche*

$$(43)\qquad x = x_1 + d\cos\alpha,\quad y = y_1 + d\cos\beta,\quad z = z_1 + d\cos\gamma.$$

Condotta la perpendicolare P_2N su r, si tratta di calcolare il numero $\delta = \overline{P_2N}$. Osserviamo perciò che il punto N su la retta r corrisponde ad uno speciale valore, che indicheremo con d_2, del parametro d che figura nelle formule (43).

I coseni direttori di P_2N si potranno perciò rappresentare con:

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha_2 &= \frac{x_1 - x_2 + d_2\cos\alpha}{\pm\sqrt{(x_1-x_2+d_2\cos\alpha)^2+(y_1-y_2+d_2\cos\beta)^2+(z_1-z_2+d_2\cos\gamma)^2}}\\
\cos\beta_2 &= \frac{y_1 - y_2 + d_2\cos\beta}{\pm\sqrt{(x_1-x_2+d_2\cos\alpha)^2+(y_1-y_2+d_2\cos\beta)^2+(z_1-z_2+d_2\cos\gamma)^2}}\\
\cos\gamma_2 &= \frac{z_1 - z_2 + d_2\cos\gamma}{\pm\sqrt{(x_1-x_2+d_2\cos\alpha)^2+(y_1-y_2+d_2\cos\beta)^2+(z_1-z_2+d_2\cos\gamma)^2}}
\end{aligned}\right.$$

e, per la condizione di ortogonalità della P_2N con la r, sarà

$$(x_1 - x_2 + d_2\cos\alpha)\cos\alpha + (y_1 - y_2 + d_2\cos\beta)\cos\beta + (z_1 - z_2 + d_2\cos\gamma)\cos\gamma = 0$$

cioè

$$(x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma + d_2 = 0$$

da cui

$$(44)\qquad d_2 = (x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma.$$

Ma, per la formula che dà la distanza di due punti, si ha

$$\delta^2 = (x_1 - x_2 + d_2 \cos\alpha)^2 + (y_1 - y_2 + d_2 \cos\beta)^2 + (z_1 - z_2 + d_2 \cos\gamma)^2$$

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + d_2^2 +$$
$$+ 2d_2[(x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma]$$

e per la (44)

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d_2^2$$

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 -$$
$$- [(x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma]^2$$

$$(45)\qquad \delta^2 = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}^2;$$

questa formula che potremo scrivere in modo abbreviato

$$(45')\qquad \delta^2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}^2$$

esprime appunto *la distanza del punto $P_2(x_2 y_2 z_2)$ dalla retta $r(x = x_1 + d\cos\alpha,\ y = y_1 + d\cos\beta,\ z = z_1 + d\cos\gamma)$.*

Il segno di δ sarà, al solito, quello della prima delle tre quantità

$$z_1 - z_2 + d_2\cos\gamma, \quad y_1 - y_2 + d_2\cos\beta, \quad x_1 - x_2 + d_2\cos\alpha$$

che non si annulla.

§ VIII. Calcolo di aree piane.

225. Per il calcolo delle aree di figure descritte su piani diversi dai piani coordinati, si potrebbe, con una trasformazione di assi, trasportare il piano della figura data sopra uno dei piani coordinati, per es. sul piano xy; ma gioverà in molti casi la applicazione del teorema seguente: *Il quadrato di un' area piana è uguale alla somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali dell' area sopra i tre piani coordinati.*

Indichiamo infatti, con S l'area data, con n una normale al piano che la contiene; il rettilineo del diedro formato da questo piano col piano yz sarà eguale all'angolo delle due normali, cioè ad $\widehat{nx}$.

Perciò, indicando con S_{yz} la proiezione di S sul piano yz, avremo (vedi n.° 82, pag. 64):

$$S_{yz} = S \cos \widehat{nx}.$$

Similmente

$$S_{zx} = S \cos \widehat{ny}, \quad S_{xy} = \cos \widehat{nz}.$$

Quadrando e sommando si ha la relazione richiesta

$$S^2 = S_{yz}^2 + S_{zx}^2 + S_{xy}^2.$$

In particolare, dato il triangolo che ha per vertici i tre punti $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$; $P_3(x_3y_3z_3)$, considerando che la proiezione di questo sul piano xy ha per vertici i punti

$$P_1'(x_1y_1), \quad P_2'(x_2y_2), \quad P_3'(x_3y_3)$$

e quindi per area

$$S_{xy} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

e che le proiezioni su gli altri due piani coordinati si esprimono con formule analoghe, si ha finalmente **l'area S del triangolo $P_1P_2P_3$ espressa in funzione delle coordinate dei vertici** mediante la formula

$$S^2 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

Per determinare il segno di $S = \overline{P_1P_2P_3}$ si può con considerazioni puramente algebriche ricorrere alla formula che dà in valore e segno il volume del tetraedro $\overline{P_1P_2P_3O}$ con base $P_1P_2P_3$ e vertice nella origine, si ricava così (e si verifica con facili considerazioni geometriche), che *il segno dell'area $\overline{P_1P_2P_3}$ è eguale a quello della proiezione di questo triangolo sul piano*

$z=0$, *cioè è concorde col segno del determinante*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

§ IX. Coordinate nello spazio di piani.

226. Un piano π non passante per l'origine è rappresentato dall'equazione

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

nella quale il termine noto D è diverso dallo zero. Potremo perciò scrivere una tale equazione nella forma

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0$$

o, ponendo

$$\frac{A}{D}=u \quad \frac{B}{D}=v \quad \frac{C}{D}=w,$$

(46) $$ux+vy+wz+1=0.$$

Ad ogni piano non passante per l'origine corrisponde una terna di valori per u, v, w, e ad ogni terna di valori assegnati a queste tre variabili corrisponde un piano.

Possiàmo dunque considerare u, v, w, come coordinate del piano π, e rappresentare questo scrivendo $\pi(u, v, w)$.

Queste coordinate vengono dette *coordinate tangenziali*, o *coordinate plückeriane del piano.*

Il significato geometrico di queste coordinate si scorge facilmente quando si ricordino le espressioni dei segmenti che il piano stacca sugli assi a partire dalla origine, trovate al n.° 190 (pag. 162):

$$p=-\frac{D}{A}, \quad q=-\frac{D}{B}, \quad r=-\frac{D}{C}.$$

Si vede così che

$$u=-\frac{1}{p}, \quad v=-\frac{1}{q}, \quad w=-\frac{1}{r}$$

ossia, *che le coordinate plückeriane di un piano sono numeri inversi ed opposti delle lunghezze dei segmenti che il piano stacca sugli assi a partire dalla origine.*

227. Equazione del punto in coordinate plückeriane. Un piano $\pi(u, v, w)$ ed un punto $P(xyz)$ si appartengono se è soddisfatta la relazione

$$ux + vy + wz + 1 = 0;$$

questa, quando si suppongono u, v, w determinati e costanti, x, y, z variabili, *è la equazione del piano* $\pi(u, v, w)$ *in coordinate cartesiane;* se invece si suppone che x, y, z abbiano valori determinati e costanti e che u, v, w siano quantità variabili, è soddisfatta da tutti i piani $\pi(u, v, w)$ passanti per $P(xyz)$, ossia *è la* **equazione del punto** $P(xyz)$ *in coordinate plückeriane.*

Più generalmente, *una equazione lineare nelle* u, v, w

$$au + bv + cw + d = 0 \qquad d \neq 0$$

rappresenta il punto $P\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ *in coordinate plückeriane, come centro di una stella di piani.*

Se u, v, w sono numeri determinati, essa esprime la **condizione di appartenenza** del punto $P\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ al piano $\pi(u, v, w)$.

§ X. Punti, piani e rette immaginarie nello spazio.

228. Dato un sistema di coordinate cartesiane $O(xyz)$, chiameremo *punto immaginario* dello spazio una terna di valori non tutti reali (xyz) dati alle variabili.

Se supponiamo di riferire i punti dello spazio ad un nuovo sistema $O(XYZ)$, si dirà che due terne (xyz), (XYZ) rappresentano lo stesso punto immaginario se queste terne sono legate fra di loro da formule di trasformazione del tipo (n.° 179, pag. 152)

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_0 + a_1X + a_2Y + a_3Z \\ y &= b_0 + b_1X + b_1Y + b_3Z \\ z &= c_0 + c_1X + c_2Y + c_3Z. \end{aligned}\right.$$

Due punti immaginari si dicono *coniugati* se le coordinate rispettive sono numeri complessi coniugati.

La proprietà di due punti $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$ di essere coniugati, si conserva per qualsiasi trasformazione di assi. Ed infatti le formule di trasformazione essendo a coefficienti tutti reali, se i numeri $x_1y_1z_1$ sono coniugati rispettivamente ai numeri $x_2y_2z_2$, anche i numeri $X_1Y_1Z_1$ risulteranno coniugati ai numeri $X_2Y_2Z_2$ rispettivamente.

229. Analogamente si definisce *il piano immaginario*, mediante una terna u, v, w di valori non tutti reali; e si dicono *coniugati* due piani $\pi_1(u_1v_1w_1)$, $\pi_2(u_2v_2w_2)$ quando i numeri $u_1v_1w_1$ sono coniugati rispettivamente ai numeri $u_2v_2w_2$.

230. Due punti (o due piani) coniugati sono coincidenti quando sono reali ed in questo caso solamente.

231. I punti ed i piani immaginari possono essere dati anche mediante le loro equazioni in coordinate plückeriane o cartesiane, rispettivamente, con la condizione che i coefficienti di tali equazioni non siano tutti reali.

Tre punti, reali od immaginari, $P_1P_2P_3$, in generale determinano un piano, che ha per equazione

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il solo caso di eccezione si presenta quando è minore di 3 la caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

In questo caso, anche se i punti $P_1P_2P_3$ non sono tutti reali, diremo che essi *sono allineati.* Ma l'annullarsi di tutti i determinanti del terzo ordine della matrice considerata richiede che gli elementi di una linea siano una stessa funzione lineare ed omogenea dei corrispondenti elementi delle altre due; la qual relazione si può scrivere

$$x_3 = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r}, \quad y_3 = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r}, \quad z_3 = \frac{rz_2 + z_1}{1 + r},$$

e se una relazione di tal natura è soddisfatta, i minori del terzo ordine sono nulli, ed i punti $P_1P_2P_3$ sono allineati (n.° 196, pag. 169).

Le formule scritte, al variare di r determinano infiniti punti (reali od immaginari) allineati con P_1P_2.

L'insieme di questi punti costituisce la retta P_1P_2.

Se invece di $P_3(x_3y_3z_3)$ scriviamo $P(xyz)$ le condizioni

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{r + 1}, \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{r + 1}, \quad z = \frac{rz_2 + z_1}{r + 1} \tag{48}$$

convengono alle coordinate di tutti i punti allineati con P_1P_2, cioè esprimono **le equazioni della retta per** P_1P_2.

232. Ogni piano che contenga i punti P_1P_2 contiene anche qualsivoglia punto allineato con P_1P_2, nel senso dianzi chiarito: (le coordinate di un tale punto soddisfano infatti la (47)) un tal piano contiene dunque tutta la retta P_1P_2.

Per ogni retta passano infiniti piani; considerando due di questi si hanno le equazioni della retta sotto la forma

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases} \tag{49}$$

233. Una retta che contiene infiniti punti reali, (oppure che appartiene ad infiniti piani reali), è detta *retta reale*. Le rette che non sono reali si dicono **rette immaginarie**.

Una retta per due punti reali è reale. Una retta reale contiene infiniti punti reali ed infiniti punti immaginari.

La retta che congiunge due punti immaginari coniugati è reale, ed *è reale anche la retta che è intersezione di due piani coniugati.*

Tutti i punti coniugati dei punti di una retta immaginaria sono sopra una seconda retta che si dice *coniugata della prima.*

Una retta che coincide con la sua coniugata è reale.

234. Una retta immaginaria può essere incidente con la sua coniugata, oppure può essere con questa sghemba.

Nel primo caso la retta immaginaria si dice di **prima specie.** *Essa ha un punto reale ed uno solo*, ed è il punto in cui essa incontra la sua coniugata.

Se indichiamo con

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

le equazioni di una retta r immaginaria, con

$$\begin{cases} A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0 \\ A_2'x + B_2'y + C_2'z + D_2' = 0 \end{cases}$$

quelle della sua coniugata r', la retta r sarà immaginaria di 1.ª specie quando i quattro piani considerati nelle equazioni scritte hanno un punto comune, cioè quando è

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Se questa equazione non è soddisfatta la retta r è **immaginaria di 2.ª specie.** In tale ipotesi la r non ha nessun punto reale e non giace sopra *nessun piano reale.*

§ XI. Coordinate cartesiane omogenee e coordinate generali proiettive di punti e di piani nello spazio, cerchio assoluto.

235. Supposto dato un sistema cartesiano di coordinate nello spazio, le coordinate xyz di qualsivoglia punto $P(xyz)$ possono in infiniti modi rappresentarsi come quozienti della forma:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{50}$$

Diremo che $x_1x_2x_3x_4$ sono le **coordinate omogenee del punto** P, e scriveremo $P(x_1x_2x_3x_4)$.

Ad ogni punto P, corrispondono infinite quaterne equivalenti di coordinate omogenee, differenti fra di loro per un fattore arbitrario di proporzionalità.

Possiamo, in particolare, scegliere arbitrariamente il valore di x_4, e determinare $x_1x_2x_3$ in funzione di questo valore e delle xyz, facendo $x_1 = x_4x$, $x_2 = x_4y$, $x_3 = x_4z$.

Per $x_4 = 1$ si ha $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Cioè per *passare dalle coordinate omogenee alle cartesiane basta fare* $x_4 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

236. Alterando x_4 senza mutare $x_1x_2x_3$, i valori $x = \frac{1}{x_4}x_1$, $y = \frac{1}{x_4}y_1$, $z = \frac{1}{x_4}z_1$ variano per un fattore arbitrario di proporzionalità, cioè il punto $P(xyz)$ si sposta lungo la direzione i cui coseni sono proporzionali ai numeri $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Per x_4 tendente allo zero le coordinate di P (o, più precisamente, quelle coordinate di P che non si suppongono identicamente nulle) assumono valori tendenti all'infinito, ed il punto P tende al punto improprio caratterizzato da quella direzione. Ad $x_4 = 0$ corrisponde il punto improprio la cui direzione ha coseni direttori proporzionali ad $x_1x_2x_3$.

Perciò diremo che *tale punto improprio* P_∞ *ha per coordinate omogenee* $x_1x_2x_30$.

237. L'EQUAZIONE DI UN PIANO π, $Ax + By + Cz + D = 0$, assume, in coordinate omogenee, la forma

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0 \tag{51}$$

ed a questa equazione soddisfano tutti i punti proprii di π, d anche *tutti i punti improprii di questo piano*. Ed infatti le parallele tirate per l'origine a π formano il piano di equazione

$$Ax + By + Cz = 0$$

e le coordinate ordinarie $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ di punti di questo, insieme con $x_4 = 0$, soddisfano la (51).

L'equazione (51), nell'ipotesi $A = B = C = 0$ diventa

$$x_4 = 0$$

equazione soddisfatta da tutti i punti improprii. È dunque giustificata la convenzione che riguarda tutti i punti improprii dello spazio come situati sopra di un piano, e l'equazione **del piano improprio** *è data da* $x_4 = 0$.

238. **Cerchio assoluto.** L'equazione della sfera, in coordinate cartesiane non omogenee ha la forma (n.° 183, pag. 156)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

dove a, b, c sono le coordinate del centro ed r il raggio della sfera.

In coordinate omogenee si ha

$$(x_1 - ax_4)^2 + (x_2 - bx_4)^2 + (x_3 - cx_4)^2 = r^2 x_4^2.$$

La sezione della sfera col piano improprio è il cerchio immaginario

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che *rimane invariato qualunque sia la sfera*. Un tal cerchio è detto il **circolo assoluto dello spazio**, o semplicemente **l'assoluto.**

L'assoluto appartiene a tutte le sfere, ed è il luogo geometrico dei punti improprii di tutte le sfere dello spazio.

239. **Coordinate omogenee di piani. Coordinate proiettive di forme di 1.ª specie.** Scrivendo la (51) sotto la forma

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{52}$$

i numeri della quaterna $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ (ove le ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, sono determinate a meno di un fattore comune di proporzionalità) costituiscono *le coordinate omogenee del piano* π.

La (52) esprime la *condizione di appartenenza del punto* $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ al piano $\pi(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$. Se $x_1 x_2 x_3 x_4$ sono numeri fissi essa ci rappresenta l'*equazione del punto* $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ *in coordinate di piano*: se sono fissi i valori $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$, essa ci rappresenta (come si è detto) l'equazione del piano $\pi(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ in coordinate di punti.

I *piani per l'origine* hanno coordinate $\xi_4 = 0$.

La traccia di un piano $\pi(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)$ sul piano improprio è una retta impropria che ha per equazioni

$$\begin{cases} \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 + \xi_4x_4 = 0 \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

essa, riferita ad un sistema di coordinate plückeriane omogenee sul piano improprio, ha per coordinate $\xi_1\xi_2\xi_3$.

Una *retta dello spazio*, considerata come intersezione di due piani, è rappresentata da un sistema della forma

$$(53) \qquad \begin{cases} \xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3 + \xi_4'x_4 = 0 \\ \xi_1''x_1 + \xi_2''x_2 + \xi_3''x_3 + \xi_4''x_4 = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2. Supponendo diverso dallo zero il determinante $\begin{vmatrix} \xi_3' & \xi_4' \\ \xi_3'' & \xi_4'' \end{vmatrix}$ potremo risolvere il sistema rispetto ad x_3, x_4, e scrivere il sistema equivalente (*equazioni ridotte*)

$$(54) \qquad \begin{cases} x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2 . \end{cases}$$

Scegliamo ora sulla retta due punti *distinti* qualunque $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$, $P''(x_1''x_2''x_3''x_4'')$. Le x' non saranno proporzionali alle x'', e la matrice $\begin{vmatrix} x_1' x_2' x_3' x_4' \\ x_1''x_2''x_3''x_4'' \end{vmatrix}$ avrà caratteristica 2. Essendo i punti $P'P''$ sulla retta, avremo dalla (54)

$$\begin{cases} x_3' = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_4' = \gamma x_1' + \delta x_2', \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3'' = \alpha x_1'' + \beta x_2'' \\ x_4'' = \gamma x_1'' + \delta x_2'' \end{cases}$$

e da ciò vediamo che deve essere $\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \neq 0$; chè altrimenti per le formule trovate sarebbero tutti nulli i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{vmatrix}.$$

Essendo diverso da zero tale determinante, preso un punto $P(x_1x_2x_3x_4)$ sulla retta, sarà possibile determinare due numeri λ, μ in modo che sia

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$$
$$x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$$

ed allora, in forza delle (54) dovrà essere ancora

$$x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$$
$$x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4''.$$

Dunque *le coordinate* $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *di qualunque punto della retta $P'P''$ sono rappresentabili con le formule* $x_i = \lambda x_i' + \mu_i x_i''$. Reciprocamente, presi a piacere due valori λ, μ e calcolate le coordinate $x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1''$, $x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2''$, le formule (54) ci fanno conoscere i valori x_3, x_4, che accompagnati con x_1, x_2 danno una quaterna corrispondente ad un punto $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ della retta. Ed anche per x_3, x_4 si hanno le relazioni $x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''$, $x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4''$.

Concludiamo dunque: *Se $P'(x_1' x_2' x_3' x_4')$, $P''(x_1'' x_2'' x_3'' x_4'')$ sono due punti distinti, le coordinate di un altro punto qualunque della punteggiata $P'P''$ sono date dalle formule*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', & x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \\ x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', & x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4'' \end{array} \right. \tag{55}$$

dove λ e μ sono parametri arbitrari. (Vedi n.[i] 74, 158).

Le (55) sono *le equazioni della punteggiata* $\overline{P'P''}$.

Un teorema analogo vale per il **fascio di piani.**

Il rapporto $\frac{\lambda}{\mu} = h$ si può riguardare come *coordinata* dell'elemento variabile nella forma e, nello stesso modo tenuto al n.° 159 (pag. 130) si proverà che h è **coordinata proiettiva** *nella forma di prima specie* (punteggiata, fascio di piani) *considerata.*

Dalle formule (55) si ricava che le equazioni della retta per i punti P', P'' si possono mettere sotto una delle due forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_1 - \lambda x_1'}{x_1''} = \dfrac{x_2 - \lambda x_2'}{x_2''} = \dfrac{x_3 - \lambda x_3'}{x_3''} = \dfrac{x_4 - \lambda x_4'}{x_4''} = \mu \\[2ex] \dfrac{x_1 - \mu x_1''}{x_1'} = \dfrac{x_2 - \mu x_2''}{x_2'} = \dfrac{x_3 - \mu x_3''}{x_3'} = \dfrac{x_4 - \mu x_4''}{x_4'} = \lambda. \end{array} \right. \tag{56}$$

La *traccia di questa retta sul piano improprio* è un punto P_∞ le cui coordinate si ottengono facendo sistema delle equazioni scritte, e della $x_4 = 0$.

Si ritrovano così per le tre prime coordinate di $P_0(x_1 x_2 x_3 0)$ i valori:

$$x_1 = \lambda \frac{x_1' x_4'' - x_1'' x_4'}{x_4''}, \quad x_2 = \lambda \frac{x_2' x_4'' - x_2'' x_4'}{x_4''},$$

$$x_3 = \lambda \frac{x_3' x_4'' - x_3'' x_4'}{x_4''}.$$

In particolare *una retta r per l'origine e pel punto* $P'(x_1' x_2' x_3' x_4')$ ha le equazioni

(57) $$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_3}{x_3'} = \frac{x_4 - \mu}{x_4'},$$

e la sua *traccia sul piano improprio* ha per coordinate $(x_1' x_2' x_3' 0)$.

La **condizione di ortogonalità** *della retta r (per l'origine e pel punto P'), e del piano* $\pi(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ è data dalle relazioni (n.° 215, pag. 185)

(58) $$x_1' = \rho \xi_1, \quad x_2' = \rho \xi_2, \quad x_3' = \rho \xi_3,$$

dove ρ è un arbitrario coefficiente di proporzionalità, ed i valori delle coordinate quarte x_4', ξ_4, non entrano in gioco.

240. Coordinate proiettive nello spazio. Supponiamo riferiti i punti dello spazio ad un sistema di coordinate cartesiane omogenee, e presi ad arbitrio 16 coefficienti numerici $a_{ik} (i, k = 1, 2, 3, 4)$ a determinante diverso dallo zero, si consideri la sostituzione lineare omogenea:

(56) $$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ y_4 = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 . \end{cases}$$

Mediante queste formule ad ogni punto $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ corrisponde una quaterna $y_1 y_2 y_3 y_4$, e data una qualsivoglia quaterna $y_1 y_2 y_3 y_4$ mediante la *sostituzione inversa*

(57) $$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \alpha_{31} y_3 + \alpha_{41} y_4 \\ x_2 = \alpha_{12} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{32} y_3 + \alpha_{42} y_4 \\ x_3 = \alpha_{13} y_1 + \alpha_{23} y_2 + \alpha_{33} y_3 + \alpha_{43} y_4 \\ x_4 = \alpha_{14} y_1 + \alpha_{24} y_2 + \alpha_{34} y_3 + \alpha_{44} y_4 , \end{cases}$$

si determina la quaterna $x_1x_2x_3x_4$ cioè il punto P ad essa corrispondente. Perciò le $y_1y_2y_3y_4$ si dicono *coordinate proiettive omogenee dei punti dello spazio.*

Un piano π ha, in coordinate proiettive di punti, la equazione

(58) $$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0$$

i cui coefficienti η si dicono *le coordinate proiettive omogenee del piano* π.

Si vede, allo stesso modo tenuto al n.° 160 (pag. 131), che le coordinate proiettive η di piano si deducono dalle coordinate ordinarie omogenee ξ di piano, con una sostituzione lineare a determinante non nullo.

Considerando poi che i quattro piani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ non appartengono ad una medesima stella (perchè non è nullo il determinante delle (56)) si vede che essi determinano un tetraedro, che diremo *tetraedro fondamentale.*

Considerando i vertici di questo tetraedro $A_1(1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 1)$ ed il punto unità $E(1, 1, 1, 1)$ si vede subito che, *preso un punto qualunque* $P(y_1y_2y_3y_4)$ *dello spazio, il birapporto dei quattro piani che dallo spigolo* A_iA_k *del tetraedro fondamentale proiettano gli altri due vertici* A_m, A_n, *il punto unità* E *ed il punto* P, *è uguale al rapporto* $\frac{y_m}{y_n}$ *delle coordinate proiettive di* P, *omonime ai vertici* A_mA_n, *proiettati.*

Ciò indicheremo scrivendo

$$A_iA_k(A_mA_nEP) = \frac{y_m}{y_n}.$$

Le coordinate $y_1y_2y_3y_4$ di un punto P dello spazio non dipendono dunque dal sistema cartesiano cui si riferiscono le trasformazioni (56), (57) ma unicamente dalla scelta del tetraedro fondamentale e del punto unità.

Analogo significato hanno le coordinate η di piano. E per la *trasformazione delle coordinate proiettive*, si potranno ripetere le riflessioni fatte al n.° 162 (pag. 135) per le coordinate proiettive nel piano.

PARTE II.

LE CONICHE

CAPITOLO I.

TANGENTI E POLARI

§ I. Equazione generale. Caso degenere.

241. Si dice **conica** *il luogo dei punti del piano le cui coordinate x, y, rispetto ad un sistema di assi cartesiani, soddisfano un' equazione di secondo grado nelle variabili x, y.*

Scriveremo l'equazione generale delle coniche sotto la forma

$$F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

e supporremo di poter scambiare fra loro gli indici di ciascun coefficiente senza che cambi il suo valore: ammetteremo cioè che sia

$$a_{mn} = a_{nm} \qquad (n, m = 1, 2). \tag{2}$$

242. Riferendoci ad un sistema di coordinate cartesiane omogenee $x_1x_2x_3$, definite dalle

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

l'equazione generale della conica assumerà la forma omogenea

$$\begin{aligned} f(x_1x_2x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Basterà poi fare $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ per passare da questa alla forma non omogenea (1). Il primo membro della (3) è una *forma quadratica* nelle 3 variabili $x_1x_2x_3$.

243. Per indicare le *semiderivate parziali* della $f(x_1x_2x_3)$ useremo i simboli

$$(4)\qquad \begin{cases} f_{x_1}'(x_1x_2x_3)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ f_{x_2}'(x_1x_2x_3)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ f_{x_3}'(x_1x_2x_3)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 . \end{cases}$$

Moltiplicando ordinatamente per x_1, x_2, x_3 e sommando si ha la formula:

$$(5)\qquad x_1f_{x_1}'(x_1x_2x_3)+x_2f_{x_2}'(x_1x_2x_3)+x_3f_{x_3}'(x_1x_2x_3)=f(x_1x_2x_3),$$

fondamentale pel nostro studio, la quale è un caso particolare di una proposizione su le funzioni omogenee, nota col nome di *Teorema di Eulero.*

244. Dati due punti $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$ formiamo con le coordinate di questi la espressione

$$(6)\quad f\binom{x'}{x''}=x_1'f_{x_1}'(x_1''x_2''x_3'')+x_2'f_{x_2}'(x_1''x_2''x_3'')+x_3'f_{x_3}'(x_1''x_2''x_3''),$$

che è *la somma dei prodotti delle coordinate del primo punto per le corrispondenti semiderivate parziali, calcolate nel secondo punto.*

Questa espressione, che spesso avremo bisogno di considerare, è, per la formula di Eulero, eguale ad $f(x_1'x_2'x_3')$ se i due punti P', P'' coincidono, ed, in ogni caso, è simmetrica rispetto ai punti P', P''; cioè essa soddisfa la relazione (che immediatamente si può verificare)

$$(7)\qquad f\binom{x'}{x''}=f\binom{x''}{x'}.$$

Le formule trovate gioveranno alla soluzione del problema: *trovare le intersezioni della conica* $f(x_1x_2x_3)=0$ *con la retta per due dati punti* $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$.

245. Le intersezioni di una conica con una retta si ottengono facendo sistema delle equazioni della conica e della retta, e ricercando le soluzioni di questo sistema.

In coordinate non omogenee, data la conica $F(xy)=0$, e la retta $ax+by+c=0$, si considera il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

si cercano le soluzioni comuni, che in generale saranno due: x_1y_1, x_2y_2, ed i punti corrispondenti $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ sono le intersezioni richieste.

Qui, peraltro, invece della equazione cartesiana, useremo le equazioni parametriche della $P'P''$ (n.° 158, pag. 129)

$$x_1 = hx_1' + x_1'',\quad x_2 = hx_2' + x_2'',\quad x_3 = hx_3' + x_3''. \tag{8}$$

Ponendo queste espressioni nella $f(x_1x_2x_3)=0$, ne verrà una equazione in h alle cui radici corrisponderanno, per le (8), punti che sono ad un tempo su la conica e su la retta $P'P''$. Ora abbiamo

$$\begin{aligned} & f(hx_1' + x_1'',\ hx_2' + x_2'',\ hx_3' + x_3'') = \\ & = a_{11}(h^2x_1'^2 + 2hx_1'x_1'' + x_1''^2) \\ & + a_{22}(h^2x_2'^2 + 2hx_2'x_2'' + x_2''^2) \\ & + a_{33}(h^2x_3'^2 + 2hx_3'x_3'' + x_3''^2) \\ & + 2a_{12}(h^2x_1'x_2' + h(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') + x_1''x_2'') \\ & + 2a_{13}(h^2x_2'x_3' + h(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + x_1''x_3'') \\ & + 2a_{23}(h^2x_2'x_3' + h(x_2'x_3'' + x_3'x_2'') + x_2''x_3''). \end{aligned}$$

Sommando per colonne e tenendo conto della posizione (6), si ottiene

$$\begin{aligned} & f(hx_1' + x_1'',\ hx_2' + x_2'',\ hx_3' + x_3'') = \\ & = h^2f(x_1'x_2'x_3') + 2hf\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + f(x_1''x_2''x_3''), \end{aligned} \tag{9}$$

formula di molta importanza per il nostro studio.

I punti che sono contemporaneamente su la conica $f=0$ e su la retta $P'P''$ sono dunque quelli che le (8) fanno corrispondere ai valori di h che sono radici della equazione di secondo grado:

$$h^2f(x_1'x_2'x_3') + 2hf\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + f(x_1''x_2''x_3'') = 0. \tag{10}$$

246. Questa equazione ha, in generale, due radici, le quali possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate.

Nel primo caso la retta $P'P''$ sega la conica in due punti reali, nel secondo caso risulta tangente alla conica, nel terzo caso sega la conica in punti immaginari; cioè non ha a comune con essa alcun punto reale (è esterna alla conica).

Si ha una radice infinita nel caso che risulti nullo il coefficiente di h^2, cioè se $f(x_1'x_2'x_3')=0$: a valore infinito di h corrisponde infatti, su la punteggiata $P'P''$, il punto base P' (n.° 159, pag. 129).

Si ha una radice nulla se è nullo il termine che non contiene h, cioè se $f(x_1''x_2''x_3'')=0$, ed infatti al valore $h=0$ corrisponde sulla punteggiata $P'P''$ il secondo punto base $P''(x_1''x_2''x_3'')$.

Si possono avere più di due radici solo se sono zero ad un tempo tutti e tre i coefficienti

$$f(x_1'x_2'x_3')=0, \quad f\binom{x'}{x''}=0, \quad f(x_1''x_2''x_3'')=0$$

cioè *se i punti P', P'' sono su la conica, e se per le coordinate di questi punti è soddisfatta la relazione* $f\binom{x'}{x''}=0$.

In tale ipotesi la (10) *è soddisfatta da qualunque valore di h*, cioè tutti i punti della retta $P'P''$ appartengono alla conica, e la conica si dice **degenere**. Dunque, se una retta ha più di due punti a comune con la conica, appartiene alla conica.

Reciprocamente, *se una retta $P'P''$ appartiene alla conica*, la (10) deve avere più di due radici, cioè tutti i suoi coefficienti debbono essere nulli.

247. Le coniche quali curve del secondo ordine. Dalla discussione fatta risulta che *se una retta p non appartiene alla conica $f(x_1x_2x_3)=0$, incontra sempre la conica in due punti (reali o immaginari)* e questo fatto, che risulta come conseguenza del grado 2 della equazione $f(x_1x_2x_3)=0$ della conica, si esprime dicendo che **le coniche sono curve del secondo ordine.**

248. Caso degenere. Dimostreremo che: *La* **condizione necessaria e sufficiente perchè una conica** $f(x_1x_2x_3)=0$ **sia degenere** *è l'annullarsi del determinante*

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

formato coi coefficienti delle semiderivate parziali.

Questo determinante è detto **discriminante** della forma quadratica $f(x_1x_2x_3)$.

Dimostriamo anzitutto che la *condizione è necessaria.* Ed infatti se la conica è degenere, cioè se una retta $P'P''$ appartiene alla conica, indicando con

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

l'equazione della retta $P'P''$, questa, e la equazione della conica

$$f(x_1x_2x_3)=0,$$

dovranno essere soddisfatte dalle stesse terne di valori $x_1x_2x_3$.

Ciò significa che il polinomio di secondo grado $f(x_1x_2x_3)$ ammette come suo fattore razionale il trinomio $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$.

Indicando con

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

il quoziente della divisione di $f(x_1x_2x_3)$ per $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, avremo dunque

$$f(x_1x_2x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3);$$

la equazione della conica $f=0$, si spezzerà nelle due

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0,$$

le quali rappresentano *due rette*; e la conica dovrà degenerare in questa coppia di rette.

Se *tali rette sono coincidenti,* cioè se $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$, si avrà

$$\begin{aligned} f(x_1x_2x_3) &= (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 \\ &= a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+a_3^2x_3^2+2a_1a_2x_1x_2+2a_1a_3x_1x_3+2a_2a_3x_2x_3, \end{aligned}$$

ed il discriminante A avrà la forma

$$A = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Dunque: *Se la conica* $f=0$ *degenera in una coppia di rette coincidenti, il discriminante* A, *ad essa relativo, è nullo ed ha caratteristica eguale ad* 1.

In modo analogo si può procedere nel caso che *degeneri in una coppia di rette distinte.*

Ma, con semplici considerazioni geometriche, si può vedere che *anche quando tali rette non sono coincidenti, il discriminante* A *di una conica degenere è eguale allo zero.*

Indichiamo, infatti, con $P'(x_1'x_2'x_3')$ il punto di incontro delle due rette, nelle quali degenera la conica; e con $P''(x_1''x_2''x_3'')$, $P'''(x_1'''x_2'''x_3''')$ due punti presi l'uno sopra una di tali rette, l'altro su l'altra, in modo cioè che i tre punti P', P'', P''', *non siano allineati.*

Poichè le rette $P'P''$, $P'P'''$ appartengono alla conica, sarà:

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = x_1''f_{x_1}'(x') + x_2''f_{x_2}'(x') + x_3''f_{x_3}'(x') = 0 \\ f\begin{pmatrix} x''' \\ x' \end{pmatrix} = x_1'''f_{x_1}'(x') + x_2'''f_{x_2}'(x') + x_3'''f_{x_3}'(x') = 0 \\ f(x_1'x_2'x_3') = x_1'f_{x_1}'(x') + x_2'f_{x_2}'(x') + x_3'f_{x_3}'(x') = 0. \end{cases}$$

Non essendo allineati i tre punti $P'P''P'''$, il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}$$

sarà diverso dallo zero, e perciò dovrà essere:

$$(11) \qquad \begin{cases} f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3') = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = 0 \\ f_{x_2}'(x_1'x_2'x_3') = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = 0 \\ f_{x_3}'(x_1'x_2'x_3') = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = 0, \end{cases}$$

e, non essendo $x_1'=0$, $x_2'=0$, $x_3'=0$, la coesistenza delle relazioni (11) esigerà l'annullarsi del determinante dei coefficienti

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

come appunto volevamo provare.

249. La *condizione è sufficiente.* Ed infatti se supponiamo $A = 0$ è possibile il determinare tre valori, non tutti nulli, $x_1' x_2' x_3'$, che soddisfino le relazioni (11).

Il punto $P'(x_1' x_2' x_3')$, così determinato, risulta sulla curva, perchè, essendo

$$f_{x_1}'(x_1' x_2' x_3') = 0, \quad f_{x_2}'(x_1' x_2' x_3') = 0, \quad f_{x_3}'(x_1' x_2' x_3') = 0,$$

si ha ancora

$$f'(x_1' x_2' x_3') = x_1' f_{x_1}'(x_1' x_2' x_3') + x_2' f_{x_2}'(x_1' x_2' x_3') + x_3' f_{x_3}'(x_1' x_2' x_3') = 0.$$

Se consideriamo un secondo punto $P''(x_1'' x_2'' x_3'')$ sulla curva, avremo dunque

$$f(x_1' x_2' x_3') = 0, \quad f(x_1'' x_2'' x_3'') = 0$$

e, per le (11) anche $f\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = 0$; dunque per la retta $P'P''$ tutti i coefficienti della corrispondente equazione (10) sono identicamente nulli: tale retta appartiene perciò alla curva.

Sia ora P''' un punto appartenente alla conica, ed esterno alla retta $P'P''$.

Ripetendo il medesimo ragionamento proveremo che *anche la retta $P'P'''$ appartiene alla conica.*

È poi evidente che, oltre le due rette $P'P''$, $P'P'''$, la conica non può contenere alcun punto, ad esse esterno. Poichè, se P^{IV} fosse un tale punto, una retta *qualsiasi* r del fascio che ha centro in P^{IV}, avrebbe comuni con la conica *tre punti,* cioè P^{IV}, ed i due punti di incidenza di r con $P'P''$, $P'P'''$; la retta r dovrebbe dunque anch'essa appartenere alla conica.

Dunque, se *il discriminante A è eguale allo zero, la conica si spezza in due rette uscenti dal punto P_1, determinato dalle equazioni* (11).

Le rette P_1P'', P_1P''', in cui la conica si spezza quando il discriminante A è nullo, sono distinte se la caratteristica del discriminante è eguale a 2; abbiamo visto infatti che, se tali rette sono coincidenti la caratteristica del determinante A risulta eguale ad 1. Reciprocamente: *se la caratteristica di A è eguale ad* 1, *le due rette in cui la conica si spezza sono coincidenti, in una unica retta contata due volte.*

Questa retta è rappresentata analiticamente da una qualsiasi delle relazioni (11), le quali, nell'ipotesi che la caratteristica di A sia 1, sono fra loro equivalenti; e si vede, anche con considerazioni geometriche, che fuori di questa retta non possono esistere punti della conica.

Se per es. consideriamo la prima delle (11)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

le coordinate dei punti $P(x_1x_2x_3)$ che sono sulla retta r che questa rappresenta, soddisfano, nella nostra ipotesi, anche alle altre due, cioè annullano contemporaneamente le tre semiderivate parziali. Ogni punto della retta r ha quindi le proprietà che al n.° 249 avevamo visto appartenere a $P(x_1'x_2'x_3')$. Se dunque, nel caso nostro, fuor di questa retta esistesse anche un sol punto P' della conica, questo, congiunto con un punto *qualsiasi* della retta r darebbe sempre origine ad una retta tutta quanta appartenente alla conica, e si giungerebbe a questo assurdo, che qualunque punto del piano apparterrebbe alla conica.

250. Ricerca delle rette componenti una conica degenere. Nelle applicazioni pratiche useremo sempre la *forma non omogenea* della equazione della conica

$$F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Se questa equazione è omogenea nelle due variabili x, y, la conica degenera in una coppia di rette uscenti dalla origine.

Che la conica sia degenere risulta immediatamente osservando che la $F(xy)$ ha, nel caso supposto, la forma

$$F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

cioè è $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$; ed il discriminante A ha gli elementi della terza colonna tutti nulli.

Se scriviamo la $F(xy)$ sotto la forma

$$F(xy) = x^2\left(a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{y}{x} + a_{11}\right)$$

ed indichiamo con m_1, m_2 le radici della equazione di 2.° grado $a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{11}\frac{y}{x} + a_{12} = 0$, abbiamo

$$F(xy) = a_{22}x^2\left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right) = a_{22}(y - m_1x)(y - m_2x),$$

cioè vediamo che la conica $F = 0$ si spezza nelle due rette $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$, uscenti dalla origine, con coefficienti angolari m_1, m_2.

Questo *Teorema* è stato, sotto forma più generale, enunciato in principio del nostro corso al n.° 105, VIII, (pag. 88).

Si dimostra immediatamente la proposizione reciproca: *Se una conica $F(xy) = 0$ degenera in una coppia di rette uscenti dalla origine, il polinomio $F(xy) = 0$ è omogeneo nelle due variabili x, y.*

251. Quando si sia verificato che per una data conica il discriminante $A = 0$, si troveranno con le (11) le coordinate del punto P' comune alle due rette in cui la conica degenera, si cercheranno altri due punti della conica, P'', P''', per es. le intersezioni di essa con uno degli assi, e si scriveranno le equazioni delle rette $P'P''$, $P'P'''$.

Ma invece di seguire tale procedimento si può direttamente ricercare se la $F(xy)$ può spezzarsi in fattori razionali e calcolare questi fattori operando al modo seguente:

Se i coefficienti a_{11}, a_{12} non sono entrambi nulli, ed è per es. $a_{11} \neq 0$ si ordini la $F(xy)$ rispetto ad x, e si risolva rispetto a questa incognita, ne verrà

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{(a_{12}y + a_{13})^2 - a_{11}(a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33})}}{a_{11}}.$$

Indicando con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante A, avremo, ordinando il polinomio in y sotto il radicale

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{-A_{33}y^2 + 2A_{23}y - A_{22}}}{a_{11}}.$$

Ora la condizione necessaria e sufficiente perchè questa espressione sia razionale è

$$A_{23}^2 - A_{33}A_{22} = 0,$$

cioè, sviluppando,

$$a_{11}A = 0,$$

e così si verifica, per altra strada, che l'annullarsi del discriminante è appunto la condizione richiesta. Quando questa sia soddisfatta il trinomio sotto il radicale risulta quadrato perfetto di un binomio della forma $a_1y + b_1$, e si trova la formula

$$x = \frac{-a_{12}y + a_{13} \pm (a_1y + b_1)}{a_{11}}$$

la quale rappresenta, prendendo l'uno e l'altro segno, le due rette in cui $F(xy) = 0$ degenera. Queste poi saranno reali od immaginarie secondo che i numeri a_1, b_1 risultano reali o complessi, e saranno coincidenti se $a_1 = b_1 = 0$.

Infine se $a_{11} = a_{22} = 0$, supponendo $a_{12} \neq 0$ (chè altrimenti la conica si ridurrebbe ad una retta), si ha

$$F(xy) = 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

ed il discriminante A assume la forma

$$A = a_{12}(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = 0$$

da cui

$$a_{12}a_{33} = 2a_{13}a_{23}.$$

Scriveremo perciò

$$\begin{aligned} a_{12}F(xy) &= 2a_{12}^2xy + 2a_{12}a_{13}x + 2a_{12}a_{23}y + a_{12}a_{33} \\ &= 2(a_{12}^2xy + a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}) \\ &= 2(a_{12}x + a_{23})(a_{12}y + a_{13}); \end{aligned}$$

e di qui si scorge che *la conica si spezza nelle due rette, parallele agli assi coordinati,*

$$a_{12}x + a_{23} = 0, \quad a_{12}y + a_{13} = 0.$$

§ II. Coniche per cinque punti.

252. Nella equazione generale della conica compariscono 6 parametri (i coefficienti) dei quali cinque soli sono essenziali,

perchè il primo membro di tale equazione può sempre supporsi diviso per uno dei coefficienti (che non sia nullo); la conica perciò è determinata da 5 condizioni fra loro indipendenti, in particolare dalle condizioni di appartenenza con 5 dati punti $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$.... $P^{v}(x_1^{v}x_2^{v}x_3^{v})$ del piano. Scrivendo la equazione della conica e le identità che risultano dal fatto che tale equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate di tali punti, si hanno, fra le quantità incognite $a_{11}a_{22}$, a_{12}.... a_{33}, le relazioni seguenti:

$$(12)\quad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{11}x_1^{v2} + a_{22}x_2^{v2} + a_{33}x_3^{v2} + 2a_{12}x_1^{v}x_2^{v} + 2a_{13}x_1^{v}x_3^{v} + 2a_{23}x_1^{v}x_3^{v} = 0 \end{cases}$$

per la coesistenza delle quali è condizione necessaria e sufficiente:

$$(13)\quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ x_1'^2 & x_2'^2 & x_3'^2 & x_1'x_2' & x_1'x_3' & x_2'x_3' \\ x_1''^2 & x_2''^2 & x_3''^2 & x_1''x_2'' & x_1''x_3'' & x_2''x_3'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{v2} & x_2^{v2} & x_3^{v2} & x_1^{v}x_2^{v} & x_1^{v}x_3^{v} & x_2^{v}x_3^{v} \end{vmatrix} = 0$$

questa è appunto la *equazione della conica per i cinque punti dati.*

In generale per 5 dati punti del piano passa *una ed una sola* conica: un caso di eccezione si presenta quando una delle cinque equazioni (12) è conseguenza delle altre quattro, ossia quando tutte le coniche che passano per quattro dei dati punti, passano anche per il quinto.

Si vede facilmente che *il caso di eccezione non può presentarsi se non quando quattro dei dati punti siano in linea retta.*

Ed infatti, se almeno tre dei punti dati non sono allineati troviamo che almeno la conica (degenere) costituita dalle rette $P'P'''$, $P''P^{iv}$, non può passare per P^{v} (chè altrimenti P^{v} sarebbe allineato con due degli altri punti).

Se tre soltanto dei punti sono allineati, per es. $P'P''P'''$, la conica per i cinque punti si spezza nella coppia di rette $P'P''P'''$, $P^{iv}P^{v}$: ed è determinata in modo unico.

Se poi quattro punti es. $P'P''P'''P^{iv}$ sono allineati, esistono infinite coniche degeneri per i cinque punti, e cioè le coppie di rette costituite dalla $P'P''P'''P^{IV}$ e da una qualsiasi retta del piano per P^{V}.

Infine se tutti e cinque i punti sono allineati, si ha una doppia infinità di coniche per tali punti, costituita da tutte le coppie di rette che si ottengono associando la retta $P'P''P'''P^{IV}P^{V}$ ad una retta qualsiasi del piano.

Concludiamo da questo esame che: *per cinque punti quattro dei quali non siano allineati passa una conica ed una sola, la cui equazione è data dalla* (13).

§ III. Le coniche quali curve razionali.

253. Si dicono *razionali* (od *unicursali*, o di *genere zero*) le curve caratterizzate dalla proprietà che le coordinate x, y dei punti $P(xy)$ ad esse appartenenti, si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro.

Dimostreremo che *le coniche sono curve razionali.*

Possiamo, infatti, supporre la conica riferita ad un sistema di assi cartesiani con l'origine in un punto della conica medesima. La equazione (in forma non omogenea) della conica, assumerà allora la forma

$$F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Se consideriamo il fascio di raggi col centro nella origine

$$y = mx,$$

vediamo che ad ogni valore del parametro m corrisponde un punto della conica, $P(x, mx)$, ulteriore intersezione del raggio $y = mx$ con la curva, e che ad ogni punto P della curva corrisponde un valore m, coefficiente angolare del raggio OP che proietta il punto P dalla origine.

Dunque i punti della curva corrispondono biunivocamente ai valori $[m]$ e le coordinate x, y di tali punti si possono esprimere razionalmente per m.

Per realizzare tale rappresentazione basta sostituire nella equazione della conica la espressione di y, $y = mx$. Si ottiene così la equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}m^2x^2 + 2a_{12}mx^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}mx = 0$$

che, trascurando la radice $x=0$ corrispondente alla origine, dà per x (e corrispondentemente per y)

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{2(a_{13}+a_{23}m)}{a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2} \\ y &= -\frac{2(a_{13}+a_{23}m)m}{a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2} \end{aligned}\right\}.$$

Sono queste appunto le formule richieste: esse ci danno, *sotto forma parametrica*, le equazioni di una conica riferita ad un sistema di assi cartesiani la cui origine appartiene alla conica.

Per scrivere le equazioni parametriche di una conica non passante per la origine, basterà supporre eseguita una traslazione di assi che trasporti la origine in un punto $P_0(\alpha\beta)$ appartenente alla curva.

§ IV. Tangenti alla conica.

254. Data la conica $f(x_1x_2x_3)=0$ e preso un punto $P'(x_1'x_2'x_3')$ sul piano di essa, la retta $P'P$ che congiunge P' con un altro punto $P(x_1x_2x_3)$ del piano, incontra la conica in due punti le cui coordinate proiettive (sulla punteggiata $P'P$) sono le radici della equazione in h:

$$(10) \qquad f(x_1'x_2'x_3')h^2+2hf\binom{x}{x'}+f(x_1x_2x_3)=0$$

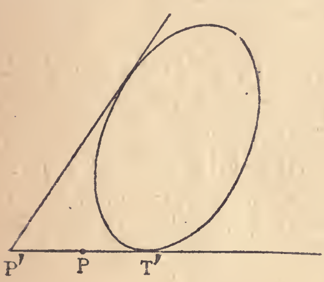
stabilita al n.° 245 (pag. 211). Vogliamo *trovare quale condizione bisogna imporre alle coordinate $x_1x_2x_3$ del punto $P(x_1x_2x_3)$ affinchè la retta $P'P$ risulti tangente alla conica.*

Tale condizione è espressa dalla coincidenza dei due punti dove la retta $P'P$ incontra la conica, cioè dalla identità delle coordinate proiettive h di tali punti: dunque infine dalla coincidenza, in un unico valore, delle due radici della equazione (10), cioè dall'annullarsi del discriminante di tale equazione.

La condizione richiesta è dunque espressa dalla relazione

$$(14) \qquad f^2\binom{x}{x'}-f(x_1x_2x_3)\,f(x_1'x_2'x_3')=0.$$

Questa è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti $P(x_1 x_2 x_3)$, i quali congiunti con P' danno luogo a rette tangenti alla conica, e poichè essa è una equazione di secondo grado nelle $x_1 x_2 x_3$, il luogo dei punti $P(x_1 x_2 x_3)$ sarà una conica. Si vede subito che *questa conica è degenere*; infatti se la retta $P'T'$ è tangente alla conica, qualunque punto P di questa retta congiunto con P' dà luogo alla tangente medesima, e quindi tutta la retta $P'T'$ appartiene al luogo rappresentato dalla equazione (14). Ne segue che la conica (14) degenera in due rette passanti per P', e saranno queste appunto (e queste sole) le tangenti alla conica per P'.



Concludiamo dunque che *la equazione* (14) *rappresenta complessivamente le due tangenti alla conica* $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, *pel punto* $P'(x_1' x_2' x_3')$.

255. *In coordinate non omogenee, la equazione complessiva delle tangenti alla conica* $F(xy) = 0$ *pel punto* $P'(x'y')$ ha la forma

$$(14')\quad \left\{\begin{array}{l} [(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}]^2 \\ \quad - (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}x\,y + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) \\ \quad (a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}) = 0. \end{array}\right.$$

Che la conica rappresentata da questa equazione sia degenere si vede assai semplicemente anche con considerazioni analitiche. Infatti possiamo supporre che *la origine delle coordinate sia nel punto* $P'(x'y')$, con che la (14') acquista la forma

$$(14'')\quad (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})x^2 + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})xy + (a_{23}^2 - a_{22}a_{23})y^2 = 0$$

ed essendo questa omogenea nelle coordinate x, y, rappresenta una coppia di rette uscenti dalla origine.

256. I fattori di primo grado nei quali si spezza il primo membro della (14), equazione complessiva delle due tangenti per P' alla conica, possono essere reali e distinti, reali ed eguali, o complessi coniugati.

Nel primo caso le tangenti alla conica per P' sono rette reali e distinte ed il punto P' si dice **esterno alla conica.**

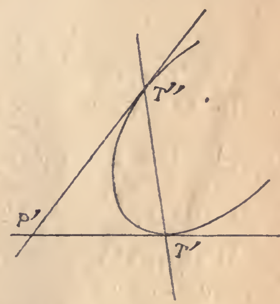
Nel secondo caso le due tangenti per P' coincidono in un'unica retta. Questo caso si presenta quando $f(x_1'x_2'x_3') = 0$, cioè quando il **punto** P' **appartiene alla conica.**

Nel terzo caso le rette tangenti alla conica per P' sono immaginarie coniugate, ed il punto P' si dice **interno alla conica.**

257. Si osservi che in ogni caso la (14) è soddisfatta dai punti $P(x_1x_2x_3)$ che hanno per coordinate le soluzioni del sistema

$$(15) \qquad f\binom{x}{x'} = 0, \quad f(x_1x_2x_3) = 0.$$

Tali punti, in quanto soddisfano alla seconda di queste equazioni, appartengono alla conica; in quanto soddisfano alla (14), cioè al sistema (15), appartengono alla tangente alla conica per P': cioè *sono i punti di contatto delle tangenti per* P' *alla conica.*



Questi punti T', T'', saranno reali e distinti se P' è esterno, coincidenti se P' è sulla conica, immaginari e coniugati se P' è interno alla conica.

E, dovendo le loro coordinate soddisfare la 1.ª equazione del sistema (15) la quale è l'equazione di una retta, essi punti saranno anche su questa retta.

Dunque la prima delle equazioni (15) cioè

$$(16) \qquad (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')x_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2 + \\ + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')x_3 = 0$$

rappresenta *la retta che congiunge i punti* $T'T''$ *di contatto delle tangenti alla conica per* $P'(x_1'x_2'x_3')$.

Questa retta vien detta **polare del punto** $P_1(x_1'x_2'x_3')$ **rispetto alla conica.**

La polare è sempre reale, anche se i punti $T'T''$ sono immaginari, poichè in tal caso questi punti sono coniugati, e la loro congiungente è reale (n.° 148, pag. 120).

258. Praticamente *si forma la equazione della polare alla conica nel punto* $P'(x_1'x_2'x_3')$ *assumendo come coefficienti delle variabili* $x_1x_2x_3$ *le semiderivate parziali rispettive calcolate nel punto* P', scrivendo cioè

$$f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3')x_1 + f_{x_2}'(x_1'x_2'x_3')x_2 + f_{x_3}'(x_1'x_2'x_3')x_3 = 0.$$

Se l'equazione della conica è data in coordinate non omogenee $F(xy) = 0$, l'equazione della polare del punto $P'(x'y')$ ha la forma

$$(16') \quad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.$$

Conosciuta la equazione della polare del punto P', *per avere le equazioni delle* **tangenti alla conica per** P' *basterà poi scrivere le equazioni delle rette per* P' *e per i punti di intersezione della polare con la conica:* questo procedimento è praticamente più vantaggioso di quello che procede dall'uso della formula (14).

259. *Se il punto* P' *è sulla conica, la polare di questo punto coincide con la tangente alla conica per* P'. Ed infatti, se il punto P' è sulla conica si ha $f(x_1'x_2'x_3') = 0$, e la (14), equazione complessiva delle tangenti per P', si riduce alla $\left[f\begin{pmatrix}x\\x'\end{pmatrix}\right]^2 = 0$, ossia alla $f\begin{pmatrix}x\\x'\end{pmatrix} = 0$, che è appunto la (16).

Il risultato ottenuto, che è di molta importanza, ci dice adunque che *la equazione della tangente alla conica* $f(x_1x_2x_3)$ *per un punto* $P'(x_1'x_2'x_3')$ *di essa è*

$$(17) \quad f\begin{pmatrix}x\\x'\end{pmatrix} = x_1f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3') + x_2f_{x_2}'(x_1'x_2'x_3') + x_3f_{x_3}'(x_1'x_2'x_3') = 0.$$

In coordinate *non omogenee* scriveremo l'equazione della tangente alla conica in un punto $P'(x'y')$ di essa, sotto una delle forme seguenti:

$$(17') \quad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33} = 0$$

$$(17'') \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}} x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}} y + 2(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.$$

Considerando che il punto $P'(x'y')$ è sulla tangente, si ha l'identità

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}} x' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}} y' + 2(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0$$

sottraendo questa dalla (17), si ottiene l'equazione della tangente sotto la forma

$$(17''') \qquad y - y' = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x'\\y=y'}}} (x - x')$$

la quale ci mostra che il coefficiente angolare della tangente alla conica $F(xy) = 0$, nel punto $P'(x'y')$, è dato dal quoziente delle due derivate parziali, calcolate in questo punto, preso col segno cambiato. Ma, come è noto, tale quoziente esprime la derivata $\frac{dy}{dx}$ della y, considerata come funzione implicita di x determinata dalla equazione $F(xy) = 0$: abbiamo dunque infine **l'equazione della tangente** *nel punto* $P'(x'y')$ sotto la forma

$$(17^{\text{IV}}) \qquad y - y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x'} (x - x')$$

e ritroviamo l'importante teorema: *se l'equazione della conica si suppone data nella forma esplicita $y = f(x)$, il coefficiente angolare della tangente alla conica in un punto $P'(x'y')$ di essa è dato dal valore della derivata $\frac{dy}{dx}$ calcolata in questo punto.*

§ V. Polarità rispetto ad una conica.

260. *Due punti $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$ del piano di una conica $f(x_1x_2x_3) = 0$ si dicono* **coniugati rispetto alla conica,** *se il segmento $P'P''$ è diviso armonicamente dai punti A, B di intersezione della retta $P'P''$ con la conica.*

Sappiamo (n.° 246) che le coordinate proiettive, sulla punteggiata $P'P''$, dei punti A, B in cui la retta $P'P''$ incontra la conica, sono le radici della equazione in h:

$$(10) \qquad f(x_1'x_2'x_3')h^2 + 2hf\binom{x'}{x''} + f(x_1''x_2''x_3'') = 0.$$

Indichiamo queste radici con α, β; ai punti $P'P''$, che nel sistema di coordinate proiettive da noi scelto sulla punteggiata sono i primi due punti fondamentali, corrispondono per h i valori ∞, 0, (n.° 159, pag. 129), dunque avremo

$$(P'P''AB) = (\infty,\ 0,\ \alpha,\ \beta) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Se vogliamo che il gruppo $P'P''AB$ sia armonico, dobbiamo supporre $\frac{\beta}{\alpha} = -1$, cioè $\alpha = -\beta$. Dunque, affinchè P', P'' siano punti coniugati rispetto alla conica $f(x_1x_2x_3) = 0$, occorre e basta che la equazione (10) abbia radici eguali in valor assoluto e contrarie di segno, cioè che sia nullo il coefficiente del termine di primo grado; infine troviamo che *la condizione perchè il punto P'' sia coniugato al punto P' rispetto alla conica $f(x_1x_2x_3) = 0$* è espressa dalla relazione

$$(18) \quad f\binom{x'}{x''} = (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')x_1'' + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2'' + \\ + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')x_3'' = 0.$$

E, poichè $f\binom{x'}{x''} = f\binom{x''}{x'}$, questa è anche la condizione perchè P' sia coniugato di P'': in altri termini, *la* **relazione di coniugio** *tra due punti è simmetrica rispetto ad essi, è una proprietà della coppia di punti.*

Si osservi ora che $f\binom{x}{x'} = 0$ è l'equazione della *polare* di P' rispetto alla conica, la relazione $f\binom{x''}{x'} = 0$ ci dice dunque che il punto P'', coniugato di P' rispetto alla conica, giace sulla polare di P': ma siccome $f\binom{x''}{x'} = f\binom{x'}{x''}$, essa ci dice anche che P' giace sulla polare di P''. Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente perchè due punti siano coniugati* *l'uno all'altro rispetto ad una conica, è che l'uno di essi appartenga alla polare dell'altro rispetto alla conica.*

La condizione perchè due punti $P(x_1x_2x_3)$, $P'(x_1'x_2'x_3')$, coniugati rispetto alla conica, coincidano in un sol punto, è evidentemente che nella corrispondente equazione (10) sia nullo anche il termine noto, cioè che *P appartenga alla conica.* Dunque *i punti* **autoconiugati** *rispetto ad una conica sono tutti e soli i punti della conica stessa.*

261. Sopra ogni retta del fascio che ha centro in P' troveremo un punto P'' coniugato di P' rispetto alla conica, ed il luogo di questi coniugati è la retta p' polare di P'.

Il punto P' è detto **polo** della retta p' (polare di P').

262. Se il polo è esterno alla conica, la polare sega la conica in due punti reali e distinti (i punti di contatto delle tangenti per il polo alla conica).

Se il polo è interno, la polare taglia la conica in due punti immaginari, cioè è esterna alla conica.

Se il polo è sulla conica, la polare è tangente alla conica, ed in questo caso il polo appartiene alla polare (è il punto di contatto).

Si vede che, reciprocamente, *se il polo appartiene alla polare questa è tangente alla conica nel polo*: ed infatti la relazione

$$f\binom{x'}{x'} = x_1' f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3') + x_2' f_{x_2}'(x_1'x_2'x_3') + x_3' f_{x_3}'(x_1'x_2'x_3') =$$
$$= f(x_1'x_2'x_3') = 0$$

ci dice che in tale supposizione il punto P' è sulla conica.

263. Essendo $P(x_1'x_2'x_3')$ un punto del piano della conica $f(x_1x_2x_3) = 0$, indichiamo con $\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ le coordinate plückeriane omogenee della sua polare $p(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$, scriviamo cioè l'equazione di questa polare sotto la forma

$$\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3 = 0,$$

per la formula (18) avremo:

$$(19) \qquad \begin{cases} \xi_1' = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' \\ \xi_2' = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' \\ \xi_3' = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'. \end{cases}$$

Queste formule ci mostrano che *la conica stabilisce una corrispondenza fra i punti* $P'(x_1'x_2'x_3')$ *e le rette* $p'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ *del piano*, per la quale dalle coordinate x si deducono le coordinate ξ, mediante una sostituzione lineare a determinante (simmetrico) A.

Se questo non è zero, cioè *se la conica non è degenere*, potremo, reciprocamente, ad ogni retta $p'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ far corrispondere un punto $P'(x_1'x_2'x_3')$ mediante la sostituzione inversa, pure a determinante simmetrico e non nullo,

$$(20) \qquad \begin{cases} x_1 = A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3 \\ x_2 = A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 \\ x_3 = A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 \end{cases}$$

dove A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante A; e si è trascurato al secondo membro il fattore $\frac{1}{A}$, perchè, *trattandosi di coordinate omogenee, queste possono sempre supporsi moltiplicate per un qualsivoglia fattore di proporzionalità.*

(Si avverta che, per la condizione $a_{rs} = a_{sr}$, si ha ancora $A_{rs} = A_{sr}$).

Vediamo, dalle formule (19), (20), che *una conica non degenere determina nel suo piano una corrispondenza biunivoca di punto a retta, tale che ad ogni punto P corrisponde una retta p* (polare di P) *e ad ogni retta p un punto P* (polo di p). *I punti che appartengono alla propria polare, sono i punti della conica e le rette che appartengono al proprio polo sono le tangenti alla conica.*

Questa corrispondenza si dice **polarità**, ed è definita analiticamente dalla sostituzione, a determinante simmetrico,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

o dalla sua inversa.

264. Si vede immediatamente che: se la polare p' di P' appartiene a P'', la polare p'' di P'' appartiene a P'. Infatti P'' è coniugato di P', quindi P' di P''.

Da ciò segue che *se un punto P'' descrive la punteggiata p', la polare p'' descrive il fascio che ha per centro il polo P' di p'.*

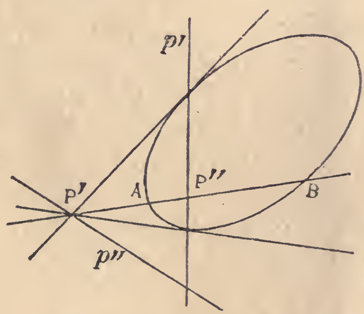
265. Sia p una retta qualunque del piano, e siano A, B i punti (reali o complessi) di intersezione di p con la conica.

Ad ogni punto P' di p possiamo far corrispondere, su p, il punto P'' coniugato di P', ossia l'intersezione di p con la polare p' di P': risulta da quanto precede che a P'' corrisponderà P'; tra i punti di p è così posta una doppia corrispondenza.

E considerando che il birapporto $(P'P''AB)$ ha, per ogni coppia $P'P''$, il valore costante -1, vediamo che questa corrispondenza è una involuzione, di cui A, B sono i punti doppi.

Possiamo dunque concludere: *la conica $f(x_1x_2x_3)=0$ induce sopra ogni retta p del piano una involuzione, nella quale sono punti doppi le intersezioni A, B di p con la conica.*

Detta involuzione è *iperbolica* se la retta p sega la conica in due punti reali e distinti, è *ellittica* se la retta p è esterna alla conica; ed è *degenere* se la retta p è tangente alla conica.



Reciprocamente: *se la involuzione determinata su la p dalla conica $f(x_1x_2x_3)=0$ è iperbolica, la retta p sega la conica in due punti reali e distinti, se ellittica la p è esterna alla conica; se degenere è tangente alla conica.*

266. Rette coniugate. *Due rette p', p'' si dicono coniugate rispetto alla conica $f(x_1x_2x_3)=0$, quando l'una di esse appartiene al polo dell'altra.*

Indichiamo con $\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ le coordinate di p', con $\xi_1''\xi_2''\xi_3''$ le coordinate di p''; con $P'(x_1'x_2'x_3')$ il polo della retta $p''(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$; con $P''(x_1''x_2''x_3'')$ il polo della retta $p''(\xi_1''\xi_2''\xi_3'')$. Dovremo avere (for. (20))

$$\begin{cases} x_1' = A_{11}\xi_1' + A_{12}\xi_2' + A_{13}\xi_3' \\ x_2' = A_{21}\xi_1' + A_{22}\xi_2' + A_{23}\xi_3' \\ x_3' = A_{31}\xi_1' + A_{32}\xi_2' + A_{33}\xi_3' \end{cases}$$

e, per la condizione di appartenenza di P' a p'',

$$\xi_1''x_1' + \xi_2''x_2' + \xi_3''x_3' = 0,$$

cioè

$$(21)\quad (A_{11}\xi_1' + A_{12}\xi_2' + A_{13}\xi_3')\xi_1'' + (A_{21}\xi_1' + A_{22}\xi_2' + A_{23}\xi_3')\xi_2'' + \\ + (A_{31}\xi_1' + A_{32}\xi_2' + A_{33}\xi_3')\xi_3'' = 0$$

ed è questa la **condizione di coniugio** delle due rette $p'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$, $p''(\xi_1''\xi_2''\xi_3'')$.

La formula trovata è la duale di quella che esprime la condizione di coniugio di due punti $P'(x_1'x_2'x_3')$, $P''(x_1''x_2''x_3'')$ trovata al n.° 260.

267. Conica inviluppo. La condizione perchè una retta sia *autoconiugata* (cioè perchè contenga il suo polo e quindi sia tangente alla conica) si deduce dalla formula (21) supponendo $\xi' = \xi''$. Togliendo gli apici alle ξ per indicare genericamente coordinate di una retta che si suppone autoconiugata, (cioè tangente alla conica) si trova

$$(A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3)\xi_1 + (A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3)\xi_2 + \\ + (A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3)\xi_3 = 0$$

e riducendo

$$(22)\quad A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0.$$

Le coordinate $\xi_1\xi_2\xi_3$ di qualsiasi retta tangente alla conica soddisfano a questa equazione, e le rette, le cui coordinate soddisfano a questa equazione sono tangenti alla conica.

L'equazione scritta rappresenta dunque l'insieme di tutte le tangenti che inviluppano la conica, e perciò si dice che essa è l'**equazione della conica inviluppo di tangenti.** Essa è duale della *equazione della conica luogo di punti*, scritta al n.° 241. In coordinate non omogenee di retta la equazione della conica inviluppo ha la forma

$$(22') \qquad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0.$$

Il fatto che l'equazione della conica inviluppo risulta di 2.° grado, rispecchia la proprietà geometrica, già da noi riscontrata, che da un punto del piano di una conica escono due tangenti (reali e distinte, reali ed eguali, od immaginarie) alla conica, e si esprime dicendo che la **conica** è **una curva della seconda classe.**

Accostando questo risultato a quello enunciato al n.° 247 vediamo che *le coniche sono curve del secondo ordine e della seconda classe.*

268. Inviluppi degeneri. Con considerazioni duali a quelle svolte al n.° 248, si vede che: se il determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0$$

è nullo ed *ha caratteristica* 2, l'inviluppo rappresentato dall'equazione (22) degenera in due fasci di rette, o, se si vuole, in una **coppia di punti**, centri di tali fasci. Se *ha caratteristica* 1 i due fasci risultano sovrapposti, od, in altri termini, l'inviluppo degenera in un **punto doppio**, centro comune di quei due fasci. Da note proprietà dei determinanti abbiamo subito che *se una conica è degenere come luogo di punti, lo è anche come inviluppo delle sue tangenti.*

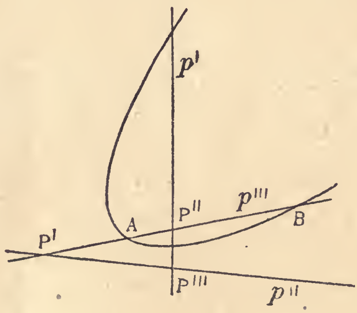
269. La proposizione duale di quella data al n.° 265 si enuncia dicendo:

Sopra ogni fascio di raggi aventi il centro in un punto qualsiasi P del piano di una conica, questa determina una involuzione, nella quale si corrispondono le coppie di raggi coniugati, e sono raggi doppi le tangenti per P alla conica.

Detta involuzione è iperbolica se P è esterno alla conica; ellittica se P è interno; degenere se P appartiene alla conica e, reciprocamente: *il punto P è esterno, interno, o sulla conica, secondo che detta involuzione risulta iperbolica, ellittica, o degenere.*

270. Pel polo P' di una retta p' conduciamo una retta qualunque p'' ed indichiamo con P''' il punto di incontro di p' con p''. La polare p''' di questo punto (che appartiene a p' ed a p'') dovrà passare per P' e per P'' ed il polo P'' della p'' apparterà a p' ed a p''' cioè sarà il terzo vertice del trilatero $p'p''p'''$.

Il triangolo $P'P''P'''$ costruito ha dunque la proprietà che in esso, *ciascun vertice ha per polare il lato opposto.* Un tale triangolo si dice **autoconiugato** o **autopolare** od anche **autoreciproco** *rispetto alla conica.*



Si vede subito, con facilissime considerazioni geometriche, che *un triangolo autopolare non può avere tutti e tre i suoi vertici interni alla conica, nè tutti e tre esterni ad essa.*

271. Polarità determinata dall'assoluto. I risultati ottenuti hanno un'interpretazione analitica anche nel caso che la conica rispetto cui si considera la polarità *non sia reale.*

Consideriamo, in particolare la **polarità rispetto all'assoluto** (n.° 238, pag. 201).

Dimostriamo anzitutto che *l'assoluto è il luogo dei punti ciclici dello spazio.*

Infatti i punti ciclici di un piano π sono (n.° 70, pag. 53) i punti impropri delle rette isotrope uscenti da un punto qualunque del piano, e quindi rispetto a un qualunque sistema di coordinate cartesiane ortogonali hanno le coordinate cartesiane omogenee (1, i, 0) e (1, $-i$, 0) (n.° 152, pag. 125): poichè le rette isotrope uscenti dall'origine hanno per coefficienti angolari appunto i numeri (coniugati)

$$m_1 = i, \quad m_2 = -i.$$

Da questo segue subito che i due punti ciclici *appartengono a tutti i cerchi del piano* (Vedi più innanzi al n.° 295). Infatti l'equazione omogenea di ogni cerchio si può porre sotto la forma

$$(x_1 - x_3 a)^2 + (x_2 - x_3 b)^2 = x_3^2 r^2,$$

ed è soddisfatta dalle coordinate dei punti ciclici.

Dunque *i punti ciclici di un piano π sono i punti impropri di un cerchio C (qualunque) ad esso appartenente.*

Considerando il cerchio C come intersezione del piano π con una sfera S, vediamo che i punti improprii di C dovranno appartenere alla retta impropria del piano π ed al cerchio improprio di S; cioè saranno i punti dove la traccia di π sul piano improprio taglia l'assoluto.

Reciprocamente: presi due punti A_∞, B_∞ sull'assoluto, la retta per questi due punti determinerà la giacitura di un piano che ha i punti A_∞, B_∞ come punti ciclici.

Da ciò immediatamente consegue che *due rette dello spazio r, r', sono fra loro ortogonali quando le loro traccie T_∞, T_∞' sul piano improprio, sono punti coniugati rispetto all'assoluto.*

Infatti, indicando con A_∞, B_∞ i punti in cui la $T_\infty T_\infty'$ taglia l'assoluto, se da un punto qualunque proprio, O, proiettiamo i punti A_∞, B_∞, T_∞, T_∞', otterremo un gruppo armonico di raggi; dunque le parallele per P alle r, r' separano armonicamente le rette isotrope del piano di esse che escono da P, e perciò esse sono ortogonali fra loro (n.° 70, pag. 53). Reciprocamente, se due rette r, r' sono ortogonali, due parallele ad esse per un punto O qualunque dividono armonicamente le rette isotrope (del loro piano) uscenti dal loro punto di incontro, perciò i punti impropri T_∞, T_∞' delle date rette sono coniugati rispetto all'assoluto.

Da quanto abbiamo dimostrato segue anche che: una retta ρ_∞ ed un punto T_∞ coniugati nella polarità indotta dall'assoluto, determinano la giacitura di un piano π, e la direzione di una retta r ortogonali fra loro; o, in altri termini: *un piano* π *ed una retta* r *sono ortogonali quando le loro traccie sul piano improprio sono retta polare e polo rispetto all'assoluto.*

Ed infatti una retta avente per punto improprio T_∞ risulterà perpendicolare a tutte le rette di un piano qualunque avente per retta impropria ρ_∞.

Similmente si vede che: *Due piani sono ortogonali fra loro se le loro traccie sul piano improprio sono coniugate rispetto all'assoluto.*

CAPITOLO II.

PROPRIETÀ DIAMETRALI

§ I. Le tre specie di coniche.

272. Una conica $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ può essere segata dalla retta impropria in due punti immaginari (coniugati), in due punti reali e distinti, in due punti reali e coincidenti.

Nel primo caso la conica vien detta **ellisse**, nel secondo **iperbole**, nel terzo **parabola**.

Vogliamo ora vedere come, dall'esame dei coefficienti della equazione della conica, si possa desumere la specie cui essa appartiene.

Faremo perciò sistema della equazione della conica e di quella della retta impropria, scrivendo

$$\begin{cases} f(x_1 x_2 x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ \quad = 0. \end{cases}$$

Eliminando x_3 avremo,

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \tag{22}$$

questa è l'equazione che determina le due prime coordinate x_1, x_2 dei punti impropri della curva (la terza è $x_3 = 0$), dei punti cioè dove la retta impropria sega la curva. E, trattandosi di coordinate omogenee, ci basterà determinare i valori del rapporto $m = \frac{x_2}{x_1}$ che soddisfano la (22), cioè che sono radici della equazione di secondo grado

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0. \tag{23}$$

Secondo dunque che queste radici saranno reali e distinte, reali ed eguali, od immaginarie, la conica apparterrà alla specie *iperbole, parabola,* od *ellisse.*

Il criterio per questa distinzione si ricava dall'esame del discriminante della equazione (23): $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$; sappiamo infatti che, secondo che questo è > 0, $= 0$, < 0, le radici della (23) risultano reali e distinte, reali ed eguali, od immaginarie, concludiamo perciò:

$$(24)\quad \begin{cases} \text{il caso } \textit{iperbolico è caratterizzato} \text{ da } a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{parabolico} \quad \text{»} \quad \text{»} \; a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{ellittico} \quad \text{»} \quad \text{»} \; a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0. \end{cases}$$

Osservando che nel discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

della forma quadratica $f(x_1 x_2 x_3)$, il complemento algebrico di a_{33} è

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

possiamo anche enunciare la regola precedente dicendo

$$(25)\quad \begin{cases} \text{il caso } \textit{iperbolico è caratterizzato} \text{ da } A_{33} < 0, \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{parabolico} \quad \text{»} \quad \text{»} \; A_{33} = 0, \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{ellittico} \quad \text{»} \quad \text{»} \; A_{33} > 0. \end{cases}$$

Se è $A = 0$, la conica degenera in una coppia di rette. Se queste sono reali, distinte ed incidenti, determinano sulla retta impropria due punti reali e distinti: se parallele, un sol punto reale, se immaginarie coniugate, due punti immaginari coniugati; possiamo dunque dire che, quando è $A = 0$, l'iperbole degenera in una coppia di rette reali, distinte ed incidenti; la parabola in una coppia di rette reali parallele, la ellissi in una coppia di rette immaginarie coniugate.

È utile per lo studioso l'osservare che, *se la equazione della conica è data nella forma non omogenea*

$$F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

la equazione (23) *che dà* **le direzioni dei punti improprii** *della curva, si ottiene semplicemente con l'eguagliare allo zero il complesso dei termini di secondo grado*

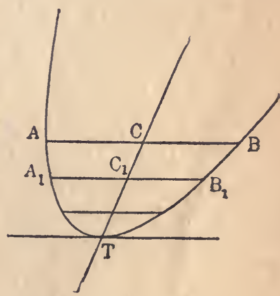
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

e col prendere, nella equazione risultante, come quantità incognita, il quoziente $m = \frac{y}{x}$. Le radici di questa equazione ci danno i coefficienti angolari delle direzioni corrispondenti ai punti impropri della curva.

§ II. Centro e diametri.

273. Consideriamo un sistema di corde parallele AB, A_1B_1.... tracciate in una conica $f(x_1x_2x_3) = 0$.

Sopra ciascuna di queste corde il punto di mezzo C è il coniugato armonico del punto improprio della corda medesima rispetto agli estremi A, B, A_1, B_1,.... e, siccome il punto improprio è comune a tutte le corde del sistema, i punti coniugati di esso cioè i punti di mezzo C, C_1.... appartengono alla *polare di esso punto improprio*, e cioè *sono allineati sopra una retta*, che si dice **diametro** *della conica, coniugato alla direzione delle corde.*



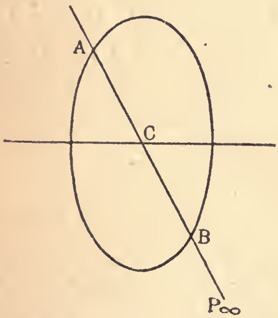
Vediamo dunque così che: *il luogo dei punti di mezzo in un sistema di corde parallele di una conica, è il* **diametro**, *coniugato alla direzione di dette corde.*

Osservazione. — Col nome di *diametro* si usa indicare sia la retta indefinita, polare del punto improprio, sia il segmento di essa, compreso fra i punti in cui essa interseca la conica.

In quest'ultimo senso si può parlare di *estremi del diametro*, di *lunghezza del diametro* ecc.

274. Le *tangenti alle estremità* T *del diametro* hanno il polo nel punto stesso T di contatto, cioè in un punto del diametro, perciò esse dovranno passare pel polo di questo diametro (n.° 264) e quindi *saranno anch' esse parallele alle corde del sistema, bisecate da tale diametro.*

275. Centro della conica. Tutti i diametri di una conica, essendo polari di punti allineati (sulla retta impropria) passano pel polo della retta impropria; questo punto, comune a tutti i diametri, è detto centro *della conica.*



Ogni retta r passante pel centro, incontra la retta impropria (polare del centro) in un punto P_∞ che è coniugato armonico del centro rispetto ai punti A, B in cui la retta r incontra la conica; il centro è dunque punto di mezzo della corda AB. Dunque: *il centro è punto di mezzo di tutte le corde passanti per esso.* Si vede inoltre che: *ogni corda passante pel centro è un diametro*, ed infatti, poichè la retta cui tale corda appartiene passa per il centro, polo della retta impropria, il suo proprio polo sarà sulla retta impropria; e la retta sarà un diametro.

276. Dato il coefficiente angolare m del sistema di corde parallele, vogliamo *scrivere l' equazione del diametro ad esse coniugato.* Basterà perciò considerare che il punto improprio P_∞, corrispondente alla direzione m, ha per coordinate omogenee (n.° 152, pag. 125) $(1, m, 0)$; la equazione della polare di questo punto, sarà dunque (n.° 257, pag. 223)

$$(1) \qquad (a_{11} + a_{12}m)x_1 + (a_{21} + a_{22}m)x_2 + (a_{31} + a_{32}m)x_3 = 0$$

tale *è la equazione del diametro coniugato alla direzione di coefficiente angolare m*; essa può anche scriversi:

$$(1') \qquad (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)m = 0.$$

In particolare *la equazione del diametro coniugato alla direzione dell' asse x*, $\{ m = 0$, cioè $P_\infty(1, 0, 0) \}$ è:

$$f_{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

cioè si ottiene eguagliando allo zero la semiderivata parziale $f_{x_1}'(x_1 x_2 x_3)$.

La equazione del diametro coniugato alla direzione dell'asse y, $\{m=\infty$, cioè $P_\infty(0,\ 1,\ 0)\}$ è:

$$f_{x_2}' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

e si ottiene eguagliando allo zero la semiderivata parziale rispetto ad x_2. Confrontando con la (1′) si vede che *la* **equazione del diametro coniugato alla direzione** m *si ottiene eguagliando allo zero la combinazione lineare* $f_{x_1}' + m f_{x_2}'$.

277. È opportuno osservare che, se la equazione della curva è data in *coordinate non omogenee*, $F(xy)=0$, le equazioni dei diametri coniugati alle direzioni dei due assi cartesiani sono

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

e quella del diametro d' coniugato alla direzione di coefficiente angolare m è una combinazione lineare della forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + m\,\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$$

cioè

(1″) $$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Calcolando il coefficiente angolare m' di questo diametro si trova

(2) $$m' = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{12} + a_{22}m}$$

cioè

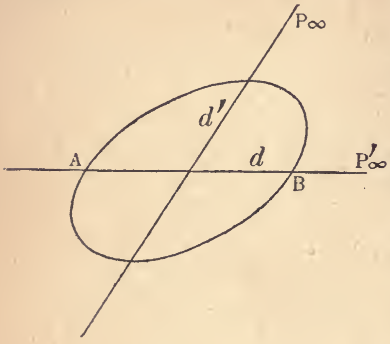
$$a_{22}mm' + a_{12}(m+m') + a_{11} = 0$$

si vede dunque, che *fra i coefficienti angolari* mm' *di una direzione e del diametro ad essa coniugato passa la relazione bilineare simmetrica*

(3) $$a_{22}mm' + a_{12}(m+m') + a_{11} = 0;$$

questa è la equazione di una involuzione in un fascio di raggi, in cui m ed m' sono le coordinate di elementi corrispondenti.

Ora giova considerare fra le corde AB del sistema cui il diametro d' è coniugato, quella passante pel centro, cioè il diametro d di coefficiente angolare m alla cui direzione è coniugato il diametro d': diremo che *il diametro d' è coniugato al diametro d, e quindi anche che d è coniugato a d'*; poichè, appartenendo d al polo P_∞' di d', il suo polo P_∞ apparterrà a d'.



Una coppia di diametri coniugati dd', è una *coppia di rette coniugate*, al senso definito al n.° 266; con questa sola particolarità, che i diametri coniugati sono rette del fascio che ha per sostegno il centro della conica.

Ora noi sappiamo che una conica $f(x_1x_2x_3)=0$ determina sopra qualsivoglia fascio del piano cui essa appartiene, una involuzione di raggi. La formula (3) che abbiamo trovato è appunto la equazione della involuzione determinata nel fascio che ha per sostegno il centro, cioè nel fascio dei diametri. Concludiamo dunque che la **equazione della involuzione dei diametri coniugati** *è rappresentata dall'equazione*

$$a_{22}mm' + a_{12}(m+m') + a_{11} = 0.$$

278. La relazione caratteristica del *caso parabolico*

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

ci dice che *in questo caso la involuzione dei diametri coniugati è degenere* (n.° 54, pag. 42), la qual cosa immediatamente si verifica osservando che, per qualunque valore di m si può, in forza di tale supposizione, scrivere:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11} + ma_{12}}{a_{12} + ma_{22}} = -m'.$$

Il coefficiente angolare m' del diametro coniugato ad una direzione m qualunque, ha dunque nel caso parabolico il valore costante

$$m' = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{4}$$

e, perciò, **nella parabola, tutti i diametri sono paralleli.**

279. Per trovare le coordinate del centro di una conica basterà osservare che il centro è la intersezione comune di tutti i diametri, e perciò che le coordinate cercate debbono essere soluzioni comuni del sistema formato dalle equazioni di due diametri qualunque.

Scegliendo i diametri coniugati agli assi cartesiani, si ha il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \end{cases}$$

da cui

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ossia

(5) $$x_1 : x_2 : x_3 :: A_{13} : A_{23} : A_{33}.$$

Tali sono le *coordinate omogenee del centro.*

Le coordinate non omogenee (α, β) sono:

(5') $$\alpha = \frac{x_1}{x_3} = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad \beta = \frac{x_2}{x_3} = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

Nei casi iperbolico ed ellittico è $A_{33} \neq 0$, ed il centro è *un punto proprio e determinato*; perciò *la iperbole e la ellisse si dicono* **coniche a centro.**

Nel caso parabolico è $A_{33} = 0$, cioè *il centro della parabola è il punto improprio di coordinate* $(A_{13}, A_{23}, 0)$.

Questo punto appartiene alla direzione di coefficiente angolare

$$m' = \frac{A_{23}}{A_{13}} = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}},$$

moltiplicando per a_{12} ambo i termini della frazione al secondo membro e ricordando che nella nostra ipotesi è $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, si trova

$$m' = \frac{a_{13}a_{12}^2 - a_{11}a_{12}a_{23}}{a_{12}^2a_{23} - a_{12}a_{13}a_{22}} = \frac{a_{13}a_{11}a_{22} - a_{11}a_{12}a_{23}}{a_{12}^2a_{23} - a_{12}a_{13}a_{22}} =$$

$$= \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

e ricordando la formula (4) si verifica che *il centro della parabola è il punto improprio comune a tutti i diametri,* come era facile prevedere.

Si ha *vera indeterminazione* per le formule (5) che danno le coordinate del centro, solo quando

$$A_{13} = 0 \quad A_{23} = 0 \quad A_{33} = 0,$$

in questo caso è anche $A = 0$, e le relazioni $A = 0$, $A_{33} = 0$, ci dicono che la conica appartiene alla specie parabola ed è degenere, essa perciò si compone di una coppia di rette parallele: è evidente, anche geometricamente, che in tale caso vi sono infiniti centri il cui luogo è la retta bissettrice della striscia formata dalle due rette parallele che compongono la conica degenere.

§ III. Asintoti.

280. Sappiamo che i raggi doppi nella involuzione che la conica $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ determina sopra un fascio di raggi uscenti da un punto P, sono le tangenti per P alla conica (n.° 269).

Se, in particolare, consideriamo la involuzione dei diametri coniugati, i raggi doppi in questa involuzione sono le *tangenti alla conica uscenti dal centro.*

Ma sappiamo altresì che le tangenti ad una conica uscenti da un punto P toccano la conica nei punti dove questa è intersecata dalla polare di P, dunque le tangenti alla conica uscenti dal centro toccheranno la conica nei punti dove questa è tagliata dalla polare del centro, cioè dalla retta impropria; infine, nei punti improprii della conica.

Le tangenti alla conica nei punti improprii di essa si dicono **asintoti della conica**, e dalle riflessioni fatte si ricava che *gli asintoti sono le tangenti alla conica uscenti dal centro*: e che *essi si determinano cercando gli elementi doppi nella involuzione dei diametri coniugati.*

Ricordando adunque che la equazione di questa involuzione è

$$a_{22} m m' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0$$

determineremo le direzioni degli asintoti mediante la equazione

$$a_{22} m^2 + 2 a_{12} m + a_{11} = 0. \tag{6}$$

Questa è la stessa che abbiamo scritto al n.° 272 per trovare i punti improprii della conica. Dunque, come si fece allora, concluderemo che: *si hanno due asintoti reali e distinti nel caso iperbolico e non si hanno asintoti reali nel caso ellittico.*

La risoluzione della (6) farà conoscere due valori $m_1 m_2$ (reali e distinti, complessi e coniugati, o coincidenti) cui corrispondono i punti improprii, $P_\infty'(1, m_1, 0)$, $P_\infty''(1, m_2, 0)$ che appartengono agli asintoti.

Ciò fatto avremo le equazioni degli asintoti scrivendo che, rispettivamente, essi debbono passare per i punti $P_\infty'(1, m_1, 0)$, $P_\infty''(1, m_2, 0)$ così determinati, e pel centro della conica $C(A_{13} A_{23} A_{33})$: avremo cioè le equazioni

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & m_1 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & m_2 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Nel caso *iperbolico* m_1 ed m_2 sono numeri reali e distinti, e quindi le equazioni scritte rappresentano rette reali e distinte.

Nel *caso ellittico* m_1 ed m_2 sono numeri complessi coniugati, perciò gli asintoti sono rette immaginarie coniugate.

Nel *caso parabolico* è $m_1 = m_2$, $A_{33} = 0$, perciò si ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & m_1 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$x_3(A_{23} - m_1 A_{13}) = 0$$

infine

$$x_3 = 0,$$

che rappresenta la retta impropria; dunque la *parabola non ha asintoti proprii, ma ha, per solo asintoto, la retta impropria.*

281. Per scrivere effettivamente le equazioni degli asintoti, se la equazione della curva è data sotto la forma non omogenea $F(xy) = 0$, basterà osservare che la equazione che si ottiene eguagliando allo zero il gruppo dei termini di 2.° grado

$$(7') \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

rappresenta le parallele agli asintoti uscenti dall'origine;

quindi la equazione in $\frac{y}{x}$

$$a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{y}{x} + a_{11} = 0,$$

ha per radici i coefficienti angolari m_1, m_2, degli asintoti. Dunque basterà scrivere le equazioni delle rette che passano pel centro ed hanno coefficienti angolari m_1, m_2, rispettivamente.

Se il centro della conica è nella origine, la equazione (7'), *può riguardarsi come la equazione complessiva degli asintoti.*

Se il centro della conica non è nella origine, indicando con $\alpha = \frac{A_{13}}{A_{33}}$, $\beta = \frac{A_{23}}{A_{33}}$ le sue coordinate, trasporteremo con una traslazione di assi la origine delle coordinate nel centro, e scriveremo la **equazione complessiva degli asintoti** sotto la forma:

$$a_{11}(x - \alpha)^2 + 2a_{12}(x - \alpha)(y - \beta) + a_{22}(y - \beta)^2 = 0. \tag{7''}$$

Le formule stabilite fino ad ora valgono anche per sistemi di assi cartesiani *non ortogonali.*

§ IV. Assi.

282. Sappiamo che in una involuzione di raggi esiste sempre una *coppia ortogonale*, e che, in generale, ne esiste una sola (n.° 69, pag. 51).

I diametri, che costituiscono la coppia ortogonale nella involuzione dei diametri coniugati di una conica, si dicono *diametri principali od* assi *della conica.*

I punti dove gli assi incontrano la conica si dicono vertici.

283. Gli assi della conica dividono per metà le corde ad essi perpendicolari, cioè sono *assi di simmetria ortogonale.*

284. Sappiamo che in una involuzione di raggi, la coppia ortogonale è costituita dalle bisettrici degli angoli formati dai raggi doppi (n.° 69); considerando dunque che nella involuzione dei diametri coniugati i raggi doppi sono gli asintoti e la coppia ortogonale quella degli assi, concluderemo che *gli assi bisecano gli angoli formati dagli asintoti.*

285. Per la **determinazione analitica degli assi**, basterà far sistema della equazione della involuzione dei diametri coniugati e della condizione di perpendicolarità (cioè dalla equazione della involuzione ortogonale). Supponendo la conica riferita ad un sistema **cartesiano ortogonale** avremo dunque,

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0 \\ mm' + 1 = 0\,; \end{cases}$$

dal qual sistema eliminando m', si ricava

$$(9)\qquad a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

$$(10)\qquad m = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.$$

Il discriminante $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$ è *sempre positivo*: dunque *esistono sempre due valori* m_1, m_2 *che soddisfano il sistema* (8). A questi due valori, peraltro, non corrispondono due coppie ortogonali; ma una sola, perchè i diametri corrispondenti ai coefficienti angolari m_1, m_2 risultano coniugati fra loro ed ortogonali.

286. Nel caso in cui sia nullo il discriminante della (9), cioè in cui sia

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

si ha ancora

$$(11)\qquad a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0;$$

in questo caso l'equazione della involuzione dei diametri coniugati si riduce alla

$$a_{22}(mm' + 1) = 0$$

cioè

$$mm' + 1 = 0,$$

che è la condizione di ortogonalità, e la involuzione dei diametri coniugati è una *involuzione circolare* in cui, come è noto (n.° 70, pag. 53) ogni coppia è ortogonale.

D'altra parte è facile vedere (ed a suo luogo sarà dimostrato) che *quando i coefficienti della* $f(x_1x_2x_3)$ *soddisfano le condizioni* (8) *la conica è un* **cerchio.**

Dunque *nel cerchio tutte le coppie di diametri coniugati sono ortogonali* e, reciprocamente, *una conica in cui tutte le coppie di diametri coniugati sono ortogonali è un cerchio.*

Si può osservare che, nel caso del cerchio, come conseguenza della ipotesi (11), l'espressione (10) di m assume la forma $\frac{0}{0}$, cioè risulta indeterminata; e ciò, anche dal punto di vista algebrico, spiega il fatto di ritrovare in questo caso, non già un sol valore, ma infiniti, per le coppie m, m' che danno luogo a diametri coniugati ortogonali.

287. *Nel caso parabolico*, dalla relazione $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ si deduce che

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = (a_{11} + a_{22})^2$$

dunque i valori di m_1, m_2 risultano razionali, ed hanno la forma (n.° 278)

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= -\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{A_{23}}{A_{13}} \\ m_2 &= \frac{a_{22}}{a_{12}} = -\frac{A_{13}}{A_{23}}. \end{aligned} \right.$$

Il primo corrisponde alla direzione comune a tutti i diametri, che nella parabola sono paralleli fra loro, il secondo alla direzione ad essa perpendicolare.

288. **Per scrivere effettivamente le equazioni degli assi,** *trovati i valori* m_1, m_2 radici della (9) si metteranno questi valori al posto di m nella equazione

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

che *rappresenta il diametro coniugato alla direzione di coefficiente angolare m nella conica* $f(x_1x_2x_3) = 0$.

289. *Nel caso parabolico* si hanno per gli assi le due equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) - \frac{a_{11}}{a_{12}}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0 \\ &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \frac{a_{22}}{a_{12}}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0 \end{aligned} \right.$$

la prima di queste si riduce ad

$$(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})x_3 = 0$$

cioè ad

$$x_3 = 0$$

e rappresenta la *retta impropria*, l'altra rappresenta una retta propria che ha la direzione comune a tutti i diametri.

Dunque *la parabola ha un solo asse proprio*, la cui equazione è

(12) $$a_{12}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

od, in coordinate non omogenee,

(12′) $$a_{12}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{22}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

L'equazione dell'**asse della parabola** può anche scriversi sotto la forma, facile a ricordare poichè compariscono le derivate parziali,

(12″) $$a_{12}\frac{\partial F}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

oppure, in coordinate non omogenee,

(12‴) $$a_{12}\frac{\partial F}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

290. *Per le coniche a centro le equazioni degli assi si ottengono scrivendo le equazioni delle rette che passano pel centro e che hanno per coefficienti angolari rispettivi le radici m_1, m_2 della equazione* (8).

Analogamente a quanto si è fatto al n.° 279 (quando si trattava degli asintoti), si vedrà che: se il centro della conica è nella origine delle coordinate, **l'equazione complessiva degli assi** *della conica è*

(13) $$a_{12}y^2 + (a_{11} - a_{22})xy - a_{12}x^2 = 0,$$

ed in generale, se le coordinate del centro si indicano con α, β, l'equazione complessiva degli assi è

(13′) $$a_{12}(y - \beta)^2 + (a_{11} - a_{22})(x - \alpha)(y - \beta) - a_{12}(x - \alpha)^2 = 0.$$

§ V. Equazione del cerchio.

291. Il cerchio è definito come il luogo dei punti del piano che hanno distanza dàta r da un punto fisso $C(\alpha\beta)$ dello stesso piano.

Tale proprietà in coordinate cartesiane *ortogonali*, è tradotta analiticamente dalla equazione

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \tag{14}$$

Da questa subito si scorge che *il cerchio è una conica.*

La (14) infatti è una equazione di 2.° grado. Sviluppando i quadrati si trova:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

e confrontando questa con la equazione generale della conica

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

si trova che *nella equazione del cerchio* **manca il termine in** xy **ed i termini in** x^2, y^2 **hanno eguali coefficienti.**

La equazione del cerchio ha cioè la forma

$$a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \tag{15}$$

od, in coordinate omogenee,

$$a_{11}(x_1^2+x_2^2)+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0, \tag{15'}$$

292. *Reciprocamente: ogni equazione della forma* (15) *rappresenta un cerchio.* Ed infatti, la (15) si può scrivere:

$$x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+y^2+2\frac{a_{23}}{a_{11}}y+\left(\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2-\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

ossia

$$\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\frac{a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}. \tag{15''}$$

Confrontando con la (14) si vede che:

1.° Se $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} > 0$, la equazione proposta rappresenta il cerchio che ha il centro nel punto di coordinate

$$\alpha = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad \beta = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$$

ed il cui raggio r è dato da

$$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2};$$

2.° Se $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} = 0$, la equazione proposta è soddisfatta solo per i valori reali

$$x = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad y = -\frac{a_{23}}{a_{11}}:$$

si suol dire che in tal caso la conica rappresentata dalla equazione (15) è *un cerchio di raggio infinitamente piccolo*, ridotto cioè al solo centro.

Ma se vogliamo considerare non solo valori reali, ma anche valori immaginari per le coordinate, vediamo che la (15″) nel caso ora considerato si riduce nella

$$\left\{ y + \frac{a_{23}}{a_{11}} + i\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) \right\} \left\{ y + \frac{a_{23}}{a_{11}} - i\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) \right\} = 0,$$

cioè che il cerchio degenera nelle due rette immaginarie

$$(16) \qquad \begin{cases} y = ix - \dfrac{a_{23}}{a_{11}} + i\dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\[2ex] y = -ix - \dfrac{a_{23}}{a_{11}} - i\dfrac{a_{13}}{a_{11}}. \end{cases}$$

Queste rette sono immaginarie coniugate, hanno il punto comune reale $C(\alpha\beta)$, ed i loro coefficienti angolari sono rispettivamente i, $-i$, cioè esse sono *le* **rette isotrope** *uscenti dal punto* $C(\alpha, \beta)$ (n.° 70).

Si dice che in questo caso il **cerchio è degenere**, o che *degenera in una coppia di rette immaginarie coniugate* (le rette isotrope uscenti dal centro).

3.° Finalmente se $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} < 0$, nessun valore reale delle coordinate x, y può soddisfare la equazione proposta, questa dunque è una conica immaginaria, la quale è ancora detta: **cerchio immaginario.**

293. La ragione della comune denominazione: **cerchio** data alla conica in tutti e tre i casi superiormente considerati, sta in ciò che essa conica è soggetta, in ogni caso, a passare ***per i* punti ciclici** *del piano, e che qualunque conica passante per i punti ciclici ha una equazione della forma* (15) *cioè è un cerchio.*

Scriviamo infatti la equazione (15) sotto la forma omogenea

$$(15') \qquad a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Sostituendo le coordinate dei punti ciclici

$$(1,\ i,\ 0),\quad (1,\ -i,\ 0)$$

abbiamo la identità

$$a_{11}(1 + i^2) = 0$$

e così rimane verificato che la conica (15) passa pei punti ciclici.

Sia, reciprocamente l'equazione generale

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

e sopponiamo che la conica che essa rappresenta passi pei punti ciclici. Sostituendo le coordinate di questi punti troveremo

$$a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0, \quad a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0.$$

Ciò importa appunto che sia

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

Dalla dimostrata proposizione in particolare si ricava che i *punti ciclici appartengono a tutti i cerchi* (reali, immaginari, degeneri) *del piano* (Cfr. il n.° 271).

294. Cerchio per tre punti. Una conica, perchè possa dirsi cerchio, deve dunque passare per i due punti ciclici del piano; ciò spiega perchè, mentre in generale occorrono 5 punti a determinare una conica, bastino tre punti, quando la conica è un cerchio.

Date le coordinate di tre punti proprii $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$, scriveremo la equazione del cerchio ricercando la condizione perchè un punto generico del piano $P(xy)$ appartenga ad uno stesso cerchio, insieme coi tre dati $P_1 P_2 P_3$.

Sapendo che la forma generale del cerchio è la (15), dovremo proporci di determinare i coefficienti $a_{11} a_{13} a_{23} a_{33}$ in modo che siano soddisfatte insieme le condizioni:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}&=0\\ a_{11}(x_1^2+y_1^2)+2a_{13}x_1+2a_{23}y_1+a_{33}&=0\\ a_{11}(x_2^2+y_2^2)+2a_{13}x_2+2a_{23}y_2+a_{33}&=0\\ a_{11}(x_3^2+y_3^2)+2a_{13}x_3+2a_{23}y_3+a_{33}&=0.\end{aligned}\right.$$

Queste sono quattro equazioni lineari, omogenee nelle quattro incognite a_{11}, a_{13}, a_{23}, a_{33}. La condizione di possibilità è

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{17}$$

e questa appunto è la equazione del cerchio per i tre punti $P_1 P_2 P_3$.

295. Se i tre punti $P_1 P_2 P_3$ non sono allineati, il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

è diverso dallo zero, se sono allineati è nullo.

Per discutere quest'ultimo caso, scriviamo la equazione (17) in coordinate omogenee, che meglio si prestano alla rappresentazione di elementi improprii, ponendo

$$x_1=\frac{x_1'}{x_3'},\ y_1=\frac{x_2'}{x_3'};\ x_2=\frac{x_1''}{x_3''},\ y_2=\frac{x_2''}{x_3''};\ x_3=\frac{x_1'''}{x_3'''},\ y_3=\frac{x_2'''}{x_3'''};$$

avremo l'equazione

$$(17') \qquad \begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2, & x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \\ x_1'^2 + x_2'^2, & x_1'x_3' & x_2'x_3' & x_3'^2 \\ x_1''^2 + x_2''^2, & x_1''x_3'' & x_2''x_3'' & x_3''^2 \\ x_1'''^2 + x_2'''^2, & x_1'''x_3''' & x_2'''x_3''' & x_3'''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nella ipotesi che i tre punti $P_1P_2P_3$ sieno allineati, si ha

$$\begin{vmatrix} x_1'x_3' & x_2'x_3' & x_3'^2 \\ x_1''x_2'' & x_2''x_3'' & x_3''^2 \\ x_1'''x_3''' & x_2'''x_3''' & x_3'''^2 \end{vmatrix} = x_3'x_3''x_3''' \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante a primo membro delle (17') secondo gli elementi della prima linea, avremo una equazione della forma

$$A_1x_1x_3 + A_2x_2x_3 + A_3x_3^2 = 0,$$

cioè

$$x_3(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3) = 0,$$

la quale si spezza nelle due

$$x_3 = 0, \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0.$$

Dunque il cerchio per i tre punti allineati $P_1P_2P_3$ *si spezza nella retta impropria* ($x_3 = 0$) *e nella retta per i tre punti.* È questo il solo caso in cui il cerchio possa degenerare in una *coppia di rette reali.*

Anche in questo caso esso passa per i punti ciclici (i quali appartengono alla retta impropria).

296. Abbiamo già dimostrato che *nel cerchio la involuzione dei diametri coniugati è quella degli angoli retti* (n.° 284). In tale involuzione i raggi doppi sono le *rette isotrope* e tutte le coppie sono ortogonali (n.° 70).

Dunque: *nel cerchio gli asintoti sono le rette isotrope, e tutti i diametri sono principali* (segano per metà le corde ad essi perpendicolari).

297. Sarebbe cosa assai facile ricavare tutte le proprietà geometriche del cerchio, dallo studio della equazione (15) che lo rappresenta.

Ma questo studio rientra in quello più generale delle coniche, che vogliamo ora riprendere.

§ VI. Forme particolari delle equazioni delle coniche.

298. Equazioni riferite al centro come origine delle coordinate. Scegliendo in modo opportuno gli assi cartesiani (ortogonali od obbliqui) cui una conica si suppone riferita, si può far si che la equazione di essa conica assuma forma più semplice e meglio atta alle operazioni di calcolo ed alle discussioni geometriche.

In particolare, disponendo dei coefficienti arbitrari che compariscono nelle formule di trasformazione (n.° 99, pag. 76) potremo render nulli alcuni coefficienti nella equazione riferita ai nuovi assi.

Sappiamo già (n.° 100) che non sarà possibile che con tali trasformazioni si annullino i coefficienti di tutti i termini di 2.° grado, perchè il grado complessivo nelle x, y, del polinomio $F(xy)$ non può venire alterato.

È peraltro possibile, *nella equazione di una conica a centro, rendere eguali allo zero i coefficienti dei termini di primo grado; e ciò con una traslazione di assi che porti* **la origine nel centro della conica.**

Sappiamo infatti (n.° 279) che le coordinate del centro sono

$$\alpha = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad \beta = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

se supponiamo eseguita la traslazione che porta l'origine nel punto $(\alpha\beta)$, la equazione della conica, nel nuovo sistema, avrà coefficienti tali che per essi risulti $\alpha = 0$, $\beta = 0$, cioè sarà:

$$(18) \qquad \begin{cases} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0 \\ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = 0, \end{cases}$$

ma poichè si tratta di una conica a centro, è

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \mp 0;$$

ed il sistema

$$\begin{aligned} a_{12}x_1 - a_{22}x_2 = 0 \\ a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = 0 \end{aligned}$$

non può essere risolto se non da valori entrambi nulli di x_1, x_2.

Le (18) ci dicono che tale sistema è risoluto da $x_1 = a_{23}$, $x_2 = a_{13}$. Sarà dunque

$$a_{13} = a_{23} = 0,$$

cioè *saranno nulli i coefficienti dei termini di primo grado* nella $F(xy) = 0$.

È poi evidente che, se in una equazione $F(xy)$ tali coefficienti sono nulli, le (18) sono entrambe soddisfatte, cioè $\alpha = \beta = 0$, e la conica è riferita ad un sistema cartesiano con l'origine nel centro.

Eseguendo effettivamente la trasformazione

$$x = X + \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y = Y + \frac{A_{23}}{A_{33}},$$

si ritrova la equazione della conica sotto la forma

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + F\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right) = 0;$$

cioè *i termini di secondo grado rimangono invariati ed il termine noto risulta eguale al valore che assume il primo membro della equazione primitiva quando in luogo delle coordinate x, y si mettano le coordinate del centro.*

Fatti i calcoli si trova

$$F\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right) = \frac{A}{A_{33}}$$

e la equazione trasformata assume la forma

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

299. Equazioni di coniche a centro riferite ad una coppia di diametri coniugati.

Se si eseguisce un cambiamento nella direzione degli assi cartesiani, che trasporti gli assi $0x$, $0y$ sopra due diametri coniugati, *l'equazione della conica riferita al nuovo sistema, mancherà del termine in xy.*

Infatti abbiamo visto che, dopo la traslazione della origine nel centro, l'equazione della conica assume la forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

nella quale la particolarità dell'essere nulli i coefficienti $a_{13}a_{23}$ dei termini di primo grado non potrà cambiare per una trasformazione di assi che conservi immutata la origine. Supponiamo che, dopo eseguita tale trasformazione, l'asse y sia sul diametro coniugato alla direzione dell'asse x. L'equazione di questo diametro, che sarà

$$(19) \qquad a_{11}x + a_{12}y = 0,$$

(n.° 275) dovrà in tale ipotesi, ridursi a quella dell'asse y, cioè ad $x = 0$.

Ciò importa che nella (19) sia nullo il coefficiente di y, cioè appunto che sia

$$a_{12} = 0.$$

In particolare tale risultato si ottiene riferendo la conica agli assi della conica medesima, considerati come assi cartesiani di riferimento.

Da quanto si è detto risulta che: *una conica a centro, riferita ad un sistema di diametri coniugati* (come assi cartesiani) *assume la forma trinomia*:

$$(20) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

La qual forma è detta **normale** *o* **canonica per le coniche a centro.**

300. Si può osservare che la condizione

$$a_{12} = 0$$

cioè *l'annullarsi del coefficiente del termine in xy, è soddisfatta per la equazione di qualunque conica, la quale si supponga riferita ad un sistema di assi $0x$, $0y$* **paralleli a due diametri coniugati** (sia o no la origine nel centro, ed anche se la conica non è a centro).

La qual cosa subito si verifica scrivendo la equazione del diametro coniugato alla direzione dell'asse x, ed osservando che questa deve rappresentare una retta parallela all'asse y, e quindi che in essa deve essere nullo il coefficiente a_{12} della variabile y.

301. Per il caso **parabolico** è specialmente opportuna una trasformazione (la quale è pure assai utile per coniche a centro) e che consiste nell'assumere *come origine degli assi cartesiani un punto della conica, come asse delle x il diametro della conica passante per tal punto, come asse delle y la tangente alla conica in questo medesimo punto.*

Riferita ad un tale sistema (il quale risulta ortogonale se il punto preso su la conica è un vertice) l'equazione della conica prende la **forma trinomia**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \tag{21}$$

Ed infatti, poichè la conica passa per la origine, mancherà nella sua equazione il termine noto, cioè sarà

$$a_{33} = 0.$$

L'equazione della tangente alla conica nella origine, ha la forma (n.° 259)

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

e, nel nostro caso, per essere $a_{33} = 0$,

$$a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Questa deve ridursi alla equazione dell'asse $0y$, la quale è $x = 0$, perciò deve essere anche

$$a_{23} = 0.$$

Finalmente, l'equazione del diametro coniugato alla direzione dell'asse $0y$, che in generale è

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

e, nel caso nostro, si riduce ad

$$a_{12}x + a_{22}y = 0,$$

dovendo ridursi a quella dell'asse Ox, che è $y=0$, richiede che sia soddisfatta la condizione

$$a_{12}=0.$$

Le condizioni $a_{12}=a_{23}=a_{33}=0$ riducono la equazione generale della conica alla forma trinomia da noi prevista

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{13}x=0.$$

Supponendo $a_{22}\neq 0$ scriveremo questa equazione sotto la forma:

(22) $$y^2=2px+kx^2.$$

Calcolando, per questa equazione, la espressione

$$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

si trova

$$A_{33}=-k.$$

Dunque *la equazione* (22) *rappresenta un'ellisse se* $k<0$, *una iperbole se* $k>0$, *una parabola se* $k=0$.

Essa è perciò particolarmente utile nel caso parabolico, poichè allora essa assume la forma binomia

(23) $$y^2=2px:$$

è questa la **forma normale della equazione della parabola.** Si ottiene riferendo la parabola ad un sistema di assi cartesiani, con la origine O in un punto della parabola, l'asse Ox nel diametro della parabola uscente da O, l'asse Oy nella tangente in O alla parabola.

Questo sistema è ortogonale se O è il vertice della parabola.

302. Iperbole riferita agli asintoti. Anche la equazione della iperbole assume forma binomia quando è riferita agli asintoti, come ad assi coordinati. E precisamente vedremo che in tale ipotesi la equazione della iperbole ha la forma

(24) $$xy=k^2.$$

Infatti: poichè, nella nostra ipotesi, l'origine è nel centro, sarà

$$a_{13}=a_{23}=0.$$

L'equazione complessiva degli asintoti, quando il centro è nell'origine è (n.° 281)

$$(7)\qquad a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{11}x^2 = 0:$$

questa, quando gli assi coordinati siano negli asintoti, dovrà assumere la forma che compete alla equazione complessiva degli assi coordinati, cioè

$$xy = 0$$

perciò si richiede che nella (7) sia

$$a_{22} = a_{11} = 0.$$

Si vede dunque che la equazione della iperbole acquista la forma

$$2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

la quale è equivalente alla (24).

Questa forma richiede, in generale, che gli assi cartesiani siano obliqui.

303. L'equazione in *coordinate di rette*, di una **conica a centro inviluppo**, riferita ad una coppia di diametri coniugati assunti come assi cartesiani, si ricava dalla formula (22') data al n.° 267, cioè

$$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0.$$

Tenendo conto che, per la scelta degli assi di riferimento, si ha

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

si ritrova

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{11} = a_{22}a_{33}, \quad A_{22} = a_{11}a_{33}, \quad A_{33} = a_{11}a_{22}$$

e rimane semplicemente

$$(20')\qquad a_{22}a_{33}u^2 + a_{33}a_{11}v^2 + a_{11}a_{22} = 0.$$

Similmente, *la equazione in coordinate di retta della* **parabola inviluppo**, riferita ad un sistema di assi cartesiani con la origine in un punto O della parabola, l'asse Ox nel diametro della parabola passante per O, l'asse Oy nella tangente in O alla parabola, assume la forma

(23') $$pv^2 = 2u,$$
corrispondente ai valori

$$A_{11} = A_{12} = A_{23} = A_{33} = 0, \quad A_{13} = p, \quad A_{22} = -p^2.$$

§ VII. Invarianti ortogonali.

304. Si dicono **invarianti ortogonali** della conica, quelle funzioni dei coefficienti che conservano il medesimo valore per qualsiasi trasformazione di assi ortogonali. Dimostreremo che sono invarianti ortogonali i seguenti:

(25) $$I = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Perciò dovremo premettere alcuni Lemmi.

1.° *Qualunque traslazione* $x = X + m$, $y = Y + n$, *lascia invariati i coefficienti dei termini di 2.° grado nella equazione della conica* (quindi anche I ed A_{33}).

Infatti la equazione $F(xy) = 0$ per la traslazione indicata si trasforma nella

$$\begin{aligned} F_1(XY) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + 2(a_{11}m + a_{12}n + a_{13})X + \\ + 2(a_{21}m + a_{22}n + a_{23})Y + \\ + a_{11}m^2 + a_{22}n^2 + 2a_{12}mn + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

2.° *Una rotazione*

$$\begin{cases} y = \alpha X + \beta Y \\ x = \alpha_1 X + \beta_1 Y \end{cases}$$

trasforma il gruppo dei termini di 2.° grado della equazione primitiva nel gruppo di termini di 2.° grado della trasformata, quello dei termini di primo grado nel gruppo dei termini di 1.° grado e lascia invariato il termine noto.

Ciò risulta dal fatto che le x, y sono espresse da *funzioni* *lineari omogenee* delle X, Y, e si verifica immediatamente, sviluppando i calcoli nella formula

$$F_1(XY) = a_{11}(\alpha X + \beta Y)^2 + a_{22}(\alpha_1 X + \beta_1 Y)^2 +$$
$$+ 2a_{12}(\alpha X + \beta Y)(\alpha_1 X + \beta_1 Y) + 2a_{13}(\alpha X + \beta Y) + 2a_{23}(\alpha_1 X + \beta_1 Y) + a_{33}.$$

Indicando con $a_{rs}'(r, s = 1, 2, 3)$ i coefficienti nella equazione trasformata, avremo quindi in particolare

$$(26) \qquad a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + 2a_{12}'XY = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy.$$

305. Ciò posto, proponiamoci anzitutto di dimostrare la invarianza di I e di A_{33}. Considerando che qualsiasi trasformazione si compone di una traslazione e di una rotazione, ed avendo dimostrato, col 1.° Lemma, che le traslazioni non cambiano il valore di I, nè quello di A_{33}, basterà occuparci delle rotazioni.

Poichè in una rotazione di assi rimane immutata la origine O, la distanza $\overline{OP}$ della origine da un punto P del piano rimarrà la medesima, cioè si avrà

$$(27) \qquad x^2 + y^2 = X^2 + Y^2.$$

Se dalla (26) dimostrata al 2.° Lemma, togliamo la (27) moltiplicata per un fattore ρ, che lasciamo per ora indeterminato, ne risulterà la identità

$$(28) \qquad (a_{11} - \rho)x^2 + (a_{22} - \rho)y^2 + 2a_{12}xy =$$
$$= (a_{11}' - \rho)X^2 + (a_{22}' - \rho)Y^2 + 2a_{12}XY.$$

Le forme quadratiche ai due membri di questa equazione dovendo risultare eguali per ogni valore di ρ, saranno, in particolare, ridotte in quadrati esatti dai medesimi valori della ρ; cioè i discriminanti di quelle due forme dovranno annullarsi per i medesimi valori di ρ; in altri termini *le equazioni* in ρ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}' - \rho & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' - \rho \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$(29) \qquad \begin{cases} \rho^2 - (a_{22} + a_{11})\rho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \\ \rho^2 - (a_{22}' + a_{11}')\rho + a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2 = 0 \end{cases}$$

dovranno avere le medesime radici.

Ma, in tali equazioni sono eguali i coefficienti dei termini di secondo grado, dovranno essere, perciò, eguali anche gli altri, e si dovrà avere

$$(30) \qquad \begin{cases} a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}' \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2. \end{cases}$$

Ciò dimostra appunto la invarianza delle espressioni

$$I = a_{11} + a_{22}$$
$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

delle quali la prima è **invariante lineare**, il secondo, **quadratico.**

306. Dimostriamo ora che *anche il determinante* A (discriminante della forma quadratica $f(x_1x_2x_3)$) è un invariante, **invariante cubico.**

Supponiamo perciò eseguita una trasformazione di assi (ortogonali) ed indichiamo ancora con a_{rs} i coefficienti della equazione della conica riferita al sistema primitivo, con a_{rs}' i coefficienti della equazione della stessa conica riferita al sistema trasformato.

Se indichiamo con C un parametro arbitrario, per ogni valore di C le due equazioni

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + C = 0$$
$$a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + 2a_{12}'YX + 2a_{13}'X + 2a_{23}'Y + a_{33}' + C = 0$$

rappresenteranno una medesima curva riferita ai due sistemi cartesiani, rispettivamente. Quegli stessi valori di C che annullano il discriminante della prima forma, cioè che rendono degenere la conica, dovranno perciò annullare anche il discriminante della seconda, e sarà contemporaneamente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + C \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' + C \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} A + A_{33}C = 0 \\ A' + A_{33}'C = 0. \end{cases}$$

Ma abbiamo già dimostrato che A_{33} è un invariante, cioè che $A_{33} = A_{33}'$; dunque dovrà essere ancora

$$A = A'$$

cioè *anche A sarà un invariante.*

§ VIII. Riduzione delle equazioni delle coniche alla forma normale.

307. Data l'equazione di una *conica a centro*

$$(31) \qquad a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

riferita ad un sistema cartesiano ortogonale qualunque, sappiamo che, se si trasporta l'origine nel centro e si assumono per assi cartesiani gli assi della conica, la equazione della conica assume la forma normale

$$(32) \qquad a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + a_{33}' = 0.$$

Poichè si può sempre, mediante i coefficienti a_{rs} della equazione data, calcolare le coordinate del centro (n.° 279) e le equazioni degli assi (n.° 285), così la trasformazione della (31) nella (32) potrà sempre farsi senza difficoltà alcuna.

Ma il calcolo dei coefficienti a', fatto mediante queste trasformazioni di coordinate, riesce assai laborioso; può invece eseguirsi rapidamente per mezzo delle proprietà invariantive delle espressioni I, A_{33}, A, considerate al § precedente.

Calcolando infatti I ed A_{33} nelle due formule (31), (32) si ha

$$\begin{cases} I = a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}' \\ A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}'a_{22}'. \end{cases}$$

Conosciamo così la somma $a_{11}' + a_{22}'$ ed il prodotto $a_{11}'a_{22}'$ delle due quantità incognite a_{11}', a_{22}'; queste dunque si otterranno risolvendo la equazione di 2.° grado

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \tag{33}$$

che potremo anche scrivere sotto la forma $\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0.$

Per avere il terzo coefficiente a_{33}' della equazione ridotta, osserveremo che

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{vmatrix} = a_{11}'a_{22}'a_{33}',$$

onde

$$a_{33}' = \frac{A}{a_{11}'a_{22}'} = \frac{A}{A_{33}}. \tag{34}$$

Si avverta che le radici della equazione (33), da cui ricaviamo i coefficienti $a_{11}'a_{22}'$ sono *sempre reali*, poichè il discriminante

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12})^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

è *sempre positivo o nullo.*

È nullo solo quando

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0$$

cioè *quando la conica è un cerchio*, ed in tal caso, anche i coefficienti a_{11}', a_{22}' della equazione ridotta debbono risultare eguali fra loro, come è stato dimostrato (n.° 286).

Osserveremo ancora che i segni delle radici a_{11}', a_{22}' della (33) risulteranno eguali fra loro se sarà positivo il termine noto $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}$, risulteranno contrari, se negativo.

Cioè *i segni delle a_{11}', a_{22}' saranno eguali fra loro nel caso ellittico, contrari nel caso iperbolico.*

Quanto al segno di a_{33}' esso risulta dalla formula (34) e sarà quindi positivo se A ed A_{33} hanno segno concorde, cioè se il prodotto AA_{33} è positivo; negativo se A ed A_{33} hanno segno discorde.

Nel caso ellittico A_{33} ha segno positivo, dunque *nel caso ellittico a_{33}' risulta di segno concorde con quello di A.*

Siccome poi per valori tutti di egual segno dei coefficienti $a_{11}'a_{22}'a_{33}'$ la conica

$$a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + a_{33}' = 0$$

risulta immaginaria, concludiamo che, ***per ellissi reali il discriminante A ha il segno discorde da quello dei coefficienti*** a_{11}, a_{22} (cioè dal segno di I).

Mettendo in evidenza i segni dei coefficienti avremo dunque, per *il caso ellittico* i due tipi di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 - a_{33}' = 0 \\ a_{11}'X^2 + a_{22}'Y^2 + a_{33}' = 0, \end{cases}$$

dei quali il primo rappresenta una *ellissi reale*, il secondo una curva che non ha nessun punto reale ed è detta *ellissi immaginaria.*

Questi due tipi si distinguono dal segno del prodotto AI, che è negativo per ellissi reali, positivo per ellissi immaginarie.

Analogamente: si hanno, per il *caso iperbolico*, i due tipi:

$$\begin{cases} a_{11}'X^2 - a_{22}'Y^2 + a_{33}' = 0 \\ a_{11}'X^2 - a_{22}'Y^2 - a_{33}' = 0, \end{cases}$$

che non differiscono sostanzialmente, in quanto che il secondo si ottiene dal primo scambiando fra loro gli assi X, Y (e ad un tempo gli indici 1, 2). Dall'esame delle equazioni scritte si vede che, ***se i coefficienti sono reali, la iperbole è sempre una curva reale.***

308. Nel **caso parabolico** la equazione ridotta ha la forma

$$a_{22}'Y^2 + 2a_{13}'X = 0,$$

perciò

$$I = a_{22}', \quad A_{33} = 0, \quad A = - a_{22}'a_{13}'^2. \tag{35}$$

Dalla prima di queste si ricava a_{22}'; dall'ultima si ha

$$a_{13}'^2 = - \frac{A}{I} \tag{36}$$

e così si calcolano entrambi i coefficienti della equazione ridotta.

La formula (36) ci dice che, ***nella parabola, gli invarianti A, I hanno sempre segni contrarii.***

309. È opportuno l'osservare che il calcolo dei coefficienti nella equazione ridotta si fa con grande semplicità, *anche senza ricorrere agli invarianti ortogonali, quando nella equazione della conica è nullo il termine in xy.*

Infatti in tal caso gli assi cartesiani sono già orientati nella direzione degli assi della conica (n.° 300) e basta una traslazione per ridurre la equazione a forma normale.

Praticamente si noti che, se $a_{12}=0$, la conica è un'ellissi quando a_{11}, a_{22} hanno segni eguali, una iperbole, quando a_{11}, a_{22} hanno segni contrari, una parabola quando uno dei due coefficienti a_{11}, a_{22} è eguale allo zero.

Per *coniche a centro*:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

basterà scrivere, completando i quadrati:

$$a_{11}\left\{x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2\right\}+a_{22}\left\{y^2+2\frac{a_{23}}{a_{22}}y+\left(\frac{a_{33}}{a_{22}}\right)^2\right\}+$$
$$+a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}-\frac{a_{23}^2}{a_{22}}=0$$

od anche:

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2+a_{33}-\left(\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2-\left(\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}}}\right)^2=0,$$

per iscorgere che la trasformazione

$$X=x+\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad Y=y+\frac{a_{23}}{a_{22}},$$

cioè la traslazione della origine nel centro della conica (n.° 279), riduce l'equazione alla forma ridotta

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+\left\{a_{33}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}}-\frac{a_{23}^2}{a_{22}}\right\}=0.$$

Per la *parabola*

$$a_{22}y^2+2a_{12}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

faremo similmente

$$a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2+2a_{13}x+a_{33}-\frac{a_{23}^2}{a_{22}}=0$$

cioè

$$a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2+2a_{13}\left(x+\frac{a_{33}a_{22}-a_{23}^2}{2a_{13}a_{22}}\right)=0$$

e così scorgeremo che la trasformazione

$$X=x+\frac{a_{33}a_{22}-a_{23}^2}{2a_{13}a_{22}},\quad Y=y+\frac{a_{23}}{a_{22}},$$

cioè la traslazione della origine nel vertice, riduce la equazione della parabola alla forma normale

$$a_{22}Y^2+2a_{13}X=0.$$

310. Le riflessioni e gli svolgimenti di calcolo contenuti nei numeri precedenti valgono anche per il caso in cui sia $A=0$, cioè per **coniche degeneri.**

Nella ipotesi $A=0$, risulta, per coniche a centro,

$$a_{33}'=0 \quad \text{(form. 34)},$$

l'equazione ridotta della ellisse diventa

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2=0$$

e rappresenta *una coppia di rette immaginarie uscenti dalla origine* (coppia *ellittica* di rette).

Quella della iperbole:

$$a_{11}x^2-a_{22}y^2=0,$$

rappresenta *una coppia di rette reali uscenti dalla origine* (coppia *iperbolica* di rette).

Per il caso parabolico degenere, la equazione normale si riduce ad $y^2=0$ che rappresenta l'asse delle x contato due volte.

La discussione fatta si può riassumere nel quadro seguente:

$$A_{33} > 0 \begin{cases} AI < 0 & \text{ellissi reale} \\ AI > 0 & \text{ellissi immaginaria} \\ A \;\; = 0 & \text{coppia ellittica di rette} \end{cases}$$

$$A_{33} < 0 \begin{cases} A \neq 0 & \text{iperbole} \\ A = 0 & \text{coppia iperbolica di rette} \end{cases}$$

$$A_{33} = 0 \begin{cases} A \neq 0 & \text{parabola} \\ A = 0 & \text{coppia parabolica di rette.} \end{cases}$$

CAPITOLO III.

STUDIO DELLE PROPRIETÀ DELLE CONICHE SULLE LORO EQUAZIONI NORMALI

§ I. Ellisse.

311. Indicando con a_{11}, a_{22}, a_{33} numeri positivi (non nulli) l'equazione normale della ellisse si presenta sotto una delle tre forme (n.i 307, 310)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{33}$$
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = -a_{33}$$
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0.$$

La seconda di queste rappresenta una conica priva di punti reali, detta *ellisse immaginaria.* La terza rappresenta la *coppia di rette immaginarie coniugate uscenti dalla origine*:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{\dfrac{-a_{11}}{a_{22}}}\,x \\ y = -\sqrt{\dfrac{-a_{11}}{a_{22}}}\,x. \end{array}\right.$$

La prima solamente, dunque, rappresenta una *conica reale, non degenere.* Scriveremo questa equazione sotto la forma

$$\frac{x^2}{\dfrac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\dfrac{a_{33}}{a_{22}}} = 1$$

e, poichè a_{11}, a_{22}, a_{33} sono numeri positivi, porremo

$$a^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

e così ne verrà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1}$$

ed è questa la forma che suol dirsi *canonica* e che potrebbe anche dirsi *segmentaria* della equazione della ellisse.

312. Si vede infatti, facendo successivamente $y=0$, $x=0$, che i numeri

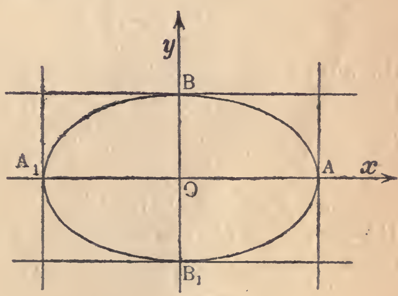
$$\pm a, \quad \pm b$$

sono le lunghezze dei segmenti che la ellisse stacca sugli assi a partire dalla origine. E poichè i punti dove gli assi incontrano la conica sono stati detti vertici, così troviamo su la ellisse 4 vertici, due A, A_1 su l'asse $0x$, di ascisse $+a$, $-a$; due B, B_1 su l'asse delle y, di ordinate $+b$, $-b$.

La distanza $\overline{A_1A} = 2a$ è detta asse, ed a semiasse della ellisse. Analogamente, si dà il nome di *asse* alla distanza $\overline{B_1B} = 2b$.

Se gli assi sono eguali, cioè se

$$a = b$$



l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ossia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

si muta nella equazione di un cerchio con raggio a e centro nella origine; questo ci dice che *l'ellisse con i due assi eguali è un cerchio.*

313. Osservazione. — In conformità a quanto è stato detto al n.° 303, osserveremo che la equazione in coordinate tangenziali della ellisse riferita agli assi, assume la forma:

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1.$$

314. Supporremo $a \geqq b$, e perciò diremo a semiasse maggiore, e b semiasse minore *della ellisse.*

315. L'equazione dell'ellisse, che possiamo scrivere

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

ci mostra che non esistono punti reali della curva le cui coordinate x, y rendano le frazioni $\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ maggiori della unità. Per punti $P(xy)$ della ellisse debbono dunque essere soddisfatte le condizioni

$$-a \leqq x \leqq a, \quad -b \leqq y \leqq b,$$

le quali ci dicono che *i punti della ellisse sono tutti contenuti entro il rettangolo determinato dalle quattro rette* $x = \pm a$, $y = \pm b$.

316. Dalla equazione della ellisse si ricava

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{a^2}{b^2} y^2 = a^2, \\ \dfrac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2; \end{cases}$$

da cui:

$$x^2 + y^2 \leqq a^2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 \geqq b^2. \tag{3}$$

Le formule (2), (3) ci dicono che *il raggio vettore* $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ *di un punto qualunque della ellisse è sempre compreso fra il semiasse minore* b *ed il semiasse maggiore* a.

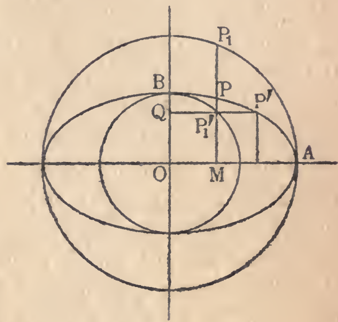
317. Cambiando i segni delle variabili x, y, la equazione della ellisse non si muta, dunque la curva è *simmetrica rispetto agli assi* (sappiamo del resto che gli assi della conica sono assi di simmetria ortogonale).

La parte di curva che si trova nel primo quadrante si sovrappone, per ribaltamento intorno agli assi, alle parti contenute nei rimanenti quadranti. Basterà perciò studiare l'andamento della curva nel primo quadrante per conoscerla intieramente.

318. Risolvendo l'equazione della curva rispetto ad y, troviamo

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$

Nel primo quadrante alla ascissa $x = 0$ corrisponde $y = b$, il punto $(0, b)$ è il vertice B della curva.



Per x crescente da o ad a la y decresce da b a zero; per $x = a$, è $y = 0$ ed il punto $(a, 0)$ è il vertice A su l'asse x.

Per $x > a$ non si hanno punti reali della conica.

Confrontando le ordinate $\overline{MP}$, $\overline{MP_1}$, di due punti P, P_1 del primo quadrante aventi la medesima ascissa $\overline{OM}$ e situati l'uno sulla ellisse che stiamo studiando, l'altro sul cerchio, $x^2 + y^2 = a^2$, di centro O e raggio a, troviamo

$$\overline{MP} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \overline{MP_1} = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{\overline{MP}}{\overline{MP_1}} = \frac{b}{a}. \tag{5}$$

Dunque: *il rapporto delle ordinate della ellisse a quelle dei punti di stessa ascissa del cerchio che ha per raggio il semiasse maggiore è costante, ed uguale al rapporto dei due semiassi dell'ellisse.*

319. Paragonando invece le ascisse QP', QP_1' di eguale ordinata OQ, di punti sulla ellisse e sul cerchio di raggio eguale al semiasse minore, $x^2 + y^2 = b^2$, si trova

$$QP' = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad QP_1' = \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \frac{QP'}{QP_1'} = \frac{a}{b}. \tag{6}$$

Il rapporto delle ascisse dei punti di eguale ordinata sulla ellisse e sul cerchio con centro nella origine e raggio eguale al semiasse minore, è costante ed eguale al rapporto $\frac{a}{b}$, inverso di quello considerato al numero precedente

320. Ponendo $\frac{a}{b} = \cos\alpha$, le formule (5), (6) si possono scrivere

$$MP = MP_1 \cos\alpha, \quad QP_1' = QP' \cos\alpha. \tag{7}$$

Dunque, se conduciamo per l'asse Ox un piano che faccia angolo α con quello della ellisse e su questa descriviamo un cerchio con raggio OA eguale al semiasse maggiore, i punti P_1 di questo cerchio proiettati ortogonalmente sul piano della ellissi, generano la ellisse.

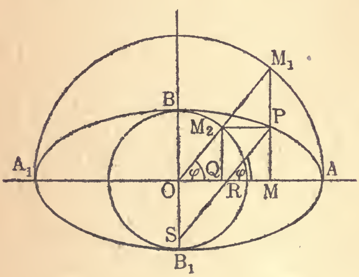
Perciò, *potremo considerare la ellisse come sezione retta di un cilindro circolare obliquo* (di raggio a).

Interpretando in modo analogo la seconda delle formule (7) vediamo che, conducendo per l'asse Oy un piano che faccia lo stesso angolo α col piano della ellisse, e proiettando ortogonalmente *su questo piano* la ellisse, i punti P' della ellisse si proiettano in punti P_1' del cerchio di raggio $OB = b$.

Perciò *la ellisse si può anche considerare come sezione obliqua di un cilindro circolare retto* (di raggio b).

321. *Un raggio uscente da O incontri i due cerchi dianzi descritti nei punti $M_1 M_2$, e per questi si conducano le perpendicolari M_1P, M_2P agli assi Ox, Oy rispettivamente.*

Si vuol dimostrare che *il punto P dove esse s'incontrano è un punto della ellisse.*



Infatti pel teorema di Talete si ha

$$\frac{QM_2}{MM_1} = \frac{OM_2}{OM_1}$$

cioè

$$\frac{MP}{MM_1} = \frac{b}{a}.$$

La proprietà dimostrata suggerisce una facile costruzione per punti della ellisse dati i semiassi b, a, di essa.

322. Si conduca ora nel punto P della ellisse la parallela PRS al raggio OM_1. Dall'esame dei due parallelogrammi

$OSPM_1$, $ORPM_2$, si ricava

$$\begin{cases} \overline{SP} = \overline{OM_1} = a \\ \overline{RP} = \overline{OM_2} = b \end{cases}$$
$$\overline{SR} = a - b.$$

Si vede da ciò che, ***se sul segmento SP di lunghezza $\overline{SP} = a$, eguale al semiasse maggiore, si segna il punto R, che stacca il segmento $\overline{RP} = b$, semiasse minore, facendo strisciare il segmento SP sul piano, in modo che i suoi estremi S, P descrivano gli assi, il punto R segnato su tale segmento descrive la ellisse.***

323. L'angolo $\varphi = \widehat{ARP} = \widehat{AOM_1}$ che il segmento SP forma con l'asse delle x, vien detto **anomalia eccentrica** del punto P della ellisse.

Eccentrica, perchè il raggio per il punto P dell'ellisse che forma tale angolo, non passa pel centro; *tale angolo è la anomalia vera del punto M_1 corrispondente a P e situato sul cerchio di raggio a.* Osservando che

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} \cos \varphi, \quad \overline{MP} = \overline{RP} \operatorname{sen} \varphi$$

e tenendo conto che è $\overline{OM} = x$, $\overline{MP} = y$, $\overline{OM_1} = a$, $\overline{RP} = \overline{OM_2} = b$, si ha

$$(8) \qquad \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \operatorname{sen} \varphi, \end{cases}$$

equazioni parametriche dell'ellisse.

Supponendo $a = b = r$, si ricavano *le equazioni parametriche del cerchio*

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

324. Dalle (8) si ricava immediatamente la equazione canonica scrivendo $\frac{x}{a} = \cos \varphi$, $\frac{y}{b} = \operatorname{sen} \varphi$, quadrando e sommando.

325. Tangente alla ellisse. Se $P_1(x_1 y_1)$ è un punto della ellisse, la equazione della tangente alla ellisse in questo punto si scriverà (form. (17′) al n.° 259, pag. 224)

$$\frac{1}{a^2} x_1 x + \frac{1}{b^2} y_1 y - 1 = 0$$

cioè

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Questa è anche *la equazione della* **polare** *del punto* $P_1(x_1 y_1)$ quando il punto P_1 non sia sulla ellisse.

§ II. Iperbole.

326. L'equazione normale della iperbole ha una delle due forme

$$a_{11}x^2 - a_{22}y^2 = a_{33}$$
$$-a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{33}.$$

Poichè si passa dall'una forma all'altra col cambiar nome agli assi coordinati, considereremo solo la prima di queste.

Dividendo per a_{33}, e facendo

$$a^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

avremo l'equazione della iperbole sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Da questa, facendo successivamente $y = 0$, $x = 0$, si scorge che la iperbole stacca su l'asse x due segmenti $\overline{OA} = a$, $\overline{OA}_1 = -a$, e che non si hanno punti reali su l'asse Oy.

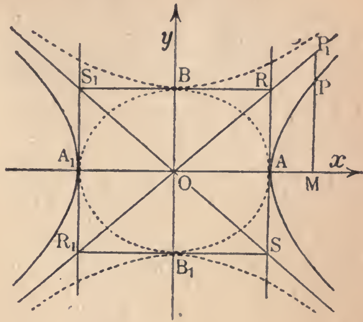
L'iperbole dunque ha due soli vertici reali su l'asse x. L'asse x è detto perciò *asse reale* od *asse trasverso* della iperbole; e l'asse y, *asse immaginario*, o *non trasverso*.

327. Su l'asse non trasverso l'iperbole segna due punti immaginari, le cui ordinate si ottengono facendo $x = 0$ nella equazione della iperbole, esse sono cioè: bi, $-bi$.

Anche nella iperbole le lunghezze a, b, si dicono *semiassi*, il primo *semiasse principale*, o *trasverso*, l'altro *semiasse non trasverso o immaginario.*

L'asse Oy è trasverso della iperbole (iperbole coniugata)

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



disegnata con linee tratteggiate nella figura, ed in questa sono vertici i punti B, B_1 che corrispondono ai segmenti $\overline{OB} = b$, $\overline{OB}_1 = -b$.

La lunghezza b è semiasse trasverso della iperbole coniugata.

Se i due semiassi a, b, sono eguali, la iperbole si dice **equilatera.**

La *iperbole equilatera è uguale alla sua coniugata.*

328. L'equazione della *iperbole inviluppo*, *in coordinate tangenziali*, (n.[i] 303, 313) assume la forma

$$a^2u^2 - b^2v^2 = 1,$$

quando si intenda riferita agli assi.

329. L'equazione della iperbole, che si può scrivere

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{cioè} \quad x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

ci dice che *non ci sono punti reali della iperbole la cui ascissa sia, in valore assoluto, minore di* a; cioè che siano compresi nella striscia compresa fra le due parallele all'asse y per i vertici A, A_1.

330. Tangente alla iperbole. L'applicazione della nota formula (n.° 257, form. (17)) ci dà per la tangente all'iperbole nel punto $P_1(x_1y_1)$

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{11}$$

questa è anche la *equazione della* polare nella ipotesi più generale che il punto P_1 non sia sulla conica.

331. Asintoti. L'equazione complessiva degli asintoti della iperbole è (n.° 281)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

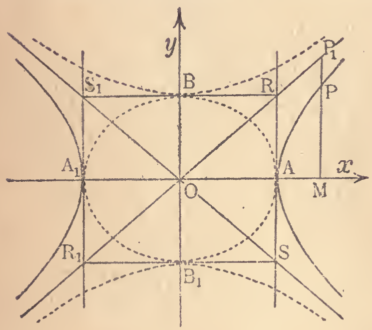
cioè

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Gli asintoti hanno dunque singolarmente le equazioni

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{11}$$

332. Gli asintoti hanno coefficienti angolari $\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$; eguali cioè in valore assoluto al rapporto dei semiassi. Essi sono le diagonali del rettangolo SRS_1R_1 coi lati R_1S, RS_1 paralleli agli assi Ox, Oy e lunghezza $2a$, $2b$, ed avente il centro nella origine.



Di qui una facile costruzione degli asintoti dati i semiassi della iperbole.

333. Gli asintoti sono i medesimi per le due iperboli coniugate

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

In generale si vede che *se k è un numero reale qualunque, tutte le iperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm k^2$ hanno gli stessi asintoti.*

334. La iperbole, al pari della ellisse, è simmetrica rispetto agli assi coordinati. Esaminando l'andamento della curva nel primo quadrante, vediamo che al crescere della x, da a all'infinito, la ordinata $\overline{MP} = y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, è continuamente crescente: sappiamo già che il punto P percorrendo la iperbole tende al punto improprio cui appartiene l'asintoto OR.

Facendo la differenza delle ordinate (corrispondenti ad uno stesso valore di x) del punto della iperbole e del punto corrispondente dell'asintoto, abbiamo

$$\overline{PP_1} = \overline{MP_1} - \overline{MP} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

cioè

$$\overline{PP_1} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Questa formula ci dice che *la differenza* $\overline{PP_1}$ *è infinitesima per* $x \to \infty$; cioè appunto che *l'asintoto è tangente alla iperbole nel punto improprio.*

335. Per valori di x minori di a la ordinata di punti della iperbole ha valori immaginari

$$y = i\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

che potremo scrivere

$$y = iY, \quad \text{con} \quad Y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{13}$$

Ora se nella equazione della iperbole facciamo la trasformazione

$$\begin{cases} y = iY \\ x = X \end{cases} \tag{14}$$

essa si muta nella equazione della ellisse con gli stessi semiassi:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ed il valore trovato per Y nella formula (13) è appunto la ordinata di un punto di questa ellisse.

Similmente si vede che la medesima trasformazione (14) muta la ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nella iperbole $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$, aventi gli stessi semiassi.

L'ellisse dunque si può considerare come una continuazione della iperbole attraverso l'immaginario; e l'iperbole come una continuazione dell'ellisse. L'iperbole equilatera si continua nel cerchio e questo nell'iperbole equilatera.

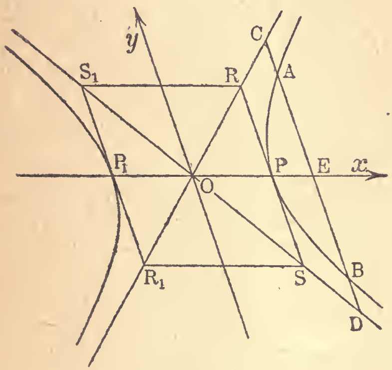
336. La forma normale della equazione della iperbole suppone questa riferita a due diametri coniugati ed è la medesima anche se la coppia scelta per assi cartesiani di riferimento non è la coppia ortogonale (assi della conica).

Scriveremo in generale

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1 \tag{15}$$

l'equazione della iperbole riferita a una coppia di diametri coniugati (non necessariamente ortogonali).

337. Nel sistema cartesiano prescelto i segmenti staccati sull'asse x saranno $\overline{OP}=p$, $\overline{OP_1}=-p$; quelli sull'asse y saranno determinati dai numeri complessi iq, $-iq$.



E saranno p, iq le lunghezze di due semidiametri coniugati. Diremo, anche in questo caso, che q *è il semidiametro non trasverso* (nel fatto q è il diametro trasverso della iperbole coniugata $\frac{y^2}{q^2}-\frac{x^2}{q^2}=1$).

Ed in generale, quando considereremo nella iperbole due diametri coniugati, uno di essi risulterà trasverso, ossia segherà la conica in due punti reali; l'altro, che per la conica data non è trasverso, incontrerà la iperbole coniugata; e per *estremi* di quest'ultimo diametro intenderemo i punti ove esso incontra la iperbole coniugata alla data.

338. Ricercando al solito modo (n.° 281), le equazioni degli asintoti, troveremo:

$$y = \pm \frac{q}{p} x$$

d'onde si vede che *gli asintoti sono le diagonali del parallelogramma* SRS_1R_1, *aventi il centro nella origine ed i lati eguali in lunghezza e paralleli a due diametri coniugati.*

339. La tangente nel punto P, estremità del diametro trasverso, dovrà risultare parallela al diametro coniugato (cioè all'asse delle y) e sarà quindi il lato SR del parallelogramma dianzi descritta. Ed i segmenti PR, SP risulteranno eguali. Cioè: *il segmento della tangente alla iperbole compreso fra gli assintoti è bisecato dal punto di contatto.*

Si noti che, avendo preso come assi di riferimento due diametri coniugati qualunque, la tangente considerata è una qualsiasi delle tangenti alla iperbole.

340. Sia AB una corda della iperbole che, per la scelta arbitraria delle direzioni dei diametri coniugati scelti come assi cartesiani, potremo sempre supporre parallela ad uno degli assi coordinati. (Per es. come nella figura, all'asse Oy). La retta AB incontri gli asintoti nei punti C e D.

Poichè AB è una corda parallela all'asse y, cioè coniugata al diametro Ox, essa sarà bisecata, in E, da questo diametro, e sarà

$$\overline{BE} = \overline{EA}.$$

Dalla applicazione del teorema di Talete si vede immediatamente che (essendo P punto di mezzo di SR) è anche E punto di mezzo di CD, cioè che

$$\overline{DE} = \overline{EC}.$$

Da cui, per sottrazione,

$$DE - BE = EC - EA$$

cioè

$$DB = AC.$$

Nella iperbole ogni corda taglia gli asintoti in due punti equidistanti dagli estremi della corda.

341. Riferendo la iperbole agli asintoti, come ad assi coordinati, la sua equazione avrà la forma (n.° 302)

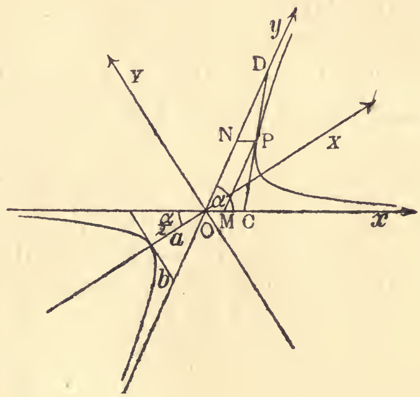
$$xy = k^2.$$

Se per un punto $P(xy)$ conduciamo la tangente CPD, la porzione di questa limitata agli asintoti, cioè agli assi coordinati, risulterà bisecata da P e si avrà

$$\overline{CD} = 2\overline{CP};$$

di qui anche

$$\overline{OC} = 2\overline{OM} = 2x, \quad \overline{OD} = 2\overline{ON} = 2y.$$



Indicando con α l'angolo degli asintoti, si calcolerà l'area del triangolo OCD mediante la formula

$$S = \overline{OCD} = \frac{1}{2}\,\overline{OC}\cdot\overline{OD}\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y\,\text{sen}\,\alpha = 2xy\,\text{sen}\,\alpha$$

infine, ricordando la equazione della iperbole, avremo:

(16) $$S = 2k^2\,\text{sen}\,\alpha.$$

D'onde il teorema: *l'area del triangolo compreso fra gli asintoti ed una tangente alla iperbole è costante.*

In particolare, considerando la tangente condotta per uno dei vertici, ed indicando con a, b i semiassi, si ha

(17) $$S = ab.$$

Da cui

$$ab = 2k^2 \operatorname{sen} \alpha, \quad k^2 = \frac{ab}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

D'altra parte

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

Sostituendo si ritrova:

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}. \tag{18}$$

Abbiamo dunque trovato che, *noti i semiassi* a, b *della iperbole, si calcola il coefficiente* k^2, *nella equazione di essa riferita agli asintoti* $xy = k^2$, *facendo il quoziente* $\frac{a^2 + b^2}{4}$.

§ III. Teoremi di Apollonio su le coniche a centro.

342. La equazione di una conica a centro riferita agli assi ha la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$

dove il segno superiore compete al caso ellittico, l'inferiore al caso iperbolico.

La equazione della *involuzione dei diametri coniugati*, che nella forma generale è

$$a_{22} mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0,$$

(n.° 277) assume dunque, per coniche a centro riferite agli assi, la forma

$$\pm \frac{mm'}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 0$$

cioè

$$mm' = \pm \frac{b^2}{a^2} \tag{20}$$

nella quale il segno superiore compete al caso ellittico e l'inferiore all'iperbolico.

Da ciò si deduce che nella ellisse i coefficienti angolari di due diametri coniugati hanno segni contrarii, nella iperbole segni uguali.

Nella ellisse, dunque, *una coppia di diametri coniugati è separata dagli assi* (coppia ortogonale) *nella iperbole non è separata.*

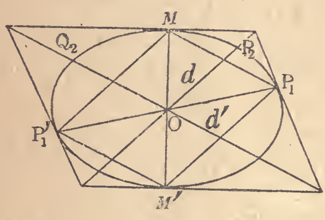
In altri termini: due diametri coniugati nella ellisse, sono l'uno nel primo e terzo quadrante, l'altro nel secondo e quarto. Nella iperbole invece sono entrambi nel primo e terzo, od entrambi nel secondo o quarto quadrante.

Nella iperbole poi, dalla relazione $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ si scorge che, se non è $m = m' = \pm \frac{b}{a}$, (caso corrispondente agli asintoti-raggi doppi nella involuzione dei diametri coniugati) dei due coefficienti angolari m, m' l'uno sarà in valore assoluto, maggiore di $\frac{b}{a}$, l'altro minore.

Ciò significa che *una coppia di diametri coniugati è separata dagli asintoti.*

In particolare uno dei diametri taglia la curva, l'altro non la taglia (la qual proprietà si è riscontrata per altra strada al n.° 337).

343. Due punti $P_1(x_1 y_1)$, $P_1'(-x_1 - y_1)$ di una conica a centro, che si trovano all'estremità di uno stesso diametro (simmetrici rispetto al centro) si dicono *diametralmente opposti.*



Si dicono *supplementari* due corde MP_1, MP_1' che vanno da uno stesso punto M della conica a due punti P_1, P_1' diametralmente opposti.

Indicando con μ, μ' i coefficienti angolari di due tali corde, si avrà

$$(21) \qquad \mu = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad \mu' = \frac{y + y_1}{x + x_1}, \quad \mu\mu' = \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2}.$$

Ora, considerando che i punti $P_1 P_1' M$ sono sulla conica, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

e sottraendo,

$$\frac{x^2 - x_1^2}{a^2} \pm \frac{y^2 - y_1^2}{b^2} = 0, \quad \frac{y^2 - y_1^2}{x^2 - x_1^2} = \pm \frac{b^2}{a^2}.$$

Sostituendo nella (21) si trova

$$\mu\mu' = \pm \frac{b^2}{a^2}$$

d'onde, ricordando la (20), vediamo che *due corde supplementari sono sempre parallele a due diametri coniugati.*

In altri termini, *il diametro che dimezza una corda è parallelo alla corda supplementare*: o, ciò che torna lo stesso, *i diametri che dimezzano due corde supplementari sono coniugati.*

Infine, osservando che in qualunque parallelogramma inscritto in una conica a centro, il punto di mezzo della diagonale è centro della conica, le diagonali sono diametri, e due lati adiacenti sono corde supplementari, si ha: *in ogni parallelogramma inscritto in una conica a centro, le congiungenti i punti di mezzo di due lati opposti formano una coppia di diametri coniugati.*

Considerando anche il parallelogramma circoscritto formato con le tangenti nei vertici, si vede immediatamente che *le diagonali di un parallelogramma circoscritto ad una conica a centro formano una coppia di diametri coniugati.*

344. L'equazione del diametro coniugato alla direzione di coefficiente angolare m è in generale (n.° 276, pag. 238)

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

trattandosi di una conica a centro riferita agli assi, essa diverrà

$$\frac{x}{a^2} \pm m\frac{y}{b^2} = 0. \tag{22}$$

Se d, d' sono diametri coniugati, se il punto $P_2(x_2y_2)$ è uno degli estremi del diametro d ed il punto $P_2'(x_2'y_2')$ è uno degli estremi di d'; il diametro d coniugato alla direzione di coefficiente angolare $\frac{y_2'}{x_2'}$, avrà per equazione

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y_2'}{x_2'} \frac{y}{b^2} = 0$$

cioè

$$\frac{xx_2'}{a^2} \pm \frac{yy_2'}{b^2} = 0;$$

e poichè esso contiene il punto $P_2(x_2y_2)$, sarà

$$\frac{x_2x_2'}{a^2} \pm \frac{y_2y_2'}{b^2} = 0,$$

cioè

$$\frac{x_2}{a} \cdot \frac{x_2'}{a} \pm \frac{y_2}{b} \cdot \frac{y_2'}{b} = 0, \quad \frac{x_2'}{a} : \frac{y_2}{b} = \pm \frac{y_2'}{b} : \frac{x_2}{a}.$$

Indicando con k il valore comune ai due membri nella ultima equazione, avremo

$$\text{(23)} \qquad \frac{x_2'}{a} = k\frac{y_2}{b}, \quad \frac{y_2'}{b} = \pm k \frac{x_2}{a},$$

da cui

$$\text{(24)} \qquad \left(\frac{x_2'}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y_2'}{b}\right)^2 = k^2 \left\{ \left(\frac{y_2^2}{b}\right)^2 \pm \left(\frac{x_2^2}{a}\right)^2 \right\}.$$

Ora, poichè i punti P_2, P_2' nel caso ellittico sono entrambi su la conica, e nel caso iperbolico P_2' è su la conica, P_2 su la sua coniugata (n.° 337) avremo

$$\left(\frac{x_2'}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y_2'}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{y_2^2}{b^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2} = 1$$

epperò nella (24) è $k^2 = 1$, e quindi $k = \pm 1$.

Le formule (23) ci danno perciò nel caso ellittico:

$$\text{(25)} \qquad \frac{x_2'}{a} = \pm \frac{y_2}{b}, \quad \frac{y_2'}{b} = \mp \frac{x_2}{a}$$

e, nel caso iperbolico

$$\text{(26)} \qquad \frac{x_2'}{a} = \pm \frac{y_2}{b}, \quad \frac{y_2'}{b} = \pm \frac{x_2}{a}.$$

Le formule trovate servono a dimostrare i due seguenti teoremi, noti col nome di APOLLONIO.

345. TEOREMA 1.° — *Nella ellisse è costante la somma, nell'iperbole la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati.*

Poniamo

$$d^2 = \overline{OP_2}^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad d'^2 = \overline{OP_2'}^2 = x_2'^2 + y_2'^2$$

da cui, per le formule (25), (26), sommando nel caso ellittico e sottraendo nel caso iperbolico, si ottiene:

$$d^2 \pm d'^2 = (x_2'^2 + y_2'^2) \pm (x_2^2 + y_2^2) = x_2'^2\left(1 \pm \frac{b^2}{a^2}\right) \pm y_2'^2\left(\frac{a^2}{b^2} \pm 1\right)$$

$$d^2 \pm d'^2 = (a^2 \pm b^2)\left(\frac{x_2'^2}{a^2} \pm \frac{y_2'^2}{b^2}\right) = a^2 \pm b^2. \tag{27}$$

Il teorema è così dimostrato. Si può osservare che nel caso della iperbole equilatera si ha $a = b$, $a^2 - b^2 = 0$, epperò $d^2 = d'^2$: dunque *nella iperbole equilatera ogni diametro ha lunghezza eguale a quella del suo coniugato.*

346. TEOREMA 2.° — *In ogni conica a centro è costante l'area del triangolo OP_2P_2' compreso fra due semidiametri coniugati e dalla corda che ne congiunge gli estremi.*

Si ha infatti (n.° 132, pag. 108)

$$2\overline{OP_2P_2'} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \end{vmatrix} = x_2y_2' - y_2x_2'.$$

Nel caso ellittico avremo, per le (25),

$$2\overline{OP_2P_2'} = \mp x_2^2\frac{b}{a} \mp y_2^2\frac{a}{b} = \mp ba\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) = \mp ab. \tag{28}$$

Nel caso iperbolico, per le (26),

$$2\overline{OP_2P_1'} = \pm x_2^2\frac{b}{a} \mp y_2^2\frac{a}{b} = \mp ab\left(\frac{y_2^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2}\right) = \mp ab. \tag{29}$$

In ogni caso, adunque, il teorema è dimostrato.

Si noti che così è provato che rimane costante il valore assoluto dell'area del triangolo OP_2P_2'. Il segno andrà scelto positivo o negativo secondo che il triangolo medesimo è sinistrorso o destrorso.

347. *Distanza del centro dalla tangente in un punto $P_2(x_2y_2)$ di una conica a centro.* Dalle formule trovate si può dedurre una formula comoda per la distanza del centro da una tangente alla conica a centro.

L'equazione della tangente in $P_2(x_2y_2)$ è, come sappiamo (n.[i] 325, 330)

$$\frac{xx_2}{a_2} \pm \frac{yy_2}{b_2} = 1. \tag{30}$$

La sua distanza dal centro, cioè dalla origine, è perciò (n.° 138, pag. 113)

$$\delta = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{x_2^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4}}} = \frac{\pm ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_2^2 + \frac{a^2}{b^2}y_2^2}} = \frac{\pm ab}{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}}.$$

Il *segno* dovrà essere concorde con quello del coefficiente di y nella equazione della retta (30), dunque *sarà eguale a quello della ordinata y_2 del punto di contatto, nel caso ellittico, contrario a questo nel caso iperbolico. E il valore assoluto della distanza del centro dalla tangente è inversamente proporzionale alla lunghezza $\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2} = d'$ del diametro parallelo alla tangente.*

§ IV. La parabola.

348. L'equazione di una conica riferita ad un diametro ed alla tangente in uno degli estremi di esso, come ad assi coordinati, ha la forma (n.° 301)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Nel caso parabolico, la condizione $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, richiede che dei due coefficienti a_{11}, a_{22} uno sia nullo.

Possiamo precisare che, nella supposizione che l'asse x sia nella direzione dei diametri, deve essere $a_{11} = 0$.

Infatti la direzione dei diametri nella parabola (n.° 278) ha per coefficiente angolare $-\frac{a_{11}+ma_{12}}{a_{12}+ma_{22}}$, e dovendo essa, per ogni valore di m, coincidere con quella dell'asse delle x, il cui coefficiente angolare è 0, ciò richiede appunto che sia $a_{11}=0$.

Si ha dunque, per la parabola, la equazione normale

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0$$

che scriveremo, come è l'uso

(31) $$y^2=2px.$$

Il valore di p che risulta da questa relazione, quando la parabola è riferita ad un sistema cartesiano ortogonale, è detto **parametro** *della parabola.*

349. Si noti che, cambiando nome agli assi, cioè chiamando asse y quello che è nella direzione dei diametri, si ha la forma equivalente

(32) $$x^2=2py.$$

Osserveremo ancora che la forma normale della equazione si ottiene riferendo la parabola ad un sistema in cui l'asse x è uno qualunque dei diametri. Volendo usare sistemi ortogonali di coordinate cartesiane, dovremo supporre che l'asse della parabola sia assunto come asse delle x e che il vertice sia nella origine.

350. Esaminando l'equazione $y^2=2px$, vediamo che la y è reale solo per i valori della x che hanno lo stesso segno del parametro, e che per ciascuno di tali valori, assume valori eguali e contrari; ciò significa che la *parabola è tutta nel semipiano a destra, o tutta nel semipiano a sinistra dell'asse y*, ed è simmetrica rispetto all'asse delle x.

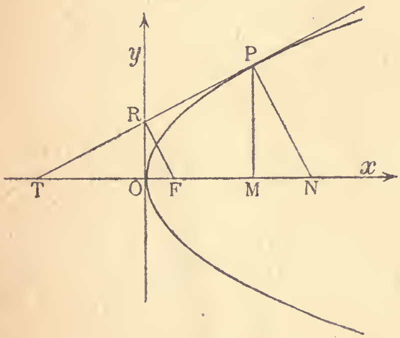
351. L'equazione $y^2=2px$ può interpretarsi dicendo: *per ogni punto P(xy) della parabola la ordinata è media proporzionale fra la ascissa ed il doppio del parametro*: e di qui si può ricavare una facile *costruzione per punti della parabola.*

352. L'equazione della tangente in un punto $P_1(x_1y_1)$ della parabola, con l'applicazione della formula nota (n.° 259) assume la forma:

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{33}$$

Questa è anche la equazione della **polare** *del punto* $P_1(x_1y_1)$, nell'ipotesi più generale che questo punto non sia su la conica.

353. Per un punto P della curva conduciamo la tangente PT e la normale PN.



Si dice **tangente geometrica** *della curva, nel punto* $P(x_1y_1)$ *la lunghezza* $\overline{TP}$ *del segmento di tangente compresa fra l'asse delle* x *ed il punto di contatto.*

Sottotangente *la proiezione* $\overline{TM}$ *della tangente geometrica su l'asse delle* x.

Normale geometrica *la lunghezza* $\overline{NP}$ *del segmento di normale compreso fra l'asse delle* x *e la curva.*

Sottonormale *la proiezione* $\overline{NM}$ *della normale su l'asse delle* x.

Per calcolare la *sottotangente* della parabola calcoleremo prima la ascissa alla origine della tangente, che ricaveremo dalle (33) facendo $y = 0$; troviamo così

$$\overline{OT} = -x,$$

cioè: *nella parabola la ascissa alla origine della tangente è eguale in valore assoluto, e contraria in segno, alla ascissa del punto di contatto.*

Si ha di poi:

$$\overline{TM} = \overline{TO} + \overline{OM} = 2x,$$

cioè: *la sottotangente della parabola è doppia, in valore assoluto, della ascissa del punto di contatto, ed ha segno contrario al segno di questa.*

Poichè nel triangolo TMP, O è punto di mezzo di TM, e la retta OR è parallela alla base MP, sarà anche

$$\overline{OR} = \frac{1}{2}\overline{MP}, \quad \overline{TR} = \overline{RP} \tag{34}$$

ossia, *la ordinata alla origine della tangente alla parabola è eguale alla metà della ordinata del punto di contatto: la tangente geometrica $\overline{TP}$ è dimezzata dal punto R di intersezione con l'asse y.*

354. Si dimostra subito che è vera anche la proposizione reciproca e cioè che: *se il punto $P(x_1y_1)$ della parabola si congiunge con un punto T dell'asse x, la cui ascissa è uguale e contraria ad $x_1(\overline{OT} = -x_1)$, la retta TP è tangente alla parabola nel punto P.*

355. Per scrivere la equazione della normale, basterà tener conto che il suo coefficiente angolare deve essere contrario in segno ed inverso in valore assoluto di quello della tangente, e scrivere la equazione della retta per $P_1(x_1y_1)$ con questo coefficiente angolare.

Ora il coefficiente angolare della tangente nel punto (x_1y_1) alla parabola è $\frac{p}{y_1}$, quindi quello della normale è $-\frac{y_1}{p}$: la equazione della normale è dunque

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0,$$

e perciò *l'ascissa alla origine della normale* è

$$\overline{ON} = p + x,$$

e *la sottonormale* è

$$\overline{NM} = -\overline{MN} = -(\overline{ON} - \overline{OM}) = -p.$$

Nella parabola la sottonormale ha valore assoluto uguale al parametro.

356. Consideriamo ora, su l'asse x il punto F di ascissa $OF = \frac{p}{2}$. Questo punto è detto **fuoco della parabola.** Le proprietà focali saranno studiate nel capitolo seguente: possiamo per ora osservare che, da quanto si è superiormente trovato risulta $\overline{MN}=2\overline{OF}$, ed essendo anche $\overline{MP}=2\overline{OR}$, il segmento FR risulta parallelo ad NP, cioè normale alla tangente.

Cioè: *i piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco della parabola su le tangenti ad essa sono punti dell'asse delle y (tangente alla parabola nel vertice).*

Reciprocamente: *se sopra la retta Ox si prende un punto F tale che sia $\overline{OF}=\frac{p}{2}$, e condotta la FR per F, e la TRP, normale ad FR, per R, si interseca questa con una normale all'asse x nel punto M, tale che $\overline{OM}=\overline{TO}$, il luogo dei punti P è la parabola con asse Ox, vertice O, parametro p.*

Infatti si ha

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{TM}}=\frac{\overline{OF}}{\overline{OR}},$$

ossia

$$\frac{y}{2x}=\frac{\frac{p}{2}}{\frac{y}{2}},$$

cioè infine

$$y^2=2px.$$

La costruzione fatta ci dice inoltre (n.° 353) che la TP è tangente alla parabola.

CAPITOLO IV.

PROPRIETÀ FOCALI DELLE CONICHE

§ I. Definizione e ricerca dei fuochi delle coniche.

357. Data la equazione di una conica $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, ogni punto del piano può considerarsi come centro di una involuzione di raggi coniugati rispetto alla conica (n.° 269, pag. 231). In una tale involuzione esiste sempre una *coppia ortogonale*, ed in generale, ne esiste una sola.

Ma per certi particolari punti del piano la involuzione delle rette coniugate che escono da essi è costituita da coppie tutte ortogonali: tali punti si dicono *fuochi della conica.*

Fuoco di una conica *è un punto del piano della conica pel quale tutte le coppie di rette coniugate rispetto alla conica sono ortogonali.*

358. Un fuoco è dunque centro di una involuzione ortogonale di raggi coniugati; una tale involuzione è ellittica (70) perciò *ogni fuoco deve sempre essere un punto interno alla conica* (n.° 269).

Ricordando che le rette doppie di una involuzione ortogonale sono le *rette isotrope*, le quali appartengono ai *punti ciclici* del piano, potremo anche definire il fuoco come *un punto tale che le tangenti alla conica, uscenti da esso, passino per i punti ciclici.*

359. Per determinare i fuochi dovremo cercare punti tali che due rette $p'(\xi_1' \xi_2' \xi_3')$, $p''(\xi_1'' \xi_2'' \xi_3'')$, uscenti da esso, le quali soddisfino *la condizione di coniugio* (n.° 266)

$$(1) \quad (A_{11}\xi_1' + A_{12}\xi_2' + A_{13}\xi_3')\xi_1'' + (A_{21}\xi_1' + A_{22}\xi_2' + A_{23}\xi_3')\xi_2'' + \\ + (A_{31}\xi_1' + A_{32}\xi_2' + A_{33}\xi_3')\,\xi_3'' = 0,$$

soddisfino sempre anche a quella di ortogonalità (n.° 155, pag. 127)

(2) $$\xi_1'\xi_1'' + \xi_2'\xi_2'' = 0.$$

360. Consideriamo prima il caso di *una conica a centro* riferita agli assi, la cui equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Calcolando in questa i numeri A_{rs} (n.° 303, pag. 258) si trova

$$A_{11} = \mp \frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2}, \quad A_{33} = \pm \frac{1}{a^2b^2}, \quad A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0.$$

Sostituendo i valori trovati nella condizione di *coniugio*, troviamo questa espressa da

$$\mp \frac{\xi_1'\xi_1''}{b^2} - \frac{\xi_2'\xi_2''}{a^2} \pm \frac{\xi_3'\xi_3''}{a^2b^2} = 0$$

cioè da

(3) $$a^2\xi_1'\xi_1'' \pm b^2\xi_2'\xi_2'' = \xi_3'\xi_3''.$$

Sappiamo che la forma generale della equazione di una retta per un punto $F(\alpha, \beta, 1)$ (cioè di coordinate non omogenee $x = \alpha$, $y = \beta$) è (n.° 156, form. 54)

$$\xi_1(x_1 - \alpha x_3) + \xi_2(x_2 - \beta x_3) = 0$$

ossia

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2)x_3 = 0.$$

Indichiamo con p', p'' due qualunque di tali rette,

(4) $$\begin{cases} p'(\xi_1', \ \xi_2', \ -(\alpha\xi_1' + \beta\xi_2')) \\ p''(\xi_1'', \ \xi_2'', \ -(\alpha\xi_1'' + \beta\xi_2'')). \end{cases}$$

La condizione perchè esse siano coniugate rispetto alla conica si ha sostituendo le loro coordinate nella (3) ed è quindi espressa dalla

$$a^2\xi_1'\xi_1'' \pm b^2\xi_2'\xi_2'' = (\alpha\xi_1' + \beta\xi_2')(\alpha\xi_1'' + \beta\xi_2'')$$

cioè da

(5) $$(a^2 - \alpha^2)\xi_1'\xi_1'' + (\pm b^2 - \beta^2)\xi_2'\xi_2'' = \alpha\beta(\xi_1'\xi_2'' + \xi_1''\xi_2').$$

Si tratta ora di determinare α, β in modo che *per ogni coppia di tali rette* sia sempre soddisfatta anche la condizione di ortogonalità

$$\xi_1'\xi_1'' + \xi_2'\xi_2'' = 0, \tag{2}$$

od, in altri termini, che la (2) sia equivalente alla condizione di coniugio (5).

Ciò esige la proporzionalità fra i coefficienti delle (5), (2), cioè

$$\begin{cases} \alpha\beta = 0 \\ a^2 - \alpha^2 = \pm b^2 - \beta^2. \end{cases} \tag{6}$$

Questo sistema si scinde nei due

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta^2 = -a^2 \pm b^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha^2 = a^2 \mp b^2. \end{cases} \tag{7}$$

Supponendo $a > b$ si vede che il primo di questi due sistemi è risoluto dalle coppie di coordinate

$$\alpha = 0, \quad \beta = i\sqrt{a^2 \mp b^2}; \quad \alpha = 0, \quad \beta = -i\sqrt{a^2 \mp b^2}, \tag{8}$$

cui corrispondono **due fuochi immaginari** *sull'asse delle y* (asse non trasverso della iperbole, asse minore della ellisse).

Il secondo sistema dà luogo a due soluzioni reali

$$\beta = 0, \quad \alpha = \sqrt{a^2 \mp b^2}; \quad \beta = 0, \quad \alpha = -\sqrt{a^2 \mp b^2}$$

cui corrispondono **due fuochi reali** *situati sull'asse principale,* e simmetricamente disposti rispetto alla origine,

$$F_1(\sqrt{a^2 \mp b^2},\ 0), \quad F_2(-\sqrt{a^2 \mp b^2},\ 0), \tag{9}$$

il segno superiore corrispondendo al caso ellittico, l'inferiore al caso iperbolico.

Concludiamo dunque: *le coniche a centro hanno due fuochi immaginari sull'asse delle y, e due fuochi reali situati sull'asse delle x, ad egual distanza dal centro.*

L'asse su cui si trovano i fuochi (asse principale, maggiore, trasverso) viene detto anche **asse focale** *della conica.*

La distanza (in valore assoluto) dei fuochi dal centro si dice **distanza focale**: essa è espressa dalla formula

$$c = \sqrt{a^2 \mp b^2} \tag{10}$$

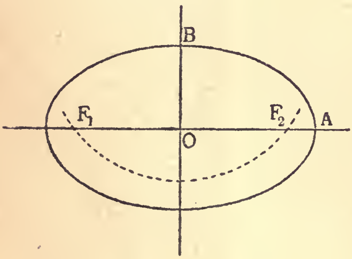
valendo il segno superiore per il caso ellittico, l'inferiore per il caso iperbolico.

Il rapporto della distanza focale al semiasse focale si dice **eccentricità** e si indica d'ordinario con la lettera e, si pone cioè

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}}. \tag{11}$$

La eccentricità è minore di 1 *nel caso ellittico, maggiore di* 1 *nel caso iperbolico.*

361. La formula (10) dà ragione delle notissime costruzioni geometriche, per la determinazione dei fuochi, indicate dalle



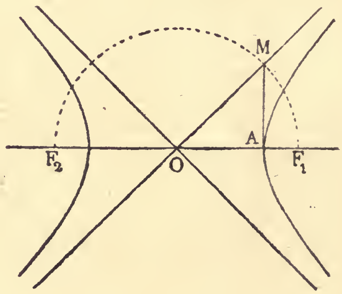


figure qui disegnate: nella prima di esse il cerchio di centro B ha raggio $BF = a$, nella seconda si è fatto $\overline{AM} = b$.

362. Nella discussione da noi fatta, non abbiamo considerato l'ipotesi

$$a = b.$$

Questa ipotesi non ha importanza nel caso iperbolico.

Nel caso ellittico, essa corrisponde a supporre che la conica considerata sia un cerchio, e le formule (8), (9) in tale ipotesi dànno un unico sistema di soluzioni (0, 0); cioè dànno come unico fuoco *la origine*.

Nel cerchio, dunque, tutti e quattro i fuochi sono reali, e coincidono nel centro. La eccentricità del cerchio è nulla.

363. Per l'equazione della parabola $y^2 = 2px$, si ha (n.° 303)

$$A_{13} = p, \quad A_{22} = -p^2, \quad A_{12} = A_{23} = A_{11} = A_{33} = 0$$

e la condizione di coniugio prende la forma

$$p\xi_3'\xi_1'' - p^2\xi_2'\xi_2'' + p\xi_1'\xi_3'' = 0$$

cioè

(13) $$\xi_1'\xi_3'' + \xi_3'\xi_1'' - p\xi_2'\xi_2'' = 0.$$

Mettendo in questa le coordinate di due rette

$$p'(\xi_1', \xi_2', -(\alpha\xi_1' + \beta\xi_2')), \quad p''(\xi_1'', \xi_2'', -(\alpha\xi_1'' + \beta\xi_2''))$$

passanti per il punto $F(\alpha, \beta, 1)$ (n.° 360) si ha la condizione di coniugio di queste due rette p', p'' espressa da

$$-\xi_1'(\alpha\xi_1'' + \beta\xi_2'') - \xi_1''(\alpha\xi_1' + \beta\xi_2') - p\xi_2'\xi_2'' = 0$$

o, riducendo,

(14) $$2\alpha\xi_1'\xi_1'' + \beta(\xi_1'\xi_2'' + \xi_2'\xi_1'') + p\xi_2'\xi_2'' = 0.$$

Se vogliamo che per tutte le coppie p', p'' di rette coniugate rispetto alla parabola sia soddisfatta la condizione di ortogonalità

(3) $$\xi_1'\xi_1'' + \xi_2'\xi_2'' = 0,$$

dovremo disporre delle indeterminate α, β in modo che le equazioni (3), (14) risultino equivalenti. Ciò importa che sia

$$\beta = 0, \quad 2\alpha = p,$$

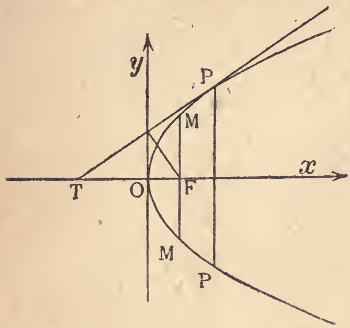
cioè

(15) $$\alpha = \frac{p}{2}, \quad \beta = 0.$$

Sono queste le coordinate del **fuoco della parabola**: *il quale è un punto dell'asse distante dal vertice di una lunghezza eguale a metà del parametro.*

Si può considerare come *fuoco della parabola anche il punto improprio della curva* (la direzione dei diametri). Infatti le tangenti alla conica uscenti da un tale punto coincidono nella retta impropria. la quale contiene i punti ciclici (n.° 358).

364. Se la parabola non è data mediante la sua equazione, ma si suppone effettivamente tracciata sopra il piano del disegno, la costruzione del fuoco e la determinazione del parametro si fanno applicando la proposizione data al n.° 356: *i piedi delle perpendicolari calate dal fuoco sulle tangenti alla parabola si trovano su la normale all'asse uscente dal vertice* (cioè, sulla tangente nel vertice).



Tracciata una tangente qualsiasi alla parabola, si conduca la perpendicolare a questa tangente nel punto dove essa incontra l'asse Oy: il punto F dove questa perpendicolare incontra l'asse Ox della parabola, è il fuoco, e la distanza $\overline{OF}=\frac{p}{2}$ è il semiparametro.

365. Calcolando la ordinata $\overline{FM}$ del punto M della parabola che ha per ascissa $\overline{OF}=\frac{p}{2}$, si trova

$$y^2=\overline{FM}^2=2p\cdot\frac{p}{2}=p^2.$$

Da cui

$$\overline{FM}=p;$$

ciò si esprime dicendo che: *il parametro è la ordinata al fuoco della parabola.*

La corda $\overline{M'M}=2\overline{FM}=2p$ è doppia del parametro, ossia: *la corda condotta pel fuoco della parabola normalmente all'asse ha lunghezza doppia del parametro.*

Tale corda era dagli antichi chiamata *lato retto della parabola.*

Anche per coniche a centro si dà il nome di **parametro** *alla ordinata al fuoco.*

Indicando tale valore con p avremo per l'ellisse

$$p=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2},\quad c=\sqrt{a^2-b^2},$$

e, per l'iperbole

$$p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

in ogni caso quindi

(16) $$p = \frac{b^2}{a}$$

tale è la espressione del **parametro** *per le coniche a centro.*

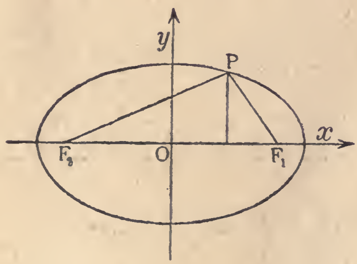
§ II. Raggi focali. Proprietà angolari relative ai fuochi.

366. Si dice **raggio focale** il valore assoluto della distanza $\overline{FP}$ del fuoco F da un punto P della conica.

Vogliamo esprimere questa distanza in funzione delle coordinate x, y di $P(xy)$.

Pel caso ellittico e pel fuoco $F_2(-c, 0)$ avremo

$$\begin{aligned}\overline{F_2P}^2 &= (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\\ &= x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 + b^2\\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2.\end{aligned}$$



La distanza F_2P risulta positiva per punti P situati nella parte della curva superiore all'asse x. Il suo valore assoluto è:

(17) $$|\overline{F_2P}| = \frac{c}{a}x + a = \frac{a^2 + cx}{a};$$

similmente per l'altro fuoco, $F_1(c, 0)$, troveremo

$$(18) \qquad |\overline{F_1P}| = -\frac{c}{a}x + a = \frac{a^2 - cx}{a},$$

e sommando

$$(19) \qquad |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = |\overline{F_1P} + \overline{F_2P}| = 2a.$$

La somma dei raggi focali è, per ogni punto della ellisse, costante ed uguale all'asse maggiore.

367. Per il caso iperbolico, si ha similmente

$$(20) \qquad \begin{cases} |\overline{F_1P}| = \mp\frac{c}{a}x \mp a = \dfrac{cx \mp a^2}{a} \\ |\overline{F_2P}| = \frac{c}{a}x \pm a = \dfrac{cx \pm a^2}{a}. \end{cases}$$

Nelle precedenti formule il segno superiore vale pei punti del ramo di curva che avvolge il fuoco F_1 (che hanno ascissa positiva), l'inferiore per l'altro ramo. Sottraendo si ricava

$$\| \overline{F_1P} | - | \overline{F_2P} \| = | \overline{F_1P} - \overline{F_2P} | = 2a.$$

Il valore assoluto della differenza dei raggi focali, è per ogni punto della iperbole, costante ed eguale all'asse trasverso.

368. Per il caso parabolico si ha $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ epperò

$$\overline{FP} = \pm\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \pm\left(x + \frac{p}{2}\right);$$

se si suppone, come si fa ordinariamente, $p > 0$, è anche, per ogni punto reale della curva, $x > 0$, e quindi

$$(21) \qquad |\overline{FP}| = x + \frac{p}{2}, \quad |\overline{FP}| - x = \frac{p}{2}.$$

La differenza fra il raggio focale e la ascissa è per ogni punto della parabola costante ed eguale al semiparametro.

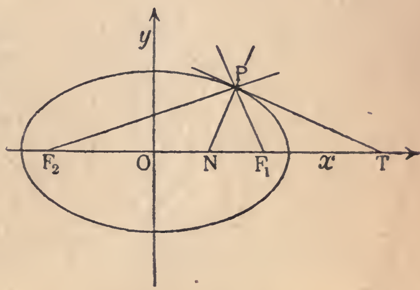
369. È notevole il fatto che, mentre la distanza

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

fra due punti è, in generale una funzione irrazionale delle coordinate di tali punti, *la distanza di un punto della conica da un fuoco di essa è sempre funzione razionale intera di 1.° grado delle coordinate del punto* (form. 17, 18, 20, 21).

370. Proprietà angolari relative ai fuochi delle coniche.

Consideriamo prima il caso ellittico. Per un punto $P(x_1y_1)$ della curva conduciamo i due raggi focali F_1P, F_2P, la tangente PT e la normale PN.



Dalla equazione della tangente

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

(facendo in essa $y = 0$) ricaviamo il valore della *ascissa alla origine della tangente*

(22) $$\overline{OT} = \frac{a^2}{x_1}.$$

Sarà dunque

$$\overline{F_2T} = \overline{F_2O} + \overline{OT} = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a^2 + cx_1}{x_1}$$

$$\overline{F_1T} = \overline{OT} - \overline{OF_1} = \frac{a^2}{x_1} - c = \frac{a^2 - cx_1}{x_1}$$

e ricordando le (17), (18)

(23) $$\frac{\overline{F_2T}}{\overline{F_1T}} = \frac{a^2 + cx_1}{a^2 - cx_1} = \frac{\overline{F_2P}}{\overline{F_1P}}.$$

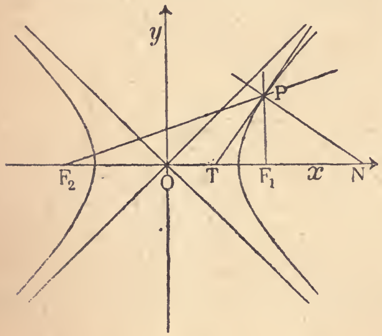
Vediamo dunque che la retta PT pel vertice P del triangolo F_2F_1P, divide (esternamente) la base F_2F_1 nel rapporto degli altri due lati: dunque essa è bisettrice (esterna) dell'angolo $F_2\widehat{P}F_1$ compreso fra questi lati.

La normale PN è bisettrice (interna) dello stesso angolo.

Dunque: *la tangente e la normale in un punto P_1 della ellisse bisecano gli angoli formati dai raggi focali uscenti da questo punto.*

In altri termini: *un raggio che uscendo da uno dei fuochi si rifletta sul perimetro della ellisse, secondo le note leggi della riflessione* (1) *dà origine ad un raggio riflesso che passa per l'altro fuoco.*

371. Per il caso iperbolico, col medesimo ragionamento, giungeremo ad analoghe conclusioni. L'unica differenza consiste in ciò che, mentre la tangente alla ellisse sega esternamente il segmento F_2F_1 compreso fra i due fuochi, la tangente alla iperbole sega questo segmento internamente, ed è bisettrice dell'angolo $\widehat{F_2PF}$ (non del suo supplementare).



In generale possiamo concludere che: *la tangente e la normale in un punto di una conica a centro sono le bisettrici degli angoli formati dai raggi focali uscenti dal punto.*

Da ciò si deduce (n.° 64) che: *i raggi focali F_2P, F_1P, uscenti da un punto P di una conica a centro separano armonicamente la coppia di raggi formata dalla normale e dalla tangente alla conica nel punto P.*

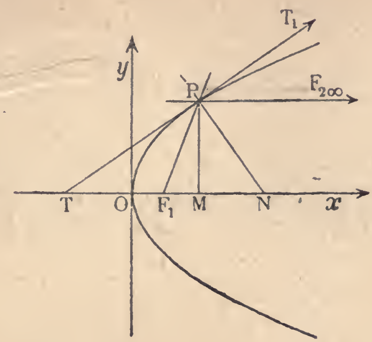
Od anche che: *i fuochi di una conica a centro separano armonicamente le coppie di punti T, N, determinati sull'asse focale dalla tangente PT e dalla normale PN in un qualunque punto P della conica.*

372. Nel caso parabolico, uno dei fuochi è il punto improprio dell'asse, dunque la proposizione precedente si muta nella seguente:

La tangente e la normale in un punto $P(x_1y_1)$ di una parabola sono le bisettrici degli angoli contenuti dal raggio focale e dalla parallela all'asse della parabola uscenti da P.

(1) Cioè facendo angolo di incidenza eguale a quello di riflessione.

In altri termini: *i raggi uscenti dal fuoco sono riflessi dalla parabola in raggi paralleli all'asse.*



Sappiamo infatti che (form. (21))

$$\overline{F_1P} = x_1 + \frac{p}{2}$$

inoltre (n.° 351):

$$\overline{TF_1} = \overline{TO} + \overline{OF_1} = x_1 + \frac{p}{2}$$

dunque

$$\overline{F_1P} = \overline{TF_1}$$

ciò prova che il triangolo TF_1P_1 è isoscele e quindi anche che

$$\widehat{F_2PT_1} = \widehat{F_1TP} = \widehat{F_1PT}.$$

§ III. Direttrici e podarie.

373. La polare di un fuoco si dice **direttrice** *della conica*. L'equazione della polare di un punto $P_1(x_1y_1)$ per coniche a centro, riferite agli assi è (n.^{i} 325, 330)

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b} = 1.$$

Se il punto P_1 si prende in uno dei fuochi $F_1(c, 0)$,

$F_2(-c, 0)$ si hanno rispettivamente le equazioni:

$$\frac{cx}{a^2} = 1, \quad -\frac{cx}{a^2} = 1$$

ossia

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}. \tag{24}$$

Dunque: *nelle coniche a centro, si hanno due direttrici, normali all'asse focale, simmetricamente disposte rispetto al centro e distanti da questo di una lunghezza eguale, in valore assoluto ad* $\frac{a^2}{c}$.

374. La distanza di ciascun fuoco dalla corrispondente direttrice è, in valore assoluto,

$$d = \left| \frac{a^2}{c} - c \right| = \left| \frac{a^2 - c^2}{c} \right| = \frac{b^2}{c}. \tag{25}$$

Si noti che

$$ed = \frac{b^2}{c} \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a} = p \tag{26}$$

onde: *il parametro di una conica a centro è uguale al prodotto della eccentricità per la distanza del fuoco dalla direttrice.*

375. Se la conica è una *parabola*, l'equazione della polare ad un punto $P_1(x_1y_1)$ è, in generale (n.° 352)

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

per il fuoco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ si ha dunque

$$p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$$

cioè l'equazione dell'unica direttrice è

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{27}$$

La direttrice della parabola è una retta normale all'asse, la cui distanza dal vertice è $-\frac{p}{2}$.

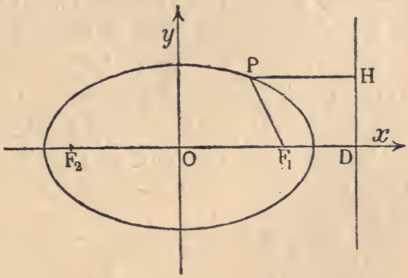
Da ciò si vede che: *il vertice della parabola è equidistante dal fuoco e dalla direttrice.* La distanza d del fuoco dalla direttrice è il parametro

$$d = 2\frac{p}{2} = p.$$

Assumendo come valore della eccentricità nella parabola $e = 1$ si ha anche pel caso parabolico, la formula (26), cioè

$$p = ed.$$

376. Calcolando il rapporto dei valori assoluti delle distanze $\overline{FP}$, $\overline{HP}$ che un punto $P(xy)$ appartenente ad una conica ha da uno dei fuochi e dalla rispettiva direttrice si ha:



Per **coniche a centro**: (form. (17), (18) e (20))

$$|FP| = \frac{|a^2 \mp cx|}{a}$$

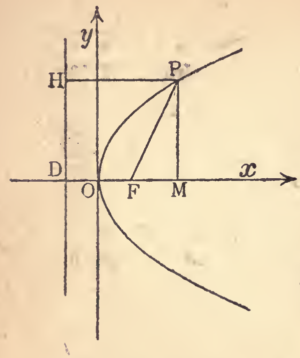
$$|\overline{HP}| = |\overline{PH}| = |\overline{OD} - x| = \left|\pm\frac{a^2}{c} - x\right| = \left|\frac{a^2 \mp cx}{c}\right|.$$

Da cui

(28) $$\left|\frac{\overline{FP}}{\overline{HP}}\right| = \frac{c}{a} = e.$$

Il rapporto dei valori assoluti delle distanze di un punto di una conica a centro, da un fuoco e dalla rispettiva direttrice, è costante ed eguale alla eccentricità della conica.

Per la **parabola** si ha (form. 21)



$$|\overline{FP}| = x + \frac{p}{2}$$

$$|\overline{HP}| = \overline{DO} + \overline{OM} = \frac{p}{2} + x,$$

onde

$$|\overline{FP}| = |\overline{HP}|.$$

Un punto della parabola è ugualmente distante dal fuoco e dalla direttrice.

377. Da quanto si è detto risulta che: *i punti di una conica,* (qualunque essa sia) *hanno la proprietà che le loro distanze* (in valore assoluto) *da un punto fisso e da una retta fissa sono in un rapporto costante e* (eguale all'eccentricità della conica).

Se la conica è un'ellisse si ha $e < 1$, se è una iperbole si ha $e > 1$, se è una parabola si ha $e = 1$.

Reciprocamente: *il luogo dei punti $P(xy)$ le cui distanze $\overline{PF}$, $\overline{PH}$ da un punto fisso $F(\alpha, \beta)$ e da una retta fissa r, $ax + by + c = 0$, hanno un rapporto il cui valore assoluto e è costante, è una conica.*

Infatti dalla relazione

$$\left|\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}\right| = \frac{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}}{\dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e \tag{29}$$

si ricava

$$(a^2 + b^2)\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\} = e^2(ax + by + c)^2 \tag{30}$$

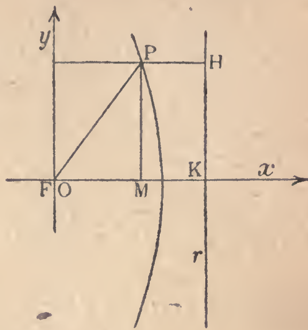
e questa appunto è la equazione di una conica.

Si noti che sviluppando questa equazione e calcolando il relativo invariante quadratico, si trova

$$A_{33} = (a^2 + b^2)^2(1 - e^2).$$

Da cui si scorge che se $e > 1$ la conica è una iperbole, se $e < 1$ una ellisse, se $e = 1$ una parabola.

378. Il calcolo riesce assai semplificato prendendo un sistema di assi cartesiani di riferimento avente la origine nel punto fisso dato F e con l'asse delle x coincidente con la perpendicolare FK, calata da F sulla retta data r.



Ponendo $|\overline{FK}| = d$ troviamo che

$$\overline{PF}^2 = x^2 + y^2, \quad |\overline{PH}| = |d - x|$$

e la (30) si muta nella

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

cioè

(31) $$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0.$$

Si verifica immediatamente che F è un fuoco della conica ed r la corrispondente direttrice.

379. Equazione polare delle coniche. Assumiamo un sistema di coordinate polari di riferimento col polo in un fuoco F della conica, l'asse polare nell'asse focale della conica stessa, e verso positivo dell'asse polare quello che è diretto dal fuoco verso la corrispondente direttrice.

L'equazione (31), in coordinate cartesiane, della conica, si muta nella equazione polare facendo in essa

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Ricordando che abbiamo dimostrato (n.[i] 374, 375) essere $p = ed$, avremo:

$$(1 - e^2\cos^2\theta)\rho^2 + 2ep\cos\theta\rho - p^2 = 0,$$

da cui,

$$\rho = \frac{\pm p(1 \mp e\cos\theta)}{1 - e^2\cos^2\theta} = \frac{\pm p}{1 \pm e\cos\theta};$$

cioè si hanno le equazioni

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad \rho_1 = -\frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

La seconda di queste è contenuta nella prima, dalla quale si ricava cambiando il segno a ρ, e mutando θ in $\theta + \pi$. Possiamo dunque concludere:

L'equazione polare di una conica *riferita ad un fuoco come polo ed all'asse focale come asse polare, si scrive*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

questa per $e < 1$ rappresenta una ellisse, per $e = 1$ una parabola, per $e > 1$ una iperbole.

380. Abbiamo dimostrato che *la distanza di un punto $P(xy)$ di una conica da un fuoco di essa è una funzione lineare delle coordinate del punto* (n.° 369). Ha luogo anche la proposizione reciproca: *il luogo dei punti $P(xy)$ la cui distanza da un punto fisso $F(\alpha, \beta)$ si esprime con una funzione lineare $\overline{PF} = ax + by + c$ delle coordinate del punto, è una conica.*

Consideriamo infatti la retta r, la cui equazione è data da

$$ax + by + c = 0.$$

La distanza $\overline{PH}$ del punto P dalla retta r è data, in valore assoluto, da

$$|\overline{PH}| = \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Avremo, perciò, in conseguenza della ipotesi,

$$\left| \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} \right| = \frac{|ax + by + c|}{|ax + by + c| : |\sqrt{a^2 + b^2}|} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

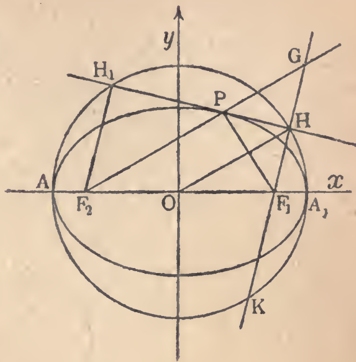
Cioè, il valore assoluto del rapporto delle distanze del punto $P(xy)$ dal punto fisso F e dalla retta fissa r è costante, dunque il luogo di questo punto è una conica (n.° 377).

381. Si dice **podaria** *di una conica il luogo dei piedi delle perpendicolari per un fuoco alle tangenti alla conica.*

La proposizione dimostrata al n.° 356 si dice che la *podaria della parabola è la tangente ad essa nel vertice.*

Vogliamo ora dimostrare che *la podaria di una conica a centro è un cerchio con centro nel centro della conica e raggio eguale al semiasse focale.*

Conduciamo la tangente in $P(xy)$ alla conica, e la perpendicolare F_1H ad essa per il fuoco F_1.



Sia G il punto simmetrico di F_1 rispetto alla tangente condotta, PF_1, PF_2 i due raggi focali uscenti da P e si congiunga PG.

Dall' eguaglianza degli angoli $\widehat{HPF_1}$, $\widehat{F_2PH_1}$, (n.i 370, 371) e da quella degli angoli $\widehat{HPF}$, $\widehat{HPG}$ che è conseguenza della fatta costruzione, segue che i punti F_2, P, G, sono allineati, e che è $PF_1 = PG$.

Da ciò, nel caso ellittico:

$$\overline{F_2G} = \overline{F_2P} + \overline{F_1P},$$

nel caso iperbolico:

$$\overline{F_2G} = \overline{F_2P} - \overline{F_1P},$$

dunque in ogni caso

$$|\,\overline{F_2G}\,| = 2a.$$

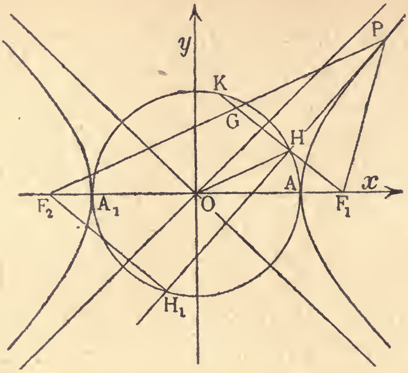
Il segmento OH, che congiunge i punti medi dei lati F_2F_1, F_1G del triangolo $F_1F_2G_1$, è parallelo alla base F_2G, e quindi uguale alla metà di essa; dunque

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{F_2G} = a.$$

Ne segue che il punto H, piede della perpendicolare per F_1 alla tangente, è sul cerchio che ha centro in O e raggio a.

La medesima dimostrazione prova che anche il piede H_1 della perpendicolare F_2H_1 alla tangente per l'altro fuoco F_2 si trova su quel medesimo cerchio.

Dalla dimostrazione fatta si ricava in particolare, che la distanza $\overline{F_1G}$ di un fuoco dal punto G simmetrico dell'altro fuoco rispetto alla tangente, è costante ed eguale (in valore assoluto) a $2a$.



Ossia *il luogo del punto G simmetrico del fuoco F_1 rispetto alla tangente, è un cerchio che ha il centro nell'altro fuoco e raggio eguale all'asse focale.*

382. Sia K la ulteriore intersezione della F_1H col cerchio podario: per la simmetria rispetto al centro si ha

$$\overline{F_2H_1} = \overline{KF_1}.$$

Ora si ha, per note proprietà delle corde nel cerchio,

$$\overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_1A} = \overline{KF_1} \cdot \overline{HF_1}$$

cioè

$$(c+a)(c-a) = \overline{F_2H_1} \cdot \overline{HF_1}$$

e infine

$$\overline{F_2H_1} \cdot \overline{F_1H} = \pm b^2,$$

valendo il segno superiore pel caso ellittico, l'inferiore pel caso iperbolico, ossia: *il prodotto delle distanze dei fuochi da una tangente variabile è costante ed eguale (in valore assoluto) al quadrato del semiasse minore.*

CAPITOLO V.

FASCI E SCHIERE DI CONICHE

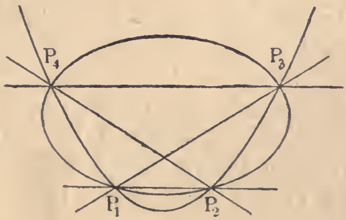
§ I. Fasci di coniche.

383. Intersezioni di due coniche. Date due coniche mediante le loro equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} F(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ \Phi(xy) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0 \end{cases}$$

è noto, dall'algebra (1) che esistono quattro coppie di valori

$$x_1y_1,\quad x_2y_2,\quad x_3y_3,\quad x_4y_4$$



che sono soluzioni comuni alle due equazioni $F = 0$, $\Phi = 0$, cioè che esistono *quattro intersezioni*:

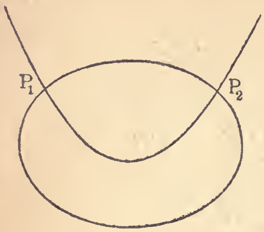
$$P_1(x_1y_1),\quad P_2(x_2y_2),\quad P_3(x_3y_3),\quad P_4(x_4y_4)$$

delle due coniche date.

Si hanno più di quattro intersezioni solo se i polinomi $F(xy)$, $\Phi(xy)$ hanno un fattore comune del primo o del secondo grado, cioè se le coniche si spezzano in due coppie di rette aventi una retta comune, o se sono coincidenti.

(1) Cfr. Pincherle. *Teoria delle equazioni* (seconda edizione) pag. 158.

384. Può accadere che le quattro intersezioni siano tutte distinte oppure che alcune di esse coincidano, e nel primo caso può darsi che esse siano:



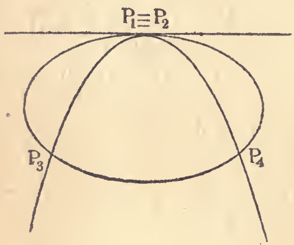
1.° tutte reali,

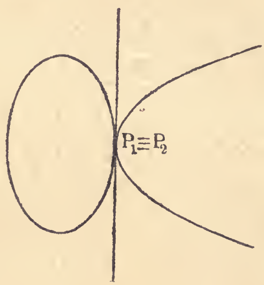
2.° due reali e due immaginarie coniugate,

3.° due a due immaginarie coniugate.

Si possono considerare inoltre i seguenti sottocasi:

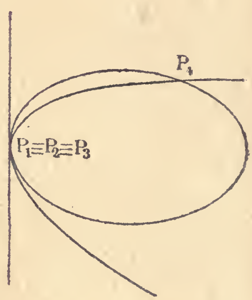
I. Due intersezioni coincidono in un punto reale $P_1 \equiv P_2$ nel quale si ha un **contatto semplice, o bipunto**: le altre due intersezioni possono essere reali e distinte, oppure immaginarie coniugate.





II. Tre intersezioni coincidono in un unico punto reale $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3$. In questo punto si ha un *contatto del secondo ordine o tripunto*; il punto P_1 si dice anche **punto di osculazione** ed in esso le curve, oltre al toccarsi si attraversano.

Il quarto punto P_4, che abbiamo supposto distinto da P_1, è reale.



III. Le quattro intersezioni coincidono in un unico punto reale

$$P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P_4,$$

nel quale si ha un contatto del terzo ordine o *quadripunto.*

IV. Due intersezioni coincidono in un punto $P_1 \equiv P_2$ e le altre due in un secondo punto $P_3 \equiv P_4$. In questo caso le coniche si dicono **bitangenti**: questi due punti di tangenza possono poi essere reali oppure immaginari coniugati. Per

esempio due cerchi concentrici sono bitangenti nei punti ciclici.

385. Se con le due equazioni $F = 0$, $\Phi = 0$ si forma una combinazione lineare

$$\lambda F + \mu\Phi = 0, \tag{2}$$

qualunque sia il caso in cui si trovano le due coniche corrispondenti, per ogni coppia di valori dei parametri λ, μ si avrà la equazione di una conica passante per i quattro punti $P_1 P_2 P_3 P_4$; perchè le coordinate di questi punti, annullando entrambe le F, Φ, annullano anche ogni combinazione lineare $\lambda F + \mu\Phi$.

Le infinite coniche rappresentate dalla equazione $\lambda F + \mu\Phi = 0$ formano un sistema detto **fascio di coniche.**

I punti $P_1 P_2 P_3 P_4$, comuni a tutte le coniche del fascio, si dicono **punti base del fascio.** Se questi sono reali e distinti il fascio è costituito da tutte le coniche circoscritte al quadrangolo $P_1 P_2 P_3 P_4$.

386. *Per ogni punto del piano, distinto dai quattro punti base, passa una conica del fascio ed una sola.* Ed infatti, se il punto $P_5(x_5 y_5)$ è distinto dai quattro punti base, i valori $F(x_5 y_5)$, $\Phi(x_5 y_5)$ non potranno essere entrambi nulli, e, posto che sia $\Phi(x_5 y_5) \neq 0$, dalla relazione

$$\lambda F(x_5 y_5) + \mu\Phi(x_5 y_5) = 0$$

si ricava

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{F(x_5 y_5)}{\Phi(x_5 y_5)}$$

ondè si vede che la conica

$$F(xy) - \frac{F(x_5y_5)}{\Phi(x_5y_5)} \cdot \Phi(xy) = 0$$

appartiene al fascio e passa pel punto P_5.

Questa è la sola conica del fascio passante per P_5 perchè cinque punti del piano determinano (in generale) una conica ed una sola (n.° 252).

Le coniche passanti per 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 dati ad arbitrio costituiscono un fascio.

Infatti se $F=0$, $\Phi=0$ sono le equazioni di due coniche qualunque passanti per tali punti, (che si possono individuare prendendo ad arbitrio per ciascuna un quinto punto), tutte le coniche del fascio $\lambda F + \mu\Phi = 0$ passano per i quattro punti dati. Reciprocamente: una conica $\Psi = 0$ passante per quei 4 punti appartiene al fascio. Infatti la conica del fascio che passa per un punto qualunque P_5 di $\Psi = 0$ (non coincidente con uno dei quattro punti dati) ha con $\Psi = 0$ cinque punti a comune, e quindi coincide con essa.

387. Le coniche $F=0$, $\Phi=0$ (**coniche fondamentali** *del fascio*), corrispondono ai valori $\lambda = 1$, $\mu = 0$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$. *Due coniche qualsivogliano del fascio possono essere riguardate come fondamentali.*

In altri termini: *il fascio è individuato quando ne siano date due coniche arbitrarie.* Infatti, prese ad arbitrio, nel fascio, le due coniche

$$F_1 = \lambda_1 F + \mu_1\Phi = 0, \quad F_2 = \lambda_2 F + \mu_2\Phi = 0,$$

la conica

$$F_3 = \lambda_3 F_1 + \mu_3 F_2 = (\lambda_3\lambda_1 + \mu_3\lambda_2)F + (\lambda_3\mu_1 + \mu_3\mu_2)\Phi = 0$$

appartiene al fascio perchè corrisponde ai valori $\lambda = \lambda_3\lambda_1 + \mu_3\lambda_2$, $\mu = \lambda_3\mu_1 + \mu_3\mu_2$ dei parametri λ, μ: reciprocamente, la equazione di una qualunque conica del fascio può porsi sotto la forma $\lambda_3 F_1 + \mu_3 F_2 = 0$.

388. Una retta qualsivoglia del piano sega le coniche di un fascio, in altrettante coppie di punti A, A'; B, B',....

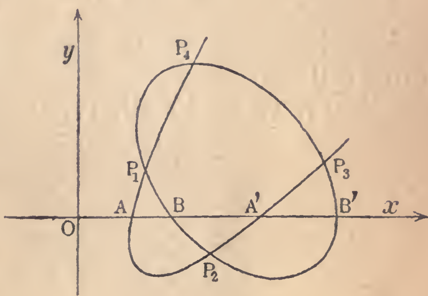
Riferendoci ad un sistema di coordinate avente per asse delle x una tale retta, avremo le ascisse della coppia determinata dalla conica $\lambda F + \mu\Phi = 0$ risolvendo la equazione

$$\lambda F(x,\ 0) + \mu\Phi(x,\ 0) = 0$$

cioè

$$\lambda(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) + \mu(b_{11}x^2 + 2b_{13} + b_{33}) = 0. \tag{3}$$

Ma sappiamo che questa è la equazione della involuzione determinata dalle coppie di punti che sono radici delle equazioni



$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0 \\ b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(n.° 53, pag. 41). Potremo dunque concludere:

Le coniche di un fascio determinano sopra una trasversale le coppie di una involuzione. Proposizione nota col nome di *teorema di* Desargues.

Se la trasversale passa per uno dei punti base le funzioni del 2.° grado in x, $F(x,\ 0)$, $\Phi(x,\ 0)$ hanno un fattore lineare a comune, e la *involuzione è degenere.*

Se non passa per nessuno dei punti base, la involuzione non è degenere, e perciò ammette due punti doppi (reali o no). Ognuno di questi è punto di contatto della trasversale con una conica del fascio, dunque: *in un fascio di coniche esistono due coniche* (reali od immaginarie) *tangenti ad una data retta del piano non passante per nessuno dei punti base.*

389. Coniche degeneri in un fascio. La condizione perchè una conica del fascio sia degenere è espressa dall'annullarsi del suo discriminante, cioè da:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31} & \lambda a_{32} + \mu b_{32} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

questa, se non è identicamente soddisfatta (per ogni coppia λ, μ) è una equazione del 3.° grado nel rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, ed ammette tre radici: si vede dunque che *in un fascio di coniche esistono tre coniche degeneri e tre sole, a meno che le coniche del fascio non siano tutte degeneri.*

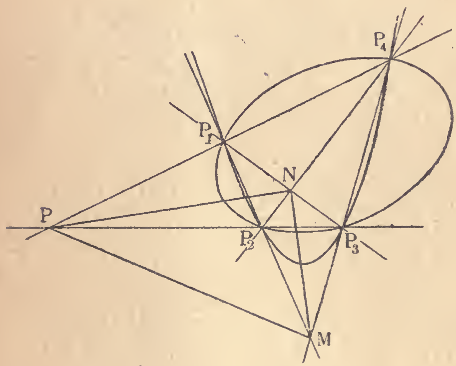
Se i punti base sono tutti distinti, le tre coniche degeneri sono date dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo $P_1P_2P_3P_4$, cioè da

$$(4) \qquad P_1P_2,\ P_3P_4;\quad P_1P_3,\ P_2P_4;\quad P_1P_4,\ P_2P_3.$$

Se i quattro punti sono reali, queste tre coniche sono tutte reali.

Se P_1, P_2 sono reali, P_3, P_4 immaginari, la coppia

$$P_1P_2,\quad P_3P_4$$



è reale, le altre immaginarie. C'è una coppia reale anche se i quattro punti sono tutti immaginari (a due a due coniugati), ed è quella che si ottiene congiungendo le coppie di punti immaginari coniugati.

In questo ultimo caso i tre punti diagonali $M(P_1P_2,\ P_3P_4)$, $N(P_1P_3,\ P_2P_4)$, $P(P_1P_4,\ P_2P_3)$ sono tutti reali.

Il triangolo MNP (*triangolo diagonale del quadrangolo* $P_1P_2P_3P_4$) *è* **autoconiugato** *rispetto ad una conica qualsiasi del fascio.*

Se i punti base non sono tutti distinti, le tre coniche degeneri vengono in parte, o tutte, a coincidere, e si ottengono sempre dal quadro (4) purchè s'intenda per retta congiungente due punti base coincidenti, la tangente comune, in un tal punto, a tutte le coniche del fascio.

390. Coniche determinate da condizioni lineari. La considerazione del fascio di coniche permette spesso di scrivere nel modo più rapido la equazione di una conica soggetta a date condizioni lineari.

Dato infatti, che si sappia che la conica cercata deve passare per quattro dati punti, si scriverà l'equazione del fascio che ha questi per punti base, prendendo per coniche fondamentali le più semplici o le più opportune, (in generale le coniche degeneri, costituite da due coppie di rette per quei quattro punti), e si avrà poi la conica richiesta determinando il parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ in guisa che rimanga soddisfatta la quinta condizione.

§ II. Fasci di cerchi.

391. Se le coniche fondamentali F, Φ sono due cerchi, cioè se sono date dalle equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} F &= a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \\ \Phi &= b_{11}(x^2+y^2)+2b_{13}x+2b_{23}y+b_{33}=0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

tutte le coniche non degeneri del fascio sono cerchi, e la equazione

$$\lambda F+\mu\Phi=0$$

rappresenta un fascio di cerchi.

Dei punti base, due sono i *punti ciclici* comuni a tutti i cerchi del piano, gli altri due sono sulla retta che ha per equazione:

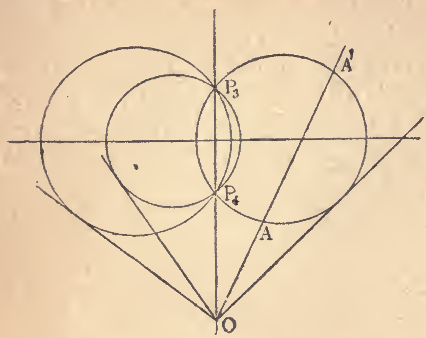
$$\begin{aligned} b_{11}F-a_{11}\Phi = 2(a_{13}b_{11}-a_{11}b_{13})x+2(a_{23}b_{11}-a_{11}b_{23})y+ \\ +a_{33}b_{11}-a_{11}b_{33}=0, \end{aligned} \tag{6}$$

che possiamo scrivere anche sotto la forma

$$\frac{F}{a_{11}}-\frac{\Phi}{b_{11}}=2\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}-\frac{b_{13}}{b_{11}}\right)x+2\left(\frac{a_{23}}{a_{11}}-\frac{b_{23}}{b_{11}}\right)y+\frac{a_{33}}{a_{11}}-\frac{b_{33}}{b_{11}}=0. \tag{7}$$

Questa retta è l'asse radicale dei cerchi $F=0$, $\Phi=0$.

Se indichiamo con $P_1 P_2$ i punti ciclici del piano, con $P_3 P_4$ i punti (reali od immaginari coniugati) dove l'asse radicale incontra i due cerchi, troviamo per il fascio di cerchi la conica degenere $P_1 P_2$, $P_3 P_4$; costituita dall' asse radicale e dalla retta impropria.



Le altre due coniche degeneri

$$P_1 P_3,\ P_2 P_4;\ \ P_1 P_4,\ P_2 P_3$$

sono immaginarie. Ciascuna delle tre coniche degeneri è costituita da una coppia di rette che complessivamente passano per i punti ciclici, e quindi può ancora considerarsi come un cerchio.

392. Se i punti $P_3 P_4$ sono reali e distinti, tutti i cerchi del fascio si tagliano in questi punti ed hanno l'asse radicale per secante comune.

Se i punti P_3, P_4 sono coincidenti, tutti i cerchi del fascio sono tangenti all'asse radicale nel punto $P_3 \equiv P_4$.

Se i punti $P_3 P_4$ sono immaginari coniugati due cerchi quali si vogliano del fascio non hanno alcun punto (reale) in comune.

In ogni caso i centri dei cerchi del fascio sono tutti sopra una stessa retta, normale all'asse radicale, la quale interseca l'asse medesimo nel punto medio del segmento $P_3 P_4$.

393. Il teorema di *Desargues* per fasci di cerchi, si enuncia: *segando i cerchi di un fascio con una retta del suo piano, si ottengono le coppie di una involuzione che ha come centro la intersezione della retta stessa con l'asse radicale del fascio.*

Se la retta non passa per uno dei punti base, la involuzione è *non degenere.*

394. È noto dalla geometria elementare che l'asse radicale è *il luogo dei punti di egual potenza* rispetto ai cerchi del fascio, tali cioè che, indicando con AA' i punti dove una retta uscente da un punto O dell'asse radicale incontra uno qualunque dei cerchi del fascio, è costante il prodotto

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'}.$$

Ciò segue immediatamente anche dal teorema di Desargues: infatti O è il centro della involuzione segnata su tale retta dai cerchi del fascio (n.° 54).

395. Gli assi radicali di tre cerchi, associati due a due, concorrono in un punto che ha la stessa potenza rispetto ai tre cerchi e che si dice *centro radicale dei tre cerchi.*

Ciò si verifica immediatamente, anche per via analitica, osservando che se

$$F=0, \quad \Phi=0, \quad \Psi=c_{11}(x^2+y^2)+2c_{13}x+2c_{23}y+c_{33}=0$$

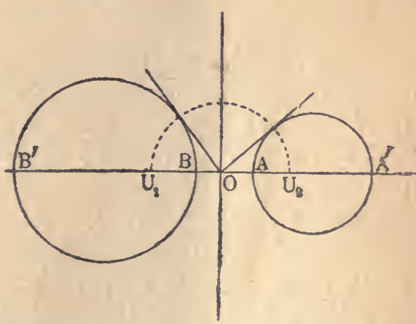
sono le equazioni dei tre cerchi, quelle dei tre assi radicali sono (n.° 391)

$$L_1=\frac{\Phi}{b_{11}}-\frac{\Psi}{c_{11}}=0, \quad L_2=\frac{\Psi}{c_{11}}-\frac{F}{a_{11}}=0, \quad L_3=\frac{F}{a_{11}}-\frac{\Phi}{b_{11}}=0,$$

e tra i primi membri delle loro equazioni sussiste la relazione lineare: $L_1+L_2+L_3=0$.

396. *Punti limiti di un fascio di cerchi.*

Se il fascio di cerchi si sega con la linea dei centri, nella involuzione determinata sopra questa linea sono coppie di punti coniugati gli estremi dei diametri AA', BB'....



I punti doppi U_1, U_2 *di questa involuzione sono centri di cerchi del fascio di raggio nullo.* Questi punti sono detti punti limiti *del fascio di cerchi.*

§ III. Schiere di coniche.

397. Date due coniche, considerate come inviluppi e rappresentate dalle equazioni in coordinate di retta (n.° 267)

$$F(u, v) = 0, \quad \Phi(u, v) = 0 \tag{8}$$

si dice **schiera** *l'insieme delle coniche inviluppo date dalla equazione*

$$\lambda F(uv) + \mu\Phi(uv) = 0, \tag{9}$$

dove λ, μ sono parametri variabili.

Le coniche $F = 0$, $\Phi = 0$ si dicono **coniche fondamentali** *della schiera*; esse hanno in comune quattro tangenti (reali od immaginarie, distinte, oppure in parte o tutte, coincidenti) le quali sono tangenti comuni anche a tutte le coniche della schiera, e si dicono **rette basi.**

Se queste rette sono reali e distinte, la schiera è costituita da tutte le coniche inscritte in un quadrilatero.

Ogni retta del piano distinta dalle rette basi è tangente ad una conica e ad una sola della schiera.

Le coppie di tangenti condotte da un punto del piano alle coniche di una schiera formano una involuzione.

Per un punto del piano passano due coniche della schiera (reali od immaginarie).

In una schiera di coniche sono contenuti tre **inviluppi degeneri** (coppie di punti considerati come centri di fasci di raggi) (n.° 268).

398. Le coniche di una schiera non formano, in generale, un fascio, perchè per un punto del piano passano due coniche della schiera: le coniche di un fascio, in generale, non formano una schiera, giacchè ogni retta del piano è tangente a due coniche del fascio.

Ma si ha un fascio che è ad un tempo anche schiera, nel sistema delle coniche che hanno due contatti bipunti in due punti fissi (n.° 384, IV); tale sistema è detto **fascio schiera** *di coniche bitangenti.* Un particolare fascio-schiera è formato dai cerchi concentrici (n.° 384). E si ha parimenti un *fascio* *schiera* nel sistema delle coniche che hanno un contatto quadripunto in un dato punto del piano (n.° 384, III).

§ IV. Schiera di coniche omofocali.

399. Si dicono **omofocali** o **confocali** *due coniche a centro che abbiano gli stessi fuochi, o due parabole che abbiano lo stesso fuoco e lo stesso punto improprio.*

400. In conformità alle considerazioni fatte al n.° 363 possiamo anche alla parabola attribuire due fuochi, dei quali l'uno è all'infinito nella direzione dei diametri, si può dunque, in generale, affermare che *sono confocali due coniche che hanno gli stessi fuochi.*

401. Le coniche a centro omofocali hanno in comune il centro e gli assi. Immaginandole riferite ad un sistema di assi cartesiani coincidenti con gli assi delle coniche, avremo la equazione di una qualunque di esse sotto la forma

$$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1 \tag{10}$$

dove possiamo supporre $m>n$ ed i numeri m, n entrambi positivi se la conica è una ellisse, m positivo e n negativo se è una iperbole.

La distanza focale è in ogni caso espressa da

$$c=\sqrt{m-n},$$

ed il valore di c deve rimanere il medesimo per qualunque conica del sistema.

Se dunque rappresentiamo con

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$$

una conica omofocale alla (10), dovremo avere

$$p-q=m-n$$

od anche

$$p - m = q - n.$$

Indicando con k la differenza $p - m = q - n$, si avrà infine:

$$p = m + k, \quad q = n + k.$$

Si conclude da ciò che tutte le coniche omofocali alla (10) hanno una equazione del tipo

$$\frac{x^2}{m+k} + \frac{y^2}{n+k} = 1 \tag{11}$$

dove k è un parametro variabile da una conica a conica

Queste coniche sono ellissi reali se $k > -n$
» » » iperboli » $-m < k < -n$
» » » ellissi immaginarie » $k < -m$
» » » degeneri » $k = -m$, o $k = -n$.

402. Per un punto generico $P(xy)$ del piano passano una ellisse ed una iperbole del sistema, luoghi dei punti le cui distanze dai fuochi F_1F_2 hanno somma eguale a $PF_1 + FP_2$, o differenza eguale a $PF_1 - PF_2$; esse si tagliano in P ad angolo retto perchè la tangente in P biseca nella ellisse l'angolo esterno, nella iperbole l'angolo interno $F_1\widehat{P}F_2$ formato dai raggi focali.

Queste proprietà si esprime dicendo che le dette curve si *secano* **ortogonalmente**. Per la simmetria rispetto agli assi, esse si segheranno ortogonalmente in altri tre punti simmetrici di P.

Le infinite iperboli ed ellissi omofocali formano dunque un **doppio sistema ortogonale**, che ricopre il piano in guisa che in ogni punto P di esso si incrociano ortogonalmente una curva del primo sistema ed una del secondo.

403. Una parabola riferita a coordinate cartesiane ortogonali con l'origine nel fuoco e l'asse x nell'asse della parabola, ha una equazione della forma

$$y^2 = 2px + p^2 \tag{12}$$

questa, se si considera p come parametro variabile, rappresenta le infinite parabole omofocali (col fuoco nella origine).

Per ogni punto $P_1(x_1y_1)$ del piano passano due parabole del sistema, corrispondenti ai valori di p che risolvono la equazione di 2.° grado in p:

$$p^2 - 2px_1 - y_1^2 = 0,$$

le cui radici sono sempre reali, ed hanno la forma

$$p_1 = x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad p_2 = x_1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

cioè sono l'una positiva, l'altra negativa.

Le parabole del sistema si ripartiscono dunque in due serie con le concavità rivolte al verso positivo dell'asse, oppure al verso opposto.

Le due parabole passanti per uno stesso punto appartengono a serie diverse. Dunque *due parabole di una stessa serie non si tagliano in nessun punto proprio.*

Due parabole di serie diverse si tagliano in due punti reali proprii ortogonalmente.

Infatti i coefficienti angolari delle tangenti in $P_1(x_1y_1)$ a tali parabole sono dati da

$$m_1 = \frac{p_1}{y_1}, \quad m_2 = \frac{p_2}{y_1};$$

ma si ha $p_1p_2 = -y_1^2$; onde $m_1m_2 = -1$.

Le parabole omofocali costituiscono dunque un **doppio sistema ortogonale.**

404. In un sistema di coniche a centro omofocali le tangenti pei fuochi a tutte le coniche del sistema sono le rette isotrope (n.° 358), possiamo dunque dire che *tutte le coniche omofocali sono inscritte nel quadrilatero formato dalle quattro rette isotrope per i fuochi* F_1F_2; esse formano quindi **una schiera di coniche.**

405. *La medesima conclusione vale per le parabole omofocali,* e si ottiene supponendo di mandare all'infinito uno dei fuochi nella direzione dell'asse focale. Il quadrilatero circoscritto a tutte le parabole della schiera viene ad essere costituito dalle rette isotrope uscenti dal fuoco e dalla retta impropria contata due volte.

406. Le proposizioni enunciate al n.° precedente si verificano subito analiticamente scrivendo la equazione, in coordinate di retta, della conica (11), la quale come sappiamo (n.i 313, 328) assume la forma

$$(m+k)u^2+(n+k)v^2=1$$

cioè

$$(mu^2+nv^2-1)+k(u^2+v^2)=0 \tag{13}$$

questa è appunto la equazione di una schiera di coniche a centro $\left(\text{si è fatto } \frac{\lambda}{\mu}=k\right)$ che ha per coniche fondamentali

$$\begin{cases} mu^2+nv^2-1=0 \\ u^2+v^2=0. \end{cases} \tag{14}$$

La seconda di queste si spezza nelle due $u+iv=0$, $u-iv=0$, cioè nei punti (rappresentati da equazioni in coordinata di retta) che hanno per coordinate cartesiane omogenee $(1, i, 0)$, $(1-i, 0)$; questi sono i ***punti ciclici del piano***, i quali costituiscono una ***conica degenere*** della schiera; le altre due sono la coppia dei fuochi reali, corrispondenti a $k=-n$, e la coppia dei fuochi immaginari, corrispondenti a $k=-m$.

Le medesime considerazioni si estendono immediatamente alla schiera di parabole omofocali.

APPENDICE

PROIETTIVITÀ FRA FORME DI 2.ª E DI 3.ª SPECIE

CAPITOLO I.

OMOGRAFIE

§ I. Omografie nel piano.

407. Dati due piani Π, Π', che potremo supporre distinti o sovrapposti, si riferiscano i punti di tali piani a sistemi di coordinate omogenee e si indichino genericamente con $P(x_1x_2x_3)$ i punti del piano Π, con $P'(x_1'x_2'x_3')$ quelli del piano Π'. Si dice **omografia**, o **collineazione** *la corrispondenza biunivoca che viene stabilita fra i punti* $P(x_1x_2x_3)$, $P'(x_1'x_2'x_3')$ *mediante la* **trasformazione lineare** *a modulo diverso dallo zero:*

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 , \end{cases}$$

dove ρ è un arbitrario fattore di proporzionalità.

La trasformazione così rappresentata ammette la inversa:

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho' x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \alpha_{31}x_3' \\ \rho' x_2 = \alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{32}x_3' \\ \rho' x_3 = \alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' + \alpha_{33}x_3' , \end{cases}$$

dove α_{rs} è l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante (modulo della trasformazione)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Sappiamo inoltre che il prodotto di due trasformazioni lineari a modulo diverso dallo zero è ancora una trasformazione dello stesso tipo. Dunque vediamo che la inversa di una omografia è una omografia, e che il prodotto di due omografie è una omografia.

Da ciò si conclude che *tutte le possibili omografie costituiscono un gruppo: il gruppo delle omografie piane*; questo gruppo, per la ragione che fra poco vedremo, viene anche detto **gruppo proiettivo.**

Le formule (1) che definiscono la omografia, contengono 8 parametri essenziali (i rapporti di 8 coefficienti al rimanente), diremo dunque che *la totalità delle omografie piane forma un gruppo finito continuo ad 8 parametri.*

Geometricamente ciò significa che *la omografia è determinata da due quaterne di punti (tre a tre non allineati) corrispondenti.*

Date due di tali quaterne A, B, C, D; A', B', C', D', il modo più semplice di realizzare la omografia da esse determinata consiste nello scegliere sui due piani due sistemi di coordinate proiettive (n.[i] 159, 161), assumendo tre di quei punti come vertici di triangoli fondamentali, il quarto come punto unità.

Le formule della omografia si riducono allora a quelle che stabiliscono la eguaglianza delle coordinate proiettive di elementi corrispondenti.

Se due piani Π, Π' sono omografici, e se il punto $P(x_1x_2x_3)$ descrive su Π una retta $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$, la equazione

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0 \tag{3}$$

di questa retta, per mezzo delle formule (2) si trasforma nella equazione

$$\begin{gathered}(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\alpha_{13}\xi_3)x_1'+(\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{23}\xi_3)x_2'+\\+(\alpha_{31}\xi_1+\alpha_{32}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3)x_3'=0,\end{gathered}$$

la quale rappresenta una retta $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ del piano Π', di coordinate

$$\left\{\begin{aligned}\rho_1\xi_1'&=\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\alpha_{13}\xi_3\\ \rho_1\xi_2'&=\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\alpha_{23}\xi_3\\ \rho_1\xi_3'&=\alpha_{31}\xi_1+\alpha_{32}\xi_2+\alpha_{33}\xi_3.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ciò significa che *nella omografia* (1) *ad ogni retta* $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$

di Π *corrisponde una retta* $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ *le cui coordinate si ottengono mediante la trasformazione lineare* (4).

Reciprocamente, ad ogni retta $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ di Π' corrisponde una retta $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ le cui coordinate sono date dalla trasformazione inversa:

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho_1'\xi_1 = a_{11}\xi_1' + a_{21}\xi_2' + a_{31}\xi_3' \\ \rho_1'\xi_2 = a_{12}\xi_1' + a_{22}\xi_2' + a_{32}\xi_3' \\ \rho_1'\xi_3 = a_{13}\xi_1' + a_{23}\xi_2' + a_{33}\xi_3'. \end{cases}$$

In una omografia dunque corrispondono biunivocamente punti a punti e rette a rette, e se un punto ed una retta si appartengono sopra uno dei piani, anche il punto e la retta corrispondenti su l'altro, si appartengono.

Da ciò si deduce che *ad una punteggiata in* Π *corrisponde una punteggiata in* Π', *e ad un fascio un fascio.*

Dal fatto che le trasformazioni (1), (2), (4), (5) sono lineari si deduce inoltre che *se il punto* P *descrive su* Π *una curva di ordine* m, *il punto* P' *corrispondente descrive su* Π' *una curva dello stesso ordine, e che, se la retta* r *descrive su* Π *un inviluppo di classe* m, *la retta corrispondente* r' *descrive sopra* Π' *un inviluppo della stessa classe.*

408. *Ogni omografia piana subordina una proiettività fra forme di prima specie in essa corrispondenti.*

Consideriamo, infatti, due punteggiate corrispondenti e su queste le coppie di punti corrispondenti $A(a_1a_2a_3)$, $B(b_1b_2b_3)$; $A'(a_1'a_2'a_3')$, $B'(b_1'b_2'b_3')$.

Assumendo i punti A, B, come punti base, potremo esprimere le coordinate di qualunque punto della prima punteggiata mediante le formule:

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \quad x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3.$$

Giovandoci delle formule (1) otteniamo allora le coordinate del corrispondente punto $P'(x_1'x_2'x_3')$ della seconda, espresse mediante le formule

$$x_1' = \lambda a_1' + \mu b_1', \quad x_2' = \lambda a_2' + \mu b_2', \quad x_3' = \lambda a_3' + \mu b_3'.$$

Vediamo dunque che *i punti corrispondenti nelle due punteggiate hanno la stessa coordinata proiettiva* $\frac{\lambda}{\mu}$; (n.i 158, 159), *le due punteggiate sono quindi proiettive* (n.° 40).

La medesima dimostrazione si può ripetere per fasci omologhi, e se ne deduce che *le proprietà proiettive delle figure si conservano, o* (come si suol dire) *sono invarianti, per le trasformazioni omografiche.*

Ed è per questa ragione che il gruppo delle omografie è anche detto *gruppo proiettivo.*

409. Quando i *piani omografici sono* **sovrapposti**, può darsi che le coppie di elementi corrispondenti si corrispondano in doppio modo.

In tal caso la omografia subordina una involuzione sopra ogni forma di prima specie contenuta nel piano, essa viene più propriamente detta **omografia involutoria.** La omografia è certamente involutoria se il suo modulo è un determinante ortogonale e simmetrico.

410. Elementi uniti. Nella ipotesi che i piani omografici siano sovrapposti è importante la ricerca degli elementi uniti.

Usando un unico sistema cartesiano di riferimento, ed indicando con ρ un fattore di proporzionalità, che si dovrà determinare in modo opportuno, le coordinate di punti uniti dovranno soddisfare il sistema:

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \rho x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \rho x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

cioè

$$(6)\qquad \begin{cases}(a_{11}-\rho)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\rho)x_2 + a_{23}x_3 = 0\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\rho)x_3 = 0\end{cases}$$

il quale sistema è possibile per i valori di ρ che soddisfano la relazione

$$(7)\qquad D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho\end{vmatrix} = 0.$$

Questa è una equazione di terzo grado in ρ, detta **equazione fondamentale**: essa, nel caso di una omografia reale, ha sempre almeno una radice reale, e le altre pure reali o complesse coniugate. Ai valori di ρ dati da queste radici, corrispondono, per le (6), **punti uniti** nella data omografia.

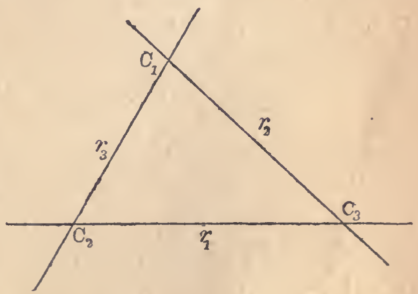
La ricerca delle **rette unite** si può fare in modo analogo. Dalle (5) si ottengono le equazioni

$$(6')\qquad \begin{cases} (a_{11}-\rho)\xi_1 + a_{21}\xi_2 + a_{31}\xi_3 = 0 \\ a_{12}\xi_1 + (a_{22}-\rho)\xi_2 + a_{32}\xi_3 = 0 \\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + (a_{33}-\rho)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

e, per ρ, la equazione

$$(7')\qquad \Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\rho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Poichè i determinanti $D(\rho)$, $\Delta(\rho)$ si ricavano l'uno dall'altro collo scambiare le linee in colonne, così vediamo che la equazione $\Delta(\rho)=0$, che si incontra nella ricerca delle rette unite, è identica a quella $D(\rho)=0$ da cui dipende la ricerca dei punti uniti.



Da ciò si deduce che *le rette unite appartengono ai punti uniti.*

E, precisamente, che *la retta unita $r_1(\xi_1\xi_2\xi_3)$ determinata dalla radice ρ_1 della equazione fondamentale, appartiene ai punti uniti C_2, C_3 determinati dalle due rimanenti radici ρ_2, ρ_3 della stessa equazione.*

Si ha infatti per la retta r_1,

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_3 + a_{31}\xi_3 = \rho_1\xi_1 \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{32}\xi_3 = \rho_1\xi_2 \\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 = \rho_1\xi_3. \end{cases}$$

Indichiamo con $C_2(x_1''x_2''x_3'')$ il punto unito corrispondente al valore ρ_2; e supponiamo $\rho_2 \neq \rho_1$.

Moltiplicando ordinatamente le equazioni scritte per x_1'',

x_2'', x_3'', sommando e ricordando le (6), avremo

$$\rho_2(\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'') = \rho_1(\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'').$$

E, se non è $\rho_2 = \rho_1$, ciò che abbiamo escluso, dovrà essere

$$\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'' = 0;$$

questa è appunto la condizione di appartenenza del punto C_2 e della retta r_1.

Del resto si vede direttamente ed immediatamente che la retta che congiunge due punti uniti è una retta unita, e, reciprocamente, che il punto di intersezione di due rette unite è un punto unito.

Nelle omografie tra piani sovrapposti si hanno dunque in generale tre punti, uniti e tre rette unite, le quali congiungono a due a due i punti uniti.

411. Omologie piane. Derivando la espressione $D(\rho)$ rispetto a ρ, si trova:

$$-D'(\rho) = \begin{vmatrix} a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\rho \end{vmatrix}.$$

Da questa formula si vede che, se per un certo valore ρ_1 di ρ il determinante $D(\rho)$ ha caratteristica < 2, quel valore ρ_1 annulla anche la derivata $D'(\rho)$ e perciò ρ_1 è radice almeno doppia della equazione $D(\rho) = 0$.

Abbiamo supposto che per un tale valore la caratteristica di $D(\rho)$ sia < 2. Se questa caratteristica è nulla, si ha

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \rho, \quad a_{rs} = 0, \quad r \neq s$$

e le equazioni della omografia si riducono alle

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3,$$

cioè *la omografia è una* **identità**, *e tutti i punti del piano sono uniti.*

Supporremo dunque che la caratteristica del determinante $D(\rho)$ e quindi anche quella del sistema (6) sia 1.

In tale ipotesi tale sistema si riduce ad una sola equazione essenziale, la quale rappresenta *una retta r in cui tutti i punti sono uniti.*

Contemporaneamente, lo stesso valore ρ_1 rende minore di 2 la caratteristica di $\Delta(\rho)$; il sistema (6') si riduce ad una sola equazione, che, in coordinate di retta, rappresenta la equazione di un punto C, centro di un fascio di rette unite.

Questo punto è il *punto unito* (in generale esterno alla retta r) il quale corrisponde alla terza radice della equazione $D(\rho)=0$, oltre le due coincidenti nella radice doppia $\rho=\rho_1$.

Concludiamo dunque che: *se esiste un determinato valore ρ_1 di ρ (che dovrà essere radice multipla di $D(\rho)=0$) per il quale il determinante $D(\rho_1)$ ha caratteristica <2, i piani omografici sono identici nel caso della caratteristica nulla, e, nel caso della caratteristica uno, hanno infiniti punti uniti allineati in una retta r, ed infinite rette unite per un punto C.*

In questo caso la omografia prende il nome di **omologia**, la punteggiata r di punti uniti è detta **asse della omologia**, ed il punto C centro del fascio delle rette unite, è detto **centro della omologia.**

Se il centro appartiene all'asse si ha una **omologia speciale.**

412. *In una omologia due punti corrispondenti sono allineati col centro, e due rette omologhe si incontrano in un punto dell'asse.*

Per dimostrare ciò basta considerare che la retta PC che congiunge un punto qualunque P del piano omologico col centro C, è unita, e perciò il punto P' deve ad essa appartenere.

Si dimostra immediatamente (n.° 49, pag. 38) che *in qualunque omologia due punti corrispondenti P, P' formano col centro C, e col punto ove la loro congiungente incontra l'asse, un birapporto costante.* Il valore di questa costante è detto **caratteristica della omologia.** Se la caratteristica è -1 la omologia è involutoria, e, vien detta **omologia armonica.**

413. È facile stabilire la forma particolare a cui si riducono le equazioni (1) della omografia nel caso della omologia.

Se supponiamo di porre l'origine delle coordinate nel centro (supposto proprio) della omologia, vediamo dalla (6) che risulta $a_{13} = a_{23} = 0$; e che l'equazione fondamentale ammette la radice $\rho_1 = a_{33}$ corrispondente al centro; scrivendo poi che deve esistere una radice doppia atta a rendere eguale ad 1 la caratteristica di $D(\rho)$, si trova che tale radice è $\rho_2 = \rho_3 = a_{11} = a_{22}$, e che inoltre è $a_{12} = a_{21} = 0$. Le equazioni della omologia assumono la forma:

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 \\ \rho x_2' = a_{11}x_2 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 . \end{cases}$$

L'asse della omologia è la retta

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - a_{11})x_3 = 0.$$

§ II. Affinità.

414. *Una omografia piana nella quale le rette improprie si corrispondono è detta* **affinità**.

Se i piani omografici sono *sovrapposti*, si ha affinità quando la retta impropria è unità; o, in altri termini *le trasformazioni affini di un piano in sè sono tutte le omografie che lasciano invariata la retta impropria.*

Le equazioni della affinità si ottengono dalle equazioni (1) della omografia, introducendo in esse la condizione che alla retta $x_3 = 0$, corrisponda la retta $x_3' = 0$.

In forza di tale ipotesi la terza delle (1) si riduce alla

$$x_3' = a_{33}x_3 ;$$

ciò richiede che sia

$$a_{31} = a_{32} = 0,$$

e le equazioni cercate assumono la forma

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3 . \end{cases}$$

Se poniamo

$$\alpha_{rs} = \frac{a_{rs}}{a_{33}}; \quad \begin{matrix} r = 1,\ 2, \\ s = 1,\ 2,\ 3, \end{matrix}$$

e passiamo alle coordinate cartesiane non omogenee, abbiamo le *equazioni della affinità piana*

$$(8) \qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13} \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}\,. \end{cases}$$

Dal fatto che le formule (8) sono trasformazioni lineari (non omogenee) a modulo diverso dallo zero, si deduce che il prodotto di due affinità piane, e la inversa di una affinità piana sono ancora affinità piane. Possiamo dunque dire che *le affinità piane formano un gruppo.*

Questo è un gruppo finito, continuo a 6 parametri, sottogruppo del gruppo proiettivo.

Due terne di punti corrispondenti (non allineati) o due terne di rette corrispondenti (non incidenti in uno stesso punto) determinano una affinità piana.

415. Il sottogruppo delle affinità si è ricavato introducendo la condizione che le rette improprie sieno corrispondenti o, se si tratta di piani sovrapposti, che *la retta impropria sia elemento invariante.*

Le proprietà delle forme geometriche che rimangono invarianti per le trasformazioni del *gruppo proiettivo* sono le proprietà proiettive, e queste sole. Ma quando si assumono come fissi certi particolari elementi geometrici, e si studiano le relazioni che con questi hanno le rimanenti figure dello spazio, si vengono a considerare anche nuove proprietà di coteste figure: e cioè le proprietà che non rimangono invariate per *tutte* le trasformazioni del gruppo proiettivo; ma solo per quelle, fra esse trasformazioni, che lasciano fissi gli elementi considerati. Tali trasformazioni formeranno, in generale, un sottogruppo del gruppo proiettivo, e le proprietà che rimangono inalterate per le trasformazioni di un tale sottogruppo saranno (oltre alle proprietà proiettive) quelle appunto che risultano dalle relazioni fra gli elementi fissi e le figure geometriche dello spazio.

Abbiamo visto che quando si considera come elemento invariante la retta impropria, il gruppo proiettivo si abbassa al **sottogruppo delle affinità.** Fra le proprietà che rimangono invariate per le trasformazioni di questo sottogruppo si trovano, oltre alle proprietà proiettive, certe particolari **proprietà metriche**, che riguardano le aree di figure corrispondenti.

E precisamente dimostreremo che *in una affinità piana il rapporto fra le aree di figure corrispondenti è costante.*

Basterà che ci limitiamo alla considerazione di due triangoli omologhi. Siano dunque

$$P_1(x_1y_1),\quad P_2(x_2y_2),\quad P_3(x_3y_3),$$
$$P_1'(x_1'y_1'),\quad P_2'(x_2'y_2'),\quad P_3'(x_3'y_3')$$

i vertici di due triangoli corrispondenti. Calcolando con la nota regola, l'area del triangolo $P_1'P_2'P_3'$ e tenendo conto delle (8) avremo

$$P_1'P_2'P_3' = \begin{vmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13} & \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13} & \alpha_{21}x_2 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{11}x_3 + \alpha_{12}y_3 + \alpha_{23} & \alpha_{21}x_3 + \alpha_{22}y_3 + \alpha_{23} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

cioè

$$\overline{P_1'P_2'P_3'} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \overline{P_1P_2P_3}.$$

Rimane così dimostrato il nostro asserto ed inoltre risulta che *il valore costante del rapporto fra le aree di figure corrispondenti è dato dal modulo della trasformazione* (8) *che definisce la affinità.*

Se il modulo $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ è positivo, le figure corrispondenti hanno aree di egual segno, cioè i loro contorni sono percorsi in senso concorde, se negativo hanno segno contrario. Si possono perciò distinguere **affinità dirette** (a modulo positivo) **ed affinità inverse.**

Le prime formano un gruppo, non già le seconde, perchè *il prodotto di due affinità inverse è una affinità diretta.*

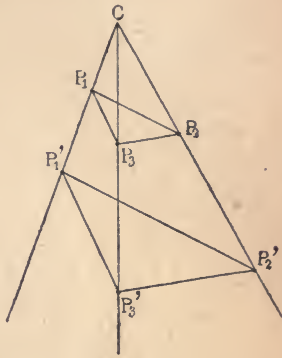
Se un tale rapporto è $=1$, le aree di figure corrispondenti sono eguali, cioè coteste figure risultano *equivalenti.*

Vediamo dunque che *le trasformazioni affini a modulo eguale ad* 1 *conservano le aree nelle figure corrispondenti.*

Queste trasformazioni formano un gruppo finito, continuo, a cinque parametri, sottogruppo di quello delle affinità piane dianzi considerato, che è detto delle **equivalenze affini.**

Se il modulo è -1, le aree sono conservate in valore assoluto, ma ne è cambiato il segno; cioè *è invertito il senso in cui si percorre il perimetro di figure corrispondenti.*

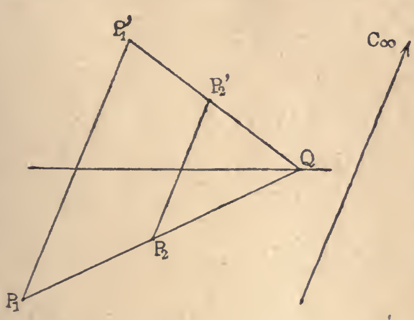
416. Omologie affini. Perchè un'omologia sia una affinità occorre che la retta impropria sia unita; quindi, o che essa coincida coll'asse di omologia o che appartenga al centro della omologia.



I. Se *l'omologia* **non** è **speciale** *e se l'asse coincide con la retta impropria*, due punti omologhi sono allineati col centro, *e due rette omologhe sono parallele.* Dalla proprietà data al n.° 412, circa la caratteristica della omologia, si deduce, nel caso presente, che *il rapporto delle distanze di due punti omologhi dal centro di omologia è costante:* dunque *le figure corrispondenti sono simili* (nel senso della geometria elementare) e si dicono *omotetiche rispetto al centro:* e la omologia è più propriamente detta **omotetia.**

Questo caso sarà trattato anche più innanzi, poichè rientra in quello delle similitudini, che sarà oggetto del prossimo paragrafo; nel quale daremo anche la forma caratteristica delle *equazioni della omotetia.*

Per ora aggiungeremo soltanto che, *se la omotetia è armonica*, il rapporto delle distanze di punti corrispondenti dal centro è -1; cioè si ha una *simmetria rispetto al centro.*



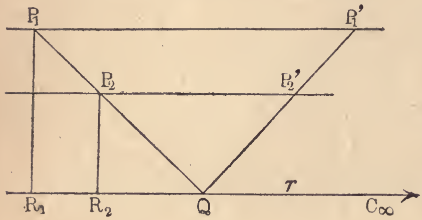
II. *L'omologia non è speciale, ed il centro è improprio.*

L'asse è allora una retta propria ed è questo il caso che più propriamente è indicato col nome di **affinità omologica** o di **omologia affine.**

In questa affinità è costante il rapporto delle distanze di due punti corrispondenti dal punto in cui la loro congiungente incontra l'asse di omologia.

Se questo rapporto è -1, cioè se la omologia affine è armonica, si ha *una* **simmetria rispetto all'asse.** Questa simmetria è **ortogonale** se il centro è il punto improprio ortogonale all'asse; ed anche questo ultimo caso rientra in quello delle similitudini, di cui più innanzi tratteremo.

III. *L'omologia è speciale, l'asse è proprio ed il centro è il punto improprio dell'asse.*



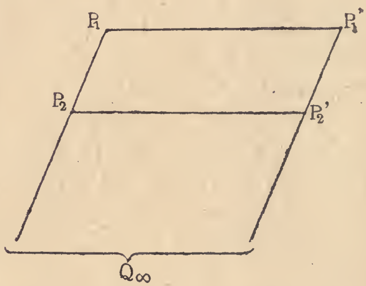
Si ha una **affinità omologica speciale.**

I punti omologhi sono su rette parallele all'asse: cioè *ogni punto subisce una traslazione lungo una retta parallela all'asse; ma queste traslazioni non sono uguali per tutti i punti, esse sono proporzionali alle distanze dei punti dell'asse.*

Ed infatti dall'esame della unita figura, dove r rappresenta l'asse di omologia, si ha:

$$\overline{P_1P_1'} : \overline{P_2P_2'} :: \overline{P_1Q} : \overline{P_2Q} :: \overline{P_1R_1} : \overline{P_2R_2}.$$

IV. *L'omologia è speciale, e l'asse ed il centro sono ambedue improprii.*



In questo caso il punto Q rappresentato nella figura risulta improprio; le rette P_1P_1', P_2P_2', P_1P_2, $P_1'P_2'$ sono fra loro parallele, i segmenti P_1P_1', P_2P_2' sono paralleli ed uguali *l'omologia dunque coincide con la* **traslazione** *di tutto il piano, del vettore P_1P_1'.* Anche questo caso rientra in quello delle similitudini.

§ III. Similitudini.

417. La rappresentazione di una figura piana sopra un'altra figura piana si dice **conforme** quando all'angolo $\widehat{r_1r_2}$ formato da due rette della prima figura, corrisponde un angolo eguale in valore assoluto, $|\widehat{r_1'r_2'}| = |\widehat{r_1r_2}|$, formato dalle rette corrispondenti nella seconda.

Una omografia piana conforme è detta similitudine.

La *similitudine* è diretta se gli angoli corrispondenti sono eguali in valore e segno, è inversa se sono eguali i valori assoluti e contrari i segni.

418. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una omografia piana sia una similitudine è che in essa si corrispondano i punti ciclici.*

Siano infatti π, π' due piani omografici, e siano r_1, r_2 due rette qualsivogliano di π, s_1, s_2 le rette isotrope di coefficienti angolari $+i$, $-i$, che escono dal vertice dell'angolo $\widehat{r_1r_2}$; analogamente, sul piano π', consideriamo le rette omologhe $r_1'r_2'$ e le rette isotrope $s_1's_2'$ di coefficienti angolari $+i$, $-i$, uscenti dal vertice dell'angolo $\widehat{r_1'r_2'}$.

Supponiamo che *i punti ciclici dei due piani si corrispondano.* Secondo che al punto i del primo piano corrisponde il punto i od il punto $-i$ del secondo, si corrisponderanno le rette isotrope s_1 ed s_1', s_2 ed s_2', oppure s_1 ed s_2', s_2 ed s_1'.

E per la proiettività subordinata dalla omografia in fasci corrispondenti, avremo

(9) $$(r_1r_2s_1s_2) = (r_1'r_2's_1's_2')$$

nel primo caso, ed

(9') $$(r_1r_2s_1s_2) = (r_1'r_2's_2's_1')$$

nel secondo caso.

Ora per la definizione proiettiva di angolo (n.° 71, pag. 54) si ha nel primo caso:

(10) $$\widehat{r_1r_2} = \widehat{r_1'r_2'}$$

e nel secondo,

(10') $$\widehat{r_1r_2} = \widehat{r_2'r_1'} = -\widehat{r_1'r_2'}:$$

cioè *se i punti ciclici si corrispondono ordinatamente si ha similitudine diretta; se invece il punto di coefficiente angolare $-i$ corrisponde a quello di coefficiente i si ha similitudine inversa.*

La proposizione reciproca si prova osservando anzitutto che, se la omografia fra i piani π, π' conserva gli angoli, a rette parallele di π corrispondono rette parallele di π', perciò *le rette improprie dei due piani si corrispondono.* In secondo luogo, ad ogni involuzione ortogonale in π, corrisponde una involuzione ortogonale in π'. *Le rette isotrope di due piani dunque si corrispondono*; anche i punti ciclici di π corrispondono dunque ai punti ciclici di π'.

Dalla dimostrazione fatta risulta che *la similitudine è un caso particolare della affinità*; ed infatti se la coppia dei punti ciclici è mutata in se stessa, anche le rette improprie si dovranno corrispondere.

419. Per la introduzione, come elemento invariante, della coppia dei punti ciclici, il gruppo delle omografie si riduce ulteriormente in un suo sottogruppo ad un numero minore di parametri, il quale comprende tutte le trasformazioni omografiche per le quali è elemento invariante l'angolo di due rette corrispondenti.

Per scrivere le equazioni di questo sottogruppo (**gruppo delle similitudini**) introdurremo nelle equazioni generali della omografia la ipotesi che i punti ciclici si corrispondano.

Tratteremo prima il caso della **similitudine diretta**; e, stabilita sulla pagina positiva di ciascuno dei piani π, π' una coppia di assi ortogonali, faremo corrispondere

$$\begin{array}{ll} \text{ai punti} & x_1 = 1, \quad x_2 = \pm i, \quad x_3 = 0 \\ \text{i punti} & x_1' = 1, \quad x_2' = \pm i, \quad x_3' = 0 \end{array}$$

ed avremo così dalle (1) le condizioni

$$\begin{cases} \rho = a_{11} \pm i a_{12} \\ \pm i\rho = a_{21} \pm i a_{22} \\ 0 = a_{31} \pm i a_{32}. \end{cases}$$

Da ciò segue che deve essere

$$a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{21} = -a_{12}, \quad a_{11} = a_{22}$$

e per le equazioni della similitudine si trova

$$(11) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 - a_{21}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{11}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad\quad + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Possiamo fare

$$a_{33} = \rho, \quad a_{11} = a_{22} = \rho h \cos\alpha, \quad -a_{12} = a_{21} = \rho h \operatorname{sen}\alpha;$$

dove

$$h^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 \tag{12}$$

è *il modulo della trasformazione* (11), ed h è il valore assoluto della radice di un tale modulo.

Scrivendo, per maggior semplicità

$$\rho a = a_{13}, \quad \rho b = a_{23},$$

avremo le equazioni della *similitudine diretta* sotto la forma

$$\begin{cases} x_1' = h(x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha) + a x_3 \\ x_2' = h(x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha) + b x_3 \\ x_3' = x_3, \end{cases} \tag{13}$$

ed in coordinate non omogenee,

$$\begin{cases} x' = h(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) + a \\ y' = h(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) + b. \end{cases} \tag{13'}$$

Si verifica immediatamente che il prodotto di due tali trasformazioni è una trasformazione dello stesso tipo, e che anche la inversa di una tale trasformazione è nuovamente una trasformazione dello stesso tipo; ossia che il prodotto di due similitudini dirette è una similitudine diretta, e che tale è pure la inversa.

Dunque *le similitudini dirette formano un gruppo finito, a 4 parametri, di trasformazioni omografiche, detto* **gruppo delle similitudini dirette.**

Una similitudine diretta è determinata da due coppie di elementi corrispondenti.

Il confronto delle formule (13′) con le (8), che ci danno il gruppo delle affinità, ci conferma che *le similitudini sono particolari affinità*; e ci dice inoltre che *nelle similitudini dirette, il rapporto delle aree di figure corrispondenti è costante ed eguale ad h^2.*

Ma si può, inoltre, provare che *in una similitudine il rapporto di due segmenti corrispondenti è costante ed eguale in valore assoluto ad h.*

Il numero h è detto **costante di similitudine.**

Per la dimostrazione basterà considerare due coppie di punti corrispondenti:

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2)$$
$$P_1'(x_1', y_1'), \quad P_2'(x_2', y_2');$$

per le formule (13) abbiamo:

$$x_1' - x_2' = h \{ (x_1 - x_2) \cos\alpha - (y_1 - y_2) \operatorname{sen}\alpha \}$$
$$y_1' - y_2' = h \{ (x_1 - x_2) \operatorname{sen}\alpha + (y_1 - y_2) \cos\alpha \};$$

da cui:

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 = h^2 \{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \};$$

cioè appunto

$$(\overline{P_1'P_2'})^2 = h^2(\overline{P_1P_2})^2.$$

Due figure corrispondenti in una similitudine diretta, oltre ad avere eguali gli angoli corrispondenti hanno anche rapporto costante fra segmenti corrispondenti, cioè sono figure simili nel senso che ha questa frase in geometria elementare.

Potremo dire perciò che, *per le trasformazioni del gruppo delle similitudini dirette, sono invarianti le proprietà che caratterizzano la forma delle figure geometriche.*

420. L'equazione cubica che dà gli *elementi uniti*, nel caso della similitudine diretta fra piani sovrapposti ha la forma

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} h\cos\alpha - \rho & -h\operatorname{sen}\alpha & a \\ h\operatorname{sen}\alpha & h\cos\alpha - \rho & b \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$(1-\rho)\{ h^2 - 2h\rho\cos\alpha + \rho^2 \} = 0$$

ed ammette le tre radici

$$(14) \qquad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = h(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha), \quad \rho_3 = h(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha).$$

Per ogni radice $\rho_r (r = 1, 2, 3)$ di questa equazione si trovano le coordinate dei punti uniti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (h\cos\alpha - \rho)x_1 - h\operatorname{sen}\alpha \cdot x_2 + ax_3 = 0 \\ h\operatorname{sen}\alpha \cdot x_1 + (h\cos\alpha - \rho)x_2 + bx_3 = 0 \\ \qquad\qquad (1-\rho)x_3 = 0, \end{cases}$$

nel quale due sole equazioni sono fra loro indipendenti.

Prendendo due linee orizzontali di $D(\rho)$ che formino una matrice a caratteristica 2, ed indicando con $D_{r1} D_{r2} D_{r3}$ i minori corrispondenti, avremo:

$$x_1 : x_2 : x_3 = D_{r1} : D_{r2} : D_{r3}.$$

Così si vede che alle radici complesse ρ_2, ρ_3 corrispondono i punti uniti

$$\begin{cases} x_1 = (-b \pm ai) h \operatorname{sen} \alpha \\ x_2 = (a \pm bi) h \operatorname{sen} \alpha = \mp i x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

che possiamo scrivere

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \mp i, \quad x_3 = 0,$$

cioè si trovano i *punti ciclici*; i quali, come sappiamo, sono elementi invarianti.

Per determinare il punto unito corrispondente alla radice reale $\rho_1 = 1$ si hanno (usando coordinate non omogenee) le equazioni

$$\begin{cases} (h \cos \alpha - 1) x - h \operatorname{sen} \alpha \cdot y = -a \\ h \operatorname{sen} \alpha \cdot x + (h \cos \alpha - 1) y = -b. \end{cases}$$

Indicando con $C_1(x_1 y_1)$ questo punto unito, troviamo quindi

$$(15) \qquad x_1 = \frac{a - h(a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha)}{(h \cos \alpha - 1)^2 + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad y_1 = \frac{b + h(a \operatorname{sen} \alpha - b \cos \alpha)}{(h \cos \alpha - 1)^2 + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

Il punto $C_1(x_1 y_1)$ si dice **centro di similitudine.**

421. Similitudini dirette a centro improprio. Dalle formule (15) risulta che il centro C_1 non può essere improprio se non è

$$(16) \qquad h \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad h \cos \alpha = 1.$$

Ricordando che nella similitudine diretta deve essere $h > 0$, vediamo che tali condizioni non possono verificarsi se non si suppone anche $h = 1$, $\cos \alpha = 1$; cioè $\alpha = 0$.

In questo caso i tre valori di ρ dati dalle (14) coincidono. Cioè *la equazione fondamentale ha una radice tripla.* Le coordinate del centro di similitudine C_1 sono date da

$$(17) \qquad x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = 0,$$

cioè *il centro C_1 è un punto improprio di coefficiente angolare* $\frac{b}{a}$.

Nella ipotesi fatta che sia $h = 1$, i segmenti corrispondenti hanno eguale lunghezza (n.° 414): la similitudine viene allora detta **congruenza**.

Il caso della congruenza sarà fra poco trattato in modo generale: per ora, cioè nella ipotesi che il centro sia improprio, in conseguenza delle formule (16), avremo dalle (13′) le relazioni

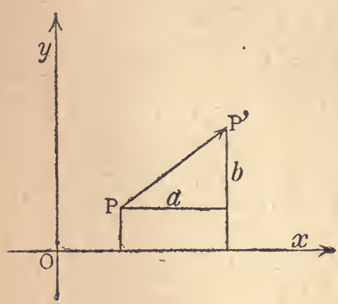
$$(18) \qquad x' = x + a, \quad y' = y + b,$$

le quali dimostrano che, *quando il centro è improprio, la similitudine diretta è una* **traslazione**.

Infatti la relazione

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{b}{a},$$

che si ricava dalla (18), ci esprime che, *per effetto della trasformazione* (18), *tutti i punti subiscono una traslazione* (*di lunghezza costante*) *nella direzione che ha per coefficiente angolare* $\frac{b}{a}$, cioè nella direzione del centro (improprio) di similitudine.



Dall'esame delle formule (18) si scorge che *le traslazioni piane formano un gruppo continuo a due parametri.*

422. Omotetia. Perchè la similitudine risulti *omologica*, occorre che la equazione cubica $D(\rho) = 0$, abbia una *radice doppia* (n.° 411): dunque occorre che sia $\rho_2 = \rho_3$, (formule (14)); cioè che sia $\operatorname{sen}\alpha = 0$, onde risulta

$$|\cos\alpha| = 1; \quad \rho_2 = \rho_3 = h;$$

oppure che ρ_1 sia eguale ad una delle due ρ_2, ρ_3, nel qual caso tutte e tre le radici risultano eguali, come si è visto al n.° 419, e la equazione fondamentale ha una *radice tripla.*

Sia nel caso della radice doppia che in quello della radice tripla, tutti i minori del secondo ordine di $D(\rho)$ risultano nulli, il che dimostra che si ha veramente omologia (n.° 411).

Il caso della radice tripla è quello considerato al n.° 419; nel quale la similitudine diretta è una traslazione.

Nel caso della radice doppia il centro di similitudine è un punto proprio $C_1(x_1 y_1)$

$$x_1 = \frac{-a}{\pm h - 1}, \quad y_1 = \frac{-b}{\pm h - 1}$$

ed è anche *centro di omologia.*

Si trova subito che, in conseguenza della nostra ipotesi, l'asse di omologia ha per equazione

$$x_3 = 0$$

cioè è la *retta impropria.*

Siamo dunque nel caso della **omotetia** (n.° 416, I). Per iscriverne la equazione basterà introdurre nelle (13') la condizione

$$\operatorname{sen} \alpha = 0, \quad |\cos \alpha| = 1$$

e se ne dedurrà

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \pm hx + a \\ y' &= \pm hy + b. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Si vede da queste formule che le *omotetie piane formano un gruppo a tre parametri, detto* **gruppo delle omotetie.**

Dal segno che figura nelle formule (19) si distinguono **omotetie dirette** (per il segno $+$) ed **omotetie inverse.** Le omotetie dirette formano da sole un gruppo; ma non già le inverse, poichè il prodotto di due omotetie inverse è una omotetia diretta. Si noti che *anche le omotetie inverse sono similitudini dirette.*

Per $h = 1$ ed intendendo preso il segno superiore si ha una traslazione (formule (18)). *Possiamo quindi anche considerare la traslazione come una omotetia con centro improprio.*

Trasportando l'origine delle coordinate nel centro di omotetia, le formule (19) si mutano nelle:

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \pm hx \\ y' &= \pm hy. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Questa dunque è *la forma che assumono le equazioni della omotetia*, quando l'origine delle coordinate si prenda nel centro di omotetia (supposto proprio).

Nella omotetia segmenti omologhi sono paralleli, perciò due figure omotetiche si dicono *simili* e **similmente disposte.**

423. Congruenza diretta. Quando la costante di similitudine ha il valore $h = 1$, i segmenti corrispondenti sono fra loro uguali in valore assoluto e la similitudine è una *congruenza diretta.*

Le equazioni generali della congruenza diretta sono (formule (13)):

$$(21) \qquad \begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha + a \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha + b. \end{cases}$$

Si vede dunque che *le congruenze piane dirette formano un gruppo a tre parametri*, il quale è detto **gruppo dei movimenti** (nel piano) per le ragioni che risulteranno dalle considerazioni seguenti:

Se il centro di similitudine è **proprio**, trasportando la origine delle coordinate nel centro, si hanno dalle (21) le formule:

$$(22) \qquad \begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha \end{cases}$$

che rappresentano *una* **rotazione** *intorno alla origine* (centro di similitudine) *dell'angolo* α (n.° 98).

In particolare per $\operatorname{sen}\alpha = 0$, (cioè nel *caso della omotetia*) il centro è proprio per $\alpha = \pi$, cioè per $h \cos\alpha = -1$; ed allora le formule (22) ci danno

$$(23) \qquad x' = -x, \quad y' = -y$$

ed *il movimento consiste nella rotazione intorno al centro di similitudine di un angolo* π: e, più propriamente, *la congruenza è una* **simmetria rispetto al centro.**

Se poi supponiamo il **centro improprio**, ciò che ha luogo per $\alpha = 0$, dalle formule generali della congruenza (21) ricaviamo direttamente

$$(24) \qquad x' = x + a, \quad y' = y + b$$

cioè ritroviamo il caso già studiato della *traslazione.*

Dunque: *la congruenza diretta fra piani sovrapposti consiste in una rotazione di un angolo costante α intorno ad un punto proprio determinato C_1 del piano, od in una traslazione;* cioè in ogni caso, *in un movimento che avviene nel piano stesso della figura.*

Infine le equazioni generali della similitudine diretta

$$\begin{cases} x' = h(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) + a \\ y' = h(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) + b, \end{cases}$$

confrontate con le (21), ci insegnano che

La similitudine diretta si compone di un movimento nel piano della figura, e di una omotetia.

Due figure direttamente simili nel piano possono sempre, con un movimento, ridursi omotetiche.

Osserveremo finalmente che le congruenze dirette non possono avere che un solo punto unito proprio, e ciò significa che, *nei movimenti nel piano, un sol punto proprio può rimanere immobile.*

424. Il caso della similitudine inversa si tratta in modo perfettamente analogo. Scrivendo che si corrispondono i punti

$$(1, \pm i, 0), \quad (1, \mp i, 0)$$

cioè ponendo le condizioni

$$\rho = a_{11} \pm i a_{12}, \quad \mp i\rho = a_{21} \pm i a_{22}, \quad 0 = a_{31} \pm i a_{32};$$

si ritrova

$$a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{11} = -a_{22},$$

e si hanno le equazioni della *similitudine inversa* sotto la forma

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{12}x_1 - a_{11}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3. \end{cases}$$

Da queste formule immediatamente si scorge che le *similitudini inverse non formano un gruppo,* poichè il prodotto di due similitudini inverse è una similitudine diretta (*cioè a modulo positivo*) come si può facilmente verificare.

Indicando con

$$-h^2 = -(a_{11}^2 + a_{12}^2)$$

il modulo di questa trasformazione, con h il valor positivo di $\sqrt{a_{11}^2 + a_{22}^2}$, potremo porre

$$\begin{cases} a_{11} = \rho h \cos \alpha, \quad a_{12} = \rho h \operatorname{sen} \alpha \\ a_{13} = a \quad a_{23} = b \quad a_{33} = \rho \end{cases}$$

ed avremo

$$(25) \qquad \begin{cases} x_1' = h(x_1 \cos \alpha + x_2 \operatorname{sen} \alpha) + a x_3 \\ x_3' = h(x_1 \operatorname{sen} \alpha - x_2 \cos \alpha) + b x_3 \\ x_3' = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

od, in coordinate non omogenee,

$$(25') \qquad \begin{cases} x' = h(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) + a \\ y' = h(x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) + b. \end{cases}$$

Di qui, come al n.° 419, dedurremo per le lunghezze $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1'P_2'}$, di segmenti corrispondenti, la relazione

$$\overline{P_1'P_2'}^2 = h^2 \overline{P_1P_2}^2$$

che *dimostra, anche per la similitudine inversa, la costanza del rapporto di segmenti corrispondenti.*

Il numero h (radice quadrata del valore assoluto del modulo) è la *costante di similitudine.*

Abbiamo già detto che le similitudini inverse non formano un gruppo; ma *il complesso di tutte le similitudini, dirette ed inverse, forma un gruppo,* **il gruppo totale delle similitudini piane** le cui equazioni si possono scrivere:

$$\begin{cases} x_1' = h(x_1 \cos \alpha - \varepsilon x_2 \operatorname{sen} \alpha) + a x_3 \\ x_2' = h(a_1 \operatorname{sen} \alpha + \varepsilon x_2 \cos \alpha) + b x_3 \\ x_3' = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

dove ε può rappresentare $+1$, oppure -1.

Le proprietà che concernono la forma delle figure piane sono invarianti per tutte le trasformazioni di questo gruppo.

Due coppie di elementi corrispondenti determinano due similitudini, una diretta l'altra inversa.

425. *L'equazione fondamentale* per la ricerca dei punti uniti nella similitudine inversa ha la forma

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} h\cos\alpha-\rho & h\,\mathrm{sen}\,\alpha & a \\ h\,\mathrm{sen}\,\alpha & -(h\cos\alpha+\rho) & b \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix}=0$$

cioè

$$D(\rho)=(\rho-1)(h^2-\rho^2)=0$$

ed ha tre radici reali

$$\rho_1=1,\quad \rho_2=h,\quad \rho_3=-h.$$

Per $\rho_1=1$ si trova il punto, in generale proprio, $O_1(x_1'x_2'x_3')$ con

$$(26)\quad x_1'=\begin{vmatrix} h\,\mathrm{sen}\,\alpha & a \\ -(h\cos\alpha+1) & b \end{vmatrix},\quad x_2'=\begin{vmatrix} a & h\cos\alpha-1 \\ b & h\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{vmatrix},\quad x_3'=1-h^2$$

che è il **centro della similitudine.**

Queste formule dimostrano che *il centro O_1 della similitudine inversa può diventare improprio solo se è $h=1$, cioè nel caso della congruenza.*

Per $\rho=\pm h$, si hanno i punti improprii

$$O_2(x_1''x_2''x_3''),\quad O_3(x_1'''x_2'''x_3''')$$

le cui coordinate sono i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} h(\cos\alpha\mp1) & h\,\mathrm{sen}\,\alpha & a \\ 0 & 0 & 1\mp h \end{vmatrix},$$

cioè

$$(27)\quad \begin{cases} x_1''=h(1-h)\,\mathrm{sen}\,\alpha, & x_2''=-h(1-h)(\cos\alpha-1), & x_3''=0 \\ x_1'''=h(1+h)\,\mathrm{sen}\,\alpha, & x_2'''=-h(1+h)(\cos\alpha+1), & x_3'''=0; \end{cases}$$

di qui si ricava:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2''}{x_1''}=-\dfrac{\cos\alpha-1}{\mathrm{sen}\,\alpha}=\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} \\[2ex] \dfrac{x_2'''}{x_1'''}=-\dfrac{\cos\alpha+1}{\mathrm{sen}\,\alpha}=-\cot\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

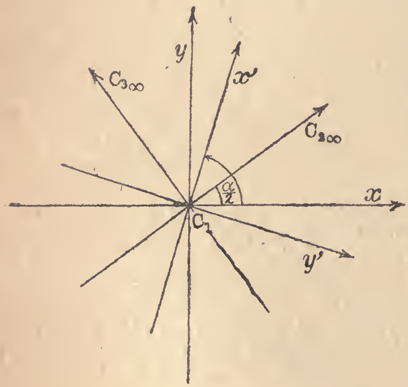
e ciò dimostra che *i punti uniti improprii O_2, O_3 sono fra loro ortogonali.*

426. Similitudini inverse a centro proprio. Supponiamo anzitutto, che *il punto unito C_1 sia proprio.*

Le rette unite saranno C_1C_2, C_1C_3 e la retta impropria C_2C_3.

Portando l'origine delle coordinate nel punto unito C_1 (centro della similitudine), le equazioni (25′) assumono la forma

$$(29) \qquad \begin{aligned} x' &= h(x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha) \\ x' &= h(x \operatorname{sen}\alpha - y \cos\alpha); \end{aligned}$$ [1]



portando poi con rotazione di $\frac{\alpha}{2}$ gli assi a coincidere con le rette unite C_1C_2, C_2C_3, le formule (29) assumono una delle due forme

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = -hy \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -hx \\ y' = hy \end{cases}$$

le quali dimostrano che *la similitudine inversa, quando il centro C_1 è proprio si compone di una simmetria rispetto ad una qualunque delle rette unite proprie seguita da una omotetia rispetto al centro della similitudine.*

427. Congruenza inversa. Quando la costante di similitudine h è uguale ad 1, si ha *congruenza inversa.*

Ricordando i valori delle coordinate del centro di similitudine C_1 dati dalla (26), si vede che per $h = 1$, si ha $x_3 = 1 - h^2 = 0$ ed *il centro di similitudine diventa improprio o rimane indeterminato.*

[1] Le formule (29) prescindendo dal fattore h si possono interpretare come formule di trasformazione delle coordinate, dal sistema ortogonale xy, al sistema ortogonale *discorde* $x'y'$, dove con α si indica l'angolo $\widehat{xx_1}$ degli assi x nei due sistemi. Assunto, come origine il punto C_1, la retta C_1C_2 è la bisettrice dell'angolo di tali assi. La trasformazione (29), sempre prescindendo dal fattore h, consiste in un ribaltamento intorno alla retta C_1C_2, mediante il quale difatti, gli assi x, y vengono a sovrapporsi ad x', y'. Il medesimo effetto può prodursi mediante ribaltamento intorno C_1C_3. Le C_1C_2, C_1C_3 sono *rette unite* in entrambi i movimenti.

Per $h=1$ la radice $\rho_2=h$, della equazione fondamentale, viene a coincidere con la radice $\rho_1=1$ ed il punto C_1 viene a coincidere col punto $C_2\left(1,\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$ (form. (28)).

Per trovare le rette unite possiamo giovarci delle formule (6') che nel caso presente divengono:

$$\begin{cases} (\cos\alpha-\rho)\xi_1+\mathrm{sen}\,\alpha\xi_2=0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha\xi_1-(\cos\alpha+\rho)\xi_2=0 \\ a\xi_1+b\xi_2+(1-\rho)\xi_3=0. \end{cases}$$

Mettendo per ρ le radici 1, 1, -1 della equazione fondamentale, troviamo la retta impropria, contata due volte; ed una retta unita propria per $(\rho=-1)$ di coordinate

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3::\begin{vmatrix}\mathrm{sen}\,\alpha & 0\\ b & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & \cos\alpha+1\\ 2 & a\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\cos\alpha+1 & \mathrm{sen}\,\alpha\\ a & b\end{vmatrix}.$$

L'equazione della retta unita propria è dunque

$$2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot x_1-2(\cos\alpha+1)x_2+(b(\cos\alpha+1)-a\,\mathrm{sen}\,\alpha)x_3=0$$

od, in coordinate non omogenee,

$$(30)\qquad 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot x-2(\cos\alpha+1)y+b(\cos\alpha+1)-a\,\mathrm{sen}\,\alpha=0.$$

Se prendiamo questa retta per asse delle x la equazione scritta si dovrà ridurre alla $y=0$; epperò dovrà essere

$$b=0,\quad \alpha=0.$$

Le equazioni (25) della similitudine inversa assumeranno dunque la forma

$$(31)\qquad \begin{cases} x'=x+a \\ y'=-y \end{cases}$$

che esprimono **simmetria rispetto ad una retta** (ribaltamento) *seguita da traslazione nel senso della stessa retta.*

Rimane da considerare il caso in cui *la radice doppia* $\rho=1$ *renda* <2 *la caratteristica del determinante* $D(\rho)$, *e si abbia quindi una retta di punti uniti.*

Questo caso si presenta quando tutti i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} -1+\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & a \\ \operatorname{sen}\alpha & -(1+\cos\alpha) & b \end{vmatrix}$$

sono nulli: cioè quando

$$\frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha-1}{\operatorname{sen}\alpha}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

La equazione della *retta propria di punti uniti* si ottiene sostituendo il valore di a che qui si ricava, nella (30) ed è perciò

$$(32)\qquad -\operatorname{sen}\alpha x+(\cos\alpha+1)y-b=0.$$

La medesima equazione si trova cercando, con la regola nota (n.° 411) *l'asse di omologia.*

Assumendo questa retta come asse delle x, le equazioni (31) della similitudine assumono la forma

$$(33)\qquad \begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$$

che rappresentano una **simmetria rispetto all'asse** x.

Anche in questo caso la trasformazione avviene con un movimento che si effettua *fuori del piano* della figura; e precisamente con un *ribaltamento.*

Questo è d'altra parte, il caso della *affinità omologica ortogonale armonica*, considerato al n.° 416, II.

428. Riassumendo: *la congruenza-inversa si compone di una simmetria rispetto ad una retta (cioè di un ribaltamento) seguita da una traslazione (la quale eventualmente può essere nulla) nella direzione di quella stessa retta.*

La similitudine inversa, quando non è una congruenza, ammette sempre un centro proprio e si compone di una simmetria rispetto ad una delle due rette unite (uscenti dal centro) *e di una omotetia rispetto al centro della similitudine.*

I movimenti, nella similitudine inversa, avvengono dunque *fuori del piano* cui la similitudine stessa si riferisce; due figure inversamente simili (in particolare inversamente conguenti) possono portarsi in posizione omotetica (eventualmente l'una all'altra sovrapposta) solo con movimenti che avvengono fuori del piano ove tali figure sono situate.

Riassumendo i risultati dei n.[i] 423-428 possiamo concludere che: *condizione necessaria e sufficiente perchè due figure piane sieno simili è che mediante movimento si possano portare in posizione omotetica.*

§ IV. Coniche simili.

429. In una similitudine fra due piani Π, Π' non solo, come in ogni altra omografia, ad una conica del piano Π corrisponde una conica del piano Π'; ma per il fatto che le rette improprie si corrispondono, le due curve corrispondenti sono entrambe ellissi, od iperboli, o parabole.

Dimostreremo che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè due ellissi o due iperboli siano simili è che i loro assi omonimi siano proporzionali.*

Due parabole sono sempre simili.

Per quel che riguarda le parabole basterà osservare che, scritte le equazioni normali

$$y^2 = 2px, \quad y'^2 = 2p'x',$$

dopo avere, se occorre, col movimento portati a coincidere i vertici e gli assi, la prima si trasforma nella seconda mediante la omotetia

$$x = \frac{p}{p'}\, x', \quad y = \frac{p}{p'}\, y'.$$

Tutte le parabole sono dunque simili fra loro.

Per le coniche a centro: dato che due ellissi o due iperboli siano simili, i rapporti dei loro assi omonimi dovranno essere entrambi eguali alla costante di similitudine e perciò eguali fra di loro.

Reciprocamente, date due coniche a centro, mediante le loro equazioni normali

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

e supposto $a = ha'$, $b = hb'$, mediante la omotetia rappresentata dalle equazioni

$$x = hx', \quad y = hy'$$

si potrà trasformare la prima conica nella seconda, e le coniche saranno perciò simili.

Il teorema ora dimostrato si può enunciare dicendo: *la condizione necessaria e sufficiente perchè due coniche siano simili è che esse abbiano eguale eccentricità.*

430. Coniche simili e similmente disposte. *Due coniche simili, situate in uno stesso piano od in piani paralleli, si dicono similmente disposte quando i loro assi focali sono paralleli.*

Segue da questa definizione che *due parabole dello stesso piano (o di piani paralleli) aventi gli assi paralleli sono sempre simili e similmente disposte.*

Segue ancora che due coniche simili e similmente poste hanno gli stessi punti all'infinito, e che le coppie di diametri coniugati dell'uno sono paralleli a coppie di diametri coniugati dell'altra.

Teorema: *Se le equazioni di due coniche reali situate in uno stesso piano e riferite ad uno stesso sistema di assi cartesiani, hanno in comune i termini di secondo grado, le due coniche sono simili e similmente disposte nel caso ellittico e nel caso parabolico. Lo sono anche nel caso iperbolico, se, i discriminanti delle due forme A, A' hanno lo stesso segno; ma se questi hanno segni contrari, una delle iperboli è simile e similmente disposta alla coniugata dell'altra.*

Siano

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$$

le equazioni delle coniche. Si vede intanto che esse saranno della stessa specie, poichè il determinante A_{33} è lo stesso per entrambe.

Se si tratta di due parabole, risulta comune ad entrambe la direzione dei diametri, perciò esse sono simili e similmente disposte.

Rimane a considerare il caso di coniche a centro.

Se immaginiamo le due coniche riferite, rispettivamente, a sistemi di assi col centro nella origine, ciò che si fa con traslazioni che lasciano immutati i termini di secondo grado, le equazioni delle coniche prenderanno la forma (n.° 298, pag. 254)

$$(34) \qquad \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \dfrac{A}{A_{33}} = 0 \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + \dfrac{A'}{A_{33}} = 0. \end{cases}$$

Se ora con una traslazione portiamo il centro della seconda su quello della prima, potremo identificare le due equazioni con la trasformazione

$$x = \sqrt{\frac{A}{A'}}\, X, \quad y = \sqrt{\frac{A}{A'}}\, Y,$$

quando A ed A' hanno lo stesso segno.

Ciò accade sempre nel caso ellittico, perchè per ellissi reali, A ed A' hanno entrambe il segno contrario a quello dei coefficienti a_{11}, a_{22} (n.° 307, pag. 263). Nel caso iperbolico A ed A' possono avere segni contrari; ed in questa ipotesi le coniche proposte non sono simili. Ma, cambiando il segno del termine costante in una delle (34), muteremo la iperbole corrispondente nella sua coniugata; e questa allora risulterà simile e similmente disposta a quella rappresentata dall'altra equazione.

Dal teorema dimostrato risulta, in particolare, che *le coniche omofocali della stessa specie sono sempre simili e similmente disposte.*

§ V. Omografia fra due spazii.

431. Omografia o collineazione è la corrispondenza biunivoca che viene stabilita fra i punti $P_1(x_1x_2x_3x_4)$, $P_1'(x_1'x_2'x_3'x_4')$ di due spazi (naturalmente sovrapposti) mediante una trasformazione lineare, omogenea, a modulo diverso dallo zero,

$$(35) \qquad \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \rho x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \,. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che, in forza di una tale trasformazione, anche fra le rette e fra i piani dei due spazi è stabilita una corrispondenza biunivoca, e ad ogni forma di prima specie corrisponde una forma di prima specie proiettiva ad essa, dello stesso nome; ad ogni forma di seconda specie, una forma dello stesso nome ad essa omografica.

E dal carattere lineare delle (35) si deduce altresì che: *una omografia fra due spazi non altera l'ordine di una superficie algebrica.*

Le formule (35) contengono 15 parametri essenziali perciò la omografia fra due spazii è individuata quando di cinque punti, quattro a quattro non complanari, (o di cinque piani non passanti a quattro a quattro per un punto) siano dati gli elementi corrispondenti, soddisfacenti le medesime condizioni.

Non si possono dare, quindi, più di **quattro elementi uniti**; la ricerca di questi si fa in modo intieramente analogo a quello tenuto per le omografie piane al n.° 410, e porta alla considerazione delle radici della equazione **fondamentale**,

$$(2)\qquad D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\rho \end{vmatrix}=0,$$

ed alla conclusione che *una omografia nello spazio ha in generale quattro punti uniti, e* (per dualità) *quattro piani uniti.*

I quattro punti uniti sono, in generale, distinti, e determinano un tetraedro le cui faccie sono i quattro piani uniti, ed i cui spigoli sono *le 6 rette unite.*

Ed infatti la equazione (2) ha in generale quattro radici distinte, ciascuna delle quali rende eguale a 3 la caratteristica del determinante $D(\rho)$.

432. Se per una delle radici della $D(\rho)=0$, il determinante $D(\rho)$ ha caratteristica 2, tale radice è necessariamente doppia (n.° 411). In tale ipotesi la omografia ha una retta di punti uniti, ed ha una seconda retta, sghemba con la prima, che è asse di un fascio di piani uniti. *Una tale omografia si dice* **assiale.**

Un esempio di omografia assiale è dato dalle *rotazioni intorno ad un asse.* Quest'asse è una retta di punti uniti, ed i piani normali all'asse formano un fascio (improprio) di piani uniti.

Se il determinante $D(\rho)$ assume la caratteristica 2 per due differenti radici dell'equazione $D(\rho)=0$, le quali saranno entrambe radici doppie, allora la omografia ha due rette di punti uniti, sghembe fra di loro, le quali sono ad uno stesso tempo assi di fasci di piani uniti.

La omografia in questo caso è detta **biassiale.**

Esempio di questa omografia è la *simmetria ortogonale rispetto ad un asse.* I due assi sono l'asse di simmetria e l'asse improprio del fascio di piani normali ad esso.

Se per un determinato valore ρ_1 di ρ il determinante $D(\rho)$ ha caratteristica 1 (il che può accadere soltanto quando ρ_1 è radice almeno tripla di $D(\rho)=0$) la omografia ha come elementi uniti tutti i punti e tutte le rette di un piano, detto *piano di omologia* e tutti i piani e tutte le rette di una stella, il cui centro si dice *centro di omologia:* la omografia è in questo caso detta **omologia solida.** In una omologia due punti omologhi sono allineati col centro: due piani omologhi si tagliano in una retta del piano di omologia: due rette omologhe si tagliano in un punto del piano di omologia e sono in un piano pel centro di omologia.

Infine se esiste una radice della equazione fondamentale che rende eguale allo zero la caratteristica di $D(\rho)$, si ha identità (n.° 411).

§ VI. Similitudine fra due spazii.

433. Una omografia in cui uno dei piani uniti è il piano improprio vien detta **affinità.** Le equazioni della affinità hanno la forma (n.° 414):

$$(36) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \rho x_4' &= \phantom{a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 +{}} a_{44}x_4 \,. \end{aligned}\right.$$

Di qui risulta che le affinità costituiscono un gruppo finito continuo a 12 parametri. Una affinità è determinata da due quaterne di elementi corrispondenti (punti non complanari, o piani non appartenenti ad un medesimo punto).

Nella affinità due punteggiate corrispondenti sono simili e due piani corrispondenti sono affini: piani o rette parallele hanno per corrispondenti piani o rette parallele, ed il rapporto *fra i volumi di figure corrispondenti è costante* (n.° 415) *ed eguale al modulo della trasformazione.*

Un caso particolare della affinità è la **similitudine**, la quale è *una omografia che fa corrispondere ad ogni angolo* (e quindi ad ogni diedro) *dell'un spazio un angolo eguale nell'altro, o, in altri termini, è una* **rappresentazione omografica conforme.**

È facile infatti mostrare che *una similitudine è una omografia che trasforma in sè il cerchio assoluto;* e che, reciprocamente, *ogni omografia che muta in sè l'assoluto è una similitudine.*

La dimostrazione si ricava dalla analoga proposizione dimostrata per similitudini piane (n.° 418), osservando che una similitudine fra due spazi determina una similitudine fra i piani corrispondenti Π, Π', per effetto della quale i punti ciclici di Π si mutano nei punti ciclici di Π'; e perciò trasforma in sè stesso il luogo dei punti ciclici dello spazio, cioè il cerchio assoluto.

E, reciprocamente, se una omografia trasforma in sè l'assoluto, indicando al solito con Π, Π' due piani corrispondenti, troveremo che i punti comuni a Π e all'assoluto dovranno corrispondere ai punti comuni a Π' ed all'assoluto; cioè i punti ciclici di Π ai punti ciclici di Π'; e fra i piani Π, Π' dovrà intercedere una similitudine: gli angoli corrispondenti in questi due piani dovranno dunque essere eguali, ma essi sono due piani generici corrispondenti nella data omografia, dunque tutti gli angoli corrispondenti nei due spazi risulteranno eguali e la omografia sarà una similitudine.

434. I risultati ottenuti circa le similitudini piane, ed in particolare circa le omotetie e le congruenze, si estendono immediatamente alle similitudini solide.

Accenneremo qui brevemente a questa estensione.

Se nelle formule generali della affinità (36) si introduce la ipotesi che il cerchio assoluto

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

si trasformi nell'assoluto

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0, \quad x_4' = 0,$$

si ritrova che i coefficienti debbono soddisfare a relazioni della forma

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=k^2,\quad a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=k^2,\quad a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=k^2$$
$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=a_{11}a_{13}+a_{21}a_{33}+a_{31}a_{33}=$$
$$=a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0:$$

essere cioè, salvo un fattore k di proporzionalità, i coefficienti di una trasformazione ortogonale (n.° 178, pag. 152).

Se indichiamo con $r_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $r_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $r_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ tre direzioni formanti un triedro ortogonale $r_1r_2r_3$,

	r_1	r_2	r_3
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

potremo porre

$$(37)\quad \begin{cases} a_{11}=\rho k\alpha_1, & a_{12}=\rho k\beta_1, & a_{13}=\rho k\gamma_1, & a_{14}=\rho b_1, \\ a_{21}=\rho k\alpha_2, & a_{22}=\rho k\beta_2, & a_{23}=\rho k\gamma_2, & a_{24}=\rho b_2, \\ a_{31}=\rho k\alpha_3, & a_{32}=\rho k\beta_3, & a_{33}=\rho k\gamma_3, & a_{34}=\rho b_3, \quad a_{44}=\rho. \end{cases}$$

Assumeremo il triedro $r_1r_2r_3$ concorde col triedro fondamentale e perciò *il modulo della trasformazione avrà il segno eguale a quello di k.*

Le equazioni della similitudine avranno dunque la forma

$$(38)\quad \begin{cases} x_1'=k(\alpha_1x_1+\beta_1x_2+\gamma_1x_3)+b_1x_4 \\ x_2'=k(\alpha_2x_1+\beta_2x_2+\gamma_2x_3)+b_2x_4 \\ x_3'=k(\alpha_3x_1+\beta_3x_2+\gamma_3x_3)+b_3x_4 \\ x_4'=x_4, \end{cases}$$

oppure, in coordinate non omogenee,

$$(39)\quad \begin{cases} x'=k(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z)+b_1 \\ y'=k(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z)+b_2 \\ z'=k(\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z)+b_3. \end{cases}$$

Da queste formule risulta che il prodotto di due similitudini spaziali è ancora una similitudine, e che l'inversa di una similitudine è una similitudine.

Le similitudini spaziali formano dunque un gruppo, e lo studio delle proprietà geometriche comuni a figure corrispondenti in una similitudine si fa ricercando le proprietà che sono invarianti per questo gruppo.

Si verifica subito con ragionamento identico a quello fatto per similitudini piane, che *in una similitudine spaziale il rapporto di due segmenti corrispondenti è costante ed eguale a* k (radice cubica del modulo della trasformazione).

Si dicono *similitudini dirette* quelle in cui questo rapporto è positivo, *inverse* le altre.

Il numero k si dice *costante* o *rapporto di similitudine.*

Le figure corrispondenti in una similitudine spaziale sono *simili* nel senso che ha questa parola in geometria elementare. Le loro aree stanno fra loro nel rapporto k^2, ed i volumi nel rapporto k^3.

Quando $|k|=1$ si ha **congruenza**, *diretta* od *inversa* secondo il segno di k.

435. *L'equazione fondamentale*, per la ricerca dei **punti uniti**, ha la forma

$$(40)\qquad D(\rho)=\begin{vmatrix} k\alpha_1-\rho & k\beta_1 & k\gamma_1 & b_1 \\ k\alpha_2 & k\beta_2-\rho & k\gamma_2 & b_2 \\ k\alpha_3 & k\beta_3 & k\gamma_3-\rho & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix}=(1-\rho)D_{44}(\rho)=0.$$

Per ogni radice $\rho_r (r=1, 2, 3, 4)$ di questa equazione si ha un punto unito

$$O_r(x_1^{(r)}x_2^{(r)}x_3^{(r)}x_4^{(r)})$$

con le coordinate

$$(41)\qquad x_1^{(r)}:x_2^{(r)}:x_3^{(r)}:x_4^{(r)}=D_{s1}:D_{s2}:D_{s3}:D_{s4},$$

dove con D_{sr} si è indicato il complemento algebrico dell'elemento a_{sr} nel determinante $D(\rho)$, e la linea s è scelta in modo che la matrice formata dalle rimanenti linee nel determinante $D(\rho)$ abbia caratteristica 3.

In particolare si vede che per quei valori di ρ_r che annullano D_{44}, si hanno punti C_r per i quali è $x_4^{(r)}=0$, cioè punti uniti improprii.

D'altra parte l'equazione $D(\rho)=0$, oltre la radice $\rho_1=1$, ammette le tre radici ρ_2, ρ_3, ρ_4 di $D_{44}(\rho)=0$: dunque *tre dei punti uniti della similitudine sono sul piano improprio; il solo punto unito C_1 corrispondente alla radice $\rho_1=1$ di $D(\rho)=0$ può essere proprio.*

Questo punto è detto **centro della similitudine.** Poichè la equazione $D(\rho)=0$ di quarto grado ammette una radice reale $\rho_1=1$, essa dovrà ammettere un'altra radice reale almeno ρ_2, cui corrisponderà *un punto unito reale, certamente improprio C_2.*

Assumendo come direzione dell'asse z, nel triedro coordinato, quella del punto unito improprio C_2 (cioè facendo nelle (38) corrispondere i punti improprii (0010), (0010) si trova, per le equazioni della similitudine, la forma:

$$\begin{cases} x'=k(\alpha_1 x+\beta_1 y)+b_1 \\ y'=k(\alpha_2 x+\beta_2 y)+b_2 \\ z'=kz \qquad\qquad\quad +b_3 . \end{cases}$$

Possiamo fare

$$\alpha_1=\cos\alpha,\quad \beta_1=-\operatorname{sen}\alpha$$
$$\alpha_2=\operatorname{sen}\alpha,\quad \beta_2=\cos\alpha,$$

ed abbiamo finalmente le equazioni:

$$(42)\qquad \begin{cases} x'=k(x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha)+b_1 \\ y'=k(x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha)+b_2 \\ z'=kz \qquad\qquad\qquad\qquad +b_3 . \end{cases}$$

L'equazione fondamentale assume la forma

$$(43)\quad D(\rho)=\begin{vmatrix} k\cos\alpha-\rho & -k\operatorname{sen}\alpha & 0 & b_1 \\ k\operatorname{sen}\alpha & k\cos\alpha-\rho & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & k-\rho & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\rho \end{vmatrix}=(1-\rho)D_{44}(\rho)=0,$$

$$D_{44}(\rho)=(k-\rho)(\rho-k(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha))(\rho-k(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)).$$

Dunque le quattro radici della equazione fondamentale sono

$$(44)\quad \rho_1=1,\quad \rho_2=k,\quad \rho_3=k(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha),\quad \rho_4=k(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha).$$

Le radici ρ_3, ρ_4 possono essere reali solo se è

$$\operatorname{sen}\alpha = 0;$$

per $\alpha = 0$ si ha la radice tripla

$$\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = k, \tag{45}$$

per $\alpha = \pi$ si ha la radice doppia

$$\rho_3 = \rho_4 = -k. \tag{46}$$

Per $k = 1$ si ha, in generale, una radice doppia $\rho_1 = \rho_2$.

Per $k = 1$, $\alpha = \pi$, si hanno due radici doppie $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\rho_3 = \rho_4 = -1$.

Per $k = 1$, $\alpha = 0$, si ha una radice quadrupla $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 1$.

Per $k = -1$, $\alpha = 0$, si ha una radice tripla $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = -1$.

436. Similitudini spaziali a centro improprio. Il centro C_1 di similitudine, cioè il punto unito corrispondente alla radice $\rho_1 = 1$, *può riescire improprio solo quando*

$$x_4' = D_{44}(1) = 0.$$

Ma

$$D_{44}(1) = (k-1)(1 - k(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha))(1 - k(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)),$$

dunque il centro di similitudine *può essere improprio* solo in uno di questi due casi:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I.}\quad k = 1 \\ \text{II.}\quad \operatorname{sen}\alpha = 0,\ k\cos a = 1. \end{array}\right. \tag{47}$$

Il secondo caso si distingue in due

$$\left\{\begin{array}{l} \text{II}_1\ \ \alpha = 0,\quad k = 1 \\ \text{II}_2\ \ \alpha = \pi,\quad k = -1. \end{array}\right. \tag{48}$$

In ogni caso dunque il *centro di similitudine non può essere improprio se non è* $|k| = 1$, cioè *se non si tratta di una* **congruenza.**

Da ciò il noto teorema: *una similitudine spaziale che non sia una congruenza ha sempre un punto unito reale proprio* C_1 *ed uno solo* (centro di similitudine).

Si avverta che per i valori di k ora determinati, il centro C_1 *può diventare improprio*, ma *non è necessariamente improprio.*

Per veder bene quando effettivamente esso diventi improprio, ne scriveremo le coordinate sotto la forma

$$
(49)\quad \begin{cases}
\dfrac{x_1'}{x_4'} = \dfrac{(k-1)\{kb_2 \operatorname{sen}\alpha + b_1(k\cos\alpha - 1)\}}{(k-1)\{(k\cos\alpha-1)^2 + k^2\operatorname{sen}^2\alpha\}} = \\
\qquad = \dfrac{kb_2 \operatorname{sen}\alpha + b_1(k\cos\alpha - 1)}{(k\cos\alpha-1)^2 + k^2\operatorname{sen}^2\alpha} \\
\dfrac{x_2'}{x_4'} = \dfrac{(k-1)\{kb_1 \operatorname{sen}\alpha - b_2(k\cos\alpha - 1)\}}{(k-1)\{(k\cos\alpha-1)^2 + k^2\operatorname{sen}^2\alpha\}} = \\
\qquad = \dfrac{kb_1 \operatorname{sen}\alpha - b_2(k\cos\alpha - 1)}{(k\cos\alpha-1)^2 + k^2\operatorname{sen}^2\alpha} \\
\dfrac{x_3'}{x_4'} = \dfrac{b_3}{k-1}.
\end{cases}
$$

Per $k=1$ l'equazione fondamentale ha due radici eguali $\rho_1=\rho_2=1$, i punti uniti C_1, C_2 coincidono; le formule scritte danno, *in generale*, una coppia di valori finiti per le coordinate $\frac{x_1'}{x_4'}=x_1$, $\frac{x_2'}{x_4'}=y_1$, e determinano *una retta unita propria* passante per i punti uniti (*entrambi improprii e coincidenti*) C_1C_2.

Ma se nella data similitudine è $b_3=0$, allora il centro C_1 *rimane indeterminato*, e non è più lecito di affermare che esso sia il punto improprio della retta unita dianzi considerata.

Vedremo infatti che in tal caso la retta medesima è *una retta di punti uniti.* Analoghe riflessioni si possono fare nel caso $\alpha=\pi$, $k=-1$ (in cui si ha *congruenza inversa*). In questo caso la relazione $\frac{x_3'}{x_4'}=-\frac{b_3}{2}$ *rappresenta un piano (piano unito)* sul quale non rimane determinato il punto C_1, poichè le altre due coordinate hanno la forma $\frac{0}{0}$.

Si osservi che *nella congruenza inversa si può avere centro proprio* per $\alpha=0$, $k=-1$; in questo caso la $D(\rho)=0$ ha la radice tripla $\rho_2=\rho_3=\rho_4=-1$, e *l'intiero piano improprio è di punti uniti.*

437. Congruenza diretta. Per $k=1$ il centro di similitudine C_1 è improprio, o rimane indeterminato; ma ad ogni modo rimane determinata dalle formule (49) *la retta unita propria* C_1C_2.

Assumendo questa per asse delle z, dalle (42) si hanno le equazioni della *congruenza diretta* sotto la forma:

$$(50)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z + b_3. \end{cases}$$

Se nella nostra similitudine si ha $b_3 = 0$, in corrispondenza della radice $\rho_1 = 1$, il determinante $D(\rho)$ (form. (43_1)) acquista la caratteristica 2. Dunque in questo caso si ha una **omografia assiale.** La retta C_1C_2 è una *retta di punti uniti* e le equazioni della congruenza sono

$$(51)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z, \end{cases}$$

e rappresentano una **rotazione di ampiezza** α **intorno all'asse** z.

In particolare, per $\alpha = \pi$ si hanno le formule

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z, \end{cases}$$

che esprimono una rotazione di π, cioè **simmetria ortogonale rispetto all'asse delle** z.

Per $\alpha = 0$ si ha **identità**

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z.$$

Se supponiamo $b_3 \neq 0$ ed $\alpha = 0$, le formule (50) della congruenza diretta divengono

$$(52)\qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + b_3 \end{cases}$$

cioè rappresentano una **traslazione** *nella direzione dell'asse* z

di ampiezza b_3, per $\alpha = \pi$, invece, si hanno le formule

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z + b_3, \end{cases}$$

che rappresentano ***simmetria ortogonale rispetto ad un asse, seguita da traslazione parallela all'asse.***

Concludiamo dunque che, nel caso più generale, ***la congruenza diretta spaziale*** (form. (50)) ***rappresenta il prodotto di una rotazione intorno ad un asse e di una traslazione nella direzione di questo asse.***

La composizione di questi due movimenti produce il **moto elicoidale**: dunque potremo dire che ***la congruenza diretta è generabile con un movimento elicoidale attorno ad un asse***, e può ridursi, in particolare, ad una semplice rotazione attorno ad un asse, od a una simmetria ortogonale attorno ad un asse, od a una traslazione.

438. Similitudini spaziali a centro proprio. Portando la origine delle coordinate nel punto unito proprio C_1 (centro) ed assumendo per asse z la retta unita propria C_1C_2, le equazioni (42) della similitudine acquistano la forma:

$$(53) \qquad \begin{cases} x' = k(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) \\ y' = k(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) \\ z' = kz. \end{cases}$$

Omotetia. Consideriamo prima il caso $\alpha = 0$. In questo caso la $D(\rho) = 0$ ha la radice tripla $\rho = k$ (form. (45)) e, per $\rho = k$, il determinante stesso ha caratteristica 1, dunque siamo nel caso della ***omologia solida*** e, trattandosi di una similitudine, della **omotetia.**

Le formule (50) acquistano la forma

$$(54) \qquad \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz, \end{cases}$$

le quali dimostrano che C_1 è il centro della omotetia e k la costante.

La omotetia è diretta od inversa, secondo che k è positivo o negativo.

La omotetia inversa è una similitudine inversa, a differenza di ciò che accade nel piano (n.° 422).

Paragonando le equazioni (50) della similitudine spaziale diretta, con le (52), (54) vediamo che *una similitudine spaziale diretta (non congruente) è il prodotto di una rotazione intorno ad un asse (eventualmente di ampiezza nulla) per una omotetia diretta che ha per centro un punto proprio di quest' asse.*

439. Congruenza inversa. Facendo $k = -1$ nelle formule (53) si hanno le equazioni della *congruenza inversa a centro proprio:*

$$(55) \qquad \begin{cases} x' = -(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) \\ y' = -(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) \\ z' = -z. \end{cases}$$

Queste rappresentano *una rotazione di ampiezza α attorno all' asse z seguita da una simmetria rispetto al centro,* oppure, ciò che è lo stesso, *una rotazione $\alpha + \pi$ attorno all' asse z, seguita da una simmetria ortogonale rispetto al piano xy.*

In particolare, per $\alpha = 0$ si ha la **simmetria centrale dello spazio** (che è una particolare omotetia inversa). Le formule (55) possono essere in difetto quando è $\alpha = \pi$, poichè in tale caso *non esiste centro proprio determinato.* Ma sappiamo che esiste allora un *piano unito* (n.° 436, pag. 361) normale alla direzione C_2, di equazione $z = -\frac{b_3}{2}$. Portando il piano coordinato xy su questo piano, le formule generali della similitudine (42) acquistano la forma

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha) + b_1 \\ y' &= k(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha) + b_2 \\ z' &= kz, \end{aligned}$$

e, per $k = -1$, $\alpha = \pi$,

$$(56) \qquad \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \\ z' = -z. \end{cases}$$

Queste formule rappresentano *una traslazione spaziale avente per piano direttore il piano unito $z = 0$, seguita da una simmetria ortogonale rispetto allo stesso piano.*

In particolare per $b_1 = b_2 = 0$, *la traslazione è nulla*, e la congruenza è semplicemente *la simmetria ortogonale rispetto al piano* $z = 0$. Questo piano, nel caso speciale che consideriamo, è non solo piano unito, ma *piano di punti uniti.*

Si verifica infatti immediatamente che, nella ipotesi $b_1 = b_2 = 0$, $\alpha = \pi$, il determinante $D(\rho)$ per $\rho = 1$ acquista la caratteristica 1: cioè si ha *omologia*, ed il piano considerato è *il piano di omologia.*

Riassumendo vediamo che *la congruenza inversa è una rotazione attorno ad un asse seguita da una simmetria centrale rispetto ad un punto dell'asse, oppure una traslazione seguita da una simmetria ortogonale rispetto ad un piano parallelo alla direzione della traslazione.*

In particolare si hanno le simmetrie rispetto ad un centro o ad un piano, le quali sono congruenze inverse omologiche.

La similitudine inversa, è il prodotto di una congruenza inversa e di una omotetia.

440. La distinzione fra congruenza diretta e congruenza inversa nello spazio è fondata sopra proprietà analoghe a quelle che si sono riscontrate per le congruenze tra figure piane.

Due figure piane congruenti direttamente possono sovrapporsi con un movimento che avviene nel piano (rotazione o traslazione). Due figure piane inversamente congruenti non possono essere sovrapposte se non con movimenti che avvengono fuori del piano (ribaltamento).

Due figure dello spazio direttamente congruenti possono sovrapporsi con un movimento elicoidale.

Due figure dello spazio inversamente congruenti non sono sovrapponibili con un movimento.

CAPITOLO II.

CORRELAZIONI

§ I. Correlazioni piane.

441. Dati due piani π, π', distinti o sovrapposti, *si dice* **correlazione** *o* **reciprocità** *la corrispondenza biunivoca che viene stabilita fra i punti $P(x_1x_2x_3)$ di π e le rette $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ di π', mediante la trasformazione lineare, a modulo diverso dallo zero;*

$$(57)\qquad \begin{cases} \rho\xi_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho\xi_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho\xi_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 . \end{cases}$$

Questa trasformazione ammette la inversa

$$(58)\qquad \begin{cases} \rho' x_1 = \alpha_{11}\xi_1' + \alpha_{21}\xi_2' + \alpha_{31}\xi_3' \\ \rho' x_2 = \alpha_{12}\xi_1' + \alpha_{22}\xi_2' + \alpha_{32}\xi_3' \\ \rho' x_3 = \alpha_{13}\xi_1' + \alpha_{23}\xi_2' + \alpha_{33}\xi_3' . \end{cases}$$

Se il punto $P(x_1x_2x_3)$ percorre una retta $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ del piano π, ossia se è

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

la corrispondente retta $r(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ ruota intorno al punto $P'(x_1'x_2'x_3')$, di coordinate

$$(59)\qquad \begin{cases} \rho_1 x_1' = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 \\ \rho_1 x_2' = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3 \\ \rho_1 x_3' = \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 , \end{cases}$$

dunque, nella reciprocità definita dalle (57), a rette $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ del piano π corrispondono punti $P'(x_1'x_2'x_3')$ del piano π'.

Da ciò si deduce che, *in una correlazione fra due piani, ai punti di un piano corrispondono biunivocamente le rette dell'altro, e reciprocamente.*

Rette e punti corrispondenti si dicono **omologhi**.

La correlazione, come la omografia, (n.° 407), conserva le *proprietà di appartenenza.* Si dimostra anche (come al n.° 408) che *la correlazione conserva il birapporto* formato da quattro elementi di una forma di prima specie; ossia che *forme di 1.ª specie omologhe in una correlazione sono proiettive.*

Si vede immediatamente che *il prodotto di due correlazioni è una omografia, il prodotto di una omografia e di una correlazione è una correlazione.*

Le correlazioni dunque non formano un gruppo; ma *l'insieme delle omografie e delle correlazioni costituisce un gruppo,* detto **gruppo delle proiettività.**

442. I problemi più interessanti nello studio della correlazione fra piani sovrapposti sono i seguenti:

I. *la ricerca degli elementi* **incidenti**, cioè che appartengono all'elemento omologo;

II. *la ricerca delle* **coppie involutorie**, cioè delle coppie di elementi omologhi che si corrispondono in doppio modo.

443. La condizione di appartenenza del punto $P(x_1x_2x_3)$ alla retta omologa $r'(\xi_1'\xi_2'\xi_3')$ è data da

$$x_1\xi_1' + x_2\xi_2' + x_3\xi_3' = 0,$$

cioè da:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x_3 = 0$$

od infine, da:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \\ + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 = 0. \tag{60}$$

Questa è *la equazione di una* **conica, luogo dei punti incidenti** *con la retta omologa.*

Similmente si trova che la condizione perchè la retta $r(\xi_1\xi_2\xi_3)$ sia incidente è espressa dalla relazione

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\xi_1\xi_2 + \\ + (\alpha_{13} + \alpha_{31})\xi_1\xi_3 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\xi_2\xi_3 = 0, \tag{61}$$

equazione di una **conica, inviluppo delle rette** *appartenenti ai punti omologhi.*

Le due coniche così trovate *sono in generale distinte, coincidono solo quando sia*

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad k, \ i = 1, \ 2, \ 3,$$

cioè quando il determinante delle (57) *sia* **simmetrico.**

In questo caso la correlazione non è altra cosa che *la* **polarità** *rispetto ad una tale conica* (n.° 263). La *conica* (luogo ed inviluppo), si dice **fondamentale** della polarità.

Abbiamo eseguito la ricerca di elementi incidenti, considerando elementi del piano π; se avessimo preso in esame elementi del piano π' avremmo ottenuto le medesime coniche.

444. Veniamo ora al 2.° problema. Osserviamo anzitutto che la operazione che si fa quando, essendo dato un punto P di π, si cerca la retta omologa r di π', ed, in seguito, il punto P' di π', omologo di r pensata come appartenente a π, *è il* **quadrato della data correlazione,** *e perciò è una omografia.*

Questa omografia si dice **appartenente alla correlazione:** le sue equazioni si ricavano immediatamente dalle (57), (59), e sono:

$$\left\{\begin{aligned} \rho\rho_1 x_1' &= (a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{12} + a_{31}\alpha_{13})x_1 + (a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{12} + a_{32}\alpha_{13})x_2 + \\ &\qquad + (a_{13}\alpha_{11} + a_{23}\alpha_{12} + a_{33}\alpha_{13})x_3 \\ \rho\rho_1 x_2' &+ (a_{11}\alpha_{21} + a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{23})x_1 + (a_{12}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{23})x_2 + \\ &\qquad + (a_{13}\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23})x_3 \\ \rho\rho_1 x_3' &= (a_{11}\alpha_{31} + a_{21}\alpha_{32} + a_{31}\alpha_{33})x_1 + (a_{12}\alpha_{31} + a_{22}\alpha_{32} + a_{32}\alpha_{32})x_2 + \\ &\qquad + (a_{13}\alpha_{31} + a_{23}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33})x_3 : \end{aligned}\right.$$

la ricerca delle *coppie involutorie* si riduce dunque alla *ricerca degli elementi uniti*, in tale omografia.

445. Si vuol ora cercare la *condizione perchè tutte le coppie P, P' siano involutorie.*

Questa condizione consiste in ciò, che la omografia appartenente alla correlazione, rappresentata dalle equazioni trovate al n.° precedente, sia una *identità* (n.° 411): occorre perciò che, indicando con σ un fattore di proporzionalità, sia

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{11}+a_{21}\alpha_{12}+a_{31}\alpha_{13}=\sigma \\ a_{12}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{12}+a_{32}\alpha_{13}=0 \\ a_{13}\alpha_{11}+a_{23}\alpha_{12}+a_{33}\alpha_{13}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_{21}+a_{21}\alpha_{22}+a_{31}\alpha_{23}=0 \\ a_{12}\alpha_{21}+a_{22}\alpha_{22}+a_{32}\alpha_{23}=\sigma \\ a_{13}\alpha_{21}+a_{23}\alpha_{22}+a_{33}\alpha_{23}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{31}+a_{21}\alpha_{32}+a_{31}\alpha_{33}=0 \\ a_{12}\alpha_{31}+a_{22}\alpha_{32}+a_{32}\alpha_{33}=0 \\ a_{13}\alpha_{31}+a_{23}\alpha_{32}+a_{33}\alpha_{33}=\sigma. \end{cases}$$

Tali relazioni sono possibili solo quando ogni α_{ki} sia eguale o proporzionale al complemento algebrico di a_{ik} nel determinante della correlazione, cioè quando abbiano luogo identità della forma

$$a_{ik}=\mu a_{ki}, \qquad i, k=1, 2, 3.$$

Queste si possono anche scrivere:

$$a_{ki}=\mu a_{ik},$$

d'onde si ricava, moltiplicando,

$$\mu^2=1, \quad \mu=\pm 1;$$

e quindi

$$a_{ik}=\pm a_{ki}.$$

Abbiamo così trovato, come *condizione perchè ogni coppia sia involutoria, che il determinante della correlazione sia* **simmetrico od emisimmetrico.** Quest'ultimo caso va escluso perchè i determinanti emisimmetrici di ordine dispari sono nulli; rimane dunque provato che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè una reciprocità fra piani sovrapposti sia involutoria è che il determinante della reciprocità sia simmetrico.*

Ricordando ora che le reciprocità a determinante simmetrico sono polarità rispetto ad una conica, possiamo concludere che *le correlazioni involutorie sono tutte e sole le polarità rispetto a coniche.*

§ II. Polarità ortogonale nella stella.

446. Consideriamo una stella di raggi a centro proprio: ad ogni retta della stella possiamo far corrispondere il piano pel centro della stella, normale ad essa. Si ha così una corrispondenza biunivoca fra retta e piano, nella stella, che viene detta **polarità ortogonale nella stella.**

Per esprimere analiticamente questa corrispondenza assumiamo il centro della stella come origine di un sistema di coordinate cartesiane ed omogenee. Le equazioni di una retta r della stella, contenente il punto proprio $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$, saranno (n.° 239, form. (57))

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_3}{x_3'} = \frac{x_4 - \mu}{x_4'}; \tag{62}$$

quella di un piano $\pi(\xi_1\xi_2\xi_3 0)$ per la origine, è

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0; \tag{63}$$

e la condizione di ortogonalità è espressa dalle formule (loc. cit., form. (58))

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1' = \rho\xi_1 & & \\ x_2' = & \rho\xi_2 & \\ x_3' = & & \rho\xi_3. \end{array}\right. \tag{64}$$

Poichè la coordinata x_4' può sempre prendersi eguale all'unità, riguarderemo $x_1'x_2'x_3'$ come *coordinate della retta variabile nella stella*; considereremo poi $\xi_1\xi_2\xi_3$, come *coordinate dell'elemento variabile nella stella di piani*; ed osservando che le formule (64) esprimono una trasformazione lineare a determinante positivo e simmetrico, troveremo la giustificazione del nome di *polarità* dato alla corrispondenza fra retta e piano, così determinata.

Ma possiamo, inoltre, dimostrare che *la polarità ortogonale nella stella, determina sul piano improprio la* **polarità assoluta** (n.° 271), cioè la polarità *rispetto al cerchio immaginario all'infinito (assoluto).*

Infatti sappiamo che ogni retta $r(x_1'x_2'x_3')$ per la origine, determina sul piano improprio il punto $P_\infty(x_1'x_2'x_3')$; ed ogni piano per l'origine $\pi(\xi_1\xi_2\xi_3)$ sega il piano improprio secondo la retta $r_\infty(\xi_1\xi_2\xi_3)$: e reciprocamente che ad ogni punto P_∞ corrisponde una retta r della stella, e ad ogni retta r_∞, un piano π per la origine.

Ora le relazioni (64) esprimono appunto una polarità fra i punti P_∞, e le rette r_∞ del piano improprio; e la *conica* *fondamentale di questa polarità,* (come si vede dall'applicazione della formula (60)) è il *cerchio assoluto*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

È evidente che *la polarità assoluta,* così determinata, *è sempre la medesima, comunque sia scelto il centro della stella* in cui si considera la polarità ortogonale.

§ III. Correlazioni fra due spazi.

447. Dati due spazi Σ, Σ', (sovrapposti), si dice **correlazione** o **reciprocità**, la corrispondenza biunivoca fra i punti $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ di Σ ed i piani $\pi'(\xi_1' \xi_2' \xi_3' \xi_4')$ di Σ', determinata dalla trasformazione lineare a modulo diverso dallo zero:

$$(65) \qquad \begin{cases} \rho\xi_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho\xi_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \,. \end{cases}$$

La trasformazione inversa:

$$\begin{cases} \rho' x_1 = \alpha_{11}\xi_1' + \alpha_{21}\xi_2' + \alpha_{31}\xi_3' + \alpha_{41}\xi_4' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho' x_4 = \alpha_{14}\xi_1' + \alpha_{24}\xi_2' + \alpha_{34}\xi_4' + \alpha_{44}\xi_4' \end{cases}$$

fa corrispondere un punto P di Σ ad un piano π' di Σ'.

Si vede immediatamente che: *se il punto P percorre un piano $\pi(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)$, il piano π' corrispondente ruota attorno ad un punto $P'(x_1' x_2' x_3' x_4')$,* le cui coordinate sono date da formule, analoghe alle (59), trovate al n.° 441.

Inoltre si può dimostrare che: *se il punto P percorre una retta r* (sostegno della punteggiata $x_i = \lambda\overline{x}_i + \mu\overline{\overline{x}}_i$) *il piano corrispondente π', ruota intorno ad una retta r',* (asse del fascio $\xi_i' = \lambda\overline{\xi}_i' + \mu\overline{\overline{\xi}}_i'$).

Valgono anche per le correlazioni fra due spazi le osservazioni fatte al n.° 441: e cioè che *il prodotto di due correlazioni è una omografia,* e che *il prodotto di una omografia e di una correlazione è una correlazione.*

L'insieme di tutte le omografie e di tutte le correlazioni dello spazio costituisce il **gruppo delle proiettività dello spazio.**

448. Anche nello studio delle reciprocità dello spazio si presentano i due problemi fondamentali:

I. *La ricerca degli* **elementi incidenti,**

II. *La ricerca delle* **coppie involutorie.**

La ricerca degli elementi incidenti, si eseguisce al modo indicato al n.° 443, e dà luogo alle due equazioni:

$$(66)\qquad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \dots \\ + (a_{34} + a_{43})x_3x_4 = 0,$$

(*luogo dei punti che appartengono al piano omologo*);

$$(67)\qquad \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + \alpha_{44}\xi_4^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\xi_1\xi_2 + \dots \\ + (\alpha_{34} + \alpha_{43})\xi_3\xi_4 = 0,$$

(*inviluppo dei piani che contengono il punto omologo*).

Queste due equazioni rappresentano una unica superficie quando è $a_{rs} = a_{sr}$, $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ cioè quando il *determinante della correlazione è simmetrico.*

449. Per quel che riguarda il Problema della ricerca delle *coppie involutorie,* con procedimento al tutto simile a quello tenuto nello studio delle correlazioni piane si vedrà che *tale ricerca coincide con quella degli elementi uniti nella omografia che risulta dal quadrato della data correlazione.*

Se poi si cerca la condizione perchè tutte le coppie di elementi corrispondenti siano involutorie, cioè perchè la *correlazione sia involutoria,* si giungerà alle relazioni

$$a_{ik} = \pm a_{ki} \qquad\qquad k, i = 1, 2, 3, 4,$$

le quali richiedono che *il determinante della correlazione sia simmetrico, od emisimmetrico.*

Nel nostro caso poi, non essendo di necessità nullo ogni determinante emisimmetrico (perchè l'ordine è pari) entrambi questi casi debbono essere considerati.

Il caso del *determinante simmetrico,* è quello di **correlazioni polari, o polarità,** ed è intieramente analogo a quello considerato nel piano. Le polarità dello spazio si presenteranno nello studio delle *quadriche*, di cui sarà oggetto la 3.ª Parte del nostro corso.

Nel caso del ***determinante emisimmetrico***, che non ha riscontro nelle reciprocità piane, ***le correlazioni si dicono* nulle**, e prendono anche il nome di **sistemi nulli**.

In queste reciprocità le equazioni che rappresentano luogo di punti incidenti, ed inviluppo di piani incidenti (66), (67), hanno tutti i coefficienti identicamente nulli, dunque ***tutti gli elementi sono incidenti***: cioè ***ogni punto giace nel piano corrispondente, ed ogni piano appartiene al punto corrispondente.***

FINE DEL VOLUME PRIMO

375

INDICE

376

377

Parte I.

PUNTI, RETTE E PIANI

Capitolo I.

COORDINATE NELLE PORME DI PRIMA SPECIE

Capitolo II.

PUNTI E RETTE NEL PIANO

Capitolo III.

PUNTI PIANI E RETTE NELLO SPAZIO

Parte II.

LE CONICHE

Capitolo I.

TANGENTI E POLARI

Capitolo II.

PROPRIETÀ DIAMETRALI

Capitolo III.

STUDIO DELLE PROPRIETÀ DELLE CONICHE SULLE LORO EQUAZIONI NORMALI

Capitolo IV.

PROPRIETÀ FOCALI DELLE CONICHE

Capitolo V.

FASCI E SCHIERE DI CONICHE

Appendice

PROIETTIVITÀ FRA FORME DI 2ª E DI 3ª SPECIE

Capitolo I.

OMOGRAFIE

CAPITOLO II.

CORRELAZIONI

383

Finito di stampare
il giorno 20 marzo 1923
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna

ETTORE BORTOLOTTI

I

LEZIONI
DI
GEOMETRIA ANALITICA

VOLUME SECONDO

LABORAVI · FIDENTER

250366
8/1/31.

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

344

Ettore Bortolotti

PARTE III.

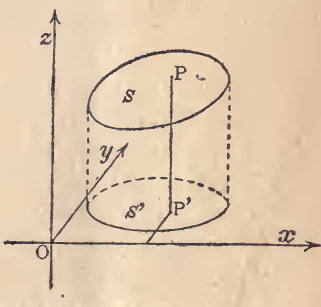
LE QUADRICHE

CAPITOLO I.

SUPERFICI E LINEE DELLO SPAZIO

§ I. Forma generale della equazione di una superficie.

450. Data una superficie S qualunque, e fissato un sistema di assi cartesiani di riferimento che per semplicità supporremo ortogonali, consideriamo l'area piana S' determinata sul piano xy dalle proiezioni dei punti della superficie S.



Se per un punto $P'(xy)$ di S' consideriamo la parallela all'asse z, questa incontrerà la superficie S in uno (od in più) punti $P(xyz)$ e verrà così determinato uno (o più) valori di z in corrispondenza della coppia di valori xy, coordinate di P'.

Dunque ad ogni coppia di valori xy, entro l'area S', corrisponde un valore (o più valori) per z, e perciò si può dire z funzione delle x, y nel campo S'. Scriveremo:

$$z = f(xy), \tag{1}$$

e questa verrà considerata come *equazione della superficie* S, quando si possa effettivamente determinare la espressione analitica rappresentata dal simbolo $f(xy)$.

Reciprocamente una equazione della forma (1) rappresenta in generale una superficie, in quanto che, ad ogni coppia xy, entro un campo assegnato, essa fa corrispondere uno o più valori z, ed i punti $P(xyz)$ così determinati si dispongono, in generale, sopra una determinata superficie.

451. La equazione di una superficie può anche assumere la forma implicita

$$F(xyz) = 0, \tag{2}$$

quando la F soddisfi le condizioni analitiche richieste per definire la z come funzione continua delle altre due variabili.

Sappiamo che se la F è una funzione lineare, cioè se la (2) ha la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

la superficie rappresentata è *un piano*.

Se $F(xyz)$ è un polinomio razionale intero del grado m complessivo nelle tre variabili, la superficie si dice **algebrica dell'ordine** m.

Si vede immediatamente, con ragionamento analogo a quello fatto per curve piane algebriche al n.° 100, Vol. I, pag. 77, che *l'ordine di una superficie algebrica non varia per qualsiasi trasformazione di assi coordinati.*

452. Il significato geometrico dell'*ordine* di una superficie è dato dal Teorema:

Una retta non può incontrare una superficie di ordine m che al più in m punti, a meno che essa non appartenga alla superficie.

Assumendo infatti la data retta come asse delle x, e facendo sistema delle equazioni di questa retta: $y = 0$, $z = 0$, e della equazione della superficie, si ha una equazione in x

$$F(x,\ 0,\ 0) = 0$$

di grado non superiore ad m, le radici della quale corrispondono ai punti di intersezione della retta e della data superficie.

In modo analogo si dimostra il Teorema: *un piano generico incontra una superficie dell'ordine m in una curva algebrica di ordine m.*

453. Equazione della sfera. Scrivendo che un punto generico dello spazio $P(xyz)$ ha da un punto fisso $P_0(x_0y_0z_0)$ distanza costante ed uguale ad r, si ha *la equazione della sfera di centro P_0 e raggio r sotto la forma* (n.° 183, Vol. I, pag. 156),

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \tag{3}$$

Sviluppando i quadrati troviamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (-r^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0.$$

Vediamo dunque che, *nella equazione della sfera sono eguali fra loro i coefficienti dei quadrati x^2, y^2, z^2 delle variabili, e sono uguali allo zero i coefficienti dei doppi prodotti xy, xz, yz.*

E, con procedimento analogo a quello tenuto per la equazione del cerchio (n.° 292, Vol. I, pag. 248), si vede immediatamente che tale condizione è anche sufficiente perchè una equazione di secondo grado nelle variabili x, y, z rappresenti una sfera.

Possiamo dunque concludere che una sfera è rappresentata da un'equazione di 2.° grado della forma

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

In coordinate omogenee (n.° 238) l'equazione della sfera assume la forma

$$(3') \quad a_{11}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x^2 = 0.$$

454. Cerchio assoluto. Per avere la sezione di una sfera col *piano improprio*, bisogna far sistema della equazione trovata con quella del piano improprio, $x_4 = 0$. Si ottiene così il sistema:

$$(4) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0$$

che rappresenta il *cerchio assoluto* (n.° 238).

Si dimostra facilmente anche che: *ogni superficie di second'ordine, la quale appartenga al cerchio assoluto è una sfera.*

Basta perciò considerare che una superficie di secondo ordine è rappresentata da un'equazione del 2.° grado, che in coordinate omogenee si può scrivere:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0. \end{aligned}$$

La sua sezione col piano improprio è la conica

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

E se questa deve coincidere col cerchio assoluto, deve essere

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

e sono queste appunto le condizioni sotto le quali si può affermare che una superficie del 2.° ordine è una sfera.

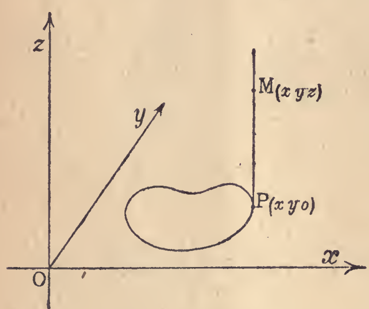
455. Superfici cilindriche. *Una equazione che contiene due sole delle tre variabili x, y, z, considerata come equazione di una superficie, rappresenta una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse omonimo della variabile che non figura nella equazione.*

Così per es. la equazione

$$F(xy) = 0$$

rappresenta una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z.

Ed infatti, i punti del piano xy che soddisfano la equazione $F(xy) = 0$, sono sopra una curva C di questo piano. Se per uno $P(xyo)$ di tali punti conduciamo la parallela all'asse z tutti i punti $M(xyz)$ di questa avendo le due prime coordinate coincidenti con quelle del punto P, soddisfano la $F(xy) = 0$, cioè appartengono alla superficie rappresentata da questa equazione.



L'insieme di queste parallele è appunto una superficie cilindrica, generata dal moto di una retta parallela all'asse z, che si appoggia alla curva C.

Inversamente: se consideriamo una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z, essa viene tagliata dal piano xy secondo una curva C. L'equazione $F(xy) = 0$ di una tale curva, interpretata come relazione fra coordinate di punti dello spazio, rappresenta la data superficie.

Data una superficie cilindrica, comunque situata nello spazio, potremo, con una rotazione di assi, far coincidere la direzione dell'asse z con quella delle generatrici della superficie.

Nel nuovo sistema $OXYZ$ la equazione della superficie avrà la forma

$$F(XY)=0$$

ma, per la rotazione eseguita, si ha (n.° 177, Vol. I, pag. 151)

$$X=ax+by+cz$$
$$Y=a_1x+b_1y+c_1z$$

dunque, *la forma generale della equazione di superficie cilindriche è*

$$F(ax+by+cz,\quad a_1x+b_1y+c_1z)=0 \tag{5}$$

456. SUPERFICI CONICHE. *Una equazione omogenea nelle tre coordinate x, y, z, rappresenta una superficie conica col vertice nella origine delle coordinate.*

Ed infatti: se indichiamo con m il grado di omogeneità della $F(xyz)$, si avrà, per qualsivoglia valore di k

$$F(kx,\ ky,\ kz)=k^m F(xyz), \tag{6}$$

di qui, per $k=0$, si ricava

$$F(000)=0,$$

e ciò prova che *la nostra superficie passa per la origine.*

Sia, in secondo luogo, $P_1(x_1y_1z_1)$ un punto diverso dalla origine, appartenente alla superficie: si avrà

$$F(x_1y_1z_1)=0$$

ed anche, per la (6)

$$F(kx_1ky_1kz_1)=0.$$

Ma per i punti della retta OP_1, si ha

$$x=kx_1 \quad y=ky_1 \quad z=kz_1$$

(n.° 208, form. (46')), dunque tutti i punti di questa retta appartengono alla superficie.

È noto che la condizione (6) di omogeneità può esprimersi anche mediante una relazione della forma [1]

$$F(xyz)=z^m f\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)$$

[1] Cfr. PINCHERLE. *Calcolo Infinitesimale*, n.° 253.

potremo dunque scrivere *la equazione di un cono col vertice nella origine sotto la forma*

)
$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0.$$

Se poi supponiamo che il vertice del cono non sia l'origine, ma un determinato punto $V(x_0y_0z_0)$, comunque fissato, trasportando la origine nel vertice con la traslazione

$$X=x-x_0, \quad Y=y-y_0, \quad Z=z-z_0$$

avremo la equazione del cono sotto la forma

$$f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)=0$$

cioè

$$f\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$$

questa dunque è *la forma generale della equazione di superfici coniche.*

457. Cono di rotazione. È la superficie generata dalle rette incidenti in un punto V con una retta data r, e formanti con r angolo θ costante. Consideriamo un sistema di assi cartesiani coll'origine nel vertice V, ed indichiamo i coseni direttori di r, in questo sistema, con α, β, γ.

I coseni direttori di una retta per l'origine e per un punto $P(xyz)$ sono (n.° 206, form. (42'))

$$\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(il segno del radicale essendo comune con quello di z).

La condizione perchè la retta OP formi angolo θ con la retta r, cioè perchè il punto P appartenga alla superficie, sarà dunque (n.° 172)

$$\cos\theta=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

cioè

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-\cos^2\theta(x^2+y^2+z^2)=0. \tag{9}$$

Questa è appunto la equazione del cono di rotazione col vertice nella origine, avente per asse la retta $r(\alpha\beta\gamma)$ e nel quale l'angolo costante delle generatrici con l'asse è θ.

Assumendo per asse z la retta r si ha $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, e quindi l'equazione del cono ha la forma semplicissima

$$z^2 - \cos^2\theta(x^2 + y^2 + z^2) = 0. \tag{10}$$

È facile verificare che la equazione (9) è omogenea nelle tre variabili x, y, z; e ciò a conferma di quanto si è detto al n.° 456.

458. Cono isotropo. L'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{11}$$

rappresenta un cono immaginario per la origine. La sezione di questo cono col piano improprio dà origine al **cerchio assoluto** (n.° 454) cioè in coordinate omogenee, al cerchio

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Il cono (11), che proietta il cerchio assoluto dalla origine, è detto **cono isotropo.**

§ II. Equazioni di linee nello spazio.

459. Due superfici si tagliano, in generale, secondo una linea, perciò il sistema di due equazioni della forma

$$\begin{cases} F(xyz) = 0 \\ \Phi(xyz) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

rappresenta, in generale, una linea, quale intersezione completa delle due superfici $F = 0$, $\Phi = 0$.

Se, inversamente, data una linea C, si possono determinare due superfici che appartengano a C e che non abbiano altri punti a comuni all'infuori di C, facendo sistema delle equazioni di tali superfici, avremo la rappresentazione analitica della linea C.

È spesso utile, per tale rappresentazione, considerare le superfici cilindriche che proiettano C su due piani coordinati. Le equazioni di tali superfici si possono ottenere per eliminazione dal sistema (12). Per es. eliminando successivamente la y e la x si ottiene un sistema equivalente alle (12) e della forma

$$\begin{cases} f(xz) = 0 \\ \varphi(yz) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

che corrisponde alla forma ridotta delle equazioni della retta (n.° 211).

Le due equazioni di questo sistema, singolarmente considerate come equazioni di luoghi di punti sui piani xz, yz, rappresentano le curve proiezioni della data su questi due piani.

460. Equazioni parametriche di una linea nello spazio. La rappresentazione di una data linea mediante sistemi della forma (12) o (13) non è sempre possibile, perchè non sempre si riesce a determinare due superfici che abbiano per *intersezione completa* una data curva. Perciò torna opportuno il rappresentare analiticamente la curva, assegnando le terne di valori che le coordinate xyz di un punto $P(xyz)$, ad essa appartenente, assumono in corrispondenza dei valori di un parametro t, variabile in un certo campo. Le equazioni della curva assumono allora la *forma parametrica*:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{14}$$

nella quale $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono funzioni note (finite, continue, derivabili) del parametro t nel detto campo di variabilità.

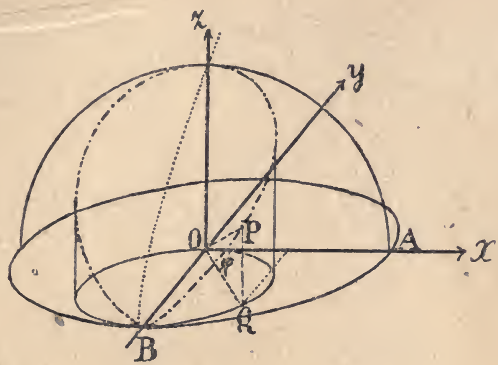
461. Un esempio di questa rappresentazione ci è dato dalle equazioni parametriche

$$x = x_1 + t\cos\alpha, \quad y = y_1 + t\cos\beta, \quad z = z_1 + t\cos\gamma$$

della retta per $P_1(x_1y_1z_1)$ con coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$: trovate al n.° 206.

Per dare un altro esempio, scriveremo le equazioni di una curva, detta *finestra di Viviani*, che si ottiene intersecando una sfera con un cilindro circolare in cui il diametro di una sezione retta è uno dei raggi della sfera.

Assumendo come origine delle coordinate il centro della sfera, come asse z la parallela per l'origine all'asse del ci-



lindro, come asse y il prolungamento del diametro passante per O della sezione del cilindro col piano xy, ed indicando con $2r$ il raggio della sfera, si hanno le due equazioni

$$(15) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2 & \text{(sfera)} \\ x^2 + y^2 + 2ry = 0 & \text{(cilindro).} \end{cases}$$

Per avere le equazioni parametriche, si assume come parametro variabile l'angolo $\varphi = \widehat{AOQ}$ che forma l'asse x con la proiezione OQ del raggio OP, uscente dalla origine e passante pel punto $P(xyz)$ della curva.

Considerando che $2r = |\overline{OQ}|$, che $\overline{OQ}$, nella nostra figura, ha valore negativo, e che anche φ ha valore negativo, si ha:

$$\overline{OQ} = \overline{OB} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$\overline{OQ} = 2r \operatorname{sen} \varphi$$

cioè

$$y = -\overline{OQ} \operatorname{sen} \varphi = -2r \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$x = -\overline{OQ} \cos \varphi = -2r \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$z^2 = \overline{QP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 = 4r^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 4r^2 \cos^2 \varphi.$$

Dunque le equazioni parametriche della curva proposta sono

$$(16)\qquad \begin{cases} x = -2r \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ y = -2r \operatorname{sen}^2\varphi \\ z = \pm 2r \cos\varphi. \end{cases}$$

La curva è simmetrica rispetto al piano xy; nel punto B dell'asse y, corrispondente a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ha un *punto doppio* (interseca se stessa).

Se cerchiamo, nel modo indicato al n.° 449, la curva proiezione della finestra di Viviani sul piano yz, (eliminando la x, per sottrazione, dalle formule (15) troviamo la parabola

$$z^2 = 4r^2 + 2ry,$$

che ha per asse l'asse y e vertice in B, cioè una curva che ***esiste ed è reale per tutti i valori di*** y ***positivi e negativi maggiori di*** $-2r$. ***Mentre la curva proposta non è reale altro che per valori delle*** y ***compresi fra*** $-2r$ ***e*** 0.

Ciò avviene perchè il piano $y = a$, incontra la intersezione delle due superfici (15) nei punti:

$$P_1(i\sqrt{a^2+2ar},\ a,\ \sqrt{4r^2+2ar}),\quad P_3(i\sqrt{a^2+2ar},\ a,\ -\sqrt{4r^2+2ar}),$$
$$P_2(-i\sqrt{a^2+2ar},\ a,\ \sqrt{4r^2+2ar}),\quad P_4(-i\sqrt{a^2+2ar},\ a,\ -\sqrt{4r^2+2ar}),$$

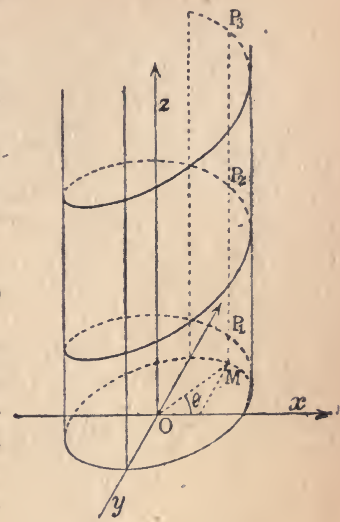
(che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + a^2 + z^2 = 4r^2 \\ x^2 + a^2 + 2ar = 0). \end{cases}$$

Le coppie P_1P_2, P_3P_4 sono formate da punti tutti reali se $-2r < a < 0$; e per ogni altro valore reale di a, da punti immaginari coniugati e simmetrici rispetto al piano yz.

Le rette P_1P_2, P_3P_4 sono quindi in ogni caso reali e parallele all'asse x, e proiettano i punti (reali od immaginari coniugati) della curva situati nel piano $y = a$ in punti reali del piano yz, situati sulla parabola $z^2 = 4r^2 + 2ry$.

462. Elica cilindrica. La composizione del moto di traslazione uniforme nella direzione di un determinato asse r e di rotazione uniforme intorno al medesimo asse, produce il **moto elicoidale**, per effetto del quale un punto descrive sul cilindro di rotazione che ha per asse r, una curva detta *elica cilindrica*.



Assumendo l'asse di rotazione per asse z, indicando con r il raggio del cilindro, e riferendo i punti dell'elica ad un sistema di coordinate cilindriche (n.° 184, Vol. I, pag. 156) si ha

(17) $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = mr\theta$

dove m esprime il rapporto costante fra lo spazio percorso in tempi eguali per effetto della sola traslazione (z) e per effetto della sola rotazione ($r\theta$).

Se m è positivo l'elica è sinistrorsa, se negativo, destrorsa.

Gli infiniti punti dell'elica posti sopra una stessa generatrice si hanno aumentando il parametro θ di $2k\pi$ (k intero): infatti ai valori $\theta + 2k\pi$ del parametro, corrispondono punti $P_k(x_k y_k z_k)$ con

$$x_k = r\cos(\theta + 2k\pi), \quad y_k = r\,\mathrm{sen}\,(\theta + 2k\pi), \quad z_k = mr(\theta + 2k\pi)$$

cioè

$$x_k = r\cos\theta, \quad y_k = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z_k = mr\theta + 2mrk\pi;$$

ora al variare di k non variano le coordinate $x_k y_k$, e perciò tali punti sono tutti sopra una perpendicolare al piano xy, uscente dal punto $M(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Due successivi di questi punti sono fra loro alla distanza costante

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \ldots = \overline{P_{k-1}P_k} = \ldots = 2mr\pi$$

che è detta **passo dell'elica**.

Dalle (17) eliminando θ, si hanno le equazioni

(18) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\frac{z}{mr}$$

che rappresentano le superfici cilindriche che proiettano l'elica sui piani xy ed xz.

§ III. Equazioni parametriche di una superficie.

463. Anche per le superfici si può dare una rappresentazione analitica analoga a quella esposta al § precedente per le linee, esprimendo le coordinate dei punti $P(xyz)$ appartenenti alla superficie da rappresentare, come funzioni (finite, continue, derivabili) di *due parametri* u, v, cioè mediante equazioni della forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \tag{19}$$

Da queste, eliminando i parametri u, v si ricaverebbe la equazione della superficie sotto la forma generale

$$F(x, y, z) = 0.$$

464. Le equazioni parametriche (19) *mettono in evidenza due sistemi di linee tracciate sulla superficie.*

Ed infatti, se fissiamo per uno dei parametri, ad es. per v, un valore particolare v_1, in corrispondenza di questo si ha una curva C_{v_1} rappresentata dal sistema

$$x = x(u, v_1), \quad y = y(u, v_1), \quad z = z(u, v_1). \tag{20}$$

Variando il valore v_1 di v, la curva C_v si muove sulla superficie (in generale mutando forma col cambiare del valore di v).

La superficie risulta così ricoperta dal complesso di tutte queste curve C_v.

Se, analogamente, si suppone di fissare uno speciale valore u_1 della u, le equazioni

$$x = x(u_1, v), \quad y = y(u_1, v), \quad z = z(u_1, v)$$

nelle quali figura il solo parametro variabile v, definiscono una linea C_{u_1} appartenente alla superficie.

Ed al variare del valore costante scelto per u, si ottiene un sistema di infinite curve C_u appartenenti alla superficie.

465. In questo modo siamo venuti a considerare su la data superficie un reticolato composto dalle curve dei due sistemi $C_v (v = \text{costante})$ e $C_u (u = \text{costante})$.

Per ogni punto P della superficie passa in generale una sola coppia di linee C_u, C_v; e per ogni coppia di tali linee (determinata da una coppia di valori u_1, v_1 di u, v) si ha in generale un punto della superficie, che è sulla loro intersezione.

Perciò si dice che u, v sono *coordinate curvilinee* dei punti della superficie. Le linee C_u, C_v si dicono *linee coordinate.*

466. Sfera. Le formule

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

trovate al n.° 186 (Vol. I, pag. 158), come espressione delle coordinate cartesiane di un punto dello spazio, in funzione delle polari, quando in esse si consideri r costante, rappresentano la sfera di raggio r, col centro nell'origine.

Le linee C_φ, $(\varphi = \text{costante})$ sono cerchi sulla sfera paralleli al piano xy.

Le linee C_θ, $(\vartheta = \text{costante})$ sono cerchi massimi su piani per l'asse z (meridiani). Dunque i due sistemi di linee coordinate sono i paralleli ed i meridiani della sfera.

467. Superfici di rotazione. Le superfici di rotazione sono quelle che vengono generate da una curva C di forma invariabile che ruota intorno ad una retta fissa (*asse*). Ogni punto della curva generatrice genera un circolo (*parallelo*) col piano normale all'asse e col centro nell'asse.

Segando la superficie di rotazione con un piano per l'asse si ha una linea che si dice **linea meridiana** o *meridiano* della superficie di rotazione.

Tutti i meridiani sono l'uno all'altro sovrapponibili per rotazione intorno all'asse. Se si riferisce la superficie di rotazione ad un sistema di assi cartesiani, nel quale l'asse z coincida con l'asse di rotazione, il valore della coordinata z sarà costante per tutti i punti di uno stesso parallelo, e potrà variare, da parallelo a parallelo in dipendenza dal raggio ρ del parallelo cui si riferisce.

Si ha dunque una relazione della forma

$$z = f(\rho) \tag{21}$$

la quale si può riguardare come equazione della linea meridiana nel suo piano, e basterebbe da sola per determinare la superficie.

Le equazioni parametriche sono:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad z = f(\rho); \tag{22}$$

i due sistemi di linee coordinate sono i meridiani ($\theta =$ costante) ed i paralleli ($\rho =$ costante).

La equazione della superficie di rotazione, attorno all'asse delle z, nelle ordinarie coordinate cartesiane, si ottiene dalla (21) facendovi $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ed ha quindi in generale la forma

$$z = F(x^2 + y^2). \tag{23}$$

468. Superfici rigate. Una superficie si dice *rigata* se per uno qualunque dei suoi punti passa una retta appartenente alla superficie; questa può dunque immaginarsi generata dal moto di una retta, o composta di infinite rette, le quali si dicono **generatrici** *della rigata.*

Se le equazioni di una retta nello spazio contengono un parametro arbitrario, al variare di questo la retta si muove, ed in generale, descrive una superficie.

Le equazioni parametriche di una *superficie rigata* potranno dunque mettersi sotto la forma:

$$x = x_1 + h\alpha, \quad y = y_1 + h\beta, \quad z = z_1 + h\gamma, \tag{I}$$

ove h rappresenterà un parametro arbitrario, e le coordinate $x_1 y_1 z_1$, ed i coseni direttori $\alpha\beta\gamma$, della generatrice della rigata uscente da P_1, sono funzioni di un nuovo parametro u:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 = x_1(u), & y_1 = y_1(u), & z_1 = z_1(u) \\ \alpha = \alpha(u), & \beta = \beta(u), & \gamma = \gamma(u). \end{array} \right. \tag{II}$$

Sulla superficie potremo assumere quali linee coordinate le $u =$ costante e le $h =$ costante, cioè le rette che si hanno dalle (I), (II) per u costante, e le curve che le stesse (I), (II) rappresentano per h costante.

Se le equazioni della retta sono date sotto la *forma ridotta*

$$x = mz + a, \quad y = nz + b,$$

scrivendo

$$x = mt + a, \quad y = nt + b, \quad z = t,$$

si vede che *dette equazioni rappresentano una superficie (rigata), se in esse t è un parametro variabile ed i coefficienti m, n, a, b, sono funzioni di un altro parametro u.*

469. Piano. Se le x, y, z si esprimono *linearmente* per mezzo di due parametri u, v,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v + b_1 \\ y &= a_{21}u + a_{22}v + b_2 \\ z &= a_{31}u + a_{32}v + b_3 \end{aligned} \right. \tag{24}$$

la superficie rappresentata dalle formule (24) è un piano.

Ed infatti la coesistenza della (24) esige l'annullamento del determinante

$$\begin{vmatrix} x - b_1 & a_{11} & a_{12} \\ y - b_2 & a_{21} & a_{22} \\ z - b_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

e questa è appunto la equazione di un piano.

470. Superfici cilindriche. La superficie rigata è un cilindro se le generatrici sono parallele fra loro. Una tale superficie è quindi generata dal moto di una retta che, mantenendosi sempre nella direzione $r(\alpha, \beta, \gamma)$ determinata da dati coseni direttori si appoggia ad una data linea (direttrice)

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u). \tag{26}$$

Scrivendo l'equazione della retta che ha per coseni direttori (costanti) α, β, γ e passa pel punto generico della linea (26) avremo le equazioni parametriche della superficie,

$$x - f(u) = k\alpha, \quad y - \varphi(u) = k\beta, \quad z - \psi(u) = k\gamma. \tag{27}$$

Le curve del sistema C_u ($u =$ costante) sono le generatrici, le curve del sistema C_k ($k =$ costante) sono linee parallele ed eguali alla direttrice, che si ottengono da questa con una traslazione, nella direzione r e di ampiezza k.

Se la direzione costante delle generatrici è quella dell'asse z, cioè se è $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, le (27) prendono la forma

$x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u) + k$. Dalle prime due eliminando u si ha una relazione della forma $F(xy) = 0$, e questa è appunto (n.° 455) l'equazione cartesiane di una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z.

471. Superfici coniche. La superficie conica è una rigata in cui tutte le generatrici passano per un punto proprio. Assumendo questo punto come origine di un sistema cartesiano di riferimento le equazioni delle generatrici saranno

$$x = kx_1, \quad y = ky_1, \quad z = kz_1$$

e, scrivendo che il punto $P_1(x_1 y_1 z_1)$ è sopra una determinata linea (*direttrice*)

$$x_1 = f(u), \quad y_1 = \varphi(u), \quad z_1 = \psi(u) \tag{28}$$

avremo le equazioni parametriche della superficie conica sotto la forma

$$x = kf(u), \quad y = k\varphi(u), \quad z = k\psi(u). \tag{29}$$

I sistemi di linee coordinate sono le generatrici ($u =$ costante) ed un sistema di curve omotetiche alla direttrice (curve $k =$ costante: la direttrice è la curva $k = 1$) essendo il vertice del cono centro di omotetia.

Dalle (29) si ha

$$\frac{x}{z} = \frac{f(u)}{\psi(u)},$$
$$\frac{y}{z} = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)};$$

da queste eliminando u, si ottiene una equazione della forma

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

ed è questa appunto (n.° 456) la equazione cartesiana di una superficie conica col vertice nella origine.

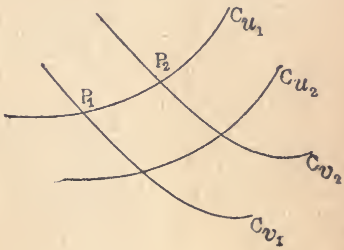
472. Superfici di traslazione. Supponiamo che le equazioni parametriche di una superficie esprimano le coordinate x, y, z, come somme di due funzioni, l'una del solo parametro u, l'altra del solo parametro v,

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v). \tag{30}$$

Se sopra due diverse linee C_{v_1}, C_{v_2} consideriamo i punti P_1, P_2 corrispondenti ad uno stesso valore di u, per le coordinate di tali punti si avrà:

$$(31)\qquad x_2 - x_1 = \varphi_1(v_2) - \varphi_2(v_1),\quad y_2 - y_1 = \varphi_2(v_2) - \varphi_2(v_1),$$
$$z_2 - z_1 = \varphi_3(v_2) - \varphi_3(v_1)$$

e, dal fatto che queste differenze sono indipendenti da u, ne viene che qualunque sia la curva C_u che incontra le date curve C_{v_1}, C_{v_2} nei punti P_1, P_2 il segmento P_1P_2 è costante in lunghezza, direzione e verso.



La curva C_{v_2} si ottiene dunque dalla C_{v_1} con la traslazione P_1P_2; ed, in generale, tutte le curve C_v si ottengono da una di esse con una traslazione continua, che faccia scorrere uno dei suoi punti lungo una curva C_u.

Le medesime considerazioni valgono per le curve del sistema C_u, rispetto a quella del sistema C_v: e da ciò si deduce che *la superficie è generabile in doppio modo per traslazione di una curva invariabile lungo una seconda curva pure invariabile.* Queste due curve mobili si dicono *generatrici* e la superficie vien detta di **traslazione**. Ponendo

$$x_1 = 2f_1(u)\quad y_1 = 2f_2(u)\quad z_1 = 2f_3(u)$$
$$x_2 = 2\varphi_1(v)\quad y_2 = 2\varphi_2(v)\quad z_2 = 2\varphi_3(v)$$

si hanno le equazioni di due curve C' e C'', per mezzo delle quali si può dare una nuova definizione della superficie.

Scrivendo le (30) sotto la forma

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

si vede che *la superficie di traslazione è il luogo dei punti medi dei segmenti che congiungono un punto qualunque della curva C' con un punto qualunque della curva C''.*

CAPITOLO II.

EQUAZIONE GENERALE DELLE QUADRICHE

§ I. Quadriche riducibili.

473. Le superficie algebriche del secondo ordine sono dette **quadriche**. La equazione di una quadrica è dunque del secondo grado nelle variabili x, y, z e si scrive nella sua forma generale

$$F(xyz) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$
$$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

od, in coordinate omogenee:

$$f(x_1x_2x_3x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

Con convenzione analoga a quella fatta nello studio delle coniche (n.° 241) supporremo, pei coefficienti di questa equazione, che sia

$$a_{nm} = a_{mn} \qquad (n, m = 1, 2, 3, 4).$$

Il primo membro di questa equazione, $f(x_1x_2x_3x_4)$, è una *forma quadratica* nelle 4 variabili $x_1x_2x_3x_4$.

474. Il determinante simmetrico formato coi coefficienti delle semiderivate parziali

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

si dice *discriminante della quadrica*, ed è anche il discriminante della forma quadratica quaternaria $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$.

475. QUADRICA PER 9 PUNTI. Nella equazione della quadrica compariscono 9 parametri essenziali, dunque la quadrica è determinata dalla condizione di passare per 9 punti, e date le coordinate di questi se ne potrà scrivere la equazione sotto forma di determinante al solito modo (v. per es. il n.° 252).

476. Indichiamo le *semiderivate parziali* coi medesimi simboli usati nello studio delle coniche ponendo:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_{x_1}'(x_1x_2x_3x_4) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ f_{x_2}'(x_1x_2x_3x_4) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ f_{x_3}'(x_1x_2x_3x_4) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ f_{x_4}'(x_1x_2x_3x_4) = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 . \end{cases}$$

Moltiplicando ordinatamente per x_1, x_2, x_3, x_4 e sommando si ha la formula

$$(2)\qquad \begin{gathered} x_1 f_{x_1}'(x_1x_2x_3x_4) + x_2 f_{x_2}'(x_1x_2x_3x_4) + x_3 f_{x_3}'(x_1x_2x_3x_4) + \\ + x_4 f_{x_4}'(x_1x_2x_3x_4) = f(x_1x_2x_3x_4). \end{gathered}$$

477. INTERSEZIONI DELLA QUADRICA $f(x_1x_2x_3x_4) = 0$ CON LA RETTA PER DUE DATI PUNTI $P_1(x_1'x_2'x_3'x_4')$, $P''(x_1''x_2''x_3''x_4'')$. Sostituendo nella $f = 0$, i valori di $x_1x_2x_2x_4$ dati dalle equazioni parametriche della retta (n.° 239, Vol. I, pag. 203)

$$(3)\qquad \begin{gathered} x_1 = hx_1' + x_1'', \quad x_2 = hx_2' + x_2'', \quad x_3 = hx_3' + x_3'', \\ x_4 = hx_4' + x_4'', \end{gathered}$$

con un procedimento analogo a quello tenuto al n.° 245 per la risoluzione di questo medesimo problema nello studio delle coniche, troveremo:

$$(4)\qquad \begin{cases} f(hx_1' + x_1'',\ hx_2' + x_2'',\ hx_3' + x_3'',\ hx_4' + x_4'') = \\ = h^2 f(x_1'x_2'x_3'x_4') + 2hf\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + f(x_1''x_2''x_3''x_4'') \end{cases}$$

nella qual formula si è posto

$$(5)\quad \begin{cases} f\begin{pmatrix}x'\\x''\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x''\\x'\end{pmatrix}=x_1'f_{x_1}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')+x_2'f_{x_2}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')+\\ \qquad +x_3'f_{x_3}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')+x_4'f_{x_4}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')=\\ \qquad =x_1''f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3'x_4')+x_2''f_{x_2}'(x_1'x_2'x_3'x_4')+\\ \qquad +x_3''f_{x_3}'(x_1'x_2'x_3'x_4')+x_4''f_{x_4}'(x_1'x_2'x_3'x_4'). \end{cases}$$

I punti che appartengono contemporaneamente alla retta $P'P''$ ed alla quadrica $f=0$ sono dunque quelli che, per mezzo delle (3), *corrispondono ai valori di h che sono radici della equazione di secondo grado:*

$$(6)\qquad h^2f(x_1'x_2'x_3'x_4')+2hf\begin{pmatrix}x'\\x''\end{pmatrix}+f(x_1''x_2''x_3''x_4'')=0.$$

478. *Se in questa equazione tutti i coefficienti sono nulli, cioè se:*

$$f(x_1'x_2'x_3'x_4')=0,\quad f\begin{pmatrix}x'\\x''\end{pmatrix}=0,\quad f(x_1''x_2''x_3''x_4'')=0,$$

essa è identicamente soddisfatta da tutti i valori di h, cioè dalle coordinate di tutti i punti della retta $P'P''$, *e questa retta appartiene alla quadrica.*

Se la (6) *è soddisfatta da più di due valori distinti di h* (cioè se più di due punti della $P'P''$ sono sulla quadrica), *la equazione medesima è identicamente soddisfatta,* tutti i suoi coefficienti sono nulli, e la *retta $P'P''$ appartiene alla quadrica.*

Avvertenza. Nel seguito, per brevità di scrittura, quando ciò non potrà dar luogo ad equivoco, scriveremo brevemente

$$\begin{array}{lccl} f(x), & \text{invece} & \text{di} & f(x_1x_2x_3x_4) \\ f_{x_1}'(x), & » & » & f_{x_1}'(x_1x_2x_3x_4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_4}'(x), & » & » & f_{x_4}'(x_1x_2x_3x_4). \end{array}$$

479. Quadriche riducibili. Consideriamo il caso in cui *si annulla il discriminante della quadrica*

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0,$$

le quadriche per le quali è soddisfatta una tale condizione offrono speciali particolarità che importa esaminare.

La caratteristica del determinante A potrà essere 3, 2 od 1.

480. Se la *caratteristica è* 3, ciò significa che delle quattro equazioni omogenee

$$(7)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \end{cases}$$

una è conseguenza delle altre tre, e queste servono a definire (a meno di un fattore di proporzionalità) un sistema di valori $x_1'x_2'x_3'x_4'$, cioè determinano un punto $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$ pel quale sono identicamente soddisfatte le (7), cioè le

$$(8)\qquad f_{x_1}'(x_1'x_2'x_3'x_4') = 0,\quad f_{x_2}'(x') = 0,\quad f_{x_3}'(x') = 0,\quad f_{x_4}'(x') = 0.$$

Per la formula (2) avremo ancora

$$f(x_1'x_2'x_3'x_4') = 0;$$

ciò significa che il punto P' è sulla quadrica.

Preso un secondo punto qualsivoglia P'' pure appartenente alla quadrica, tale cioè che sia

$$f(x_1''x_2''x_3''x_4'') = 0,$$

in forza delle (7) sarà ancora $f\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = 0$; troveremo allora che tutti i coefficienti della equazione (6) relativa alla retta P', P'' sono identicamente nulli, dunque (n.° 478) che tutti i punti di questa retta appartengono alla quadrica. E, siccome P'' è un punto qualunque della quadrica, *questa si ridurrà ad un* **cono col vertice nel punto** *P'.*

In particolare, e *come caso limite del cono, si avrà un* **cilindro,** *se P' sarà un punto improprio*, cioè se troveremo $x_4' = 0$.

Tali coni (o cilindri) del 2.° ordine si dicono **coni (o cilindri) quadrici.**

Se la equazione della quadrica è omogenea nelle $x_1x_2x_3$, cioè se è $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{34} = 0$ il cono quadrico ha il vertice nell' origine (n.° 456).

Ciò segue da quanto è stato detto in generale al n.° 456 ed anche, direttamente, dal fatto che il sistema (7) in tale supposizione ammette la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

481. Supponiamo ora che *la caratteristica di A sia* 2. Due sole delle equazioni (7) saranno indipendenti, siano queste

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 : \end{cases}$$

esse rappresentano una retta r' dello spazio. Per ogni punto di questa valgono le considerazioni fatte al N.° precedente pel punto P'; dunque tutta la retta r' apparterrà alla quadrica, e preso un punto qualunque P'' appartenente alla quadrica e situato fuor della retta r', troveremo che anche tutta la retta $P'P''$ (dove P' è un punto qualunque di r') appartiene alla quadrica.

Ciò prova che *tutto il piano determinato da P'' e da r' appartiene alla quadrica.*

Preso ora un punto qualsivoglia P''' della quadrica, situato fuor di questo piano, vediamo che anche il piano (P''', r') appartiene alla quadrica; *questa dunque* **degenera in due piani** *passanti per la retta r determinata dalle* (7).

482. Finalmente, *se la caratteristica di A è* 1, tre delle equazioni (7) sono conseguenza della rimanente, e questa d'altra parte rappresenta un piano, per ogni punto del quale valgono le considerazioni fatte al 480 pel vertice P'.

La quadrica si riduce allora a quel piano, contato due volte.

Concludiamo dunque che *quando il discriminante A è nullo, la quadrica è riducibile* (degenere) *e che il cono, la coppia di piani ed il piano doppio sono i tre successivi gradi di degenerazione.*

§ II. Cono circoscritto, piano tangente.

483. *L'intersezione della quadrica con un piano è una conica.*

Ed infatti, assumendo il piano secante come uno dei piani coordinati, per es. come piano xy, avremo la equazione della della curva sezione facendo nella $F(xyz) = 0$, $z = 0$; si trova così

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0,$$

e questa è appunto la equazione di una conica. La quale, poi, potrà essere reale od immaginaria; non degenere, o degenere.

484. Cono circoscritto alla quadrica da un punto. La condizione perchè la retta $P'P''$ risulti tangente alla quadrica è che la equazione (6), che serve a determinare le sue intersezioni con la quadrica, abbia una radice doppia; perciò occorre e basta che si abbia:

$$(9)\qquad f(x_1'x_2'x_3'x_4')\cdot f(x_1''x_2''x_3''x_4'') - \left\{ f\binom{x'}{x''} \right\}^2 = 0.$$

Se consideriamo il punto P'' come dato, ed il punto P' come punto generico dello spazio, la formula (9) esprime la condizione cui devono soddisfare le coordinate di tutti i punti che congiunti con P'' danno luogo ad una retta tangente alla quadrica.

Scrivendo $x_1x_2x_3x_4$, in luogo di $x_1'x_2'x_3'x_4'$ avremo la equazione del luogo di questi punti sotto la forma:

$$(10)\qquad f(x_1x_2x_3x_4)\cdot f(x_1''x_2''x_3''x_4'') - \left\{ f\binom{x}{x''} \right\}^2 = 0$$

e poichè questa è del 2.° grado, il luogo cercato sarà una quadrica; più precisamente, un cono quadrico col vertice in P'', poichè se un punto P' appartiene al luogo, anche tutti i punti della retta $P''P'$ vi appartengono.

La (10) è dunque *la equazione del* **cono circoscritto** *alla quadrica, col vertice nel punto dato P''.* Tale cono potrà essere reale o immaginario: se P'' non è sulla quadrica, si dice che P'' è *esterno* o *interno* ad essa secondochè il cono circoscritto da esso alla quadrica è reale o immaginario.

485. Piano tangente in un punto P'' della quadrica. Se supponiamo che il punto P'' sia sulla quadrica, il cono tangente degenera in un piano. Ed infatti: la equazione (10), quando in essa si faccia $f(x_1''x_2''x_3''x_4'') = 0$, si riduce alla

$$(11)\qquad f\binom{x}{x''} = f_{x_1}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')x_1 + f_{x_2}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')x_2 + \\ + f_{x_3}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')x_3 + f_{x_4}'(x_1''x_2''x_3''x_4'')x_4 = 0.$$

Questa è la equazione di un piano passante per P''.

Tutti e soli i punti di questo piano, congiunti con P'' determinano rette tangenti alla quadrica in P''. Questo piano è detto *piano tangente alla quadrica nel punto P''*.

L' equazione del piano tangente può scriversi anche:

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x=x''} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x=x''} x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{x=x''} x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_{x=x''} x_4 = 0.$$

Scrivendo per esteso:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &(a_{11}x_1'' + a_{12}x_2'' + a_{13}x_3'' + a_{14}x_4'')x_1 + \\ &+ (a_{21}x_1'' + a_{22}x_2'' + a_{23}x_3'' + a_{24}x_4'')x_2 + \\ &+ (a_{31}x_1'' + a_{32}x_2'' + a_{33}x_3'' + a_{34}x_4'')x_3 + \\ &+ (a_{41}x_1'' + a_{42}x_2'' + a_{43}x_3'' + a_{44}x_4'')x_4 = 0. \end{aligned}$$

Od, in coordinate non omogenee,

$$(14) \quad (a_{11}x'' + a_{12}y'' + a_{13}z'' + a_{14})x + (a_{21}x'' + a_{22}y'' + a_{23}z'' + a_{24})y + \\ + (a_{31}x'' + a_{32}y'' + a_{33}z'' + a_{34})z + (a_{41}x'' + a_{42}y'' + a_{43}z'' + a_{44}) = 0.$$

486. Dimostriamo ora che *il piano tangente sega la quadrica in una conica, degenere in una coppia di rette, che si incontrano nel punto di contatto del piano con la quadrica:* e, inversamente, che *se un piano incontra una quadrica secondo una coppia di rette, esso è tangente alla quadrica nel loro punto comune.*

Per la prima parte si consideri che, indicando sempre con P'' il punto di contatto, e con P' un punto qualsiasi della conica, sezione del piano tangente con la quadrica, poichè i punti P', P'' appartengono alla quadrica si ha

$$f(x') = 0, \quad f(x'') = 0$$

e poichè il punto P' appartiene al piano tangente in P'', per la (11) si avrà anche

$$f\binom{x'}{x''} = 0.$$

Tutti i coefficienti della equazione (6) sono dunque nulli, e la retta $P'P''$ appartiene alla quadrica (n.° 478). Ma questa retta appartiene anche al piano tangente (i punti $P'P''$ sono in questo piano) dunque essa appartiene alla intersezione della quadrica col piano tangente.

Questa intersezione, che sappiamo essere una conica, contenendo la retta $P'P''$ si spezza in una coppia di rette $r'r''$ uscenti dal punto di contatto P''.

Per la seconda parte del nostro enunciato, supponiamo che un piano π incontri la quadrica secondo una coppia di rette $r'r''$, che si incontrino nel punto (proprio od improprio) P''.

Consideriamo due altri punti P', P''' rispettivamente su le r', r''': poichè i punti P', P'', P''' sono sulle rette r', r''', che appartengono alla quadrica, avremo (n.° 478).

$$\begin{cases} f(x') = 0, \quad f(x'') = 0, \quad f(x''') = 0 \\ f\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = 0, \quad f\begin{pmatrix} x''' \\ x'' \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ma le $f\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = 0$, $f\begin{pmatrix} x''' \\ x'' \end{pmatrix} = 0$ ci dicono che i punti P', P''' sono nel piano tangente in P'' alla quadrica, questo dunque contiene le rette $P'P''$, $P''P'''$; cioè è il piano π considerato.

487. Osservazione. Se il piano tangente π oltre alle rette r', r'' avesse in comune con la quadrica un altro punto P''', non appartenente a quelle rette, tutto il piano tangente apparterrebbe alla quadrica, e questa si spezzerebbe in una coppia di piani.

Ed infatti qualunque retta per P''' del piano π, incontrando le r', r'' in due punti P^{IV}, P^{V} della quadrica, avrebbe tre punti P''', P^{IV}, P^{V}, a comune con la quadrica ed apparterrebbe ad essa.

Osserveremo ancora che non è in generale possibile nemmeno che da uno stesso punto escano tre rette distinte r', r'', r''' non complanari, appartenenti alla quadrica. Perchè, in tale ipotesi, si avrebbero in quel punto (appartenente alla quadrica) tre piani distinti, tangenti alla quadrica, mentre, in generale, non se ne ha che uno solo, dato dalla equazione (12). Fa eccezione solamente il caso che la quadrica sia un cono e che quel punto ne sia il vertice.

Dunque *una quadrica irreducibile non può appartenere a tre rette uscenti da uno stesso punto.*

488. Risulta dalla proposizione dimostrata al n.° 477, che *per ogni punto P della quadrica passano sempre due rette (reali*

od immaginarie) appartenenti alla quadrica, ed in generale due sole, (a meno che la quadrica non si spezzi in due piani o non sia un cono col vertice in quel punto).

Se per una retta qualunque appartenente alla quadrica si conduce un piano, questo interseca la quadrica in una seconda retta, ed è tangente alla quadrica nel punto dove queste due rette si incontrano.

§ III. Quadriche a punti ellittici, iperbolici, parabolici.

489. Abbiamo visto da ogni punto P'' della quadrica escono due rette appartenenti alla quadrica, rappresentate dal sistema

$$f(x) = 0, \quad f\binom{x}{x''} = 0.$$

Se la quadrica è reale tali rette saranno, od entrambe reali e distinte, o reali e coincidenti, ovvero immaginarie coniugate. Nel primo caso il punto viene detto **iperbolico**, nel secondo **parabolico**, nel terzo **ellittico**.

Dimostreremo che *tutti i punti di una stessa quadrica sono della stessa specie, cioè o tutti iperbolici, o tutti parabolici, o tutti ellittici.*

Per maggior semplicità useremo coordinate cartesiane non omogenee, e ci riferiremo ad un sistema con la origine nel punto P'' che vogliamo considerare, ed assumeremo come piano xy il piano tangente in P'' alla quadrica.

Escludiamo il caso che la quadrica sia un cono col vertice nel punto P''. Essendo P'' origine delle coordinate sarà $x'' = y'' = z'' = 0$, e perciò la equazione del piano tangente in P'' alla quadrica sarà (formula (14))

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Ma questa equazione deve ridursi a quella del piano xy, cioè a $z = 0$, perciò dovremo avere

$$a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0,$$

e *non potrà essere anche* $a_{34} = 0$ perchè altrimenti la equazione della quadrica sarebbe omogenea nelle x, y, z e rappresenterebbe un cono col vertice nella origine P'', contro il supposto.

La equazione della quadrica avrà dunque la forma

$$(15)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0.$$

Segando col piano $z = 0$, otteniamo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

che rappresenta una coppia di rette per la origine; risolvendo questa rispetto ad x troviamo per la rappresentazione analitica di tali rette sul piano xy, le equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x + (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})y = 0 \\ a_{11}x + (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})y = 0. \end{cases}$$

Vediamo dunque che tali rette sono

reali e distinte	(punto iperbolico)	se $a^2_{12} - a_{11}a_{22} > 0$
reali e coincidenti	(punto parabolico)	se $a^2_{12} - a_{11}a_{22} = 0$
immaginarie	(punto ellittico)	se $a^2_{12} - a_{11}a_{22} < 0$

Ma calcolando il discriminante della (15) troviamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = a_{34}^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$$

dunque, ricordando che nelle nostre ipotesi è $a_{34} \neq 0$, vediamo che *il segno del discriminante della quadrica è quello che determina la specie del punto P''.*

D'altra parte è noto che il *discriminante non muta per trasformazioni ortogonali* [1], perciò, in particolare, il suo segno

[1] Questo si vede facilmente osservando che, posto

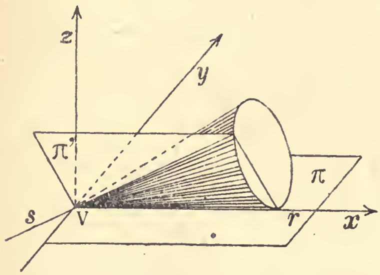
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{14}x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_4 = a_{41}x_1 + \dots + a_{44}x_4 \end{cases}$$

o brevemente $y = S(x)$, per le formule (2) si ha

$$f = y_1x_1 + \dots + y_4x_4.$$

rimarrà lo stesso qualunque sia il punto P'' della quadrica, rispetto al quale si sono fatte le precedenti riflessioni: dunque in fine, vediamo che ***tutti i punti della quadrica sono della stessa specie, e precisamente iperbolici, parabolici od ellittici, secondo che il discriminante A è positivo, nullo o negativo.***

490. *Le sole quadriche a punti parabolici sono i coni (o cilindri).* Ed infatti, se un punto P della quadrica è parabolico, il piano π tangente in P; sega la quadrica secondo due rette reali e coincidenti cioè secondo una retta $r \equiv r' \equiv r''$, e perciò è tangente alla quadrica in ogni punto di una tale retta.



Se ora facciamo passare per r un altro piano π' diverso da π, questo incontrerà la quadrica in una seconda retta s (diversa da r) e sarà tangente alla quadrica nel punto V dove le rette r ed s si incontrano (n.° 488).

Ma anche il piano π è tangente in V alla quadrica, dunque la quadrica ammette in V due piani tangenti ed è quindi un cono col vertice in V (n. 487) e la retta r è una sua generatrice.

Se ora eseguiamo una trasformazione (ortogonale)

$$\begin{cases} x_1 = C_{11}X_1 + \dots + C_{14}X_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{44} = C_{41}X_1 + \dots + C_{44}X_4, \end{cases}$$

che indicheremo scrivendo $x = S_1(X)$, ne verrà

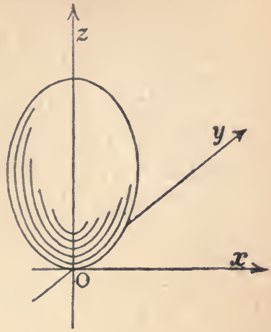
$$y = SS_1(X)$$

$$f = Y_1X_1 + \dots + Y_4X_4, \quad \text{con} \quad Y = SS_1{}^2X.$$

Il discriminante della f nelle X è dunque eguale al prodotto del determinante A delle S, pel quadrato del determinante della S_1 (vedi n.° 162, Vol. I, pag. 136).

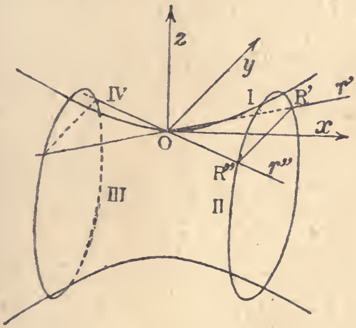
Ma quest' ultima è una trasformazione ortogonale, il cui modulo è ± 1; il quadrato di questo è dunque 1, e perciò A rimane invariato.

491. In una quadrica a punti ellittici il piano tangente in uno dei suoi punti ha questo solo punto (reale) in comune con la quadrica, e la quadrica non può attraversare il piano tangente. Perciò vi è almeno una porzione (o falda) della superficie che è tutta dalla stessa parte del piano tangente. Potrà accadere, peraltro, che la superficie possegga anche una seconda falda, che dovrà allora giacere interamente dall'altra parte rispetto a tale piano.



Questo caso si presenta, come vedremo, per l'iperboloide a due falde.

492. Se la quadrica è a punti iperbolici il piano tangente in un punto O taglia la quadrica secondo due generatrici reali per O, r', r''; e *qualunque piano dello spazio sega la quadrica secondo una conica reale,* poichè esso ha un punto comune reale (proprio od improprio) con ogni retta della quadrica.



Se consideriamo i punti R', R'' dove una tale conica incontra le due generatrici r', r'', vedremo che in questi punti la conica attraversa il piano tangente $r'r''$: dunque nelle vicinanze del punto O le generatrici r', r'' dividono la superficie in quattro settori, che, successivamente, sono posti da bande opposte rispetto al piano tangente; di qui si vede che, in ogni suo punto O la quadrica ha forma concavo-convessa, o, come suol dirsi, di sella.

CAPITOLO III.

POLARITÀ DEFINITA DA UNA QUADRICA

§ I. Poli e piani polari.

493. *Due punti $P'P''$ si dicono* **coniugati** *rispetto ad una quadrica, se il segmento PP'' è diviso armonicamente dai punti A, B, di intersezione della retta $P'P''$ con la quadrica.* Questa definizione è la stessa che fu data per punti coniugati rispetto ad una conica al n.° 260: con lo stesso procedimento colà seguito, troveremo che la **condizione di coniugio** per i punti $P'P''$ è espressa dalla equazione

$$(1)\quad f\begin{pmatrix}x'\\x''\end{pmatrix}=x_1'f_{x_1}'(x'')+x_2'f_{x_2}'(x'')+x_3'f_{x_3}'(x'')+x_4'f_{x_4}'(x'')=0.$$

494. *Sopra ogni retta dello spazio esistono infinite coppie di punti coniugati, le quali costituiscono una* **involuzione** *che ha per punti doppi i punti di incontro di una tale retta con la quadrica* (n.° 265). Tale involuzione sarà dunque iperbolica se la retta attraversa la quadrica, ellittica se è esterna, parabolica (e quindi degenere) se è tangente alla quadrica.

Se consideriamo le infinite rette della stella che ha per centro P'', sopra ognuna di queste potremo determinare il punto P, coniugato di P'' rispetto alla quadrica.

Le coordinate di questi punti $P(x_1x_2x_3x_4)$ soddisfano tutte alla condizione di coniugio:

$$(2)\quad \begin{aligned}&(a_{11}x_1''+a_{12}x_2''+a_{13}x_3''+a_{14}x_4'')x_1+\\+&(a_{21}x_1''+a_{22}x_2''+a_{23}x_3''+a_{24}x_4'')x_2+\\+&(a_{31}x_1''+a_{32}x_2''+a_{33}x_3''+a_{34}x_4'')x_3+\\+&(a_{41}x_1''+a_{42}x_2''+a_{43}x_3''+a_{44}x_4'')x_4=0\end{aligned}$$

questa, che scriveremo brevemente

(2') $$f\binom{x}{x''}=0$$

oppure

(2'') $$x_1 f_{x_1}'(x'') + x_2 f_{x_2}'(x'') + x_2 f_{x_3}'(x'') + x_4 f_{x_4}'(x'') = 0,$$

è la equazione di un piano π''.

Dunque il luogo dei punti coniugati di P'' rispetto alla quadrica è il piano π'' rappresentato dalla equazione (2), detto **piano polare** *di P'' rispetto alla quadrica.*

Il punto P'' è detto **polo** del piano π''.

Confrontando la equazione (2) con la (13) trovata al n.° 485 pel piano tangente, vediamo che se P'' è sulla quadrica, il suo piano polare è il piano tangente in P'' alla quadrica stessa; cioè che: *il piano polare di un punto appartenente alla quadrica è tangente alla quadrica in quel punto:* e reciprocamente*: Se un punto P'' appartiene al suo piano polare, è sulla quadrica, ed il piano polare è tangente alla quadrica nel punto P''.*

495. Abbiamo visto al n.° 484 che la equazione del *cono circoscritto* alla quadrica, avente il vertice in un dato punto P'' dello spazio, ha la forma

(3) $$f(x)f(x'') - \left\{ f\binom{x}{x''} \right\}^2 = 0.$$

Se consideriamo il punto $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$ dove una retta uscente da P'' tocca la quadrica, questo punto soddisfa la (3), perchè appartiene al cono circoscritto; inoltre soddisfa la $f(x)=0$, perchè appartiene alla quadrica, dunque le coordinate di un tal punto soddisfano la condizione

$$f\binom{x'}{x''}=0.$$

Ma questa è la condizione di coniugio dei due punti P', P'', dunque il punto P' si trova nel piano π'' polare di P'' rispetto alla quadrica. Abbiamo quindi il teorema:

Il luogo dei punti di contatto delle generatrici del cono circoscritto alla quadrica da un dato punto, è la conica secondo cui il piano polare (di tale punto, vertice del cono), taglia la quadrica.

Questa conica risulta reale se il vertice P_2 è *esterno*, immaginaria se *interno*; degenere, se il punto P_2 è sulla quadrica (infatti il suo piano polare risulta tangente alla quadrica) (n.° 484). E, inversamente, ***secondo che la conica di contatto è reale e non degenere, immaginaria, degenere, il punto P_2 è esterno, interno, od appartiene alla quadrica.***

A questo proposito, peraltro, è bene osservare che nelle quadriche a punti iperbolici ogni sezione è reale, ed il cono circoscritto è sempre reale qualunque sia il suo vertice; ***tutti i punti dello spazio sono dunque da considerare come esterni ad una quadrica a punti iperbolici; mentre le quadriche a punti ellittici o parabolici dividono lo spazio in due regioni, l'una interna e l'altra esterna alla quadrica.***

§ 2. Polarità definita da una quadrica.

496. Data una quadrica $f(x_1x_2x_3x_4)=0$, ad ogni punto P'' dello spazio rimane coordinato un piano π, che è il piano polare di P''. Vedremo ora che se la quadrica non è riducibile, cioè se $A \neq 0$ (n.° 479), ad ogni piano π'' dato mediante le sue coordinate ξ_1'', ξ_2'', ξ_3'', ξ_4'' (n.° 239, Vol. I, pag. 201) corrisponde un punto P'', polo di π.

Ed infatti, dato il punto P'' rimangono determinate le coordinate del suo piano polare (formula (2)) mediante le formule

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi_1''=a_{11}x_1''+a_{12}x_2''+a_{13}x_3''+a_{14}x_4'' \\ \xi_2''=a_{21}x_1''+a_{22}x_2''+a_{23}x_3''+a_{24}x_4'' \\ \xi_3''=a_{31}x_1''+a_{32}x_2''+a_{33}x_3''+a_{34}x_4'' \\ \xi_4''=a_{41}x_1''+a_{42}x_2''+a_{43}x_3''+a_{44}x_4''. \end{cases}$$

Da queste, se $A \neq 0$, quando si suppongono date le ξ'' si ricaveranno le x'' mediante la sostituzione inversa:

$$(5)\qquad \begin{cases} Ax_1''=A_{11}\xi_1''+A_{21}\xi_2''+A_{31}\xi_3''+A_{41}\xi_4'' \\ Ax_2''=A_{12}\xi_1''+A_{22}\xi_2''+A_{32}\xi_3''+A_{42}\xi_4'' \\ Ax_3''=A_{13}\xi_1''+A_{23}\xi_2''+A_{33}\xi_3''+A_{43}\xi_4'' \\ Ax_4''=A_{14}\xi_1''+A_{24}\xi_2''+A_{34}\xi_3''+A_{44}\xi_4'' \end{cases}$$

dove A_{rs} è il minore complementare di a_{rs} nel determinante A e quindi è, per ogni coppia di indici r, s, $A_{rs}=A_{sr}$ (n.° 473).

Così rimane determinato in modo unico il polo P'' del piano dato π''.

Le equazioni (4), (5) definiscono una **polarità** (n.° 449, Vol. I, pag. 372).

Concludiamo quindi che: *una quadrica irriducibile stabilisce una corrispondenza (polarità) fra i punti ed i piani dello spazio, per la quale ad ogni punto corrisponde un piano (piano polare) e ad ogni piano un punto (polo).*

I punti della quadrica appartengono al loro proprio piano polare.

I piani tangenti alla quadrica appartengono al loro polo.

Dalla forma lineare delle equazioni (4), (5), che definiscono la polarità, si deduce ancora che: *Se un punto descrive una punteggiata, il suo piano polare descrive un fascio proiettivo alla punteggiata, e reciprocamente* (n.° 447).

Se un punto P appartiene ad un piano π', il piano polare π di P appartiene al polo P' di π' (**legge di reciprocità**).

Se due punti P', P'' sono coniugati rispetto alla quadrica, ciascuno di essi appartiene al piano polare dell'altro, e reciprocamente.

E, con le stesse riflessioni fatte nello studio delle coniche al n.° 265, (Vol. I, pag. 229), dimostreremo che *la quadrica induce sopra ogni retta dello spazio una involuzione, nella quale sono punti doppi le intersezioni di tale retta con la quadrica; e, sopra ogni fascio di piani, una involuzione nella quale sono elementi doppi i piani tangenti alla quadrica.*

497. *Due piani π', π'' si dicono* **coniugati** *rispetto ad una quadrica, se ciascuno di essi appartiene al polo dell'altro.*

Indicando con P', P'' i poli rispettivi dei piani dati, *la condizione di coniugio* sarà data dalla condizione di appartenenza di P'' a π',

$$\xi_1' x_1'' + \xi_2' x_2'' + \xi_3' x_3'' + \xi_4' x_4'' = 0,$$

cioè, per le formule (5),

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &(A_{11}\xi_1'' + A_{12}\xi_2'' + A_{13}\xi_3'' + A_{14}\xi_4'')\xi_1' + \\ &+ (A_{21}\xi_1'' + A_{22}\xi_2'' + A_{23}\xi_3'' + A_{24}\xi_4'')\xi_2' + \\ &+ (A_{31}\xi_1'' + A_{32}\xi_2'' + A_{33}\xi_3'' + A_{34}\xi_4'')\xi_3' + \\ &+ (A_{41}\xi_1'' + A_{42}\xi_2'' + A_{43}\xi_3'' + A_{44}\xi_4'')\xi_4' = 0. \end{aligned}\right.$$

Se un piano coincide col suo coniugato appartiene al proprio polo, cioè è tangente alla quadrica, e reciprocamente, ogni piano tangente coincide col proprio coniugato.

498. Inviluppi di seconda classe. La condizione, per un piano generico $\pi(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)$, di essere tangente alla quadrica, viene data perciò dalla (6), nella quale si supponga $\pi' = \pi'' = \pi$, ed è della forma

$$(7)\qquad A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + A_{44}\xi_4^2 + \\ + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\xi_3\xi_4 = 0;$$

questa dunque è la *equazione della quadrica considerata come inviluppo di piani, o, in altri termini, è la equazione tangenziale (o plückeriana) della quadrica.*

Poichè essa è di secondo grado, ne dedurremo che *i piani tangenti ad una quadrica costituiscono un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe.*

499. Inviluppi di seconda classe degeneri. Il discriminante della forma (7) è legato, come è noto, a quello della $f(x_1x_2x_3x_4) = 0$ dalla relazione

$$\begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{14} \\ \dots\dots \\ A_{41} \dots A_{44} \end{vmatrix} = A^3;$$

questi due discriminanti dunque sono insieme nulli o diversi da zero. In una quadrica inviluppo data a priori, e degenere, la caratteristica del discriminante può essere 3, 2, 1.

Se la caratteristica è 3 l'inviluppo è *l'ente duale di un cono*; cioè un inviluppo composto degli infiniti piani che passano per le infinite tangenti ad una conica. (Il cono è considerato come costituito dalle infinite punteggiate i cui sostegni proiettano da un punto, esterno al suo piano, gli infiniti punti di una conica).

Un tale inviluppo vien detto **quadrica limite** perchè si considera come l'ente in cui degenera l'inviluppo dei piani tangenti ad una quadrica, quando si immagina che la quadrica si appiattisca, fino a ricoprire in doppio modo la porzione di piano interna (od esterna) ad una conica.

Se la caratteristica è 2 l'inviluppo degenere si scinde in due stelle di piani: vien detto **coppia di punti** (dei centri di tali stelle).

Se la caratteristica è **1** le due stelle coincidono e l'inviluppo degenera in un **punto doppio** (contato due volte).

§ III. Polari reciproche.

500. Abbiamo già osservato (n.º 496) che, nella polarità determinata da una quadrica, i piani polari dei punti di una retta r', costituiscono un fascio avente per asse una seconda retta r''. Si vede facilmente che i piani polari di punti allineati su r'' formano un fascio avente per asse r'; e ciò perchè due punti qualsivogliano P', P'' presi, rispettivamente, su r' e su r'' sono coniugati rispetto alla quadrica.

Per questa ragione due rette, come r', r'' delle quali ciascuna sia asse del fascio di piani polari rispetto alla quadrica, dei punti dell'altra, si dicono *rette* **polari reciproche** o *rette* **coniugate.**

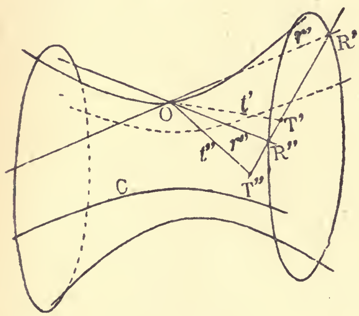
501. Due rette coniugate sono, in generale, sghembe. Quelle coppie t', t'' che risultano complanari, hanno un punto comune O (proprio od improprio) *il quale deve appartenere al suo piano polare.* Infatti essendo O su t', il suo piano polare deve contenere t'' e quindi O. E, similmente, il piano π di tali rette deve *appartenere al suo polo*: questo polo sarà dunque il punto O comune alle due rette. Esso perciò apparterrà alla quadrica, il piano π sarà tangente alla quadrica, ed anche le rette t', t'' saranno tangenti alla quadrica nel punto O.

Sono esse dunque due *tangenti coniugate.* Si vede che, reciprocamente, *ad ogni tangente alla quadrica in un punto O è coniugata una seconda retta t'', tangente alla quadrica nel medesimo punto*: poichè ai punti di t' debbono corrispondere i piani di un fascio avente per asse una retta per O.

502. *Le infinite coppie di tangenti coniugate t', t'' in un punto O della quadrica formano una involuzione i cui raggi doppi sono le due generatrici della quadrica per O.*

Si dimostra che le coppie t', t'' formano una involuzione osservando che esse sono incontrate da qualunque retta del piano π in coppie di punti $T'T''$, coniugati rispetto alla quadrica (n.° 496).

Se poi indichiamo con r' una retta doppia della involuzione delle tangenti coniugate ogni punto di essa dovrà appartenere al suo piano polare, cioè sarà punto della quadrica: essa quindi sarà una retta appartenente alla quadrica, e precisamente una delle due generatrici secondo cui il piano tangente π taglia la quadrica.



L' altra generatrice sarà l'altra retta doppia r''. Naturalmente queste generatrici saranno reali od immaginarie secondo che la quadrica sarà a punti iperbolici od a punti ellittici.

Dunque la involuzione delle tangenti coniugate in un punto della quadrica, è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che il punto stesso è iperbolico, parabolico od ellittico.

Abbiamo anche che, se una retta appartiene ad una quadrica, anche la sua coniugata le appartiene.

503. Sia O un punto della quadrica: se immaginiamo condotto un piano qualunque π' parallelo al piano π tangente in O alla quadrica, esso incontrerà la quadrica secondo una conica C che vien detta **indicatrice** ***di Dupin***, relativa al punto O della quadrica. I punti improprii di questa conica saranno i punti improprii delle generatrici r', r''; queste dunque segnano le direzioni assintotiche della indicatrice C.

Ogni coppia di tangenti coniugate è parallela ad una coppia di diametri coniugati di C. Fra le infinite coppie di tangenti coniugate in O ve ne è in generale una sola ortogonale, che è parallela agli assi della indicatrice C. Le direzioni di queste tangenti coniugate ed ortogonali per O, si dicono **direzioni principali** della quadrica relative al punto O.

Al variare del piano secante π', variano le coniche sezioni C. Ma queste, avendo gli stessi punti improprii, rimangono sempre della stessa specie; vedremo a suo luogo che esse sono coniche simili e similmente disposte.

504. Ombelichi. Se la indicatrice è un cerchio, la involuzione delle tangenti coniugate per O è quella degli angoli retti, e reciprocamente:

Se il punto O della quadrica è tale che per esso la involuzione delle tangenti coniugate risulti ortogonale, tutte le sezioni fatte nella quadrica con piani paralleli al piano tangente in O sono cerchi.

Il punto O è, in tal caso, detto **punto circolare** od **ombelico** della quadrica.

505. Piani tangenti alla quadrica per una retta. Se una retta r' non appartiene alla quadrica, nemmeno la retta sua coniugata r'' apparterrà alla superficie; la r'' incontrerà questa in due punti P, Q.

Se consideriamo ora un piano π uscente da r', tangente alla quadrica, vediamo che il suo punto di contatto, essendo polo dello stesso π, deve appartenere ad r'', cioè è uno dei due punti P, Q.

Reciprocamente un piano per r' e per uno di questi due punti appartiene al suo polo ed è quindi tangente alla quadrica.

Concludiamo dunque che: *per una retta, non appartenente ad una quadrica, si possono condurre due piani tangenti ad essa, ed i punti di contatto sono le intersezioni con la quadrica della retta coniugata alla data.*

CAPITOLO IV.

PROPRIETÀ DIAMETRALI DELLE QUADRICHE

§ I. Classificazione metrica delle quadriche.

506. Segando la quadrica col piano improprio si trova una conica C_∞ di equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

La C_∞ può essere reale od immaginaria, degenere o no, e da ciò si distinguono le varie specie di quadriche.

Consideriamo anzitutto *quadriche non riducibili.*

507. I. Se la conica C_∞ *è immaginaria non degenere*, la quadrica non ha nessun punto all'infinito, le sezioni di essa con piani sono ellissi reali od immaginarie, ed essa ha il nome di **ellissoide.** Se l'ellissoide è reale, esso è una quadrica a punti ellittici, perciò il suo discriminante A è negativo (n.° 489). Inversamente, se $A < 0$ l'ellissoide è reale, (come mostreremo in seguito), e se $A > 0$ è immaginario.

II. Se la conica C_∞ è *reale non degenere*, la quadrica è certamente reale, le sezioni di essa con piani sono ellissi se la traccia del piano secante nel piano improprio è esterna alla C_∞, parabole se tangente alla C_∞, iperboli se taglia la C_∞ in due punti reali. La quadrica è detta **iperboloide**, è a punti ellittici (iperboloide a due falde) se $A < 0$, od a punti iperbolici (iperboloide ad una falda o rigato) se $A > 0$.

III. Se la conica C_∞ *è degenere*, essa può spezzarsi o in due rette *immaginarie coniugate, o in due rette reali.* Nel primo caso la quadrica è *a punti ellittici* ($A < 0$) e vien detta: **paraboloide ellittico,** le sezioni fatte in questa quadrica con piani sono in generale ellissi, esse sono parabole solo se il piano secante appartiene alla stella che ha per centro il punto (improprio), intersezione delle rette nelle quali degenera C_∞.

Se la C_∞ è costituita da una coppia di rette *reali e distinte*, la quadrica è a *punti iperbolici* ($A > 0$) ed è detta **paraboloide iperbolico o paraboloide rigato.**

Le sezioni piane di questa quadrica sono in generale iperboli, sono parabole per quei piani che appartengono alla stella che ha per centro il punto di incontro delle rette di C_∞.

Se infine, la C_∞ si *spezza in due rette coincidenti*, la quadrica è a punti *parabolici*, cioè è *un* **cono** (più propriamente *un* **cilindro**). Si tratterà in ogni modo di quadriche riducibili, che noi esamineremo più partitamente nel n.° seguente.

Si vede infatti, che in tale ipotesi si ha $A = 0$, poichè essa importa che il discriminante A_{44} della C_∞ abbia caratteristica 1 (n.° 248, Vol. I, pag. 214); cioè che due delle sue linee siano funzioni lineari omogenee della rimanente: dunque questo determinante, con operazioni razionali su linee, assume la forma

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Le medesime operazioni eseguite sul determinante A, riducono questo nel determinante evidentemente nullo

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Prescindendo dalle quadriche riducibili abbiamo dunque cinque specie di quadriche reali ed una immaginaria, cioè

per C_∞ immaginaria	**ellissoide**	*reale*	se	$A < 0$
		immaginario	»	$A > 0$
» C_∞ reale non degenere	**iperboloide**	*rigato*	»	$A > 0$
		a due falde	»	$A < 0$
» C_∞ degenere	**paraboloide**	*rigato*	»	$A > 0$
		ellittico	»	$A < 0$.

Osservazione. Ricordando la discussione fatta al n.° 310, Vol. I, pag. 267, si vede che la conica C_∞, a coefficienti reali, può esser immaginaria solo se $A > 0$, e inoltre i coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} hanno tutti lo stesso segno, e questo è concorde con quello di A_{44}.

508. Le **quadriche riducibili**, caratterizzate dall'annullarsi del discriminante A, sono *coni* (*cilindri*) *o coppie di piani.*

Lasciando dal considerare queste ultime, che non hanno interesse, osserveremo che i coni hanno sempre *vertice reale* (proprio od improprio) dato, come si è visto al n.° 480, dal sistema di equazioni lineari $f_{x_r}' = 0$, $r = 1, 2, 3, 4$; ma gli altri loro punti possono essere reali od immaginari, perciò si hanno *coni reali e coni immaginari.* I primi tagliano il piano improprio secondo una conica C_∞ reale (non degenere se si tratta di un vero cono a vertice proprio, e non di una coppia di piani nè di un cilindro) perciò essi si possono considerare come appartenenti al genere degli *iperboloidi.* I coni immaginari invece si possono considerare come appartenenti al genere degli *ellissoidi.*

Un piano non passante pel vertice sega il cono secondo una conica che sarà ellisse, iperbole o parabola, secondo che il piano parallelo al piano secante, pel vertice, non taglia ulteriormente il cono, o lo taglia secondo due generatrici, o lo tocca lungo una generatrice.

Se il vertice è un punto improprio, il cono è, nel fatto, un *cilindro*, questa quadrica è incontrata dal piano improprio (contenente il vertice) lungo due generatrici, dunque può considerarsi come un *paraboloide*; ed a seconda che tali generatrici saranno immaginarie, reali e distinte, reali e coincidenti, si avranno cilindri *ellittici*, *iperbolici, parabolici.*

509. Le considerazioni fatte al n.° 507 offrono il mezzo analitico per distinguere le varie specie delle quadriche; aggiungeremo la osservazione che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè la quadrica sia un* **paraboloide** *è che si abbia*

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Ed infatti A_{44} è il discriminante della C_∞, e la (2) è la condizione perchè questa conica sia degenere.

Per superfici *cilindriche* (quadriche) deve aversi ad un tempo $A = 0$, $A_{44} = 0$.

Per *coni quadrici* (a centro proprio) si deve avere $A = 0$, $A_{44} \neq 0$.

§ II. Centro e piani diametrali.

510. I punti di mezzo di corde fra loro parallele di una quadrica sono, su ciascuna corda, coniugati del punto improprio comune ad esse.

Il luogo di quei punti è dunque il piano polare di un tale punto improprio. Ad un tale piano è dato il nome di *piano diametrale coniugato alla direzione di quelle corde.*

Diremo dunque che: *il luogo dei punti di mezzo di un sistema di corde parallele in una quadrica è il* **piano diametrale** *coniugato alla direzione di esse corde.*

511. Se indichiamo con l, m, n, i coseni direttori pertinenti alle corde del sistema, il punto improprio P_∞ ad esse corrispondente avrà coordinate omogenee $(l, m, n, 0)$, e la equazione del piano diametrale ad esse coniugato sarà (n.° 494, form. (2)):

$$(3) \qquad \begin{aligned}&(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x_1 + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)x_2 + \\ &+ (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)x_3 + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n)x_4 = 0,\end{aligned}$$

che potremo anche scrivere

$$(4) \qquad \begin{aligned}&(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)l + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)m + \\ &+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)n = 0.\end{aligned}$$

In coordinate non omogenee:

$$(5) \qquad \begin{aligned}&(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})m + \\ &+ (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})n = 0.\end{aligned}$$

In particolare i *piani diametrali coniugati alle direzioni degli assi* x, (1000), y, (0100), z, (0010) saranno, rispettivamente,

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

cioè si ottengono *eguagliando allo zero rispettivamente la derivata parziale presa rispetto alla variabile omonima.*

Confrontando la (5) con le (6) si vede che *la equazione del piano diametrale coniugato alla direzione* (l, m, n) *risulta da una combinazione lineare delle equazioni dei piani coniugati alle direzioni dei tre assi, coi coefficienti l, m, n.*

512. Centro della quadrica. I piani diametrali, essendo polari di punti appartenenti ad uno stesso piano (il piano improprio) apparterranno tutti al *polo del piano improprio.* Questo punto è detto **centro** *della quadrica.*

Dunque: *il centro della quadrica è il polo del piano improprio, nella polarità determinata dalla quadrica.*

Tutti i piani diametrali passano per il centro.

Tutte le corde della quadrica, passanti pel centro (**diametri**) *sono da questo dimezzate.*

513. *Un diametro d ed un piano diametrale π sono* **coniugati** *quando il punto improprio di d è polo di π.*

I piani tangenti alla quadrica negli estremi di un diametro sono paralleli al piano diametrale ad esso coniugato.

E reciprocamente:

Un diametro è coniugato al piano diametrale parallelo al piano tangente alla quadrica in uno degli estremi del diametro.

514. Per avere le **coordinate del centro** $C(x_0 y_0 z_0)$ basterà risolvere rispetto ad x, y, z il sistema risultante dalle equazioni di tre piani diametrali qualunque.

In particolare dal sistema (6) ricaveremo

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}. \tag{7}$$

Risulta da queste formule che *il centro è un punto improprio quando è $A_{44} = 0$, cioè quando la quadrica è un paraboloide.*

515. Il centro non risulta determinato quando si ha ad un tempo $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$. In tal caso è anche $A = 0$, la quadrica è un cilindro, e quindi possiede in effetto infiniti centri allineati, sopra una retta propria se il cilindro è ellittico od iperbolico, sopra una retta impropria se parabolico.

516. In particolare abbiamo dunque: *nel paraboloide i piani diametrali formano una stella impropria, ed i diametri sono tutti paralleli fra loro.*

517. Se consideriamo una quadrica qualsivoglia, ed in essa un diametro d', poichè questo passa pel centro della quadrica (proprio od improprio) la retta d'' polare reciproca di d' sarà nel piano polare del centro, cioè nel piano improprio, o viceversa.

I diametri si possono dunque considerare come le rette polari reciproche delle rette improprie rispetto alla quadrica.

518. Coppie e terne di piani diametrali coniugati. *Due piani diametrali sono coniugati se ciascuno di essi appartiene al polo dell'altro,* (cioè se è parallelo alle corde bisecate dall'altro).

Per ogni diametro passano infinite coppie di piani diametrali coniugati; esse formano una involuzione, *involuzione dei piani diametrali coniugati,* nella quale sono piani doppi i piani tangenti alla quadrica pel centro (piani assintotici) (n.° 498, cfr. i n.i 277, 280).

Sia d' un diametro di una conica a centro, π' il piano diametrale ad esso coniugato. Si consideri un diametro d'' appartenente a π': il piano diametrale π'' coniugato a d'' passerà per d', e taglierà π' secondo un terzo diametro d''', il quale risulterà coniugato al piano π''' dei primi due.

Si è così costruito un triedro in cui ogni faccia ha per polo il punto improprio dello spigolo opposto: esso è detto **triedro diametrale autoconiugato;** le sue facce costituiscono una *terna di piani diametrali due a due coniugati,* i suoi spigoli una terna di diametri due a due coniugati.

519. Piani diametrali principali. Si dicono *principali* i piani diametrali che risultano normali alla direzione cui sono coniugati.

La *condizione di normalità* fra il piano diametrale

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)y + \\ + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)z = 0$$

e la direzione l, m, n, cui esso è coniugato è espressa (n.° 215, Vol. I, pag. 185) da:

$$(8)\qquad \frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{l} = \frac{a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{n}.$$

Indicando con k il valore comune di questi tre rapporti, si dovrà avere:

$$(9)\qquad \begin{cases} (a_{11} - k)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - k)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}l + a_{42}m + (a_{33} - k)n = 0. \end{cases}$$

La condizione di coesistenza di queste tre equazioni è espressa dall'annullarsi del determinante dei coefficienti, cioè da

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è un'equazione del terzo grado in k, che appartiene al tipo delle **equazioni secolari**, ed ha, come tale, tre radici tutte reali (1).

(1) Si dicono *secolari* perchè si presentano nella determinazione delle ineguaglianze secolari nel moto dei pianeti.

La dimostrazione che le radici della (10) sono *tutte reali*, può farsi al modo seguente: sia k_1 una radice (in generale complessa) della (10); in corrispondenza di k_1 determineremo tre numeri non tutti nulli (in generale complessi) l_1, m_1, n_1 soddisfacenti le (9), ed avremo

$$(11)\qquad \begin{cases} a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 = k_1 l_1 \\ a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 = k_1 m_1 \\ a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 = k_1 n_1. \end{cases}$$

Indichiamo genericamente con α' il numero complesso coniugato di un dato numero α; moltiplichiamo le (11) ordinatamente per l_1', m_1', n_1' e sommiamo. Ne verrà

$$a_{11}l_1l_1' + a_{21}l_1m_1' + a_{31}l_1n_1' + a_{12}m_1l_1' + a_{22}m_1m_1' + a_{32}m_1n_1' +$$
$$+ a_{13}n_1l_1' + a_{23}n_1m_1' + a_{33}n_1n_1' = k_1(l_1l_1' + m_1m_1' + n_1n_1').$$

I piani principali di una data quadrica sono dunque tre, e sono sempre reali: e costituiscono il triedro autoconiugato ortogonale della quadrica.

520. Per le quadriche a centro i tre piani principali formano un triedro trirettangolo, e sono mutualmente coniugati. E, siccome *i piani principali sono piani di simmetria ortogonale*, le tre intersezioni di essi sono assi di simmetria ortogonale, che vengono detti **assi** *della quadrica.*

I punti dove gli assi incontrano la quadrica si dicono **vertici** *della quadrica.* I piani tangenti nei vertici sono perpendicolari agli assi.

521. Per i paraboloidi uno dei piani principali è il piano improprio, gli altri due sono piani proprii coniugati che si segano secondo un diametro coniugato ad ogni piano ad esso perpendicolare, che vien detto **asse** *della quadrica*: il punto proprio dove l'asse sega la quadrica è il **vertice** *del paraboloide.*

522. Se la quadrica è una *superficie di rotazione* (n.° 467) l'asse di rotazione è un asse della quadrica, e *tutti i piani per l'asse di rotazione sono piani principali.*

Se la quadrica di rotazione è a centro, essa possiede anche un piano diametrale principale normale all'asse. In particolare nella sfera ogni piano diametrale è principale.

Immediatamente si verifica che formando il numero complesso coniugato del primo membro di questa eguaglianza, cioè

$$a_{11}l_1'l_1 + a_{21}l_1'm_1 + a_{31}l_1'n_1 + a_{12}m_1'l_1 + a_{22}m_1'm_1 + a_{32}n_1'n_1 + \\ + a_{13}n_1'l_1 + a_{23}n_1'm_1 + a_{33}n_1'n_1$$

per la simmetria dei coefficienti $a_{rs} = a_{sr}$, si riproduce quello stesso primo membro, onde si vede che *esso è reale.* Sarà dunque reale anche il secondo membro, cioè

$$k_1(l_1l_1' + m_1m_1' + n_1n_1');$$

ma il fattore $l_1l_1' + m_1m_1' + n_1n_1'$, è reale; tale è dunque anche il numero k_1.

Così si prova che *ogni radice k della* (10) *è reale.*

523. Cono asintotico. *Si dice cono asintotico il cono circoscritto alla quadrica* (n.° 484) *dal centro di essa, cioè che ha il vertice nel centro.*

Sappiamo che il cono circoscritto tocca la quadrica nei punti della conica sezione della quadrica stessa col piano polare del vertice del cono (n.° 495).

Ora, poichè il piano polare del centro è il piano improprio, potremo anche dire che *il cono asintotico proietta dal centro della quadrica la conica C_∞, traccia della quadrica medesima sul piano improprio.*

Se dunque supponiamo riferita la quadrica ad un sistema di assi colla origine nel centro, *la equazione del cono asintotico* sarà semplicemente quella che rappresenta la C_∞ sul piano improprio.

In coordinate non omogenee essa è

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0, \tag{12}$$

si ottiene cioè eguagliando allo zero il complesso dei termini di 2.° grado nella equazione in coordinate non omogenee della quadrica (cfr. il n.° 281).

Se il centro della quadrica non è nella origine ed ha coordinate $(x_0 y_0 z_0)$, la equazione del cono asintotico sarà

$$\begin{gathered} a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + \\ + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

CAPITOLO V.

STUDIO DELLE QUADRICHE SULLE LORO EQUAZIONI NORMALI

§ I. Forma normale della equazione delle quadriche.

524. *La equazione di una quadrica a centro, riferita ad un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro, manca dei termini di primo grado, e reciprocamente, se nella equazione di una quadrica a centro mancano i termini di primo grado, il centro della quadrica è nella origine.*

Ed infatti le equazioni dei piani diametrali coniugati alle direzioni degli assi (n.° 510)

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases}$$

quando il centro è nella origine devono essere soddisfatte contemporaneamente dalle coordinate 0, 0, 0 e ciò importa che sia

$$(2) \qquad a_{14} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = 0.$$

Reciprocamente, se le (2) sono soddisfatte e non è

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

(cioè se la quadrica è a centro), le (1) sono soddisfatte solo dalla terna 0, 0, 0, ed il centro è nella origine.

525. *La equazione di una quadrica a centro riferita ad un sistema cartesiano, nel quale ogni piano coordinato è coniugato alla intersezione degli altri due* (*triedro autoconiugato* n.° 518) *assume la* **forma normale** (*o canonica*)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \tag{3}$$

Ed infatti, nella nostra ipotesi, le equazioni (1) dei piani diametrali coniugati alle direzioni degli assi coordinati, debbono coincidere con le equazioni dei piani coordinati: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, e perciò occorre e basta che sia

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Se il triedro autoconiugato di riferimento è ortogonale (n.° 519) oltre al vantaggio della forma canonica, avremo l'altra della ortogonalità degli assi cartesiani di riferimento.

526. *La equazione di una quadrica riferita ad un sistema di assi cartesiani aventi per origine un punto O della quadrica, per piano xy, il piano tangente in O alla quadrica, per piani xz, zy, due piani diametrali coniugati, assume la forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0. \tag{4}$$

Infatti nella ipotesi posta l'asse z è un diametro della quadrica, ed i piani diametrali yz, xz, dovendo risultare coniugati alle direzioni degli assi x, y rispettivamente, le loro equazioni dovranno coincidere con le prime due del sistema (1), e ciò importa che sia

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{24} = 0;$$

inoltre, poichè la origine appartiene alla quadrica, sarà $a_{44} = 0$. D'onde la forma (4).

Questa forma della equazione della quadrica è particolarmente vantaggiosa per *paraboloidi*, perchè in tale caso l'asse Oz deve nuovamente incontrare la quadrica nel suo punto improprio $P_\infty(0, 0, 1, 0)$.

Scrivendo la (4) sotto la forma omogenea

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

dalla condizione di appartenenza del punto P_∞ alla quadrica ricaveremo $a_{33}x_3^2 = 0$, cioè $a_{33} = 0$, e troveremo, come **forma canonica della equazione dei paraboloidi**

(5)
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0,$$

nella quale si intende che il triedro cartesiano di riferimento sia formato scegliendo per asse z un diametro, per piano $z = 0$ il piano tangente nella estremità di questo diametro, per piani $y = 0$, $x = 0$ due piani diametrali coniugati.

Naturalmente un tale triedro sarà in generale obliquo e risulterà ortogonale solo quando si prenda come origine delle coordinate il vertice della quadrica (n.° 521).

§ II. Quadriche a centro.

527. Se nella equazione canonica di una quadrica a centro è nullo il termine a_{44}, essa prende la forma omogenea

(6)
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0,$$

che rappresenta un **cono quadrico** col vertice nella origine (n.° 480).

Se è nullo uno degli altri coefficienti, per es. $a_{11} = 0$, la equazione risultante

(7)
$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$$

rappresenta *un* **cilindro** *con le generatrici parallele all' asse delle* x (n.° 455): questo cilindro sarà ellittico od iperbolico secondo che a_{22}, a_{33} hanno segni eguali, o contrari, e sarà di rotazione se $a_{22} = a_{33}$.

528. Nella ipotesi che nessuno dei coefficienti $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ sia nullo, dividendo per a_{44}, daremo alla equazione della quadrica la forma

(8)
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

con

$$\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{44}}, \quad \beta = -\frac{a_{22}}{a_{44}}, \quad \gamma = -\frac{a_{33}}{a_{44}}.$$

Le combinazioni di segni che si presentano sono le seguenti

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{cccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \mathrm{I} & + & + & + \\ \mathrm{II} & - & - & - \\ \mathrm{III} & + & + & - \\ \mathrm{IV} & + & - & -. \end{array}\right.$$

Nei primi due casi il cono asintotico

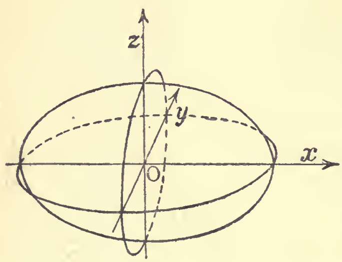
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$$

è immaginario, e perciò la quadrica è un **ellissoide**, *reale* nel caso I, *immaginario* nel caso II.

Ciò conferma la osservazione fatta circa il discriminante $A = -\alpha\beta\gamma$, il quale nel caso I è negativo e nel caso II positivo (n.° 507).

Nei casi III, IV il cono asintotico è reale, quindi si tratta di iperboloidi; e precisamente, nel caso III, in cui $A > 0$, di un **iperboloide rigato**, nel caso IV, in cui $A < 0$, di un **iperboloide a due falde.**

529. Caso I ($+ + +$) Ellissoide reale. I segni di α, β, γ essendo tutti positivi potremo porre $\alpha = \frac{1}{a^2}$, $\beta = \frac{1}{b^2}$, $\gamma = \frac{1}{c^2}$, e l' equazione dell' ellissoide prenderà la forma segmentaria



$$(10)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nella quale a, b, c, sono le lunghezze dei *semiassi* dell' ellissoide.

La quadrica è tutta compresa nel parallelepipedo rettangolo col centro nella origine e con gli spigoli paralleli ai tre assi e di lunghezze rispettive $2a$, $2b$, $2c$.

Segando la quadrica coi piani coordinati si hanno tre ellissi, dette *ellissi principali*, di equazioni

$$(11)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Segando con un piano parallelo ad uno dei piani coordinati, es. al piano xy, a distanza k dalla origine (cioè col piano $z=k$) si ha la ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

cioè

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1. \tag{12}$$

Tale ellisse è reale se $k<c$, immaginaria se $k>c$, si riduce ad un punto (o più precisamente ad una coppia di rette immaginarie coniugate, e dal punto di vista reale, al punto ad esse comune) se $k=c$. Tutte queste ellissi sono *simili* (n.° 430) fra di loro, e *similmente disposte.*

Segando con un piano qualunque, si ottengono sempre ellissi (reali od immaginarie) perchè la quadrica non ha punti reali improprii.

L'ellissoide si può immaginare generato dal moto di una ellisse che varia, mantenendosi in un piano parallelo al piano xy rimanendo simile e similmente disposta alla ellisse principale del piano xy, ed appoggiandosi alle due altre ellissi principali.

Se due dei semiassi sono eguali, per es. $a=b$, l'equazione dell'ellissoide assume la forma

$$\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2+y^2}{a^2},$$

ed è del tipo $z=f(x^2+y^2)$ proprio delle *superfici di rotazione* (n.° 457).

Ed infatti si verifica immediatamente che le sezioni con piani $z=k$, sono cerchi.

Se i tre assi sono uguali $a=b=c=r$, l'ellissoide è una sfera di raggio r

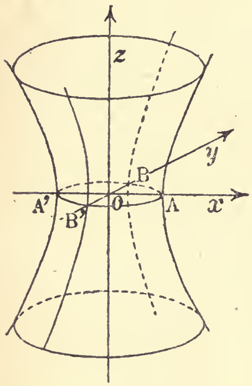
$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Se in un ellissoide di rotazione i tre assi non sono uguali, cioè se non si tratta di una sfera potremo scrivere la equazione sotto la forma:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Se in questa è $a^2 < c^2$, si ha l'**ellissoide allungato** generato dalla rotazione dell'ellisse intorno all'asse maggiore. Se è $a^2 > c^2$ si ha l'**ellissoide schiacciato**, generato dalla rotazione dell'ellisse, intorno all'asse minore.

530. Caso II ($-\ -\ -$) questo corrisponde, come già si è notato, ad **ellissoidi immaginari**.



531. Caso III ($+\ +\ -$) IPERBOLOIDE RIGATO (od *iperboloide ad una falda*). Usando le notazioni

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \quad \beta = \frac{1}{b^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{c^2}$$

avremo dalla (8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{13}$$

La quadrica ha, nella direzione degli assi coordinati x, y due assi trasversi, che incontrano la quadrica nei punti reali A, A'; B, B' distanti dalla origine di a, $-a$, b, $-b$, rispettivamente.

Ha un asse non trasverso nella direzione dell'asse delle z.

Il piano xy sega la quadrica secondo la ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

detta **ellisse di gola.**

Piani $z = k$, paralleli al piano xy, determinano nella quadrica sezioni ellittiche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

simili e similmente disposte alla ellisse di gola, i cui semiassi:

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$$

vanno crescendo con k fino a superare qualunque numero positivo.

532. La sezione della quadrica col piano xz è la iperbole (*iperbole principale*)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{14}$$

i piani $y=k$, paralleli al piano xz, generano le iperboli

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \tag{14'}$$

le quali, per $|k|<|b|$ sono simili e similmente disposte alla iperbole principale.

Per $k=\pm b$, la iperbole degenera nella *coppia di rette reali* $\frac{x}{a}=\pm\frac{z}{c}$, ed i piani $y=\pm k$ risultano tangenti alla quadrica nei vertici B, B'.

Per $|k|>|b|$ le iperboli (14′) sono simili alla iperbole coniugata della principale. Le medesime considerazioni possono ripetersi per le sezioni fatte col piano yz e coi piani $x=k$ paralleli a questo.

Il *cono asintotico*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

è reale, ed i piani paralleli ad una generatrice del cono asintotico segano la quadrica secondo parabole. Per es., segando col piano

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}+k$$

si ritrova la parabola

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}+k \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2}=1-k\left(2\dfrac{z}{c}+k\right). \end{cases}$$

Le sezioni fatte con un piano generico π, nell' iperboloide ad una falda possono essere ellissi iperbole o parabole, secondo che la retta impropria di π taglia la conica C_∞ in due punti immaginari, in due punti reali, od è tangente ad essa.

533. Se $a=b$, l'*iperboloide è di rotazione,* ed è generato dalla rotazione della iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

intorno all' asse z, non trasverso.

534. L'iperboloide da noi considerato è una quadrica *a punti iperbolici,* cioè ha la proprietà che per ognuno dei suoi punti passano due rette reali appartenenti alla quadrica.

Questa proprietà si ricava direttamente dallo studio della equazione che scriveremo

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

cioè

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{15}$$

Questa è soddisfatta dalle terne xyz che soddisfano l'uno o l'altro dei due sistemi

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right);\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{16}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right);\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{17}$$

dove λ, μ sono parametri arbitrari.

Per ogni coppia di valori λ, μ ciascuno di questi sistemi rappresenta una coppia di rette appartenenti alla quadrica. Questa dunque contiene due sistemi di rette, quelle del sistema (16), quelle del sistema (17).

535. Si vede immediatamente che *due rette appartenenti a sistemi diversi si incontrano sempre,* qualunque siano i valori di λ, μ, cui rispettivamente corrispondono.

Infatti se consideriamo le (16), (17) come formanti un unico sistema, il determinante dei coefficienti e dei termini noti ha la forma

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \frac{1}{\lambda} & -1 & \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \mu & 1 & \mu \\ 1 & -\frac{1}{\mu} & -1 & \frac{1}{\mu} \end{vmatrix}$$

e si verifica che esso è zero identicamente, cioè per ogni coppia di valori λ, μ. Ciò significa appunto che le due rette (16), (17) hanno un punto comune.

Da ciò si conclude che per ogni punto della quadrica escono due rette contenute nella quadrica, appartenenti a sistemi diversi.

Le rette di questi due sistemi si dicono *generatrici della quadrica.*

536. *Due generatrici appartenenti ad uno stesso sistema sono sghembe.*

Ed infatti se avessero un punto comune, da questo punto dovrebbe uscire anche una retta dell' altro sistema, e quindi la quadrica conterrebbe tre rette uscenti da uno stesso punto e sarebbe degenere (n.° 487).

537. *Le parallele alle generatrici dell' iperboloide, per l' origine, sono le generatrici del cono asintotico.* Infatti, la parallela per l' origine alla retta generica rappresentata dalle (16) ha per equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{y}{b}. \end{cases}$$

D' onde, moltiplicando,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Altrettanto avviene per le parallele alle generatrici dell' altro sistema.

538. Per $z=0$, le (16), (17) si riducono alle

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \qquad (19)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

L'uno o l'altro di questi due sistemi, per moltiplicazione dà

$$(20)\qquad \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

cioè le generatrici incontrano il piano xy in punti della ellisse di gola: cosa già nota.

Dal confronto delle (18), (19) si vede che *le due generatrici uscenti da uno stesso punto della ellisse di gola corrispondono a valori dei parametri legati dalla relazione* $\lambda=\dfrac{1}{\mu}$.

Ed infatti questa è appunto la condizione perchè i sistemi (18), (19) siano soddisfatti dagli stessi valori di x, y.

539. Fissato un punto $P_0(x_0 y_0 0)$ su l'ellisse di gola, per determinare le generatrici uscenti da questo punto basterà mettere x_0, y_0 al posto di xy nel sistema (18) e ricavare di qui il valore λ_0 di λ; poi porre λ_0 al posto di λ e $\mu_0=\dfrac{1}{\lambda_0}$ al posto di μ nelle (16), (17). Tenendo conto della (20) troviamo:

$$(21)\quad \begin{cases} \lambda+\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{x_0}{a}\left\{\dfrac{1}{1+\dfrac{y_0}{b}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{y_0}{b}}\right\}=\dfrac{2a}{x_0} \\[2ex] \lambda-\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{x_0}{a}\left\{\dfrac{1}{1+\dfrac{y_0}{b}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{y_0}{b}}\right\}=-\dfrac{2ay_0}{bx_0}. \end{cases}$$

540. Proiettando le due generatrici uscenti da P_0 sul piano xy, cioè eliminando z dall'uno e dall'altro dei sistemi (16), (17), si giunge alle equazioni

$$\begin{cases} 2\,\dfrac{x}{a}=\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)+\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{y}{b} \\[2ex] 2\,\dfrac{x}{a}=\left(\mu+\dfrac{1}{\mu}\right)+\left(\dfrac{1}{\mu}-\mu\right)\dfrac{y}{b}, \end{cases}$$

le quali per la relazione $\lambda = \frac{1}{\mu}$ sono equivalenti; d'altra parte, ponendovi $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, e tenendo conto delle (21) esse risultano identicamente soddisfatte. Ciò significa che le due generatrici uscenti da uno stesso punto P_0 dell'ellisse di gola sono sopra un piano π normale al piano xy.

La retta OP_0 è dunque perpendicolare comune all'asse OZ e a ciascuna di tali generatrici, ed il segmento $\overline{OP_0}$ segna la *minima distanza* di ciascuna di queste generatrici dall'asse OZ.

Mettendo per $\lambda + \frac{1}{\lambda}$, $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ i valori dati dalle (21) si ha

$$2\frac{x}{a} = \frac{2a}{x_0} - \frac{2ay_0y}{b^2x_0}$$

cioè

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Questa è la *equazione della tangente* per P all'ellisse di gola, dunque *le due generatrici dell'iperboloide uscenti da P_0 sono sul piano π normale al piano xy e passante per la tangente in P_0 all'ellisse di gola.*

Le equazioni (16), (17) di queste generatrici si scambiano le une nelle altre (quando i parametri sono legati dalla relazione $\lambda = \frac{1}{\mu}$) col cambiare il segno di z; ciò significa che le generatrici uscenti da P_0 sono simmetricamente disposte rispetto al piano xy, ed in particolare che esse *formano angoli eguali con l'asse z.*

Per calcolare quest'angolo, scriviamo le equazioni della parallela ad una retta del sistema (16), uscente dalla origine, sotto la forma:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{\frac{a}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{z}{\frac{c}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)},$$

e di qui ricaveremo

$$\cos\gamma = \frac{\frac{c}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{\pm\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{c^2}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2}}$$

e, per le (21)

$$(22)\qquad \cos\gamma = \pm\frac{c\dfrac{a}{x_0}}{\sqrt{b^2 + a^2\dfrac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2} + c^2\dfrac{a^2}{x_0^2}}} = \frac{c}{\sqrt{\dfrac{b^2x_0^2}{a^2} + \dfrac{a^2y_0^2}{b^2} + c^2}}.$$

Per **iperboloidi di rotazione**, dovremo fare $a^2 = b^2$ e verrà

$$(23)\qquad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

L'angolo γ è dunque allora *costante*; da cui: *l'iperboloide di rotazione si genera facendo rotare intorno all'asse immobile una generatrice, di cui la minima distanza dall'asse è a, raggio del cerchio di gola.*

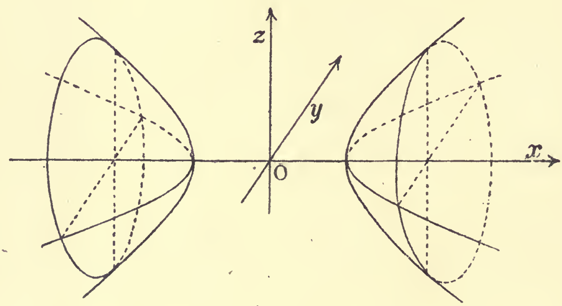
Reciprocamente: *se attorno ad una retta r si fa rotare una retta r' sghemba con r, la superficie generata è un iperboloide ad una falda di rotazione.*

Se le rette r, r' si suppongono complanari, la superficie è conica (o cilindrica).

541. Caso IV $(+ - -)$ Iperboloide a due falde.

Usando le solite notazioni ne scriveremo la equazione sotto la forma

$$(24)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



La superficie è incontrata dall'asse x in due punti reali distanti $\pm a$ dalla origine, ed ha perciò due vertici ed un *asse reale*; gli altri due assi coordinati non incontrano la quadrica, la quale ha quindi *due assi non trasversi.*

I piani xy ed xz segano la quadrica secondo le due *iperboli principali*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

i piani paralleli a questi, cioè

$$z=k,\quad y=k$$

determinano iperboli che, per $|k|<|b|$ (o $|k|<|c|$) sono simili e similmente disposte alle principali, per $|k|>|b|$ (o $|k|>|c|$) sono simili e similmente disposte alle coniugate delle principali.

Il piano $x=0$ non sega la quadrica, i piani paralleli a questo, $x=k$, sono pure esterni alla quadrica per $|k|<|a|$, risultano tangenti per $|k|=a$, e segano la quadrica secondo le ellissi (simili fra loro e similmente disposte)

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1$$

per $|k|>a$.

La quadrica si può immaginare generata da una ellisse variabile il cui piano si mantiene parallelo al piano yz, e che si muove appoggiandosi alle due iperboli principali.

Anche questa quadrica ha cono asintotico reale

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ed è secata secondo parabole da piani paralleli alle generatrici di questo cono.

Le sezioni di questa quadrica con un piano generico possono essere ellissi, iperbole, o parabole.

L'iperboloide a due falde è di *rotazione* quando sono eguali i semiassi b, c; essa ha in tal caso, per equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

ed è generata dalla rotazione di una iperbole, intorno all'asse trasverso.

§ III. Paraboloidi.

542. Se nella equazione canonica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0 \tag{25}$$

dei paraboloidi qualche coefficiente è nullo, la quadrica è riducibile.

Ed infatti se $a_{34} = 0$ l'equazione (25) diventa:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0,$$

che scriveremo

$$a_{11}x^2 - (-a_{22})y^2 = 0,$$

o infine

$$(\sqrt{a_{11}}x + \sqrt{-a_{22}}y)(\sqrt{a_{11}}x - \sqrt{-a_{22}}y) = 0$$

che rappresenta una *coppia di piani* (reali o immaginari).

Se è zero uno degli altri coefficienti la quadrica è, come sappiamo, un *cilindro parabolico*. Supporremo dunque che *i coefficienti della* (19) *siano tutti diversi dallo zero*: dividendo per a_{34}, potremo scrivere

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 2z \tag{26}$$

con

$$\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{34}}, \quad \beta = -\frac{a_{22}}{a_{34}}.$$

Le combinazioni di segno che occorre considerare saranno allora

$$\left\{\begin{array}{lcc} & \alpha & \beta \\ \mathrm{I} & + & + \\ \mathrm{II} & + & -. \end{array}\right. \tag{27}$$

(Il caso $- -$ si ottiene dal primo cambiando il segno di z, cioè con una simmetria ortogonale rispetto al piano xy).

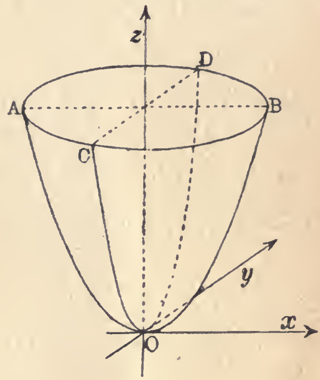
543. *I Caso* $(+ +)$. PARABOLOIDE ELLITTICO. Il discriminante $A = -\alpha\beta$ è negativo, dunque si tratta di una quadrica a *punti ellittici* (n.° 507).

Ponendo $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, ne scriveremo la equazione sotto la forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Si vede intanto che z è sempre positivo, cioè che *la quadrica è tutta nella regione positiva dello spazio, rispetto al piano xy.* La sezione col piano xy è la coppia di rette immaginarie per l' origine

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$$



dunque la quadrica ha come piano tangente nella origine il piano xy.

Le sezioni con piani $z = k$, $k > 0$ sono *ellissi* simili e similmente disposte

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2k.$$

Le sezioni coi piani $y = 0$, $x = 0$, sono le parabole *(parabole principali) AOB, COD*, di equazioni:

$$x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2qz.$$

Le sezioni coi piani paralleli $y = k$, $x = k$ sono le parabole

$$x^2 = 2p\left(z - \frac{k^2}{2q}\right), \quad y^2 = 2q\left(z - \frac{k^2}{2p}\right)$$

le quali sono, rispettivamente, eguali alle parabole principali, e si ottengono da queste con la traslazione $Z = z - \frac{k^2}{2q}$, o rispettivamente, $Z = z - \frac{k^2}{2p}$.

Si può dunque immaginare il paraboloide ellittico generato al modo seguente:

Si considerino due parabole AOB, COD i cui piani siano fra loro perpendicolari, aventi il medesimo vertice e gli assi coincidenti anche nel verso; delle quali parabole una si supponga fissa ed immobile, e l' altra si muova parallelamente a se stessa, in *modo che il suo vertice descriva la parabola fissa. Il luogo delle traiettorie dei punti della parabola mobile è il paraboloide.*

Il paraboloide ellittico è dunque una *superficie di traslazione* (n.° 472).

Le sezioni di questa quadrica con un piano generico sono, generalmente, ellissi; sono parabole se il piano secante passa pel punto improprio reale della quadrica.

Per $p=q$ la quadrica è di *rotazione*, ed è generata dalla rotazione della parabola $x^2=2pz$ intorno al suo asse.

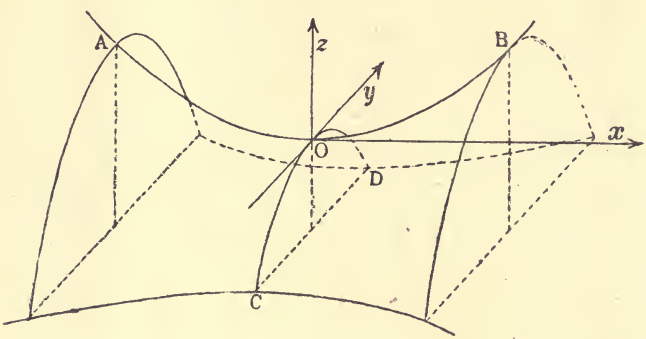
544. *II Caso* $(+\ -)$. Paraboloide iperbolico. Il discriminante $A=-\alpha\beta$ è positivo, dunque si tratta di una quadrica a *punti iperbolici*, cioè di una *superficie rigata* (n.° 507).

Ponendo $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$, scriveremo l'equazione della quadrica sotto la forma

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

La sezione col piano xy è la coppia di rette

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0$$



dunque il piano xy è tangente alla quadrica nella origine.

Le sezioni coi piani paralleli $z=k$ sono *iperboli*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2k$$

che, per valori di k aventi lo stesso segno, sono simili e similmente disposte, per valori di k con segni contrari sono l'una simile alla coniugata dell'altra.

La sezione col piano xz è la parabola $x^2 = 2pz$ (che nella figura è rappresentata dalla AOB), le sezioni con piani paralleli $y = k$ sono parabole $x^2 = 2p\left(z + \frac{k^2}{2q}\right)$ eguali alla precedente e similmente disposte. I vertici di queste parabole sono punti di coordinate $x = 0$, $y = k$, $z = -\frac{k^2}{2q}$, cioè sono sulla curva COD, che ha per equazione

$$y^2 = -2qz$$

sezione della quadrica col piano yz. Questa pure è una parabola che ha per asse l'asse z; ma (per essere q positivo) è rivolta verso la parte negativa di questo asse.

Le sezioni coi piani paralleli $x = h$, sono ancora parabole eguali ad essa e similmente disposte, aventi i vertici sulla parabola $x^2 = 2pz$.

Si vede dunque che *anche questo paraboloide è una superficie di traslazione*, generata in modo perfettamente analogo a quello esposto al n.° 543 pel paraboloide ellittico. L'unica differenza sta in ciò, che le due parabole principali sono, nel caso presente, situate da parti opposte rispetto al piano xy.

In questa quadrica *non esistono sezioni piane ellittiche.* Le sezioni fatte con un piano generico π sono generalmente iperboli; sono parabole se π passa pel punto d'incontro delle due rette che costituiscono la conica C_∞.

545. Sappiamo già che questa quadrica è una superficie rigata (n.° 507).

Per mettere in evidenza i due sistemi di rette che ad essa appartengono, ne scriveremo la equazione sotto la forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

e così vedremo che essa può essere soddisfatta dalle terne xyz

che soddisfano l'uno o l'altro dei due sistemi

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2\lambda z, \quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda} \tag{28}$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\mu, \quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{2}{\mu}z \tag{29}$$

dove λ, μ sono parametri arbitrarii. Sia l'uno che l'altro di questi sistemi rappresentano infinite rette appartenenti alla quadrica.

Per ogni punto della quadrica passa una coppia di rette appartenenti una al sistema (28) l'altra al sistema (29).

Le rette del sistema (28) sono tutte parallele al piano

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{30}$$

quelle del secondo sistema sono parallele al piano

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0; \tag{31}$$

questi due piani si dicono **piani direttori** *del paraboloide.*

546. *Il paraboloide rigato non ha sezioni ellittiche,* perciò questa quadrica non può mai essere una superficie di rotazione.

Ripetendo le riflessioni fatte nello studio dell'iperboloide rigato (n.i 535, 536) si vede che per ogni punto del paraboloide passa una generatrice di ciascuno dei due sistemi (28), (29); che due generatrici dello stesso sistema sono sempre sghembe, e due di sistemi diversi sono complanari.

Sia l'iperboloide rigato che il paraboloide iperbolico, possono immaginarsi generati dal moto di una retta che si appoggia a tre rette fisse, due a due sghembe.

(Nel caso del paraboloide queste ultime rette sono parallele ad uno stesso piano). Ed infatti: consideriamo tre rette r', r'', r''', sghembe a due a due. È noto che esistono sempre infinite rette che incontrano le tre rette r', r'', r''' (1).

(1) Per costruirne una basta prendere un punto P' a piacere sopra una di tali rette es. sopra r', poi considerare la intersezione dei piani determinati da questo punto e da ciascuna delle altre due rette, $P'r''$, $P'r'''$.

Consideriamo 3 di queste rette, distinte, s', s'', s''' ed i 9 punti di intersezione

$$\begin{array}{ll} P_1'P_2'P_3' & \text{sopra } r' \\ P_1''P_2''P_3'' & \text{sopra } r'' \\ P_1'''P_2'''P_3''' & \text{sopra } r'''. \end{array}$$

Per questi nove punti passa una quadrica ed una sola, la quale avendo tre punti a comune con ciascuna delle 3 rette r', r'', r''' contiene intieramente le tre rette come generatrici di uno stesso sistema.

Le generatrici dell' altro sistema di tale quadrica incontrano ciascuna delle r', r'', r'''; e le rette che incontrano r', r'', r''', avendo tre punti a comune con la quadrica, appartengono ad essa, cioè sono rette del secondo sistema.

Dunque le rette che incontrano le tre rette date r', r'', r''', costituiscono uno dei sistemi di generatrici della quadrica e, nella loro totalità, ricoprono la intiera quadrica.

§ IV. Sezioni coniche.

547. Indicando con $P(x_0y_0z_0)$ il vertice di un cono rotondo, con α, β, γ i coseni direttori dell' asse, con λ il coseno dell' angolo costante delle generatrici con l' asse, l' equazione del cono è data da (n.° 457):

$$\begin{aligned} &\{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\}^2 - \\ &-\lambda^2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Segando il cono con un piano determinato (che potremo sempre supporre sia il piano xy) si ottiene la conica che ha per equazione

$$\begin{aligned} &\{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)-\gamma z_0\}^2 - \\ &-\lambda^2\{(x-x)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\}=0. \end{aligned} \tag{2}$$

In questa conica si ha

$$a_{11}=\alpha^2-\lambda^2, \quad a_{22}=\beta^2-\lambda^2, \quad a_{12}=\alpha\beta,$$
$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\lambda^2(\lambda^2-(\alpha^2+\beta^2)).$$

Si vede dunque che al variare dei coseni α, β, cioè al variare della inclinazione del piano secante sull'asse del cono, la sezione risulta una ellisse (quando $\lambda^2 > \alpha^2 + \beta^2$), oppure una iperbole (quando $\lambda^2 < \alpha^2 + \beta^2$), ed infine una parabola (quando $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$).

Se $z_0 = 0$ la equazione (2) risulta omogenea, e la sezione (fatta con un piano passante pel vertice) degenera in una coppia di rette. Se $\alpha = \beta = 0$ la sezione è un cerchio.

Concludiamo dunque che, segando un cono di rotazione con un piano si possono ottenere tutte le varie specie di coniche da noi studiate nella parte II^a del nostro corso.

548. Reciprocamente: *Qualunque conica può considerarsi come sezione piana di un cono di rotazione.*

Ed infatti, data una conica qualunque, assumiamo come origine degli assi di riferimento un vertice di essa conica, come asse x, l'asse della conica uscente da detto vertice, come asse y la tangente alla conica in quel vertice. L'equazione della conica assumerà la forma trinomia (n.° 301, pag. 256)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \tag{3}$$

Vogliamo dimostrare che *è sempre possibile determinare una retta del piano zx tale che il cono di rotazione avente per asse questa retta e per generatrice l'asse z, sia segato dal piano xy secondo la conica data.*

Indichiamo infatti con $P(0, 0, z_0)$ il punto dell'asse z che vogliamo assumere come vertice del cono, con α, 0, γ, i coseni direttori dell'asse del cono (γ sarà anche il coseno dell'angolo che una qualunque generatrice del cono forma con l'asse).

Come al n.° precedente, scriveremo l'equazione del cono sotto la forma:

$$\{\alpha x + \gamma(z - z_0)\}^2 - \gamma^2(x^2 + y^2 + (z - z_0)^2) = 0. \tag{4}$$

Quella della sezione col piano xy sarà

$$(\alpha x - \gamma z_0)^2 - \gamma^2(x^2 + y^2 + z_0^2) = 0,$$

cioè

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 - \gamma^2 y^2 - 2\alpha\gamma z_0 x = 0. \tag{5}$$

Questa conica si farà coincidere con la (3) data, prendendo per α, γ, z_0, le radici del sistema di equazioni

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \rho a_{11}, \quad \gamma^2 = -\rho a_{22}, \quad \alpha\gamma z_0 = \rho a_{13},$$

dove ρ è un conveniente fattore di proporzionalità, atto a rendere $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$.

Da ciò si deduce

$$\alpha^2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} - 2a_{22}}, \quad \gamma^2 = \frac{-a_{22}}{a_{11} - 2a_{22}}, \quad z_0{}^2 = \frac{a_{13}{}^2}{a_{22}{}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Se la conica (3) è un cerchio, cioè se $a_{11} = a_{22}$, si trova $\alpha = 0$, $\gamma = 1$; l'asse del cono coincide con l'asse z, ed il vertice è il punto improprio di tale asse.

§ V. Sezioni circolari ed ombelichi nelle quadriche.

549. Data una quadrica, che non sia una sfera, si vogliono determinare i piani che la segano secondo cerchi.

Questo problema equivale a quello della ricerca degli *ombelichi* delle quadriche, poichè sappiamo (n.° 493) che se un punto O è ombelico di una quadrica, tutte le sezioni fatte nella quadrica con piani paralleli al piano tangente in O sono cerchi, e, reciprocamente che se un piano sega la quadrica secondo un cerchio, essa è parallela al piano tangente in un ombelico.

Di qui, in particolare, si desume che se un piano produce nella quadrica per sezione un circolo, qualunque piano ad esso parallelo, darà una sezione circolare (reale o immaginaria).

Le sezioni circolari si disporranno quindi in serie su piani paralleli.

Troveremo che *qualunque quadrica (eccezion fatta del paraboloide iperbolico e della coppia di piani) possiede due serie di sezioni circolari.* Anche la sfera è esclusa dalle nostre considerazioni, perchè in questa quadrica tutte le sezioni piane sono cerchi.

550. La sezione di un piano Π con la quadrica sarà un circolo se ha per punti impropri i punti ciclici del piano Π: e poichè tutti i punti ciclici di piani dello spazio sono sul *cerchio assoluto* Γ, occorrerà che i punti improprii di tale sezione siano i punti di incontro del cerchio assoluto con piano Π. Questi punti, se appartengono alla sezione della quadrica col piano Π, sono anche punti della quadrica e dovendo essere sul piano improprio apparterranno alla conica C_∞ sezione della quadrica col piano improprio.

Concludiamo dunque che *i piani* Π *che determinano sezioni circolari sono quelli che passano per le coppie di punti, intersezioni del cerchio assoluto* Γ, *con la conica* C_∞.

Queste due coniche Γ, C_∞ si incontrano in quattro punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ immaginari (perchè il cerchio assoluto è una conica immaginaria) ma due a due coniugati (perchè le equazioni delle due coniche sono a coefficienti reali).

Se supponiamo P_1 coniugato a P_2, e P_3 a P_4, delle sei rette

$$P_1P_2,\ P_3P_4;\quad P_1P_3,\ P_2P_4;\quad P_1P_4,\ P_2P_3 \tag{32}$$

le quali, due a due considerate, formano *le tre coniche degeneri nel fascio* determinato dalle coniche fondamentali Γ, C_∞ (n.° 389, vol. I, pag. 313), solo la prima coppia sarà composta di rette reali, ed in corrispondenza di essa si avranno due sistemi di piani paralleli che producono sezioni circolari reali sulla quadrica.

La quadrica apparirà così ricoperta da una rete di cerchi, e per ogni punto di essa passeranno due cerchi, uno per ogni sistema, appartenenti alla quadrica.

551. Tutto ciò vale anche se la conica C_∞ è degenere; cioè anche per paraboloidi.

Ma se C_∞ degenera in due rette reali, cioè se il paraboloide è rigato, queste (dovendo passare per i punti P_1P_2, P_3P_4) costituiscono appunto la coppia P_1P_2, P_3P_4, la quale dunque, in questo caso appartiene per intero alla quadrica. Qualunque piano passante per una di queste rette taglia la quadrica in una seconda retta, ed è solo considerando una tal coppia di rette come un cerchio degenere (n.° 295, vol. I, pag. 252) che rimane valida la proposizione dimostrata.

552. Per determinare effettivamente le due serie di sezioni circolari, consideriamo prima il caso di **quadriche a centro**

di cui scriveremo l'equazione nella *forma normale* (n.° 525)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \tag{33}$$

L'equazione della C_∞ (sul piano improprio) è, per tali quadriche,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0, \tag{34}$$

e quella del circolo assoluto Γ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Eliminando x^2 abbiamo

$$(a_{22} - a_{11})y^2 + (a_{33} - a_{11})z^2 = 0, \tag{35}$$

eliminando y^2

$$(a_{11} - a_{22})x^2 + (a_{33} - a_{22})z^2 = 0, \tag{36}$$

eliminando z^2

$$(a_{11} - a_{33})x^2 + (a_{22} - a_{33})y^2 = 0; \tag{37}$$

queste rappresentano le tre coniche degeneri del fascio che ha per coniche fondamentali C_∞, Γ, cioè appunto le tre coppie di rette (32) (n.° 389).

Se supponiamo

$$a_{11} > a_{22} > a_{33}, \tag{38}$$

vediamo che di queste coppie solo la seconda, cioè quella rappresentata dalla equazione (36) è formata di rette reali. Scrivendone la equazione sotto la forma:

$$(a_{11} - a_{22})x^2 - (a_{22} - a_{33})z^2 = 0$$

cioè

$$(\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x + \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z)(\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x - \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z) = 0,$$

vediamo che i piani (passanti pel centro della quadrica)

$$\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x + \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z = 0 \tag{39}$$

$$\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x - \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z = 0 \tag{40}$$

producono sezioni circolari, e che, perciò, le due serie di sezioni circolari della quadrica sono prodotte dai piani rispettivamente paralleli ad essi.

Si può osservare che i piani (39) (40) passano per l'asse y, cioè per l'asse della quadrica che per le ipotesi (38) ha lunghezza media.

Se $a_{11} = a_{22}$, cioè se la quadrica è di *rotazione* le due serie di circoli coincidono in una sola, data dalle sezioni coi piani perpendicolari all'asse z di rotazione, ossia dai *paralleli* della quadrica.

553. Facilmente si dimostra che *ogni sfera condotta per un circolo della quadrica sega la quadrica in un secondo circolo, detto antiparallelo del primo.*

Perciò basterà provare che due circoli della quadrica appartenenti a serie diverse stanno sopra una stessa sfera.

Infatti, quando ciò sarà provato, preso un cerchio C_1 della prima serie e condotta una sfera arbitraria S per C_1, se con P si indica uno qualsivoglia dei punti della ulteriore intersezione della quadrica con questa sfera, tutto il cerchio C_2 della seconda serie passante per P, dovendo stare, insieme con C_1, sopra una stessa sfera, apparterrà ad S.

Per fare la dimostrazione osserveremo che la equazione complessiva dei piani di tali cerchi si scrive

$$(\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x + \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z - h)(\sqrt{a_{11} - a_{22}}\,x - \sqrt{a_{22} - a_{33}}\,z - k) = 0,$$

ossia, posto

$$a = -(k + h)\frac{\sqrt{a_{11} - a_{22}}}{2}, \quad b = -(k - h)\frac{\sqrt{a_{22} - a_{33}}}{2}, \quad c = hk,$$

$$(a_{11} - a_{22})x^2 + (a_{33} - a_{22})z^2 + 2ax + 2bz + c = 0;$$

sottraendo questa dalla equazione della quadrica (33), ne viene l'equazione di una terza superficie, passante per i punti comuni alle prime due,

$$a_{22}(x^2 + y^2 + z^2) - 2ax - 2bz - c = 0$$

e questa è appunto la equazione di una sfera (n.° 453) contenente i due cerchi e avente il centro sul piano xz.

554. Sezioni circolari ed ombelichi nell' ellissoide. Nella equazione normale dell' ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

supporremo $a^2 > b^2 > c^2$; applicando i risultati ottenuti al n.° 552 avremo:

I piani diametrali che producono sezioni circolari nell' ellissoide passano per l' asse medio, ed hanno la equazione complessiva

$$(41) \qquad x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Per l' ellissoide di rotazione, sia che si tratti *dell' ellissoide schiacciato* ($a^2 = b^2 > c^2$), sia che si tratti *dell' ellissoide allungato* ($a^2 > b^2 = c^2$) i due piani considerati vengono a coincidere in uno solo, e cioè, rispettivamente nel piano $z=0$ per l' ellissoide schiacciato, nel piano $x=0$ per l' allungato. In entrambi i casi *le due serie di circoli coincidono nei paralleli della quadrica.*

Corrispondentemente alle due serie di sezioni circolari si hanno nell' ellissoide *quattro ombelichi reali.*

Per trovare le coordinate $x'y'z'$ di un ombelico basterà esprimere la condizione che il piano tangente in un tale punto (n.° 485)

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1$$

risulta parallelo ad uno dei piani (41).

Tale condizione è espressa dalla proporzionalità dei coefficienti delle variabili, cioè dalle relazioni:

$$y'=0, \quad \frac{x'}{a^2}:\frac{z'}{c^2}=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\mp\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}};$$

la prima ci dice che *gli ombelichi sono nel piano xz*; dalla seconda, indicando con k un coefficiente di proporzionalità, abbiamo

$$(42) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x'}{a} &= ak\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}} \\ \frac{z'}{c} &= \mp ck\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}. \end{aligned}\right.$$

Osservando che gli ombelichi sono punti della ellisse principale sul piano xz, cioè soddisfano la relazione $\frac{x'}{a^2}+\frac{z'}{c^2}=1$, si ha dalle (42), quadrando e sommando:

$$k^2\,\frac{a^2-b^2}{b^2}+k^2\,\frac{b^2-c^2}{b^2}=1,$$

cioè

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2 - c^2}.$$

Sostituendo nelle (42) avremo le coordinate dei quattro ombelichi espressi dalle formule

$$(43) \qquad x' = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y' = 0, \quad z' = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Se $a = b$, oppure $b = c$, essi coincidono nei due vertici situati su l'asse di rotazione.

555. Sezioni circolari nei due iperboloidi e nel cono. Con procedimento analogo a quello tenuto per l'ellissoide si trova che *nell' iperboloide ad una falda* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ i piani diametrali producenti sezioni circolari passano per l'asse maggiore dell'ellisse di gola, e producono sezioni circolari di diametro uguale a questo asse.

Non si hanno ombelichi reali, perchè la quadrica è a punti iperbolici.

Nell'*iperboloide a due falde* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, i piani delle sezioni circolari sono gli stessi che per l'iperboloide ad una falda corrispondente ad uguali valori dei coefficienti a, b, c perchè le coniche C_∞ di tali quadriche sono le stesse. Si hanno quattro ombelichi reali che nella ipotesi $a < b$, sono situati nel piano xz, ed hanno le coordinate

$$x' = \pm a\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2}}, \quad y' = 0, \quad z' = \pm c\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}}.$$

Nel *cono quadrico*

$$(44) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

nell'ipotesi $a < b$, si hanno due serie di sezioni circolari con piani paralleli ai piani

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 0;$$

per *iperboloidi* e *coni di rotazione* le due serie coincidono in una sola.

556. Sezioni circolari nel paraboloide ellittico. Partendo dalla equazione

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

nella quale si suppone $p>q$, e considerando la conica C_∞ nel piano improprio

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0$$

insieme col cerchio assoluto

$$x^2+y^2+z^2=0$$

come fondamentali di un fascio, troviamo al solito modo tre coniche degeneri, delle quali una è la stessa C_∞ e le altre sono

$$\begin{cases} y^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{z^2}{q}=0 \\ x^2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{z^2}{p}=0. \end{cases}$$

La sola reale di queste è la $y^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{z^2}{q}=0$, la quale si spezza nei due piani

$$y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\pm\frac{z}{\sqrt{q}}=0,$$

cui corrispondono due serie di sezioni parallele, che coincidono in una sola (nei paralleli), nel caso del paraboloide rotondo.

E, con riflessioni analoghe a quelle fatte per l'ellissoide, troviamo che questa quadrica ha due *ombelichi reali*, le cui coordinate sono

$$(45) \qquad x'=0, \quad y'=\pm q\sqrt{\frac{p-q}{p}}, \quad z'=\frac{q}{p}\frac{p-q}{2}.$$

PARTE IV.

ELEMENTI DELLA TEORIA GENERALE DELLE CURVE E DELLE SUPERFICIE

CAPITOLO I.

CURVE PIANE

§ I. Rappresentazione analitica di curve piane.

557. Immaginando i punti della curva riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane, l' equazione della curva potrà assumere una delle tre forme seguenti:

I. La forma esplicita

$$y = f(x).$$

II. La forma implicita

$$F(xy) = 0.$$

III. La forma parametrica

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

dovè t è un parametro variabile ad ogni valore del quale, in campi determinati, corrisponde una coppia di valori x, y.

Similmente, riferendo la curva ad un insieme di coordinate polari si avranno le tre forme

$$\rho = f(\theta), \quad F(\rho,\ \theta) = 0, \quad \begin{cases} \rho = \varphi(t) \\ \theta = \psi(t). \end{cases}$$

558. Esempi di equazioni di curve riferite a coordinate cartesiane.

I. L' equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

rappresenta una **parabola con l' asse parallelo all' asse** y (n.° 289, vol. I, pag. 246).

L' equazione

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

rappresenta una curva la quale viene pure chiamata *parabola*, ed, a distinzione della parabola ordinaria (*parabola apolloniana*) vien detta *parabola di ordine n.*

II. Catenaria. L' equazione

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

rappresenta la curva secondo la quale si dispone un filo omogeneo pesante e perfettamente flessibile, i cui estremi sono attaccati a due punti fissi posti su di una stessa orizzontale.

È detta **catenaria**, ed ha molta importanza in matematica applicata.

III. La curva rappresentata da una equazione

$$F(xy) = 0$$

dove F è simbolo di polinomio di ordine m nelle due variabili x, y, è detta: **curva algebrica** *dell' ordine m.*

Sappiamo che *l' ordine di una curva algebrica non muta per una trasformazione di assi* (n.° 100, vol. I, pag. 77).

Si verifica immediatamente che *una curva algebrica di ordine m ha m punti in comune con una retta generica del piano.*

Infatti: assumendo la retta data come asse delle x, i punti di intersezione si hanno risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} a_{0m} y^m + a_{1\,m-1} x y^{m-1} + a_{2\,m-2} x^2 y^{m-2} + \dots + a_{m-1\,1} x^{m-1} y + a_{m0} x^m + \\ + a_{0\,m-1} y^{m-1} + a_{1\,m-2} x y^{m-2} + \dots + a_{m-2\,1} x^{m-2} y + a_{m-1\,0} x^{m-1} + \\ + \dots + a_{01} y + a_{10} x + a_{00} = 0 \end{aligned}$$
$$y = 0,$$

cioè sono i punti dell' asse x che hanno per ascisse le radici della equazione

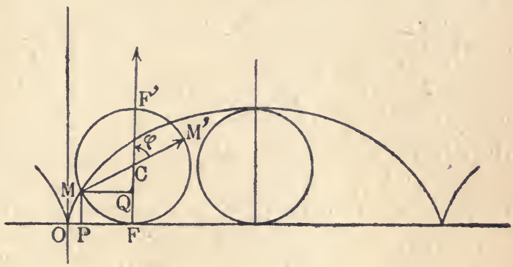
$$a_{m0} x^m + a_{m-1\,0} x^{m-1} + \dots + a_{00} = 0.$$

Questa (tenendo conto delle eventuali radici infinite corrispondenti a coefficienti nulli delle più alte potenze delle x, e contando le radici secondo l'ordine loro di molteplicità) ha sempre m radici, reali o complesse.

IV. Cicloide. Le equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

rappresentano una curva assai notevole detta **cicloide,** *la quale è generata da un punto determinato della circonferenza di un dato cerchio quando questo rotola senza strisciare sopra una retta data.*



Ed infatti: assumiamo come asse x la retta su cui rotola il dato cerchio, per origine uno dei punti in cui la curva taglia l'asse della x (cioè in cui il punto M del cerchio mobile si trova su la retta data); indichiamo con C il centro del cerchio, con r_1 la retta cui appartiene il segmento MC orientata nel senso MC.

Poniamo inoltre:

$$\begin{cases} r = \overline{FC} = |\overline{MC}| = \overline{MC} \\ \varphi = \widehat{MCF} = \widehat{M'CF'} \end{cases}$$

(indichiamo cioè con r il valore assoluto del raggio e con φ l'angolo che r_1 forma con la parte positiva dell'asse y) e finalmente, supponiamo la curva situata nel semipiano positivo, rispetto all'asse x. Si ha

$$\overline{PF} = \overline{MC} \operatorname{sen} \widehat{r_1 y}, \quad \overline{QC} = \overline{MC} \cos \widehat{r_1 y}$$

$$\begin{cases} x = \overline{OP} = \overline{OF} - \overline{PF} = \overline{OF} - \overline{MC} \operatorname{sen} \widehat{r_1 y} \\ y = \overline{FQ} = \overline{FC} - \overline{QC} = \overline{FC} - \overline{MC} \cos \widehat{r_1 y}. \end{cases}$$

Per le condizioni dell'enunciato si ha poi:

$$\overline{OF} = \text{arco } MF = r\varphi$$

dunque

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi). \end{cases}$$

OSSERVAZIONI.

1.ª Le equazioni (1) ci dicono che la x è funzione di φ sempre crescente, che assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$; la y, invece, è funzione *positiva periodica*, che varia da 0 a $2\pi r$, e riprende il proprio valore, quando la variabile φ aumenta di 2π. Si ha cioè

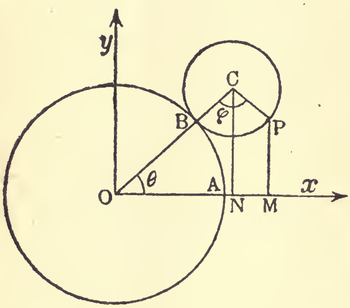
$$y(\varphi + 2\pi) = y(\varphi).$$

Ciò significa che, dopo ogni intero giro, il punto M si trova ad una distanza dall' asse eguale alla primitiva.

In particolare la curva incontra l' asse nei punti... -2π, 0, 2π, 4π,...

2.ª La curva si compone di infiniti archi, tutti fra loro congruenti, sovrapponibili con traslazioni di un multiplo intero (positivo o negativo) di 2π, nella direzione dell' asse x.

3.ª Per ascisse crescenti ed ordinate positive, il moto istantaneo di rotazione del punto M, che descrive la curva, è *destrorso*: cioè ha senso negativo rispetto al sistema degli assi cartesiani. Tale senso risulterebbe positivo riferendo la curva ad un sistema nel quale l' asse y coincidesse colla retta su cui rotola il cerchio generatore, e supponendo la curva nel semipiano positivo, rispetto all' asse y stesso.



V. EPICICLOIDE ED IPOCICLOIDE. *La curva generata da un punto dato di un circolo che rotoli sulla parte esterna di un circolo fisso* (cioè mantenendosi tangente esternamente ad esso) è detta **epicicloide**. Siano O, C i centri del circolo fisso e del circolo mobile, B il punto di contatto, P il punto descrivente l'epicicloide ed A la posizione iniziale di P. Sia pure

$$\overline{BC} = b, \ \overline{OA} = \overline{OB} = a, \quad \widehat{AOB} = \theta, \ \widehat{BCN} = \varphi$$

allora

$$x = \overline{ON} + \overline{NM} = (a+b)\cos\theta + b \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) =$$
$$= (a+b)\cos\theta - b\cos(\varphi + \theta).$$

Ma arc $AB =$ arc BP cioè

$$a\theta = b\varphi$$

onde

$$x = (a + b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta.$$

Similmente

$$y = (a + b)\,\mathrm{sen}\,\theta - b\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b}{b}\theta.$$

Se $a = b$, la epicicloide è una curva detta **cardioide**, che vedremo fra poco.

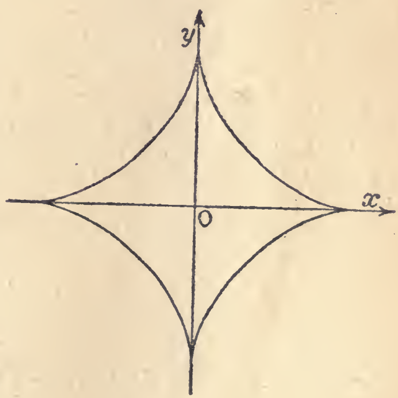
L'ipocicloide *è la curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola sulla parte interna di un circolo fisso* (cioè mantenendosi tangente internamente ad esso). Procedendo come per l'epicicloide si trovano le equazioni parametriche

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta,\quad y = (a - b)\,\mathrm{sen}\,\theta - b\,\mathrm{sen}\,\frac{a-b}{b}\theta.$$

Il raggio del circolo che rotola può essere maggiore o minore di quello del circolo fisso sì nell'epicicloide che nell'ipocicloide. È facile vedere che un'ipocicloide nella quale il raggio del circolo mobile sia maggiore di quello del circolo fisso, si può riguardare come una epicicloide. Infatti nelle equazioni dell'ipocicloide si ponga $\frac{b-a}{b}\theta = \varphi$, ne verrà:

$$\begin{cases} x = b\cos\varphi - (b - a)\cos\dfrac{b}{b-a}\varphi \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\varphi - (b - a)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{b}{b-a}\varphi, \end{cases}$$

e queste sono le equazioni di una epicicloide nella quale il raggio del cerchio fisso è a, e quello del cerchio mobile, $b - a$.



Un caso notevole è quello in cui $a = 4b$. Le equazioni delle ipocicloide divengono allora:

$$x = a\cos^3\theta$$
$$y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta.$$

Innalzando alla potenza

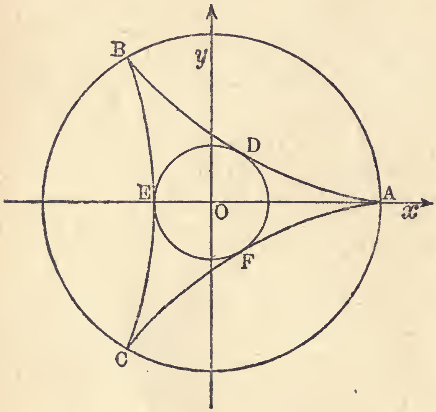
di esponente $\frac{2}{3}$ e sommando si ha l'equazione

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

la quale rappresenta una curva assai notevole, detta **asteroide.**

Altro caso notevole è quello di $a = 3b$.

Le equazioni assumono la forma:



$$\begin{cases} x = \frac{a}{3}(2\cos\theta + \cos 2\theta) \\ y = \frac{a}{3}(2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta), \end{cases}$$

la curva presenta la forma indicata dalla figura qui disegnata, ed è conosciuta sotto il nome di **ipocicloide tricuspidale:** i punti A, B, C sono vertici di un triangolo equilatero. Il cerchio DEF inscritto alla curva ha raggio eguale ad $\frac{1}{3}$ del raggio del cerchio ABC.

VI. Curve razionali. Si dicono *razionali* od *unicursali*, le curve per le quali le coordinate cartesiane x, y del punto generico $P(xy)$, sono *funzioni razionali* di un parametro t.

La rappresentazione parametrica di una curva razionale è dunque della forma:

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \quad y = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(t)}, \tag{3}$$

con f, φ, f_1, φ_1 funzioni razionali ed intere nella t.

Si vede immediatamente che *qualunque curva razionale è algebrica.*

Infatti scrivendo le (3) sotto la forma

$$\begin{cases} x\varphi(t) - f(t) = 0 \\ y\varphi_1(t) - f_1(t) = 0, \end{cases}$$

ed eliminando fra queste la t, se $R(x, y)$ è il risultante di questa eliminazione, la equazione cartesiana della curva assumerà la forma:

$$R(xy) = 0,$$

dove R indica un polinomio intero in x. y.

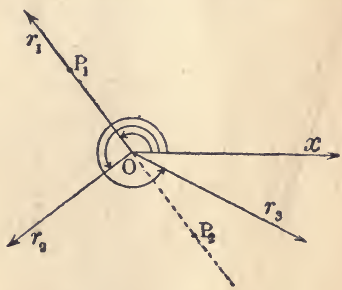
559. Esempi di curve riferite a coordinate polari. Per la rappresentazione analitica di una curva, si possono usare **coordinate polari ordinarie**, o **coordinate polari generali** (n.[i] 101, 102, vol. I, pag. 78, 79).

Quando si usano coordinate polari ordinarie, si suppone ρ sempre positivo e θ variabile da 0 a 2π.

Quando si usano coordinate polari generali, si suppone θ liberamente variabile da $-\infty$ a $+\infty$, e non si escludono valori negativi per la ρ.

Le coordinate polari generali servono utilmente allo studio di quelle curve (*spirali*) che fanno parecchi (od anche infiniti) giri intorno al polo.

Quindi, anche nel primo giro, l'anomalia, in coordinate polari, varia da 0 a 2π, ed il raggio mobile riprende la medesima posizione, nei giri successivi, per variazioni della anomalia di multipli (positivi o negativi) di 2π.



Per un raggio vettore qualsiasi è naturalmente fissato l'orientamento, poichè di esso si considera solo il semiraggio che forma con l'asse polare l'anomalia θ, che serve a determinare il raggio medesimo.

Se ρ è un determinato numero positivo, il punto $P_1(\rho\theta)$ si trova su tale semiraggio alla distanza $|\overline{OP_1}| = \rho$ dal polo.

Invece il punto $P_2(-\rho, \theta)$ si trova sul semiraggio ad esso opposto, ad una egual distanza dal polo.

Il punto P_2 dunque, corrisponde anche alle coordinate $(\rho, \theta + \pi)$.

560. Assi e centri di simmetria. Per l'uso di coordinate polari è utile il menzionare alcuni semplici criteri analoghi a quelli dati al n.° 105 V, VI, per verificare se una data curva

possiede assi o centri di simmetria che coincidano con gli elementi di riferimento.

Data la equazione di una curva $f(\rho, \theta) = 0$ in coordinate polari (ordinarie, o generali) si vede che **il polo è centro di simmetria** se il primo membro non muta lasciando invariato ρ e cambiando θ in $\theta + \pi$.

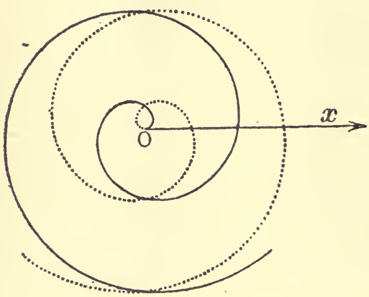
Od anche, (in coordinate polari generali), se $f(\rho, \theta)$ non muta lasciando invariato θ e mutando ρ in $-\rho$.

L'asse polare è asse di simmetria, se $f(\rho, \theta)$ non muta, lasciando ρ immutato, e cambiando θ in $-\theta$ o in $2\pi - \theta$; oppure, in coordinate polari generali, cambiando ρ in $-\rho$, e θ in $\pi - \theta$.

La perpendicolare all'asse polare è asse di simmetria se $f(\rho, \theta)$ non cambia cambiando θ in $\pi - \theta$ e lasciando immutato ρ; oppure, in coordinate polari generali, mutando ρ in $-\rho$ e θ in $-\theta$, o in $2\pi - \theta$.

561. Ciò premesso, ecco la espressione analitica di alcune fra le curve più note, riferite a coordinate polari.

I. **La spirale di Archimede** è la curva la cui equazione, in coordinate polari generali, ha la forma



$$\rho = a\theta,$$

ed esprime quindi *proporzionalità fra il raggio vettore e l'anomalia.*

Si può anche definire come la *traiettoria descritta da un punto che si muove di moto uniforme su di una retta, la quale, restando in un piano, ruota di moto circolare uniforme attorno ad un suo punto.*

Il parametro a è il rapporto delle velocità dei due moti, rettilineo e circolare.

L'asse polare Ox è la posizione della retta mobile quando il punto mobile è in O.

In ogni retta uscente dalla origine giacciono infiniti punti della curva, che hanno raggi vettori dati da

$$\rho = \theta a \pm 2\pi ka, \quad \text{oppure da} \quad \rho = (\pi - \theta)a \pm 2\pi ka.$$

Se (ρ, θ) è un punto della curva, lo è anche $(-\rho, -\theta)$; *la curva perciò possiede una* **simmetria ortogonale** *rispetto alla normale all' asse polare uscente dal polo.*

II. Lemniscata. L' equazione

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

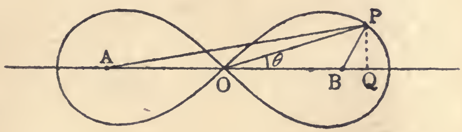
rappresenta una curva assai importante, conosciuta sotto il nome di **Lemniscata**.

Il valore di ρ non cambia, cambiando θ in $-\theta$, dunque la curva è *simmetrica rispetto all' asse polare.*

Non cambia nemmeno cambiando θ in $\theta + \pi$, dunque essa è *simmetrica anche rispetto al polo.*

Questa curva rappresenta il *luogo dei punti le cui distanze* $|\overline{PA}|$, $|\overline{PB}|$ *dagli estremi* A, B *di un segmento di lunghezza* $2a$, *hanno prodotto costante ed eguale a* a^2; cioè: $|\overline{PA}| \cdot |\overline{PB}| = a^2$.

Per dimostrare ciò, assumiamo come polo il punto di mezzo O del segmento AB, come asse polare il raggio OB.



Condotta la perpendicolare PQ si ha

$$\overline{PB}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{PQ}^2 + (\overline{OQ} - \overline{OB})^2$$
$$= \rho^2 \operatorname{sen} \theta + (\rho^2 \cos \rho - a)^2$$

cioè

$$\overline{PB}^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \theta;$$

analogamente

$$\overline{PA}^2 = \rho^2 + a^2 + 2a\rho \cos \theta,$$

onde

$$\overline{PA}^2 \cdot \overline{PB}^2 = (\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2 \cos^2 \theta$$

ma deve aversi

$$|\overline{PA} \ \overline{PB}| = a^2,$$

cioè:

$$\overline{PA}^2 \cdot \overline{PB}^2 = a^4,$$

dunque

$$\rho^4 + 2a^2\rho^2 - 4a^2\rho^2 \cos^2 \theta = 0$$

cioè

$$\rho^2 - 2a^2 (2 \cos^2 \theta - 1) = 0,$$

o infine

$$\rho^2 - 2a^2 \cos 2\theta = 0.$$

In *coordinate cartesiane* l'equazione della Lemniscata è

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Da ciò si scorge che la *Lemniscata è una curva algebrica del 4.° ordine* (quartica).

III. Cassinoidi. La Lemniscata può considerarsi come un caso particolare delle curve dette **Ellissi cassiniane o cassinoidi** che si possono definire come il *luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi (detti fuochi) hanno un prodotto costante* b^2. Sia $2a$ la reciproca distanza dei due punti fissi A e B. Scegliendo la AB come asse della x e la perpendicolare nel punto medio di AB, come asse delle y, dette x ed y le coordinate in un punto M della cassinoide, si ha subito

$$\sqrt{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]} = b^2$$

d'onde, quadrando:

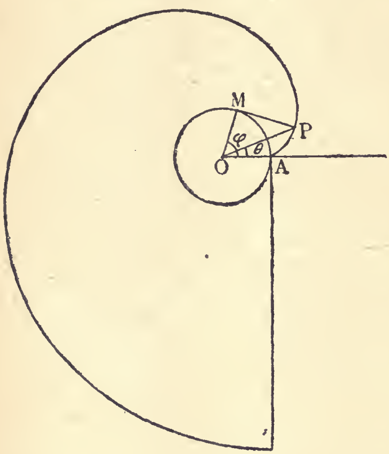
$$(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4$$

cioè

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4.$$

Per $a = b$ si ha appunto la *Lemniscata*.

IV. Evolvente del cerchio. Per dare un esempio di rappresentazione parametrica di una curva, in coordinate polari, cerchiamo la **evolvente del cerchio** uscente da un punto dato A della circonferenza.



Immaginiamo il cerchio riferito ad un sistema di coordinate polari (ordinarie) col polo nel centro: indicando con r il raggio, la equazione del cerchio è semplicemente $\rho = r$.

Condotto il raggio OM che forma angolo coll'asse polare, si tiri la tangente MP in M, ed in questa si porti un segmento $\overline{MP}$ eguale in lunghezza all' arco MA, con verso concorde con quello dell' arco MA stesso.

La curva luogo del punto P è quella appunto che viene detta *evolvente del cerchio.*

Ora si ha

$$\overline{PM} = \text{arco } \overline{AM} = \overline{OA} \cdot \varphi = r\varphi,$$

$$\rho^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 = r^2 + r^2\varphi^2 = r^2(1 + \varphi^2);$$

e infine

$$\rho = r\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Inoltre

$$\theta = \varphi - P\widehat{O}M = \varphi - \text{arc tg} \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$$

ma

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{\text{arc } AM}{\overline{OA}} = \varphi,$$

dunque

$$\theta = \varphi - \text{arc tg}\, \varphi.$$

In conclusione le equazioni cercate sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho = r\sqrt{1 + \varphi^2} \\ \theta = \varphi - \text{arc tg}\, \varphi. \end{cases}$$

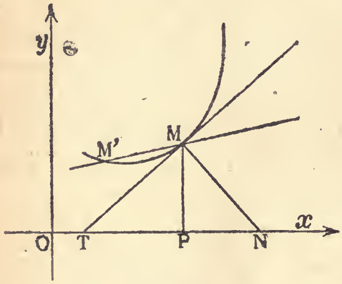
La nostra figura rappresenta il tratto di curva corrispondente a ρ positivo ed a φ variabile da 0 a 2π.

Considerando la curva come riferita a coordinate polari generali, si può supporre φ variabile da $-\infty$ a $+\infty$. È opportuno peraltro mantenere il segno positivo pel radicale $\sqrt{1 + \varphi^2}$, e, fra gli infiniti valori di arc tg φ, scegliere il valore positivo che è nullo per $\varphi = 0$. Vediamo dalle (1) che la evolvente si svolge in infinite spire. Per valori negativi di φ si ha un altro ramo di curva, simmetrico di quello disegnato rispetto all' asse polare.

Le tangenti al cerchio incontrano ortogonalmente ciascun ramo della evolvente in infiniti punti, tutti fra loro equidistanti di un tratto uguale alla circonferenza del cerchio.

§ II. Tangenti.

562. Tangente *ad una curva in un punto M è la posizione limite della secante MM' passante per il punto M e per un altro punto M' da che percorre la curva tendendo ad M, cioè avvicinandosi ad M in modo che la distanza $\overline{MM'}$ divenga, in valore assoluto, minore di qualsivoglia numero positivo.*



Se indichiamo con (x, y) le coordinate di M, con $F(x, y) = 0$ l'equazione della curva e con X, Y **coordinate correnti** [1] di un punto appartenente alla retta MM', potremo indicare le coordinate di M' con $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ e l'equazione della retta MM' sarà

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x).$$

Il coefficiente angolare $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando si consideri la y come funzione della x, data implicitamente dalla $F(xy) = 0$, si può scrivere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

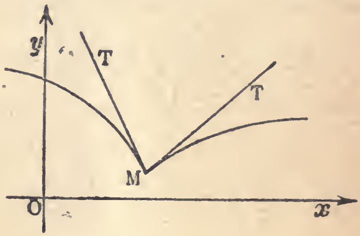
ed è, come si è visto nel corso di Analisi [2] *il* **rapporto incrementale** *della* $y(x)$. Segue da ciò che, se la secante, col tendere del punto M' al punto M tenderà verso una posizione limite determinata, il rapporto incrementale $\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$ per $\Delta x \rightarrow 0$ avrà un limite determinato, finito od infinito (che sarà

(1) Le coordinate X, Y, di un punto generico $P(XY)$ di una data curva, sono dette **coordinate correnti sulla curva.**

(2) Cfr. Pincherle, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, Cap. XIV, § I.

la derivata $\left.\frac{dy}{dx}\right)$, il quale ci darà il valore del coefficiente angolare della tangente.

E reciprocamente, se esiste derivata ordinaria $\frac{dy}{dx}$ della $y(x)$ nel punto considerato, questa ci rappresenterà il coefficiente angolare della tangente alla curva in tale punto. Se poi esistesse solo la derivata a destra o solo la derivata a sinistra, nel punto considerato, vale a dire se il rapporto incrementale avesse limite a destra, (o limite a sinistra) per accrescimenti positivi Δx, o se esistessero, ma non fossero fra loro uguali, le derivate a destra ed a sinistra, la curva nel punto $M(xy)$ avrebbe una tangente a destra (od una a sinistra) determinata, il cui coefficiente angolare sarebbe eguale alla derivata a destra (o a sinistra); e la tangente a destra potrebbe essere diversa dalla tangente a sinistra. Questi punti nei quali esistono le derivate a destra ed a sinistra e non sono uguali fra loro sono detti **punti angolari** (*salienti*) *della curva.*



563. Consideriamo come **punti ordinari** *della curva quelli in cui esiste tangente unica e determinata, quelli cioè in cui la funzione ha derivata ordinaria* (finita od infinita).

L'equazione della tangente in un punto ordinario sarà dunque

$$(1) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

che può scriversi sotto la forma

$$(1') \qquad (Y - y)dx - (X - x)dy = 0,$$

in cui si contengono solo differenziali del primo ordine. Se consideriamo y come funzione implicita della x data dalla equazione della curva, $F(xy)=0$, avremo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

epperò l'equazione della tangente avrà la forma:

$$(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

Se la curva è data mediante le equazioni parametriche $x=x(t)$, $y=y(t)$, si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

quindi l'equazione della tangente si scriverà

$$Y-y=\frac{y'(t)}{x'(t)}(X-x) \tag{3}$$

ossia

$$\frac{X-x}{x'(t)}=\frac{Y-y}{y'(t)}.$$

Riassumendo abbiamo per la equazione della tangente alla curva in un punto xy, le forme:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \tag{4}$$

$$(Y-y)dx-(X-x)dy=0 \tag{5}$$

$$(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}=0 \tag{6}$$

$$\frac{X-x}{x'(t)}-\frac{Y-y}{y'(t)}=0. \tag{7}$$

Osservazione. Le formule trovate danno, in valore e segno, il coefficiente angolare della tangente, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla tangente alla curva con l'asse delle x. Indicando con α quest'angolo si ha dunque

$$\operatorname{tg}\alpha=y'(x).$$

Di qui

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ricordando che sen α è sempre positivo, (n.° 138, Vol. I, pg. 113) vediamo che, **in queste formule il segno del radicale deve esser preso eguale a quello di y'.**

564. Inviluppi di rette. Se la curva vien considerata, non come *luogo di punti*, ma come **inviluppo di rette**, *ad essa tangenti*, essa può rappresentarsi mediante una equazione in coordinate di retta

$$F(u, v) = 0.$$

In questa rappresentazione le tangenti sono date dalle rette $r(u, v)$ le cui coordinate soddisfano alle equazioni dell'inviluppo.

Questa rappresentazione è quindi particolarmente utile quando si cercano **le tangenti comuni a due curve.**

Per risolvere tale problema basterà infatti scrivere le equazioni dei due inviluppi aderenti alle date curve,

$$\begin{cases} F(u, v) = 0 \\ \Phi(u, v) = 0, \end{cases}$$

considerar queste come simultanee, e cercare le coppie u, v, che sono soluzioni di questo sistema.

Occorre perciò saper scrivere *la equazione di una curva inviluppo, nota la equazione della curva, luogo di punti, ad essa aderente.*

Supponiamo dunque data la equazione di una curva, considerata come luogo di punti (equazione **locale**)

$$F(x, y) = 0;$$

scrivendo la equazione della tangente ad essa nel punto generico (x, y)

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}} X + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}} Y = 1$$

vediamo che *le coordinate plückeriane della tangente alla curva* $f(xy) = 0$ *nel suo punto generico* (xy), sono (n.° 149, Vol. I, pg. 121)

$$(1) \qquad u = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}, \quad v = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Basterà dunque *eliminare i parametri* x, y, *dal sistema formato dalle equazioni* (1) *e dalla equazione del luogo* $f(xy) = 0$, *per ottenere la equazione dell' inviluppo aderente* (ossia *l' equazione* **tangenziale** della curva data)

$$F(u, v) = 0,$$

come risultante di questa eliminazione.

Così, data la equazione del cerchio (luogo di punti)

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

si ha

$$u = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

da cui, quadrando e sommando,

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2}.$$

565. L' inviluppo rappresentato dalla equazione tangenziale

$$f(u, v) = 0$$

in cui il primo membro è un polinomio intero di grado m

complessivamente nelle varsabili u, v, è detta *inviluppo algebrico di* classe m (n.° 151).

Una *correlazione piana* (n.° 441. Vol. I, pg. 366) *muta una curva algebrica di ordine m, in un inviluppo algebrico di classe m, e reciprocamente.*

566. Il problema correlativo a quello di trovare la equazione della tangente nel punto $P(xy)$ ad una curva luogo di punti, è quello di *trovare il punto di contatto di una data retta $r(\bar{u}\,\bar{v})$ tangente alla curva inviluppo $F(uv)=0$.*

Considerando il punto di contatto di $r(uv)$ come la posizione limite della intersezione della retta $r(\bar{u}\,\bar{v})$ con una retta $r(u_1v_1)$ che, percorrendo l'inviluppo si accosti indefinitamente ad essa, dovremo anzitutto scrivere la equazione del punto di intersezione di quelle due rette (n.° 150, Vol. I, pg. 122)

$$v-\bar{v}=\frac{v_1-\bar{v}}{u_1-\bar{u}}(u-\bar{u}),$$

poi cercare il limite per $u_1 \longrightarrow \bar{u}$ di $\dfrac{v_1-\bar{v}}{u_1-\bar{u}}$.

Considerando la v come funzione implicita della u data mediante la $F(uv)=0$, avremo

$$\lim_{u_1 \longrightarrow \bar{u}} \frac{v_1-\bar{v}}{u_1-\bar{u}}=\left(\frac{dv}{du}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ v=\bar{u}}}=-\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ v=\bar{v}}}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ v=\bar{v}}}}.$$

Infine avremo la equazione del punto di contatto della tangente $r(\bar{u}\,\bar{v})$ sotto la forma

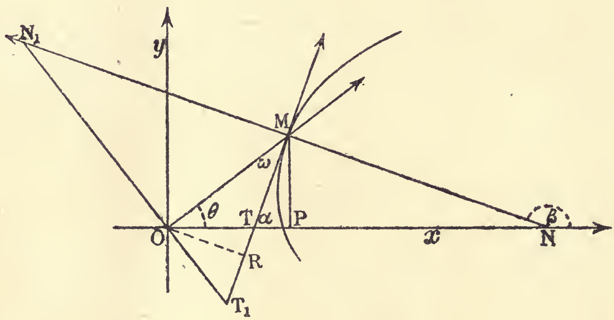
$$v-\bar{v}=-\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ v=\bar{v}}}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ v=\bar{v}}}}(u-\bar{u}).$$

§ III. Tangente, normale, sottotangente, sottonormale geometriche.

567. *Per* **tangente geometrica** *di una curva $f(xy)$ riferita ad assi cartesiani ortogonali, in un punto $M(xy)$, si intende la lunghezza $\overline{TM}$ del segmento di tangente uscente da M, determinato dal punto M e dal punto di incontro T con l'asse delle x (contata a partire da T).*

Indicando con l_t tale lunghezza, si ha in valore assoluto

$$(8) \qquad l_t = \overline{TM} = \frac{\overline{PM}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}.$$



E per le convenzioni fatte al n.° 91 vediamo che *la tangente geometrica ha segno eguale a quello della ordinata y.* Cioè è positiva per punti del semipiano superiore, negativa per punti del semipiano inferiore.

Per **normale geometrica,** *si intende la lunghezza $\overline{NM}$ del segmento di normale compreso fra il punto M della curva, ed il punto N dove la normale sega l'asse x, (contata a partire da N).*

Indicando con l_n tale lunghezza, si ha in valore assoluto

$$(9) \qquad l_n = \overline{NM} = \frac{\overline{PM}}{\cos \widehat{PMN}} = \frac{y}{\cos \alpha} = y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Anche la normale geometrica ha segno eguale a quello della ordinata.

568. *I numeri che misurano le proiezioni $\overline{TP}$, $\overline{NP}$ della tangente e della normale geometrica sull' asse delle x si dicono rispettivamente* **sottotangente** *e* **sottonormale.**

Indicando questi numeri con s_t, s_n, si ha

$$s_t = \overline{TP} = \overline{TM} \cos\alpha = \frac{y}{y'}. \tag{10}$$

Di qui si vede, in particolare, che *la sottotangente è positiva, se nel punto M dove essa è calcolata, la $y(x)$ e la derivata $y'(x)$ hanno segni eguali, è negativa se contrari.*

Per calcolare il valore della sottonormale basta considerare che il coefficiente angolare della normale è $\mu = -\frac{1}{y'}$ (per la condizione di ortogonalità fra la tangente e la normale): l'equazione della normale è dunque

$$Y - y + \frac{1}{y'}(X - x) = 0.$$

La sottonormale è $\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON}$; ma $\overline{OP} = x$; $\overline{ON}$, ascissa all' origine della normale, è $x + yy'$, da ciò segue che

$$s_n = -yy'. \tag{11}$$

In particolare vediamo che *la sottotangente* e *la sottonormale hanno sempre segni contrari.*

569. Se l' equazione della curva è data sotto la forma implicita

$$F(xy) = 0,$$

ricordando che

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

si ha

$$s_t = -\frac{y\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}, \qquad s_n = y\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

$$l_t = -y\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}, \qquad l_n = -\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Usando la notazione differenziale $y' = \frac{dy}{dx}$, si ha:

$$s_t = \frac{ydx}{dy}, \quad s_n = -\frac{ydy}{dx},$$

$$l_t = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}, \quad l_n = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Se la curva è data mediante le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

si ha

$$s_t = \psi\frac{\varphi'}{\psi'}, \quad s_n = -\psi\frac{\psi'}{\varphi'},$$

$$l_t = \psi\frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\psi'}, \quad l_n = \psi\frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi'}.$$

570. Angolo del raggio vettore, condotto dalla origine al punto di contatto, con la tangente.

Consideriamo la tangente ed il raggio vettore come rette orientate, ed indichiamole con t, r; avremo la identità angolare $\widehat{rt} = \widehat{xt} - \widehat{xr}$.

Se dunque indichiamo con ω l'angolo $\widehat{rt}$ della tangente col raggio vettore, con θ l'anomalia del punto M, con α l'angolo della tangente con l'asse x, avremo (comunque sia disposta la figura):

$$\omega = \alpha - \theta$$

da cui

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ma

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{dy}{dx},$$

dunque

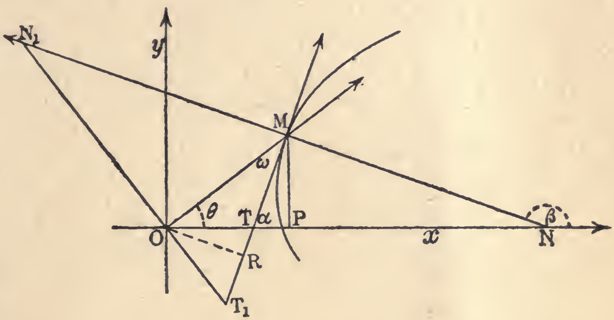
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}. \tag{12}$$

Se l'equazione della curva è riferita ad un sistema di coordinate polari si ha la (12) sotto la forma

$$\operatorname{tg}\widehat{rt} = \operatorname{tg}\omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}. \tag{12'}$$

571. Sempre nella ipotesi che la curva sia riferita ad un sistema di coordinate polari, conduciamo pel polo la normale N_1OT_1 al raggio vettore OM, e chiamiamo N_1, T_1 i punti dove questa normale, rispettivamente, sega la normale e la tangente in M alla curva.

Le lunghezze $\Sigma_t = \overline{OT_1}$, $\Sigma_n = \overline{ON_1}$ *dei segmenti di questa normale compresi fra il polo O ed i punti* T_1, N_1, *in cui essa interseca la tangente, e la normale alla curva, contati a partire dal polo, si dicono rispettivamente* **sottotangente polare** *e* **sottonormale polare.**



Per quel che riguarda i *valori assoluti* di questi segmenti, si vede subito che

$$|\Sigma_t| = |\overline{OT_1}| = |\rho \operatorname{tg} \omega| = \rho^2 \left|\frac{d\theta}{d\rho}\right|$$

$$|\Sigma_n| = |\overline{ON_1}| = |\rho \operatorname{cotg} \omega| = \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|.$$

Per determinare anche il segno dei segmenti $\overline{OT_1}$, $\overline{ON_1}$, che escono dalla origine O, basterà conoscere le coordinate degli estremi T_1, N_1, (n.° 95, Vol. I, pg. 72).

Le coordinate di T_1 (punto di incontro della tangente colla normale al raggio vettore), sono date dal sistema

$$\begin{cases} Ydx - Xdy = ydx - xdy \\ Yy + Xx = 0 \end{cases}$$

cioè sono:

$$\begin{cases} X = y\,\dfrac{xdy - ydx}{xdx + ydy} = y \operatorname{tg} \omega \\[2ex] Y = -x\,\dfrac{xdy - ydx}{xdx + ydy} = -x \operatorname{tg} \omega. \end{cases}$$

E poichè il segno di $\overline{OT_1}$ è dato dal segno della ordinata Y, (quando questa non è nulla), vediamo che il *segno della sottotangente polare è eguale o contrario a quello di* $\operatorname{tg}\omega$ (cioè in coordinate polari ordinarie, di $\left.\frac{d\rho}{d\theta}\right)$, *secondo che l'ascissa del punto di contatto è negativa o positiva; se questa ascissa è nulla, il segno di* $\overline{OT_1}$ *è eguale o contrario a quello di* $\operatorname{tg}\omega$, *secondo che la ordinata del punto di contatto è positiva o negativa.*

Se non si vuol far uso, nella applicazione di questo criterio, di coordinate cartesiane, basterà notare che il segno di $x \operatorname{tg}\omega$ concorda con quello di $\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\omega$; o, nella ipotesi di ρ positivo, con quello di $\operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\omega$.

Il segno di $\overline{ON_1}$ si determina in modo analogo, e si può anche a priori stabilire osservando che deve essere sempre contrario a quello di $\overline{OT_1}$.

Avremo dunque che: *In coordinate polari ordinarie, per punti M aventi ascissa positiva la sottonormale polare* $\overline{ON_1}$ *è eguale, in valore e segno, alla derivata* $\frac{d\rho}{d\theta}$*: per punti M aventi ascissa negativa, è eguale in valore assoluto e di segno contrario.*

572. La distanza della tangente della origine, si ricava immediatamente dalla equazione della tangente, essa è data dalla formula:

$$p = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

nella quale il segno del radicale deve concordare con quello del coefficiente di Y nella equazione della tangente (n.° 138, Vol. I, pg. 114) cioè *deve essere positivo.*

Se scriviamo tale distanza sotto la forma

$$p = \frac{ydx - xdy}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

dovremo dare al radicale il segno di dx.

In coordinate polari avremo analogamente:

$$p = \frac{-\rho^2 d\theta}{\pm\sqrt{\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2}}.$$

573. Esempi. 1°. Iperbole riferita agli asintoti

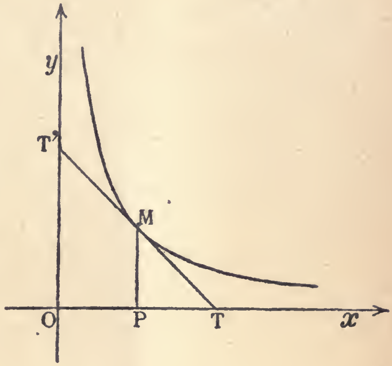
$$xy = m^2.$$

Si ha $y' = -\frac{m^2}{x^2} = -\frac{y}{x}$, l'equazione della tangente nel punto generico (xy) è

$$y(X - x) + x(Y - y) = 0$$

od anche

$$xY + Xy = 2xy = 2m^2.$$



Quella della normale è

$$y(Y - y) - x(X - x) = 0$$

od anche

$$yY - xX = y^2 - x^2.$$

Le sottotangenti e sottonormali sono rispettivamente espresse da

$$s_t = y\frac{dx}{dy} = y\frac{-x}{y} = -x, \quad s_n = -y\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x}.$$

Cioè il piede della perpendicolare calata dal punto M sull'asse x è ad ugual distanza dall'origine e dal piede della tangente.

Si vede poi subito che *la tangente geometrica è uguale al raggio vettore* (considerato in valore e segno).

2°. Parabola

$$y^2 = 2px;$$

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

L'equazione della tangente è

$$(Y - y) = \frac{p}{y}(X - x)$$

ossia

$$yY - y^2 = pX - px, \quad yY = p(X + x).$$

La sottotangente è

$$s_t = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

cioè la sottotangente è doppia dell' ascissa. La sottonormale è

$$s_n = -p$$

cioè la *sottonormale è costante ed eguale in valore assoluto al parametro.*

3°. Parabola generale:

$$y^m = a \cdot x$$

$$y = a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$$

$$y' = \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}-1}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{\frac{1}{m}} \; x^{\frac{1}{m}}}{x}$$

$$= \frac{1}{m} \frac{y}{x}.$$

L' equazione della tangente è

$$mx(Y - y) = y(X - x).$$

La sottotangente e la sottonormale sono rispettivamente

$$s_t = mx, \quad s_n = \frac{-y^2}{mx} = \frac{-a}{my^{m-2}}.$$

4°. Curva esponenziale

$$y = ce^{\frac{x}{a}}$$

$$y' = \frac{c}{a} e^{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} y.$$

La sottotangente è

$$s_t = a,$$

cioè è costante, e la sottonormale è

$$s_n = \frac{-y^2}{a}.$$

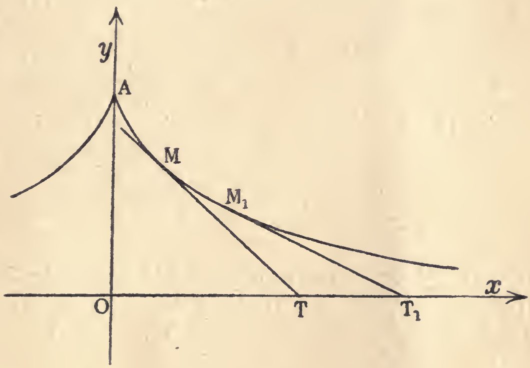
5°. **Trattrice.** La curva data, in forma parametrica, dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = -a\left(\lg \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right) \\ y = a \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

ossia dalla

$$x = a \lg \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

è detta **trattrice, o curva del cane,** ed è la linea che verrebbe percorsa da un cane legato ad una catena di lungezza $\overline{OA} = a$, e mantenuta sempre tesa, quando l' altro estremo della catena fosse tenuto da una persona che si muovesse sopra l' asse x.



Questa linea ha la proprietà (caratteristica) che la *tangente geometrica $\overline{TM}$ è costante ed eguale ad a.*

Infatti, calcolando la derivata

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)} = \frac{a\cos\alpha}{-a\left(\dfrac{\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} - \operatorname{sen}\alpha\right)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

si vede che α è l' angolo che la tangente alla curva forma con l' asse delle x.

Si ha dunque

$$l_t = \overline{TM} = \frac{y}{\operatorname{sen} y} = a.$$

6°. Spirale d'Archimede (n.° 561, I)

$$\rho = a\theta$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a = \frac{\rho}{\theta}.$$

La *tangente dell' angolo* ω *del raggio vettore con la tangente* è dunque data da

$$\operatorname{tg}\omega = \rho\frac{1}{a} = \theta$$

cioè è eguale alla anomalia. Per valori di θ positivi e crescenti ω rimane sempre positivo, e cresce da zero a $\frac{\pi}{2}$, per θ tendente a $+\infty$.

La sottotangente e la sottonormale polare sono singolarmente

$$\left|\,\Sigma_t\,\right| = \frac{\rho^2}{a}, \quad \left|\,\Sigma_n\,\right| = a$$

cioè la sottonormale polare è costante, il segno di Σ_n è il segno del prodotto $x \operatorname{tang}\omega = \rho\cos\theta\cdot\theta = a\cos\theta$, ossia, di $\cos\theta$.

7°. Spirale iperbolica

$$\rho = \frac{a}{\theta}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2} = -\frac{\rho}{\theta}.$$

Si ha

$$\left|\,\Sigma_t\,\right| = a, \quad \left|\,\Sigma_n\,\right| = \frac{\rho^2}{a}.$$

8°. Spirale parabolica

$$\rho^2 = a^2\theta.$$

Si ha

$$\left|\,\Sigma_t\,\right| = \frac{2\rho^3}{a^2}, \quad \left|\,\Sigma_2\,\right| = \frac{a^2}{2\rho}.$$

9°. Reciproca della spirale parabolica (Lituus)

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\theta} \quad \text{ossia} \quad \rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho}{2\theta}.$$

La relazione

$$\rho^2\theta = a^2$$

mostra che l'area del settore circolare che ha per raggio ρ e per angolo θ si mantiene costante.

10°. Curve concoidi. *Si dice* **concoide** *di una curva data C rispetto ad un dato punto O la curva C_1 ottenuta aumentando tutti i raggi vettori di C uscenti da O di una lunghezza costante b positiva o negativa* (detta *intervallo* della concoide).

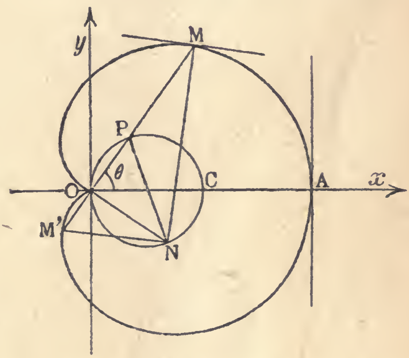
Se il punto O si assume come polo di un sistema polare di coordinate, si vede immediatamente che *la curva data C, e la sua concoide C_1 hanno la medesima sottonormale polare (in punti di eguale anomalia).*

Infatti, dalla relazione

$$\rho_1 = \rho + b$$

che intercede fra i punti corrispondenti ad eguali anomalie nelle due curve si ricava

$$\frac{d\rho_1}{d\theta_1} = \frac{d\rho}{d\theta}.$$



11°. Concoide del cerchio, o **lumaca di Pascal.** Sia un circolo di diametro $OC = a$. Per O si conduca un raggio arbitrario di argomento θ che incontri il circolo in P; a partire da P sulla OP si portino, da una parte e dall'altra, due segmenti $|\overline{PM}| = |\overline{PM'}| = b$. Il luogo dei punti M ed M' è una curva detta *Lumaca di Pascal.*

Si ha subito

$$OP = a\cos\theta \quad \text{quindi} \quad \rho = a\cos\theta \pm b,$$

equazione polare della curva considerata.

L'equazione della *Lumaca di Pascal* in coordinate cartesiane è:

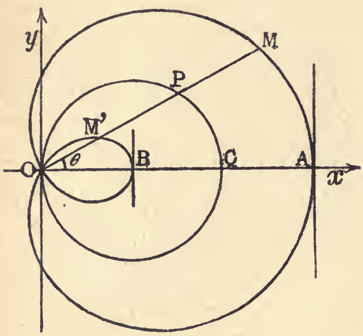
$$(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0:$$

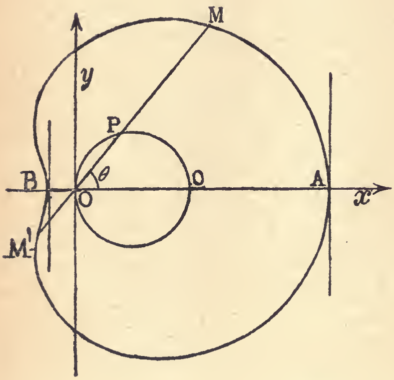
essa è sempre soddisfatta dalle coordinate della origine, che è un *punto singolare* della curva, come più innanzi vedremo.

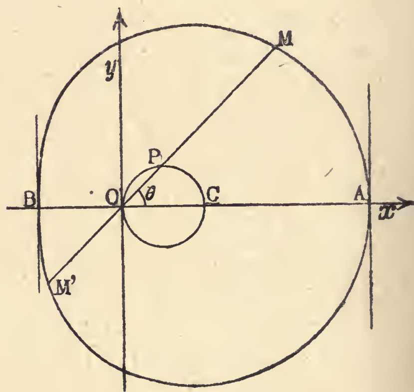
Secondo che è $b<a$; $2a>b>a$, $2a \leqq b$, la curva presenta le forme indicate dalle figure qui disegnate.

Per $a=b$, si ha la **cardioide** (fig. a pg. 105): questa dunque si ottiene portando su ciascuna corda uscente da un punto O della circonferenza, e a partire dall'altro estremo P di essa corda, due segmenti PM, PM' eguali al diametro.

La normale, e quindi la tangente, si costruiscono ricordando

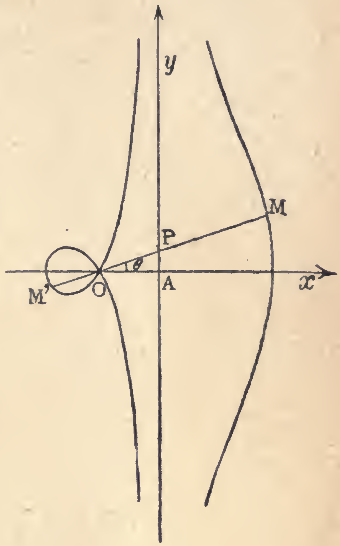






che la concoide ha in un punto M (V. la figura a pag. 105) la medesima sottonormale polare del punto P corrispondente del cerchio base: cioè ha per sottonormale il segmento ON, determinato, sulla normale per O al raggio vettore, dalla ulteriore intersezione N di essa col cerchio stesso. In particolare, nei punti A, B, dove la concoide incontra l'asse polare, la tangente è perpendicolare all'asse.

12°. Concoide della retta, o **concoide di Nicomede.** Assumiamo come polo il punto O, come asse polare la normale OA da O alla retta data, come verso positivo di quest'asse quello che va da O alla retta stessa.

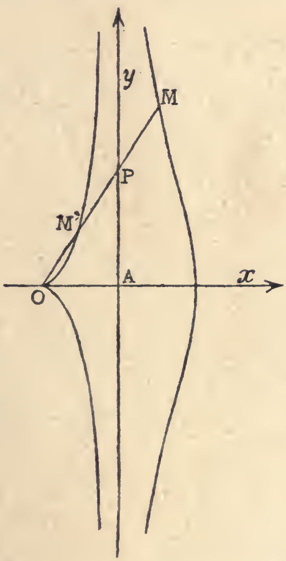


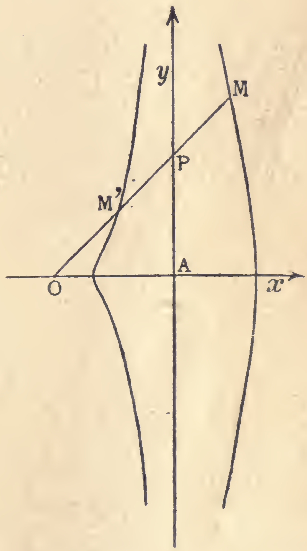
Indicando con a la lunghezza $\overline{OA}$, se consideriamo il raggio vettore OP, che forma l'angolo generico θ con l'asse polare, prendendo su questo $\overline{PM} = b$, $\overline{PM_1} = -b$ avremo due punti M ed M_1 della concoide di Nicomede. Ora si ha, in valore assoluto,

$$\overline{OP} = \frac{a}{\cos\theta},$$

dunque i due punti M ed M_1 hanno i raggi vettori

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b, \quad \rho_1 = \frac{a}{\cos\theta} - b.$$





La curva è simmetrica rispetto all'asse polare; secondo che $a < b$, $a = b$, $a > b$, assume le forme qui indicate.

L'equazione in coordinate cartesiane è:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0.$$

Assumendo come asse y la retta AP si ha l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2(x - 2a)^2 - b(x - a)^2 = 0.$$

Anche in questa curva il polo è punto singolare.

13°. Spirale logaritmica

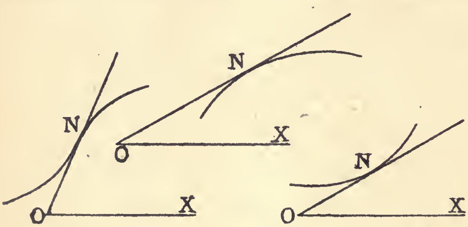
$$\rho = c\, e^{\frac{\theta}{a}}.$$

La tangente fa *angolo costante col raggio vettore.* Infatti

$$\operatorname{tg} \omega = a.$$

§ IV. Concavità, convessità, flessi.

574. Supponiamo che sia possibile determinare sulla curva un intorno del punto N, tale che la porzione di curva contenuta in questo intorno a partire da N in un determinato verso (a destra di N), resti sempre da una stessa parte della tangente condotta nello stesso punto N; e che così avvenga anche per la porzione a sinistra; queste due porzioni, potranno essere o tutte e due da una parte o una da una parte e l'altra dall'altra della tangente. Nel *primo caso* consideriamo una retta OX che non passi per il punto N e non sia perpendicolare alla tangente in questo stesso punto: si dice che *la curva nel punto* N *è* **concava** *o* **convessa** *rispetto alla* OX, *secondo che il tratto di essa che è nell'intorno accennato di* N *si trova o no dentro l'angolo acuto formato dalla* OX *colla tangente in* N.



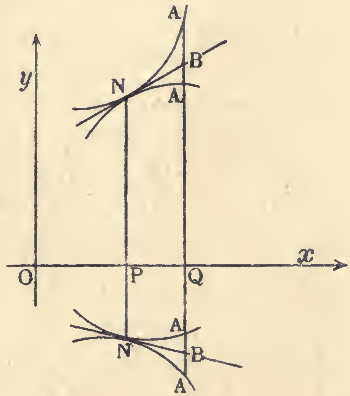
Nel secondo caso non si ha nè concavità nè convessità: e si dice che in N vi è un **punto di inflessione,** *o un* **flesso.**

575. Supponiamo ora che si assuma per retta OX l'asse delle x, e che la curva sia rappresentata analiticamente dall'equazione $y = f(x)$.

Avremo, nei vari casi indicati dalla figura,

$$\text{se } PN > 0 \quad \begin{cases} QA - QB > 0 & \text{convessità} \\ QA - QB < 0 & \text{concavità,} \end{cases}$$

$$\text{se } PN < 0 \quad \begin{cases} QA - QB < 0 & \text{convessità} \\ QA - QB > 0 & \text{concavità,} \end{cases}$$



ossia

$$\text{se } PN(QA - QB) \quad \begin{matrix} > 0 & \text{convessità} \\ < 0 & \text{concavità.} \end{matrix}$$

Ora

$$PN = f(x)$$

$$QA = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots.$$

$$QB = f(x) + hf'(x),$$

da cui

$$QA - QB = \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots.$$

Quindi se $f''(x) \neq 0$, ed h è sufficientemente piccolo, per

$$f(x)f''(x) > 0 \quad \text{si ha convessità,}$$

$$f(x)f''(x) < 0 \quad \text{si ha concavità.}$$

576. Se per asse OX di riferimento si assume una parallela all'asse delle x che abbia da quest'asse distanza maggiore di PN, *si ha* **convessità verso l'alto** *quando* $f''(x) < 0$, *si ha* **concavità verso l'alto** *quando è* $f''(x) > 0$.

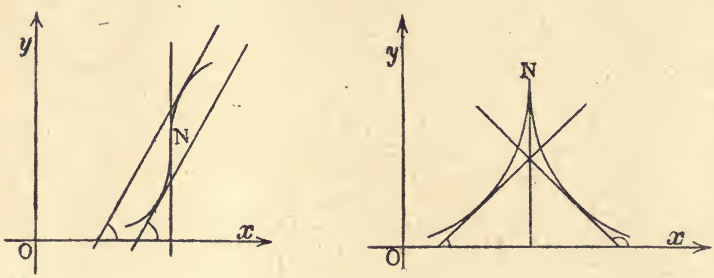
Nei punti dove è $f''(x) = 0$ la tangente è detta **tangente stazionaria.**

Se è $f''(x) = 0$ senza che sia $f'''(x) = 0$ si ha un punto di inflessione, perchè $QA - QB$ cambia segno al cambiare del segno di h. In generale è chiaro che se la prima derivata che non si annulla è la n^{ma}, avremo

per n dispari un punto di flesso,
» n pari ed $f(x)f^{(n)}(x) > 0$ convessità,
» n » $f(x)f^{(n)}(x) < 0$ concavità.

577. Osservazione 1ª. La concavità o convessità di una curva in un punto è relativa alla scelta della retta OX cui la curva si riferisce. Facilmente si proverebbe invece che i punti di flesso rimangono tali per qualunque sistema di assi, ossia costituiscono **proprietà intrinseche** della curva.

578. Osservazione 2ª. È escluso che possa essere $f(x) = 0$ od $f'(x) = \infty$ perchè abbiamo escluso che OX passi per il punto N e che sia perpendicolare alla tangente in N. Però nel caso in cui sia $f'(x) = \pm\infty$ può darsi che vi sia un punto di inflessione.



Con semplici considerazioni geometriche si vede subito che vi sarà inflessione se la derivata a destra e la derivata a sinistra tendono all'infinito dello stesso segno, il che avviene nella prima figura e non nella seconda.

579. Osservazione 3ª. Se l'equazione della curva è $F(xy)=0$, la condizione che si annulli $y''(x)$ si scriverà:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Se è data sotto la *forma parametrica*:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

usando la notazione differenziale si ha

$$y'' = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3};$$

dunque perchè sia nulla y'' deve essere

$$(2)\qquad d^2y\,dx - dy\,d^2x = 0.$$

In *coordinate polari*

$$dx = d\rho\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$$
$$dy = d\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta d\theta$$
$$d^2x = d^2\rho\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta d\rho d\theta - \rho\cos\theta d\theta^2$$
$$d^2y = d^2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\cos\theta d\rho d\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta^2$$
$$d^2y\,dx - d^2x\,dy = 2d\rho^2 d\theta - \rho d^2\rho d\theta + \rho^2 d\theta^3.$$

Dividendo per $d\theta^3$, avremo che la condizione (2) si scrive:

$$(3)\qquad 2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 = 0.$$

580. Esempi. 1°. Parabola cubica

$$y = b + \frac{x^3}{a^2}.$$

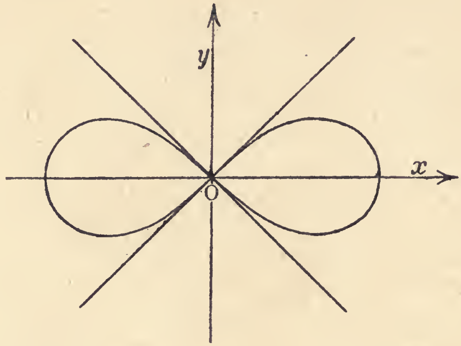
Si ha

$$y'' = \frac{6x}{a^2}, \quad yy'' = \frac{6}{a^4}x(ba^2 + x^3).$$

V'ha convessità per ogni valore positivo di x ed anche per quei valori negativi che rendono negativo $ba^2 + x^3$, vale a dire che rendono negativo y.

V'ha concavità per x negativo e y positivo. Si ha poi $y''=0$ nel punto $x=0$ cui corrisponde $y=b$. In questo punto non si annulla $y'''(x)$, dunque esso è un flesso.

2°. Lemniscata di Bernoulli



$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

ha nella origine un punto di flesso dei due rami della curva.

§ V. Punti multipli.

581. Data una curva

$$f(xy) = 0,$$

il coefficiente angolare della tangente in un punto (xy) è dato dal quoziente

$$(1) \qquad -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

e le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono entrambe continue nel punto (xy): la tangente è indeterminata solo nei punti in cui sono verificate insieme le condizioni $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

I punti della curva in cui non vi è tangente determinata si dicono **punti singolari.**

Supponiamo per maggiore generalità che nel punto (xy) siano nulle tutte le derivate all'ordine $(n-1)^{mo}$ e che non lo siano insieme tutte quelle dell'ordine n^{mo}.

Se indichiamo con $(x+h,\ y+k)$ un punto della curva sufficientemente vicino ad (xy) sarà per la formula abbreviata di Taylor, tenuto conto che $F(x+h,\ y+k)=0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)}_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k}}=0. \tag{3}$$

Poniamo per brevità

$$\frac{\partial^n f(xy)}{\partial x^r \partial y^{n-r}}=\varphi_r(xy).$$

Sviluppando la (3) avremo

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\varphi_r(x+\theta h,\ y+\theta k)h^r k^{n-r}=0,$$

ossia

$$\Sigma\binom{n}{r}\varphi_r(x+\theta h,\ y+\theta k)\left(\frac{k}{h}\right)^{n-r}=0.$$

Supponendo ora che le derivate n^{me} siano continue ne segue

$$\Sigma\binom{n}{r}\varphi_r(xy)\left\{\lim_{\substack{h=0\\ k=0}}\frac{k}{h}\right\}^{n-r}=0.$$

Ma $\frac{k}{h}$ è il coefficiente angolare della retta che congiunge i punti (xy), $(x+h,\ y+k)$, dunque *vi sono in generale n rette, tante quante sono le radici dell'equazione in t*

$$\sum_{r=0}\binom{n}{r}\varphi_r(xy)t^{n-r}=0, \tag{4}$$

le quali sono posizioni limiti di n corde passanti per il punto (xy). Tali rette si dicono tangenti alla curva nel punto stesso.

Pertanto pel punto (xy) passano (al più) n rami, reali od immaginari, della curva: le loro tangenti possono essere o no distinte.

Un punto di tale natura si dice **multiplo** *dell'ordine n o punto n^{plo}*. In particolare si dice **punto isolato** *se tutti i rami di curva passanti per esso sono immaginari.*

582. Per trovare i punti multipli di una curva si determinano prima le soluzioni comuni all'equazione della curva e alle sue derivate prime, si cerca poi quali siano le derivate di ordine minimo che non sono tutte nulle per ciascuna di quelle soluzioni; formata infine la corrispondente equazione (4), lo studio di questa ci indicherà la natura e la direzione dei rami passanti per il punto considerato.

Per $n=2$ si ha un punto doppio; l'equazione (4) è in tal caso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} t + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

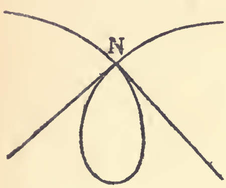
Secondo che il determinante (**Hessiano**)

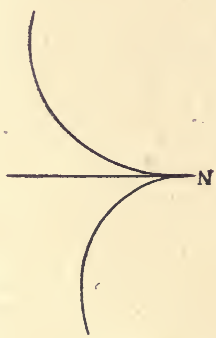
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\}$$

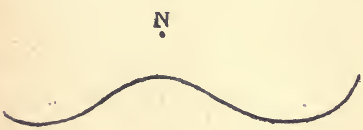
è negativo, nullo o positivo si ha:

un punto doppio a tangenti distinte (**nodo**), *un punto doppio a tangenti coincidenti* (**cuspide o punto di regresso**), *o un* **punto isolato.**

Una **cuspide** *si dice di* **prima specie** *o di* **seconda specie** *secondo che la curva è attraversata o no dall'unica tangente (tangente cuspidale).*







Osservazione. — Facilmente si prova che il grado di *multiplicità di un punto* multiplo è indipendente dalla scelta degli assi coordinati.

583. Esempi.

1.° Lumaca di Pascal

$$(x^2+y^2+ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0.$$

(Le figure alle pag. 105, 106).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2(2x+a)(x^2+y^2+ax)-2b^2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+y^2+ax)-2b^2y\,. \end{cases}$$

L'origine è punto doppio. L'Hessiano ha nell'origine il valore

$$D=-4b^2(a^2-b^2);$$

secondo che è $a \gtreqless b$, si ha nodo, cuspide, o punto isolato (Cfr. le figure al loc. cit.).

2.° Concoide di Nicomede

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x(x-a)^2+2(x-a)(x^2+y^2)-2b^2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y(x-a^2)\,. \end{cases}$$

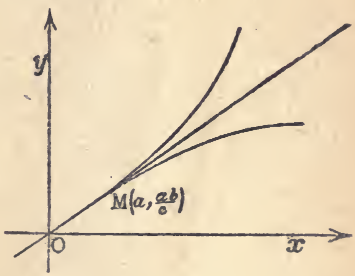
L'origine è punto doppio. Nella origine l'Hessiano ha il valore

$$D=4a^2(a^2-b^2).$$

Secondo che è $a \lesseqgtr b$, si ha nodo, cuspide, o punto isolato (le figure alla pag. 107).

3.° La curva

$$(cy-bx)^2-\frac{(x-a)^3}{a}=0.$$



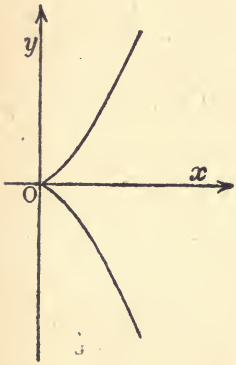
Il punto $x=a$, $y=\dfrac{ab}{c}$ è sulla curva ed in essa è contemporaneamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Ponendo l'equazione della curva sotto la forma

$$y = \frac{bx}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(x-a)^3}{a}}$$

si vede che per $x < a$ non esistono valori reali di y: per $x > a$ si hanno due valori distinti; per $x = a$ si ha un sol valore.



Il punto $M\left(a, \frac{ab}{c}\right)$ è una cuspide. Infatti è ivi $D = 0$.

4.° Parabola semicubica

$$y^2 - \frac{x^3}{a} = 0.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3x^2}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

sicchè la curva ha un punto doppio nella origine.

E, precisamente, essendo:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 2; \quad D = 0,$$

si vede che tale punto è una cuspide.

Con semplici considerazioni si prova che quella è una cuspide di prima specie.

5.° Lemniscata

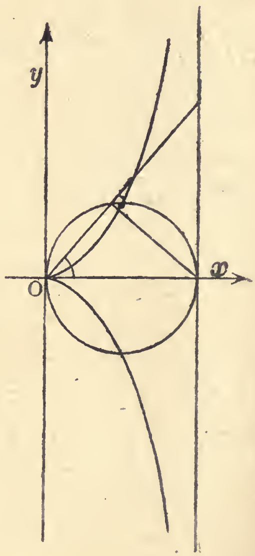
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

L'origine è un nodo e le tangenti in questo punto sono le bisettrici degli assi (fig. a pag. 112).

6.° Cissoide

$$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0.$$

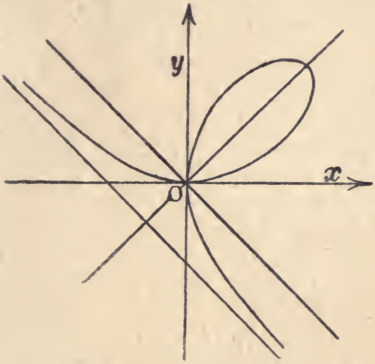
Cuspide di prima specie nell'origine; l'asse delle x è tangente cuspidale.

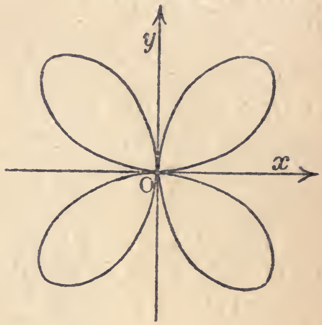


7.° Folium di Cartesio

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0.$$

Nodo nell'origine; le tangenti sono assi coordinati.





8.° Rosa a 4 foglie

$$(x^2 + y^2)^6 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

L'origine è punto quadruplo. La curva si compone di quattro parti simmetricamente disposte rispetto agli assi, ed a forma di foglia, a ciascuna delle quali gli assi delle x e delle y sono tangenti.

§ VI. Punti di massimo o di minimo [1].

584. Sia

$$y = f(x)$$

una funzione data nell'intervallo ab, essa è detta **crescente**, in un punto x_0 interno all'intervallo medesimo, se è possibile determinare un numero positivo δ tale che, essendo $O < h < \delta$, sia

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x_0 + h) > f(x_0) \\ f(x_0 - h) < f(x_0). \end{cases}$$

[1] Questo argomento è qui appena accennato. Si troverà trattato nel corso di Calcolo Infinitesimale, (Cfr. Pincherle, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*. Cap. V, § IV).

Si dice che è **decrescente**, se, con lo stesso significato delle notazioni, è

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x_0 + h) < f(x_0) \\ f(x_0 - h) > f(x_0). \end{cases}$$

585. Se la funzione proposta ha derivata determinata e diversa da zero nel punto x_0, dalla formula degli accrescimenti finiti,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h),$$

si ricava subito che *una funzione è crescente nei punti dove la derivata prima (supposta determinata e diversa da zero) è positiva, decrescente ove detta derivata è negativa.*

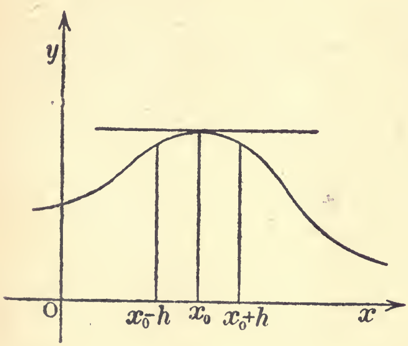
586. Nei punti ove *la derivata prima è nulla*, il criterio su esposto cade in difetto.

Supposto che in un tale punto, dove cioè la derivata prima è nulla, la derivata seconda sia determinata, e diversa dallo zero, avremo, per formule note dal calcolo,

$$\begin{cases} f(x_0 + h) = f(x_0) + \dfrac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h) \\ f(x_0 - h) = f(x_0) - \dfrac{h^2}{2!} f''(x_0 - \theta_1 h) \end{cases}$$

cioè

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) = \dfrac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h) \\ f(x_0 - h) - f(x_0) = \dfrac{h^2}{2!} f''(x_0 - \theta_1 h). \end{cases}$$

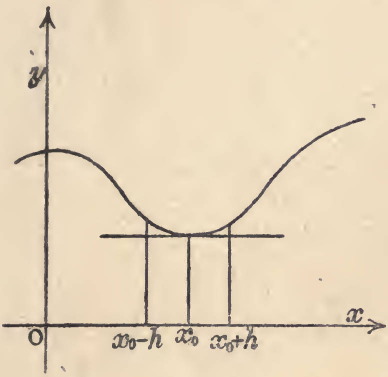


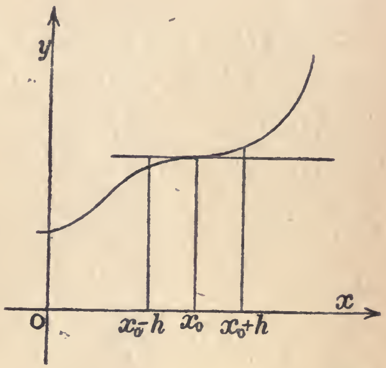
Se nel punto x_0 la derivata seconda è negativa, le formule scritte ci dicono che in tale punto la ordinata $y_0 = f(x_0)$ è maggiore di una qualunque delle ordinate dei punti vicini, sia a destra sia a sinistra del punto stesso.

Si dice in tal caso che il punto x_0 è un punto di

massimo (massimo relativo, od **estremo**) per la funzione $y = f(x)$.

Se, invece, nel punto x_0 la derivata seconda è positiva, dalle formule (3) immediatamente si deduce che la ordinata $y_0 = f(x_0)$ è minore di una qualsiasi delle ordinate dei punti vicini, sia a destra sia a sinistra, ed il punto x_0 è detto perciò **punto di minimo.**





Se, infine nel punto x_0, oltre ad esser zero la derivata prima è nulla anche la derivata seconda (cioè se si ha *tangente stazionaria* parallela all'asse delle x), osservando le formule

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) = \dfrac{h^3}{3!} f'''(x_0 + \theta h) \\[2ex] f(x_0 - h) - f(x_0) = -\dfrac{h^3}{3!} f'''(x_0 - \theta h) \end{cases}$$

si vede subito che, se nel punto x_0 la derivata terza e continua e diversa dallo zero, si ha un *punto di inflessione*, e la funzione $f(x)$ è *crescente* se la derivata terza è positiva, *decrescente* se negativa.

Se poi in tale punto fosse zero anche la derivata terza, si esaminerebbe il valore che in esso ha la derivata quarta.

587. In generale abbiamo la seguente regola:

Condizione necessaria (non sufficiente) *perchè in un punto x_0 dove la funzione $y = f(x)$ ha derivata prima continua, vi sia massimo o minimo, è che ivi sia nulla la derivata prima.*

Se in detto punto sono nulle ad un tempo le successive derivate prima, seconda,..., ed è la r^{ma} derivata la prima che in detto punto non si annulla,

se l'ordine r è pari, si ha massimo o minimo secondo che $f(x_0)$ è negativa o positiva;

se l'ordine r è dispari, non v'ha massimo nè minimo, la funzione è crescente o decrescente secondo che $f^{(r)}(x)$ è positiva o negativa.

588. Per l'applicazione di questo criterio occorre saper costruire le espressioni y', y'',..., in corrispondenza delle varie forme analitiche della equazione della curva.

Abbiamo già indicato (n.° 563) le espressioni che assume la derivata prima.

Per la derivata seconda, supposta data l'equazione della curva sotto la forma implicita

$$F(xy) = 0$$

basta ricordare dal calcolo la formula

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Infine se sono date le equazioni parametriche

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

si ha

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

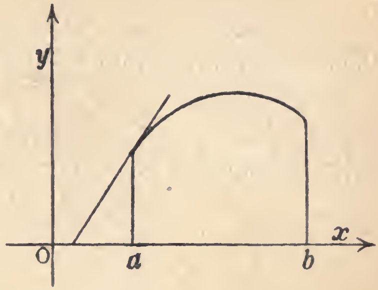
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

finalmente

$$y''(x) = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{\varphi'^3}.$$

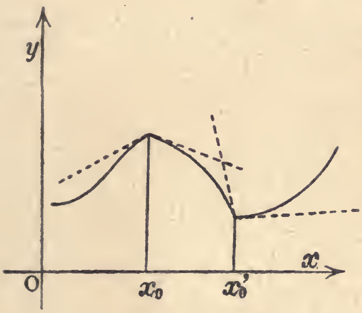
589. Osservazione I. I criteri esposti valgono per massimi e minimi in *punti interni* all'intervallo che si considera.



Negli estremi a, b, dell'intervallo medesimo non occorre che $f'(x)$ sia nullo per la esistenza del massimo o del minimo. Si vede immediatamente che nel punto a si ha minimo, se ivi la funzione tende a crescere, cioè se $f'(x)$ è positivo; massimo se $f'(x)$ è negativo.

E simili riflessioni si ripetono pel punto b.

Osservazione II. In *punti angolari*, dove la derivata prima è discontinua, si può tuttavia aver massimo se a sinistra di un tale punto x_0 la funzione è crescente, ed a destra decrescente; minimo invece in un punto x_0' se è decrescente a sinistra, crescente a destra di esso.



Osservazione III. Nei punti ordinari interni, di massimo o di minimo, *la tangente alla curva è parallela all'asse delle x.*

Osservazione IV. Da quanto precede scorgiamo che i punti di massimo o di minimo non rappresentano *proprietà intrinseche* della curva; ma dipendono dalla scelta degli assi di riferimento.

§ VII. Asintoti.

590. Per asintoto di una curva si intende una retta tangente alla curva in un punto all'infinito.

591. Se l'equazione della curva è data sotto la forma esplicita $y = f(x)$, si trovano subito gli *asintoti paralleli all'asse y* cercando quei valori finiti di x che rendono infinito y e che rendono contemporaneamente infinito anche y'.

Così nella curva

$$y = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$$

si ha un asintoto parallelo all'asse delle y la cui equazione è

$$x = a.$$

Come secondo esempio consideriamo la curva

$$x^3 - ay(x - b) = 0.$$

Scrivendo questa equazione sotto la forma

$$ay = \frac{x^3}{x - b}$$

si scorge che vi è un asintoto parallelo all'asse delle y, la cui equazione è

$$x = b.$$

In modo analogo si trovano gli *asintoti paralleli all'asse x.*

592. Indicando con

(1) $$y = kx + l$$

l'equazione di un asintoto non parallelo all'asse delle y, poichè per $x = \infty$ le ordinate di questo asintoto e quelle della curva devono avere differenza infinitesima, potremo porre l'ordinata del punto generico della curva, o meglio di quel ramo di curva a cui la (1) è asintoto, sotto la forma

(2) $$y = kx + l + \varepsilon$$

essendo ε infinitesimo per $x = \infty$. Si ricava quindi

(3) $$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\infty} \left(k + \frac{l + \varepsilon}{x}\right) = k$$

(4) $$\lim_{x=\infty} (y - kx) = \lim_{x=\infty} (l + \varepsilon) = l.$$

Per determinare dunque la costante k basterà porre, nell'equazione della curva,

(5) $$\frac{y}{x} = z,$$

od anche

(5) $$y = xz,$$

cercare poi il limite od i limiti verso cui converge z per $x = \infty$.

Trovato così k si otterrà la costante l ponendo, nella equazione della curva,

$$(7) \qquad \begin{aligned} y - kx &= t, \\ y &= kx + t, \end{aligned}$$

e cercando il limite di t per $x = \infty$.

Ad ogni sistema di valori limiti di

$$k = \lim_{x=\infty} z, \quad l = \lim_{x=\infty} t$$

corrisponde un asintoto

$$y = kx + l.$$

Gli asintoti paralleli all'asse x corrispondono al valore $k = 0$.

Esempio: per la curva

$$y^2 = \cos\frac{y}{x}$$

si ha

$$k = 0.$$

Per determinare l si ponga

$$y = kx + t$$

cioè

$$y = t,$$

e si avrà

$$t^2 = \cos\left(\frac{t}{x}\right).$$

Al limite per $x = \infty$ si ha $l^2 = 1$, $l = \pm 1$, e quindi si hanno due asintoti, rappresentati dalle equazioni:

$$y = 1, \quad y = -1,$$

come si vede subito direttamente.

593. Questo metodo può servire anche per trovare gli asintoti paralleli all'asse delle y. Basterà porre, nell'equazione della curva, $\frac{x}{y} = z_1$: se lungo un ramo della curva si ha $\lim_{y=\infty} z_1 = 0$, posto $l = \lim_{y=\infty} x$ l'equazione $x = l$ rappresenterà un asintoto parallelo all'asse y.

594. La pratica del metodo indicato viene agevolata, per le curve algebriche, dalle considerazioni seguenti: Sia una curva rappresentata da un'equazione algebrica

$$f(xy) = 0$$

ed immaginiamo $f(xy)$ decomposta in una somma di parti di cui ciascuna sia funzione omogenea delle due variabili x ed y. Siano m_1, $m_2 \ldots$, con $m_1 > m_2 > \ldots$, i gradi rispettivi di quelle funzioni omogenee, talchè si abbia

$$f(xy) = x^{m_1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m_2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots; \tag{8}$$

usando della notazione (5) potremo scrivere l'equazione della curva data sotto la forma:

$$x^{m_1}\varphi_1(z) + x^{m_2}\varphi_2(z) + \ldots. = 0$$

od anche

$$\varphi_1(z) + \frac{1}{x^{m_1-m_2}}\varphi_2(z) + \ldots. = 0;$$

al limite per $x = \infty$ rimane

$$\varphi_1(z) = 0. \tag{9}$$

I valori di k sono dunque radici della (9), *cioè della equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio omogeneo di massimo grado tra quelli che compongono $f(xy)$.*

Per ogni valore così trovato di k, si avrà il corrispondente valore di l cercando il limite per $x = \infty$ della funzione $t(x)$, determinata per mezzo della relazione

$$x^{m_1}\varphi_1\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^{m_2}\varphi_2\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots. = 0. \tag{10}$$

Siccome però $\varphi_1(k) = 0$, per il teorema degli accrescimenti finiti avremo:

$$\varphi_1\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x}\,\varphi_1'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right)$$

con $0 < \theta < 1$, epperò la (10) potrà scriversi:

$$x^{m_1-1}t\varphi_1'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + x^{m_2}\varphi_2\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots. = 0,$$

od anche

$$(11) \qquad t\varphi_1'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{m_1-m_2-1}}\varphi_2\left(k+\frac{t}{x}\right)+\dots=0.$$

Se $\varphi_1'(k)$ e $\varphi_2(k)$ hanno valori finiti e diversi dallo zero, conservando la notazione $l=\lim_{x=\infty} t$ avremo:

$$(12) \qquad \begin{cases} 1.^\circ \text{ per } m_2 < m_1 - 1 & l = 0 \\ 2.^\circ \quad » \quad m_2 = m_1 - 1 & l = -\dfrac{\varphi_2(k)}{\varphi_1'(k)} \\ 3.^\circ \quad » \quad m_2 > m_1 - 1 & l = \infty. \end{cases}$$

In conseguenza di ciò si avrà:

Nel primo caso un asintoto passante per l'origine, $y=kx$.

Nel secondo caso un asintoto $y=kx-\dfrac{\varphi_2(k)}{\varphi_1'(k)}$.

Nel terzo caso non si hanno asintoti rettilinei corrispondenti a quel valore di k.

595. Osservazione — Eliminando z tra le equazioni

$$\varphi_1(z)=0, \quad y=zx$$

si ha l'equazione

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

che fornisce nel primo caso tutti gli asintoti non paralleli all'asse delle y, e che può essere sostituita dalla

$$x^{m_1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

A questa medesima equazione si giungerebbe anche cercando in tale caso gli asintoti non paralleli all'asse delle x. Possiamo dunque concludere:

Quando il primo membro dell'equazione $f(xy)=0$ *è scomponibile nella somma di più funzioni omogenee ed il grado* m_1 *di una di esse supera di più di una unità il grado di una qualunque delle altre, non solo i diversi asintoti passano per l'origine, ma essi sono rappresentati dalla equazione che si ottiene uguagliando a zero quella funzione omogenea di grado* m_1.

596. Esempi — 1.° Iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ha per asintoti le due rette rappresentate dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

2.° La curva

$$x^3+y^3+\operatorname{sen}\frac{y}{x}=0$$

ha per asintoto la retta

$$x+y=0$$

il cui primo membro è il solo fattore reale del binomio x^3+y^3.

3.° Folium di Cartesio

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Scriveremo:

$$x^3+y^3=0$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^3=0.$$

Questa equazione in $\frac{x}{y}$ ha la radice reale -1; perciò faremo:

$$k=-1,\quad \varphi_1=1+\frac{y^3}{x^3},\quad \varphi_2=-3a\frac{y}{x}$$

$$\varphi_1'=3\left(\frac{y}{x}\right)^2,\quad -\frac{\varphi_2(-1)}{\varphi_1'(-1)}=-a,$$

e l'assintoto avrà per equazione

$$y=-x-a.$$

4.° Sia la curva

$$y^4-x^4-2bx^2y=0.$$

Scriveremo:

$$x^4(z^4-1)+x^3 2bz=0 \qquad (m_1=4,\ m_2=3)$$

$$\varphi_1(z)=z^4-1,\quad k=\pm 1$$

$$\varphi_1'(z)=4z^3,\quad \varphi_1'(k)=\pm 4$$

$$\varphi_2(z)=2bz,\quad \varphi_2(k)=\pm 2b$$

$$l=-\frac{b}{2}.$$

Gli asintoti sono dati dalle due equazioni

$$y = x - \frac{b}{2}, \quad y = -x - \frac{b}{2}.$$

597. Osservazione — *Quando le quantità $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$ divengono infinite, si cercherà direttamente il valore di l cercando il limite di t, per $x = \infty$.* Qualche volta per un solo valore di k si troveranno così più valori di l e si avranno perciò *parecchi asintoti paralleli fra loro.*

598. *Se il valore di k soddisfa contemporaneamente* alle equazioni

$$\varphi_1(k) = 0, \quad \varphi_2(k) = 0,$$

l'equazione che dà il valore di t si metterà sotto la forma:

$$\frac{x^{m_1-2}}{1 \cdot 2} t^2 \varphi_1''\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + x^{m_2-1} t \varphi_2'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + x^{m_3}\varphi_3\left(k + \frac{t}{x}\right) + \dots = 0$$

che potremo scrivere:

$$\frac{t^2}{1 \cdot 2}\varphi_1''\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x^{m_1-m_2-1}}\varphi_2'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) +$$
$$+ \frac{1}{x^{m_1-m_3-2}}\varphi_3\left(k + \frac{t}{x}\right) + \dots = 0.$$

Se le quantità $\varphi_1''(k)$, $\varphi_2'(k)$, $\varphi_3(k)$ non sono tutte nulle, passando al limite per $x = \infty$ si presenteranno condizioni analoghe a quelle considerate al n.° precedente.

Nel caso in cui si abbia

$$m_1 = m_2 + 1, \quad m_2 = m_3 + 1,$$

si giungerà alla equazione

$$\frac{t^2\varphi_1''(k)}{2} + t\varphi_2'(k) + \varphi_3(k) = 0,$$

le cui radici daranno i valori cercati di l.

Se fosse contemporaneamente

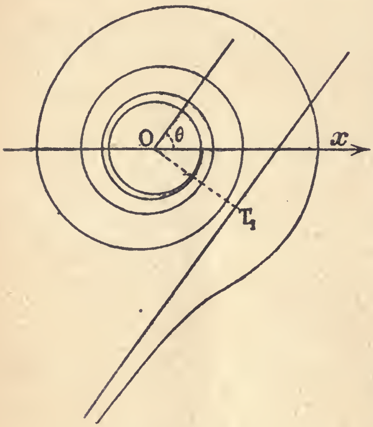
$$\varphi_1''(k) = 0, \quad \varphi_2'(k) = 0, \quad \varphi_3(k) = 0;$$

con analoghe riflessioni si giungerebbe ad una equazione del 3.° grado in t.

599. Asintoti in coordinate polari. Data la curva

$$\rho = f(\theta)$$

v'ha luogo a cercare i valori di θ che rendono infinito ρ senza rendere infinito il valore $\pm \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ (n.° 571), della sottotangente polare.



È facile vedere che per ogni tale valore di θ si ha un asintoto rettilineo, che si costruisce conducendo dal polo la normale OT_1 alla direzione θ così determinata, portando su questa un segmento

$$\overline{OT_1} = \Sigma_t = \pm \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$$

eguale al valore che la sottotangente polare ha in corrispondenza di tale valore di θ, e, finalmente, conducendo per T_1 la perpendicolare alla retta OT_1.

Tale perpendicolare sarà l'asintoto cercato.

Infatti ricordando che, se con ω si indica l'angolo $\widehat{rt}$ del raggio vettore con la tangente, si ha (n.° 570)

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \widehat{rt} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \pm \frac{\Sigma_t}{\rho},$$

si vede che, per i valori di θ per cui è ρ infinito, senza che sia infinita Σ_t, si ha $\widehat{rt} = 0$, cioè la *tangente risulta parallela al raggio vettore.*

V'ha luogo a cercare anche **cerchi asintotici.** Limitandoci al caso più semplice, quello cioè in cui si suppone che il polo sia centro di un tale cerchio, il cerchio asintotico corrisponde ad un valore di ρ finito, che rende θ infinito. In particolare se θ diventa infinito per $\rho = 0$, il polo è **punto asintotico.**

600. Esempi:

1.° Spirale iperbolica (n.° 573, pag. 104)

$$\rho = \frac{a}{\theta}.$$

La sottotangente polare è costante:

$$\Sigma_t = -a;$$

per $\theta = 0$ si ha $\rho = \infty$, vi ha dunque un *asintoto rettilineo* parallelo all'asse polare ed a distanza da questo uguale ad a.

2.° Lituus

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}.$$

La sottotangente polare è

$$\Sigma_t = 2a\sqrt{\theta};$$

si vede quindi che per $\theta = 0$ si ha $\rho = \infty$ e $\Sigma_t = 0$. L'asse polare dunque è asintoto di quella curva.

3.° Nella spirale che ha per equazione

$$\theta\sqrt{2a\rho - \rho^2} = 1$$

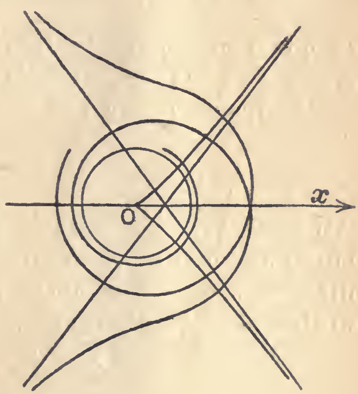
per $\theta = \infty$ si ha

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 2a. \end{cases}$$

Il cerchio di raggio $2a$ è dunque asintotico di quella curva, ed il polo è punto asintotico, (come per le due curve precedenti).

4.° La curva che ha per equazione

$$\rho = \frac{a\theta^2}{\theta^2 - 1}$$



offre esempio di asintoti rettilinei e circolari ad un tempo. Per $\theta = \pm 1$ si ha

$$\rho = \infty, \quad \Sigma_t = \mp \frac{1}{2} a.$$

V'hanno quindi due asintoti rettilinei inclinati di angoli di ampiezza $+1$ e -1 sull'asse polare.

Scrivendo poi l'equazione della curva sotto la forma:

$$\rho = a\left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right)^{-1}$$

si vedrà che per $\theta = \infty$ si ha

$$\rho = a.$$

Vi è dunque un cerchio asintotico di raggio a, col centro nel polo.

§ VIII. Contatti ed osculazioni.

601. Siano $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ le equazioni di due curve qualunque che abbiano un punto M di ascissa a comune, onde

$$f(a) = \varphi(a)$$

e consideriamo la differenza δ delle ordinate nell'intorno di questo punto. Applicando lo sviluppo accorciato del Taylor alla funzione $\varphi(x) - f(x)$ avremo

$$\begin{aligned}\delta = \varphi(a+h) - f(a+h) = h[\varphi'(a) - f'(a)] + \\ + \frac{h^2}{2!}[\varphi''(a) - f''(a)] + \frac{h^3}{3!}[\varphi'''(a) - f'''(a)] + \dots + \\ + \frac{h^n}{n!}[\varphi^n(a+\theta h) - f^n(a+\theta h)]\end{aligned}$$

la quale ci mostra intanto che, nell'ipotesi fatta, δ ***sarà in generale un infinitesimo dello stesso ordine di h.***

Supponiamo ora che si abbia

$$f'(a) = \varphi'(a).$$

Allora δ sarà *in generale* un infinitesimo di 2.° ordine e le curve avranno in M la stessa tangente. Questo fatto si esprime dicendo che le due curve hanno in M **un contatto di primo ordine** (*contatto* **bipunto**).

Ma, se oltre ad essere $f'(a) = \varphi'(a)$, è ancora:

$$f''(a) = \varphi''(a)$$

δ sarà allora in generale un infinitesimo del terzo ordine e si dirà che le curve hanno in M un *contatto di 2.° ordine* (**tripunto**).

Oltre alle ipotesi poste, supponiamo che sia

$$f'''(a) = \varphi'''(a),$$

e che analoghe uguaglianze si verifichino per tutte le coppie di derivate successive sino a quelle dell'ordine p, queste escluse: δ sarà un infinitesimo di $p.^{mo}$ ordine e si dirà che le due curve hanno in M un *contatto di ordine* $(p-1)^{esimo}$. Per analogia si dice che le curve hanno un *contatto di ordine zero* quando δ è del primo ordine, ossia quando le curve hanno un punto comune senza avere ivi la stessa tangente.

602. Osservazione 1ª. *Se l'ordine del contatto è pari, le curve si toccano attraversandosi. Se l'ordine del contatto è dispari le curve si toccano senza attraversarsi.*

Ciò risulta dal fatto che il segno di δ cambia o no, al mutar segno di h, secondochè l'ordine della prima coppia di derivate differenti (per $x = a$) è dispari o pari.

Osservazione 2ª. L'ordine del contatto è indipendente dalle direzioni degli assi coordinati. Bisogna escludere il caso in cui la direzione dell'asse y coincida con quella della tangente nel punto che si considera: in tale caso però si toglierebbe ogni difficoltà cambiando la direzione degli assi.

Osservazione 3ª. *Se due curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ hanno in un punto M un contatto di ordine p e una terza curva $y = \psi(x)$ ha nello stesso punto M un contatto di ordine q colla $y = f(x)$, il contatto fra la $y = \varphi(x)$ e la $y = \psi(x)$ è di ordine uguale al minore dei due numeri p e q.*

Se infatti a è l'ascissa di M avremo

$$f'(a) = \varphi'(a), \quad f''(a) = \varphi''(a) \ldots, \; f^p(a) = \varphi^p(a)$$
$$f'(a) = \psi'(a), \quad f''(a) = \psi''(a) \ldots, \; f^q(a) = \psi^q(a)$$

onde

$$\varphi'(a) = \psi'(a), \quad \varphi''(a) = \psi''(a) \ldots,$$

fino alle derivate di ordine p o di ordine q secondochè p è minore o maggiore di q.

603. Curve osculatrici. Sia data una curva $y = f(x)$; consideriamo il sistema di curve (n volte infinito) rappresentato dall'equazione

$$y = \varphi(x_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0,$$

che contiene n parametri $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si potrà, in generale, determinare almeno un sistema di valori degli n parametri, tali da soddisfare contemporaneamente le n equazioni:

$$f(a) = \varphi(a), \quad f'(a) = \varphi'(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = \varphi^{(n-1)}(a),$$

cioè in modo da avere tra la $y = f(x)$ e la corrispondente curva $y = \varphi(x)$ un contatto dell'ordine $n - 1$.

La curva del sistema dato che ha il contatto di ordine massimo colla curva $y = f(x)$ in un punto dato si chiama curva osculatrice *di quest' ultima.*

604. Osservazione 1ª. Le curve del dato sistema, osculatrici in un punto dato ad una curva data, saranno tante quanti sono i sistemi reali di soluzioni del sistema di equazioni che servono a determinare i valori di $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Osservazione 2ª. Potrebbe darsi che in qualche punto il contatto fosse di ordine superiore all' n^{esimo}, e questo accadrebbe precisamente quando l'eguaglianza delle derivate sino a quelle dell'ordine $(n-1)^{esimo}$ portasse come conseguenza la uguaglianza di derivate di ordini successivi.

Osservazione 3ª. *Una curva $y = f(x)$ che in un punto M ha con un' altra curva $y = \varphi(x)$ un contatto di ordine $p - 1$ può riguardarsi come la posizione limite di una curva che ha in comune colla $y = f(x)$ il punto M ed altri $p - 1$ punti infinitamente vicini.*

605. Retta osculatrice. L'equazione generale di una retta può mettersi sotto la forma

$$Y = mX + b$$

che contiene due soli parametri arbitrari. Dunque la retta osculatrice ad una curva data $y = f(x)$ in un punto avrà in generale con questa un contatto di 1.° ordine. Volendo trovare l'equazione della retta osculatrice in un punto M di data ascissa a, dovremo porre:

$$f(a) = Y_a = ma + b, \quad f'(a) = Y_a' = m$$

e quindi sostituendo, nell'equazione della retta, ad m ed a b i valori ricavati, cioè

$$m = f'(a), \quad b = f(a) - af'(a),$$

avremo:

$$Y - f(a) = f'(a)(X - a),$$

cioè la equazione della *tangente*, che è appunto la retta osculatrice.

Osservazione 1ª. La tangente in un punto M si potrebbe quindi definire anche come quella retta che passa per M e tale che la sua distanza da un punto della curva infinitamente vicino ad m è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

E potremo anche dire che la tangente in un punto M ad una curva è quella retta che passa per M e per un punto della curva infinitamente vicino ad M (successivo ad M).

Osservazione 2ª. Si osservi che le derivate della Y, superiori alla prima, sono tutte nulle: onde segue che se in casi particolari si avesse

$$f''(a) = 0, \quad f'''(a) = 0 \ldots, \quad f^{(p)}(a) = 0$$

l'ordine del contatto della tangente sarebbe p. Per es. in un punto di *flesso*, ($f''(a) = 0$ ed $f'''(a) \neq 0$), *il contatto è di secondo ordine*; più in generale se la tangente è *stazionaria*, ($f''(a) = 0$), il contatto è *almeno* del secondo ordine.

606. Cerchio osculatore. L'equazione più generale di un cerchio si può scrivere sotto la forma

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = R^2$$

che contiene tre parametri arbitrari; dunque il cerchio osculatore ad una curva $y = f(x)$ avrà in generale con questa un contatto di 2.° ordine. Volendo determinare l'equazione del cerchio osculatore in un punto di ascissa a, basterà determinare ξ, η ed R in modo che sia

$$f(a) = Y_a, \quad f'(a) = Y_a', \quad f''(a) = Y_a''.$$

Ricavando Y, Y', Y'' dall'equazione del cerchio (e dalle due che se ne deducono derivando rispetto ad X due volte) colla regola di derivazione delle funzioni composte, poi mettendo per Y, Y', Y'' i valori $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, avremo

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=R^2$$
$$X-\xi+(Y-\eta)Y'=0$$
$$1+Y'^2+(Y-\eta)Y''=0,$$

onde

$$\eta-Y=\frac{1+Y'^2}{Y''},\quad \eta=Y+\frac{1+Y'^2}{Y''},$$

$$\xi-X=-Y'\frac{1+Y'^2}{Y''},\quad \xi=X-\frac{1+Y'^2}{Y''}Y',$$

$$R^2=Y'^2\left(\frac{1+Y'^2}{Y''}\right)^2+\left(\frac{1+Y'^2}{Y''}\right)^2=\frac{(1+Y'^2)^3}{Y''^2},$$

$$R=\left|\frac{(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}{Y''}\right|:$$

ed infine, eseguendo la sostituzione indicata:

$$\xi=a-f'(a)\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)},\quad \eta=f(a)+\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}, \tag{1}$$

$$R=\left|\frac{(1+f'(a)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(a)}\right|.$$

Osservazione 1.ª Il cerchio osculatore ha, in generale, colla curva un contatto del 2.° ordine e perciò *attraversa la curva.*

Osservazione 2.ª Potremo anche qui dire che il cerchio osculatore in un punto M ad una curva data è quel cerchio che passa per M e per due punti della curva infinitamente vicini ad M.

Osservazione 3.ª Si può fare anche in questo caso un'osservazione analoga a quella fatta nel caso precedente e cioè che se le derivate $f'''(a)\ldots . f^{(p)}(a)$ fossero tutte nulle, il cerchio osculatore avrebbe in M un contatto di ordine p con la curva.

Osservazione 4.ª Poichè il cerchio osculatore ad una curva in un punto, ha in comune con la curva la tangente e quindi anche la normale, *il suo centro si trova sulla normale alla curva.*

Osservazione 5.ª Siccome nel punto di osculazione è

$$f(a)=Y_a, \quad f''(a)=Y_a'',$$

il cerchio osculatore e la curva volgono la concavità dalla stessa parte.

607. Indicando genericamente con (x, y) il punto di osculazione, si hanno le formule

$$(2) \qquad \xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}, \quad R=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|.$$

Usando la notazione differenziale, cioè ponendo

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{d^2y dx-d^2x dy}{dx^3}$$

si ha

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi=x-\dfrac{dy(dx^2+dy^2)}{d^2y dx-d^2x dy}, \quad \eta=y+\dfrac{dx(dx^2+dy^2)}{d^2y dx-d^2x dy} \\ R=\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y dx-d^2x dy}. \end{cases}$$

608. Se la curva è riferita a coordinate polari, facendo uso delle note formule di trasformazione, si ha

$$(4) \qquad R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

609. Se la curva è data mediante due equazioni della forma

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

le formule che danno ξ, η, R in forza delle espressioni delle y' ed y'' divengono

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi=\varphi+\dfrac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\psi'\varphi''-\psi''\varphi'} \\ \eta=\psi-\dfrac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\psi'\varphi''-\psi''\varphi'} \\ R=\left|\dfrac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}\right|. \end{cases}$$

Quando per variabile indipendente, si prende la **lunghezza** s **dell'arco di curva,** *si ha*

$$dx = \varphi' ds, \quad dy = \psi' ds, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2(\varphi'^2 + \psi'^2).$$

Ma

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \ (^1)$$

si ricava dunque

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1.$$

Le formule precedenti si possono dunque, nella presente ipotesi, scrivere nel modo seguente:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{1}{|\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'|} \\ \xi &= \varphi - \psi' R \\ \eta &= \psi + \varphi' R. \end{aligned} \right.$$

610. Se l'equazione della curva è data sotto la forma implicita $F(xy) = 0$, ricordando che

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad y'' = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3},$$

si troverà

$$(7) \qquad R = -\frac{\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}$$

611. Osserveremo infine, dal *confronto della espressione di* R, *con quella della normale geometrica* l_n, (n.° 567) che

$$(8) \qquad R = \left| \frac{1}{y^3 y''} \cdot l_n^3 \right|.$$

(1) Supponiamo nota, dagli elementi di analisi infinitesimale, la nozione di lunghezza d'arco, e la formula che dà il differenziale dell'arco, sotto la forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

612. Esempi. 1.° Parabola:

$$y^2 = 4px,$$

$$y' = \sqrt{\frac{p}{x}}, \quad y'' = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{p}}{x\sqrt{x}}.$$

Per un punto generico (xy) della curva, il cerchio osculatore è determinato da:

$$\xi = 2p + 3x, \quad \eta = -\frac{xy}{p}, \quad R = \frac{2(p+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

Osservando che

$$y^3 y'' = -4p^2,$$

dalla formula (8) ricaviamo

$$R = \left| \frac{1}{4p^2} \cdot l_n^3 \right|$$

cioè *nella parabola il raggio del cerchio osculatore è proporzionale al cubo della normale.*

2.° Ellisse e iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si ha

(9) $$y' = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

e quindi posto

$$a^2 \mp b^2 = c^2 = a^2 e^2$$

$$\xi = \frac{e^2 x^3}{a^2}, \quad \eta = -\frac{a^2 e^2 y^3}{b^4}, \quad R = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Dalla (9) si ricava

$$y'' y^3 = -\frac{b^4}{a^2},$$

dunque, per la formula (8) trovata al n.° 611, si avrà

$$R = \left| \frac{a^2}{b^4} \cdot l_n^3 \right|,$$

cioè: *il raggio del cerchio osculatore è proporzionale al cubo della normale.*

Questa dunque (cfr. l'esempio 1.°) è una proprietà comune ai tre generi di coniche.

3.° PARABOLA SEMICUBICA:

$$y^2 = a^2 x^3$$

$$y = ax^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} ax^{\frac{1}{2}}, \quad y'' = \frac{3}{4} ax^{-\frac{1}{2}}$$

$$\xi = x - \frac{3}{2} ax^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{9}{4} a^2 x}{\frac{3}{4} ax^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\eta = y + \frac{1 + \frac{9}{4} a^2 x}{\frac{3}{4} ax^{-\frac{1}{2}}}$$

ed infine

$$R = \left| \frac{(1 + \frac{9}{4} a^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} ax^{-\frac{1}{2}}} \right|.$$

4.° PARABOLA CUBICA:

$$y = \frac{ax^3}{3}$$

$$y' = ax^2, \quad y'' = 2ax:$$

$$\xi = x - ax^2 \frac{1 + a^2 x^4}{2ax} = x - x \frac{1 + a^2 x^4}{2} = x\left(1 - \frac{1 + a^2 x^4}{2}\right) = x \frac{1 - a^2 x^4}{2}$$

$$\eta = y + \frac{1 + a^2 x^4}{2ax} = \frac{ax^3}{3} + \frac{1 + a^2 x^4}{2ax}$$

$$R = \left| \frac{(1 + a^2 x^4)^{\frac{3}{2}}}{2ax} \right|.$$

5.° CATENARIA (n.° 558, pag. 80):

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

si ha

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{a^2}y$$

$$\xi = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{\frac{2x}{a}}\right), \quad \eta = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = 2y,$$

$$R = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a}.$$

La relazione $\eta = 2y$ ci dice che *per ottenere il centro del cerchio osculatore si deve prolungare la normale al disopra della curva, di tanto quanto è lunga la normale geometrica.*

6.° Cicloide:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t) = \varphi(t)$$
$$y = a(1 - \cos t) = \psi(t)$$

si ha

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad \varphi''(t) = a \operatorname{sen} t$$
$$\psi'(t) = a \operatorname{sen} t, \quad \psi''(t) = a \cos t$$
$$\xi = a(t + \operatorname{sen} t), \quad \eta = -a(1 - \cos t) = -y,$$
$$R = 4a\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 4a \operatorname{sen}\frac{t}{2} = 0.$$

La relazione $\eta = -y$ ci dice che *il centro del cerchio osculatore si trova prolungando la normale al disotto dell'asse delle x di tanto quanto essa è lunga.*

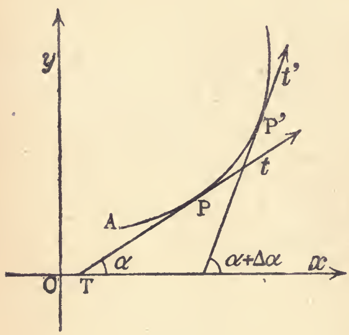
§ IX. Curvatura delle curve piane.

613. La curvatura si riguarda come una nozione geometrica primitiva: la retta si considera come una linea avente curvatura nulla in ogni suo punto; il cerchio come una linea in cui la curvatura è uniforme cioè la stessa in tutti i suoi punti, ma variabile col variar del raggio da un circolo all'altro. Se si prendono in esame i circoli tangenti in un dato punto ad una stessa retta, osservando che quando il raggio aumenta essi tendono, in vicinanza del loro punto di contatto, ad avvicinarsi a questa retta, si dice che *la curvatura diminuisce col crescer del raggio*, e ciò porta ad assegnare, per misura della curvatura di un dato cerchio, l'inverso del raggio.

Ora l'inverso del raggio si può rappresentare col rapporto dell'angolo di due tangenti diviso per la lunghezza dell'arco compreso tra i loro punti di contatto; estendendo questo concetto a curve di natura qualunque, chiameremo **curvatura media** *di un arco il quoziente ottenuto dividendo per la lunghezza di quest'arco l'angolo delle tangenti condotte alle sue estremità; e il limite di questo rapporto, supponendo l'arco infinitamente piccolo, si dirà* **curvatura** *della data curva nel punto cui tendono gli estremi dell'arco quando questo tende allo zero.*

614. Sia l'equazione della curva proposta

$$y = f(x)$$



sia s la lunghezza dell'arco contata a partire da un' origine qualunque A fino al punto P, di cui le coordinate sono x, y, ed α l'angolo $\widehat{xt}$ che fa in questo punto la tangente PT con l'asse delle x. Sia P' un punto della curva preso in un intorno determinato di P. Indicando con Δs l'incremento del l'arco s quando P va in P', con $\alpha + \Delta\alpha$ l'angolo $\widehat{xt'}$ che fa con l'asse x la tangente in P', dalla identità angolare,

$$\widehat{tt'} = \widehat{xt'} - \widehat{xt} = \alpha + \Delta\alpha - \alpha = \Delta\alpha,$$

si ricava che $\Delta\alpha$ è l'angolo delle due tangenti in P e P', cosicchè avremo, per espressione della curvatura,

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Ora si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}$$

$$d\alpha = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^2 + dy^2}.$$

Il valore $d\alpha$, di cui ora abbiamo ottenuta la espressione, è l'**angolo limite** *delle tangenti in punti infinitamente vicini* cioè, come suol dirsi, l'angolo delle *tangenti in due* **punti successivi**, o di due **tangenti successive**, *e si dice anche* **angolo di contingenza.**

Supponendo nota dagli elementi del calcolo la espressione del differenziale dell'arco $ds^2 = dx^2 + dy^2$, avremo,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Questa è l'espressione della curvatura nel punto dato P; ma essa rappresenta anche l'inverso del raggio del cerchio osculatore alla curva in tale punto, dunque *la curvatura di una curva in un punto è eguale alla curvatura del suo cerchio osculatore.*

Questo cerchio si dice perciò anche **cerchio di curvatura** ed il suo raggio, **raggio di curvatura** nel punto P.

OSSERVAZIONE. — Se $y'' = 0$, $\frac{1}{R} = 0$, cioè *nei punti in cui si ha tangente stazionaria la curvatura è nulla*, cioè il cerchio di curvatura si riduce ad una retta (la tangente stessa).

§ X. Evolute ed evolventi.

615. *Il luogo dei centri di curvatura di una linea si dice la sua* **evoluta o sviluppata**; la linea data rispetto ad essa si dice **evolvente o sviluppante.**

Una rappresentazione parametrica della evoluta è data dalle formule

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{1 + y'^2}{y''}\, y' \\[2ex] \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

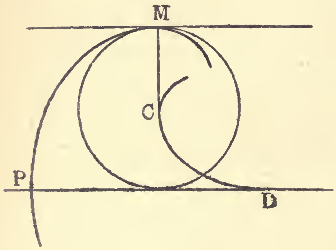
le quali esprimono le coordinate di un punto (ξ, η) dell'evoluta in funzione del parametro x. Eliminando x tra queste due si ottiene la equazione della evoluta sotto la forma

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

616. *La tangente all' evoluta è normale all' evolvente.* Ed infatti: considerando y, ξ, η come funzioni della x deriviamo rispetto ad x la relazione

$$x - \xi + (y - \eta)\, y' = 0$$

esprimente che il punto $(\xi\eta)$ è sulla normale alla evolvente nel punto (xy), ed avremo:



$$1 - \xi' + (y - \eta)y'' + y'^2 - \eta' y' = 0.$$

Ricordando che è

$$1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0,$$

rimane

$$-\xi' - \eta' y' = 0,$$

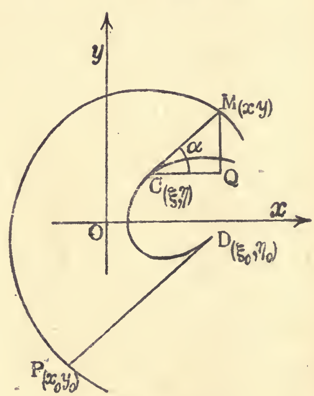
da cui

$$1 + y' \frac{\eta'}{\xi'} = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{d\eta}{d\xi}\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

e questa esprime la condizione di perpendicolarità tra la tangente in $M(x, y)$ alla curva proposta e la tangente in $C(\xi, \eta)$ alla sua evoluta.

Sappiamo inoltre che la normale in M alla curva data passa per C dunque è questa per l'appunto la tangente all' evoluta.

617. Nel corso di Calcolo Infinitesimale si dimostra che, *per quegli archi di evoluta cui corrispondono raggi di curvatura che variano sempre nello stesso senso, la lunghezza di un arco di evoluta è uguale alla differenza dei raggi di curvatura dell' evolvente, relativi ai punti pei quali passano le tangenti nei suoi punti estremi.*



Da ciò si deduce che se abbiamo una curva DC ed immaginiamo che un filo flessibile ed inestensibile di lunghezza PD sia fissato in D con uno dei capi e si muova nel piano mantenendosi ben teso ed appoggiandosi alla curva CD, l'altro capo P descriverà l'evolvente di questa curva.

Donde i nomi di ***evoluta o sviluppata, evolvente o sviluppante.***

Di ciò abbiamo visto esempio studiando la ***evolvente del cerchio*** al n.° 561, pag. 88.

618. Poichè la lunghezza del filo è arbitraria si può dire che ***una curva ammette infinite evolventi.*** Queste hanno tutte le normali comuni e il tratto di normale compreso tra due curve ha lunghezza costante, cioè sono curve parallele.

619. Per *trovare l'evolvente, data l'evoluta*, bisogna anzitutto determinare la lunghezza $\sigma(\xi)$ dell'arco di questa evoluta compreso tra il punto $D(\xi_0, \eta_0)$ e il punto $C(\xi, \eta)$. Precisamente, supposto che l'equazione d'essa sia

$$\eta = \varphi(\xi),$$

bisognerà trovare una primitiva $\psi(\xi)$ della funzione

$$\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2};$$

e calcolare la lunghezza cercata mediante la formula

$$\sigma(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{1 - \varphi'(\xi)^2}\, d\xi = \psi(\xi) - \psi(\xi_0).$$

Poi (n.° 617) avremo:

$$|\overline{MC}| = |\overline{PD}| - \sigma = R_0 - \sigma.$$

Osservando che il coefficiente angolare di MC è dato da $\varphi'(\xi)$, si ha

$$x = \xi + \overline{CQ} = \xi + \overline{MC} \cos \alpha$$

$$\begin{cases} x = \xi + (R_0 - \sigma) \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} \\[2ex] y + \varphi(\xi) + (R_0 - \sigma) \dfrac{\varphi'(\xi)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}}. \end{cases}$$

Eliminando la ξ tra queste due si ha l'equazione dell'evolvente.

620. Esempi. Evoluta della parabola

$$y^2 = 2px$$

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

onde

$$\xi - x = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} \cdot \frac{p}{y} = \frac{y^2 + p^2}{p} = 2x + p\,; \quad x = \frac{\xi - p}{3}$$

$$\eta - y = -\frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2} - y\,; \quad y = (-p^2\eta)^{\frac{1}{3}}$$

infine

$$(p^2\eta)^{\frac{2}{3}} = 2p\left(\frac{\xi - p}{3}\right)$$

e l'equazione della evoluta è

$$\eta^2 = \frac{1}{p}\left(\frac{2(\xi - p)}{3}\right)^3.$$

§ XI. Cenno sugli inviluppi di curve piane.

621. Essendo data una famiglia di curve per mezzo dell'equazione

$$f(x, y, a) = 0$$

dove a è un parametro variabile, *il luogo delle intersezioni limiti delle curve che corrispondono ai parametri, a, $a + da$, che hanno differenze infinitesime, si chiama* **l'inviluppo della famiglia di curve proposte.**

622. Così se si considera l'insieme di tutte le normali ad una data curva, esse possono essere rappresentate da un'equazione

$$f(x, y, s) = 0$$

dove x ed y sono le coordinate correnti sulla normale, ed s è l'arco di curva, che si considera come parametro. L'intersezione limite di due di esse, corrispondenti ai valori s, $s+ds$, è il centro di curvatura relativo all'estremo dell'arco s. *Il luogo di questi centri, cioè l'evoluta, è dunque l'inviluppo delle normali della evolvente.*

623. L'equazione dell'inviluppo si ottiene considerando il sistema delle due equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ a)=0 \\ f(x,\ y,\ a+da)=0. \end{cases}$$

Sostituendo il sistema (1) col sistema equivalente

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ a)=0 \\ \dfrac{f(x,\ y,\ a+da)-f(x,\ y,\ a)}{da}=0, \end{cases}$$

da questo per da infinitesimo si ha il sistema

$$(3)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ a)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial a}f(x,\ y,\ a)=0 \end{cases}$$

che è quello da cui si deve eliminare a per giungere all'equazione dell'inviluppo.

Posto che dalla seconda di quelle equazioni si ricavi

$$(4)\qquad a=\varphi(xy)$$

avremo l'equazione dell'inviluppo sotto la forma

$$(5)\qquad f(x,\ y,\ \varphi(xy))=0.$$

624. *L'inviluppo è tangente a tutte le curve della famiglia.* Ed infatti: il coefficiente angolare della tangente all'inviluppo nel punto generico $(x,\ y)$, è dato dal valore di $\dfrac{dy}{dx}$ che si ottiene differenziando la (5)

$$(6)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Ma $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ non differisce da $\frac{\partial f}{\partial a}$ tranne che in ciò: che a vi è sostituita con $\varphi(x, y)$ e questo $\varphi(x, y)$ è precisamente il valore di a che annulla $\frac{\partial f}{\partial a}$. La equazione (6) si riduce allora alla:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

che è precisamente la relazione che serve a determinare il coefficiente angolare di una delle curve della famiglia $f(x, y, a)=0$. Se ne conclude che le due curve hanno nel loro punto comune la stessa tangente e sono perciò tangenti fra loro. Il ragionamento non sarebbe rigoroso se $\frac{dy}{dx}$ avesse forma indeterminata. Ciò avviene nei punti multipli delle singole curve della famiglia. Anche questi punti sono dati dal sistema (3): essi però non appartengono all'inviluppo.

625. Osservazione. La regola precedentemente data per la determinazione degli inviluppi conduce ad un paradosso, se la si applica all'equazione risoluta rispetto al parametro a perchè uguagliando allo zero la derivata si ha la relazione assurda $1=0$.

626. Si verifica subito che *ogni curva può essere considerata come l'inviluppo delle sue tangenti.*

627. Esempi. 1.° Trovare *l'inviluppo delle rette*

$$y=ax+\frac{m}{a}$$

dove è a il parametro arbitrario. Dovremo eliminare a dal sistema:

$$f=y-ax-\frac{m}{a}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial a}=-x+\frac{m}{a^2}=0.$$

Di qui

$$a^2=\frac{m}{x};$$

si ha quindi la parabola

$$y^2=4mx.$$

2.° Trovare *l'inviluppo della famiglia di rette*

$$y = ax + r(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f = y - ax - r(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial a} = -\left\{ x + \frac{ra}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0$$

moltiplicando la seconda per a e togliendola poi dalla prima si ha

$$y = r\left\{ (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \frac{r}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad y^2 = \frac{r^2}{1 + a^2}$$

così

$$x^2 = \frac{r^2 a^2}{1 + a^2}.$$

Sommando si ha

$$x^2 + y^2 = r^2$$

equazione di un cerchio.

3.° Trovare *l'inviluppo della famiglia di parabole*

$$y^2 = a(x - a).$$

Derivando si ha

$$2a - x = 0, \quad a = \frac{x}{2}$$

epperò

$$y^2 = \frac{x^2}{4}.$$

Si ha dunque il sistema delle due rette

$$y = \pm \frac{x}{2}.$$

4.° Trovare *l'inviluppo della famiglia di ellissi*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k - a)^2} = 1$$

derivando si ha

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{(k - a)^3} = 0; \quad a = \frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$$

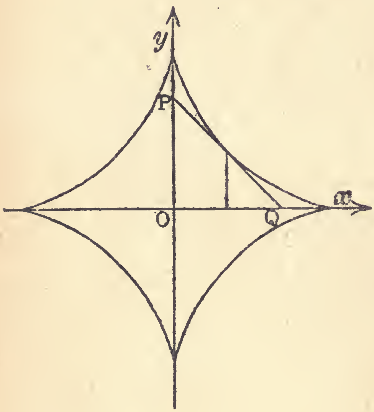
e

$$k - a = \frac{ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}.$$

Sostituendo si ha l'*asteroide* (n.° 558, V, pag. 84):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

5.° Questo medesimo inviluppo si trova anche cercando l'inviluppo di un segmento PQ di lunghezza k che si muove in modo che i suoi estremi percorrano due assi ortogonali.



Presi come assi cartesiani quei due assi e chiamato a l'angolo del segmento mobile con l'asse x, l'equazione della retta cui appartiene il segmento è

$$\frac{x}{k \cos a} + \frac{y}{k \operatorname{sen} a} = 1$$

ossia

$$x \operatorname{sen} a + y \cos a - k \operatorname{sen} a \cos a = 0.$$

Derivando rispetto ad a,

$$x \cos a - y \operatorname{sen} a - k \cos 2a = 0;$$

dalle due relazioni segue

$$x = k \cos^3 a, \quad y = k \operatorname{sen}^3 a,$$

e quindi

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

6.° Trovare *l'inviluppo della famiglia di parabole*

$$y = ax - (1 + a^2)\frac{x^2}{4c}.$$

Derivando

$$0 = x - \frac{ax^2}{2c}, \quad a = \frac{2c}{x}; \quad x^2 = -4c(y - c).$$

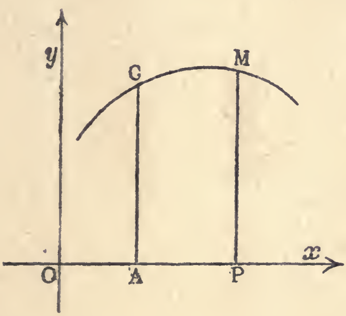
Questo inviluppo è una parabola avente per asse l'asse delle y, il cui vertice ha per ordinata c ed il cui fuoco è 0.

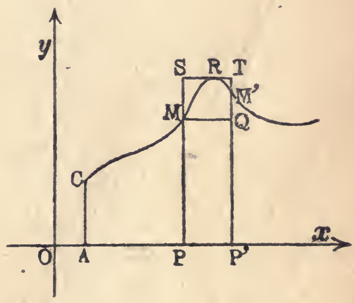
È l'inviluppo delle traiettorie dei proiettili lanciati da un dato punto (preso come origine) in un dato piano verticale, con data velocità iniziale costante v_0 ma con diversa inclinazione α sull'orizzonte. (Precisamente, è $a = \operatorname{tang} \alpha$ e $c = \frac{v_0^2}{2g}$, essendo g l'accelerazione di gravità). Fu trovato da E. TORRICELLI, ed è il primo esempio conosciuto di inviluppi di linee curve.

§ XII. Quadratura di curve piane.

628. DIFFERENZIALE DELL'AREA [1]. Sia $y = f(x)$ l'equazione di una curva piana che dapprima supporremo riferita a coordinate cartesiane ortogonali.

Supponendo che, almeno per una certa porzione CM, questa curva non sia mai al disotto dell'asse delle x e sia tutta a distanza finita, s'intende che l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva CM dalle ordinate CA, MP e dall'asse delle x, sarà una quantità determinata il cui valore, se si





tiene fisso il punto C, dipenderà dall'ascissa x dell'estremo variabile M, e sarà quindi una funzione di x, che potremo indicare con $A(x)$; se la curva è continua questa funzione $A(x)$ oltre ad assere finita sarà anche continua e crescerà con la x.

Diamo all'ascissa x l'incremento $PP' = \Delta x$. Il punto M si

[1] Per una trattazione rigorosa e compiuta di questo argomento si rimanda al Corso di Calcolo Infinitesimale.

porterà in M' e l'area $A(x)$ si accrescerà della porzione $PMM'P'$, la quale potrà considerarsi come somma (algebrica) del rettangolo $PMQP'$ e della porzione $MRM'Q$. Quest'ultima è parte del rettangolo $MSTQ$ che ha per base $MQ = \Delta x$, e per altezza δf, oscillazione della $f(x)$ nel tratto Δx.

Indicando con $\Delta A(x)$ l'accrescimento dell'area $A(x)$, avremo dunque:

$$\Delta A(x) = \Delta x \cdot f(x) + \Delta x \cdot \delta f.$$

Osservando però che δf è infinitesimo insieme con Δx, vediamo che $\Delta x \cdot \delta f$ è *infinitesimo di ordine superiore*, onde avremo per la definizione di differenziale

(1) $$dA(x) = f(x)dx.$$

Il differenziale dell'area è eguale al prodotto dell'ordinata pel differenziale della ascissa.

629. Calcolo dell'area. Dalla formola (1) si ricava

$$f(x) = \frac{dA(x)}{dx},$$

d'onde si scorge che se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha

$$A(x) = \varphi(x) + c$$

c costante nel tratto che si considera. Per determinare c si osservi che

$$A(a) = 0$$

onde

$$0 = \varphi(a) + c,$$

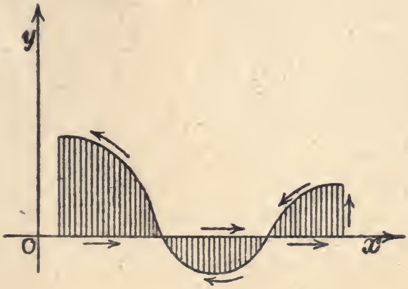
$$\varphi(a) = -c$$

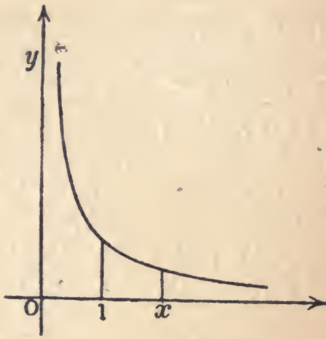
quindi

(2) $$A(x) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Per determinare l'area racchiusa dalla curva $y = f(x)$, dall'asse x e dalle ordinate nei punti a ed x, basta dunque trovare una primitiva della funzione $f(x)$, e fare la differenza dei valori che questa assume nei punti x ed a.

Osservazione. Le aree corrispondenti a porzioni di curva scendenti sotto l'asse delle x, pei punti delle quali cioè le ordinate sono negative, debbono considerarsi come *negative*.





Esempio. Cerchiamo il differenziale dell'area $A(x)$ compresa fra *l'iperbola equilatera* riferita agli asintoti, di equazione $xy=1$, l'asse delle x e le due ordinate di ascissa 1 ed x. Sarà

$$dA = \frac{1}{x}\,dx$$

onde la primitiva:

$$\varphi(x) = \log x,$$

dunque

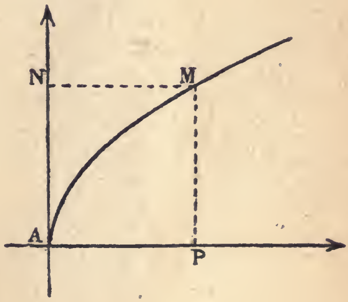
$$A(x) = \varphi(x) - \varphi(1) = \log x.$$

2.° Parabola Apolloniana

$$y^2 = 2px;\; y = \sqrt{2p}\cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

Una primitiva è

$$\varphi(x) = \sqrt{2p}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}.$$



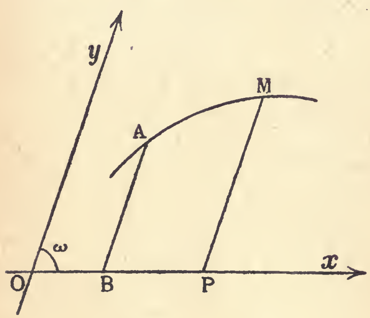
L'area della superficie AMP racchiusa da un arco di parabola col vertice nell'origine dal segmento $AP=x$ e dall'ordinata MP è data, in coordinate ortogonali, dalla differenza:

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\sqrt{2p}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x^{\frac{1}{2}}x=\frac{2}{3}xy$$

Ossia: *l'area compresa fra l'asse della parabola, l'arco AM e l'ordinata MP è uguale a* $\frac{2}{3}$ *dell'area del rettangolo circoscritto APMN. Ed allora ne viene (per sottrazione) che l'area compresa fra l'arco AM di parabola, la tangente AN condotta nel vertice, ed una retta parallela all'asse, ha per misura il terzo dell'area del rettangolo APMN.*

Ed anche che: *l'arco AM di parabola divide il rettangolo APMN in due parti delle quali l'una è doppia dell'altra.*

630. *Se la curva è riferita ad* **assi coordinati obliqui,** *ed è* ω *l'angolo degli assi,* il differenziale dell'area $A(x)$ determinata dall'asse x, dalla curva e da due ordinate AB, MP, è dato da

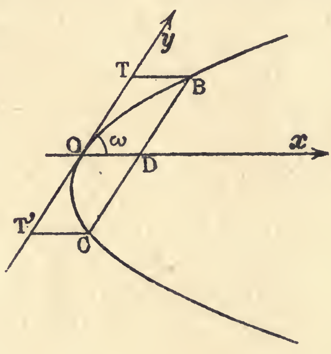


(3) $$dA=y\operatorname{sen}\omega dx.$$

Trovata una primitiva $\varphi(x)$ della $f(x)$ si ha

(4) $$A(x)=\operatorname{sen}\omega(\varphi(x)-\varphi(a)).$$

Esempio. Data la *parabola COB* ed una sua corda qualunque *CB* assumiamo come sistema di assi coordinati il diametro Ox coniugato alla direzione della corda e la tangente Oy all'estremità di esso. L'equazione della parabola conserva la forma normale $y^2=2px$.



Cercheremo, come precedentemente, una primitiva della funzione $y(x)=\sqrt{2px}$; questa sarà:

$$\varphi(x)=\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}$$

cioè

$$\varphi(x)=\frac{2}{3}xy.$$

Se con ω si indica l'angolo degli assi, per la formula (4) l'area della figura OBD sarà data da

$$\operatorname{sen}\omega\cdot\frac{2}{3}xy.$$

Quella del parallelogramma $ODBT$ è $\operatorname{sen}\omega\cdot xy$, dunque si ha ancora

$$\text{area } OBD=\frac{2}{3}\text{ area } ODBT.$$

Se si considera anche la figura ODC, al disotto dell'asse Ox, si ha similmente

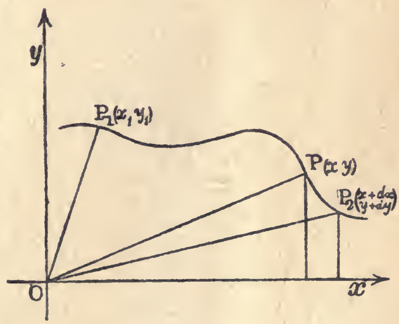
$$\text{area } ODC=\frac{2}{3}\text{ area } ODCT'.$$

Dunque sommando

$$\text{area } OCB=\frac{2}{3}\text{ area } T'CBT.$$

La porzione di diametro OD si suol chiamare ***saetta della corda** CB*; potremo dunque enunciare il risultato ottenuto dicendo: ***l'area del segmento parabolico è data da due terzi del l'area del parallelogramma determinato dalla corda e dalla saetta.***

631. Elemento di area a settori. Data una curva $y=y(x)$, e su questa due punti $P_1(x_1 y_1)$, $P(xy)$, si consideri l'area $S(xy)$ racchiusa dal settore OP_1P che ha il vertice nell'origine, ed è terminato ai raggi OP_1, OP, ed alla curva P_1P.



Considerando il settore elementare O, $P(xy)$, $P_2(x+dx, y+dy)$ che rappresenta l'accrescimento ΔS, dell'area $S(xy)$, per l'accrescimento dx della variabile x, avremo, pel triangolo OPP_2

$$\overline{OPP_2}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x & y\\ 1 & x+dx & y+dy\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(xdy-ydx);$$

ora, l'area di questo triangolo rappresenta la parte principale dell'accrescimento ΔS, onde verrà

$$(2)\qquad dS = \frac{1}{2}(xdy - ydx).$$

Trovata una primitiva della espressione al secondo membro, si avrà al solito modo l'area cercata.

Questa forma è particolarmente utile quando la curva è data mediante **le equazioni parametriche**

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Si avrà in tal caso:

$$(5)\qquad dS = \frac{xdy - ydx}{2} = \frac{xy'(t) - yx'(t)}{2}\,dt.$$

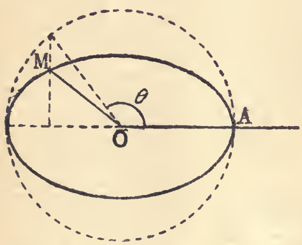
Esempio. Le equazioni parametriche della *ellisse* sono, come è noto:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

dove θ è la *anomalia eccentrica*; perciò

$$dS = \frac{1}{2}(ab\cos^2\theta + ab\,\mathrm{sen}^2\,\theta)d\theta$$

cioè



$$dS = \frac{ab}{2}\,d\theta.$$

Una primitiva è evidentemente

$$\varphi(\theta) = \frac{ab}{2}\,\theta.$$

Dunque l'area cercata sarà espressa da

$$S = \varphi(\theta) - \varphi(0)$$

cioè da

$$S = \varphi(\theta) = \frac{ab}{2}\,\theta.$$

Per avere l'area della intera ellisse basterà fare $\theta = 2\pi$, *e si troverà così per l'* **area della ellisse** *la espressione* $S = \pi ab$.

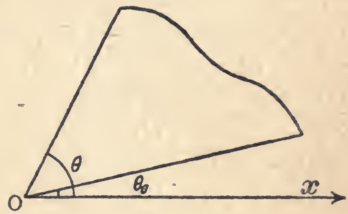
632. *In* **coordinate polari** *si considerano generalmente le aree di settori col vertice nel polo.* Sia $\rho = \rho(\theta)$ l'equazione della curva.

La formula (2) che dà l'elemento d'area a settori, si cambierà nella seguente:

$$dS(\theta) = \frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta. \tag{3}$$

Questa appunto è la espressione del differenziale dell'area in coordinate polari.

La derivata dell'area $S(\theta)$ del settore proposto è dunque espressa da



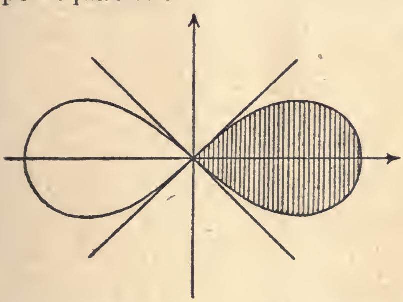
$$S'(\theta) = \frac{1}{2}\rho^2(\theta)$$

e per trovare l'area medesima, basterà cercare una primitiva della funzione $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$; chiamata questa con $\varphi(\theta)$, si avrà

$$S(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(\theta_0),$$

se θ_0, θ sono le anomalie dei due raggi vettori che determinano il settore da misurare.

Esempio. La *Lemniscata* (n.° 561, pag. 87 e n.° 583, pag. 116) ha per equazione



$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Il differenziale dell'area è

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = a^2 \cos 2\theta \cdot d\theta.$$

Una primitiva è

$$\varphi = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen} 2\theta.$$

L'area racchiusa dalla parte di curva corrispondente ai valori $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ della anomalia, sarà

$$A = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2.$$

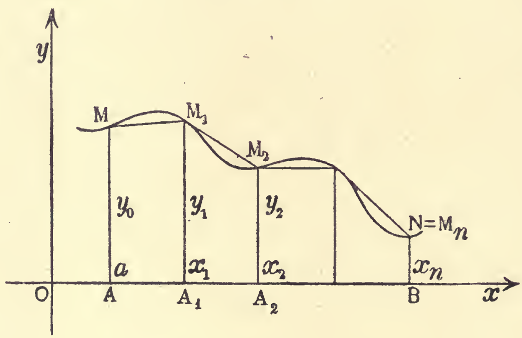
L'area della intiera lemniscata sarà data da $2a^2$.

§ XIII. Quadrature approssimate.

633. Quando le regole date al § precedente per la quadratura di una curva non si possono applicare, o perchè non si riesce a trovare la primitiva della funzione che occorre considerare, o perchè la equazione della curva non è nota, ma la curva stessa è determinata in modo empirico, cioè disegnata con procedimenti grafici, o calcolata per punti, (cioè data per mezzo di un numero limitato di punti, dai quali, *per interpolazione*, la curva stessa vien poi ricavata), servono, per il calcolo approssimato dell'area, dei metodi di *approssimazione numerica*, o di *approssimazione meccanica.*

Esporremo i più semplici di tali metodi.

634. Formula di Bézout. La superficie da quadrare sia quella racchiusa dalla curva MN, dalle ordinate AM, BN nei punti estremi e dalla porzione AB dell'asse x, in cui la curva MN si proietta.



Si divida il segmento AB in un determinato numero di parti eguali mediante i punti A_1, A_2.... $A_n = B$. Si conducano le ordinate A_1M_1, A_2M_2.... A_nM_n: e si calcoli, invece dell'area proposta, la somma dei trapezi AA_1M_1M, $A_1A_2M_2M_1$,.... $A_{n-1}BNM_{n-1}$.

Indicando con y_r la ordinata $\widehat{A_rM_r}$ corrispondente al punto x_r; con h la lunghezza costante delle parti $\widehat{AA_1} = \widehat{A_1A_2} =$.... in cui fu diviso il segmento AB; avremo la somma cercata sotto la forma

$$S = \frac{h}{2}(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n)$$

ossia

$$S = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

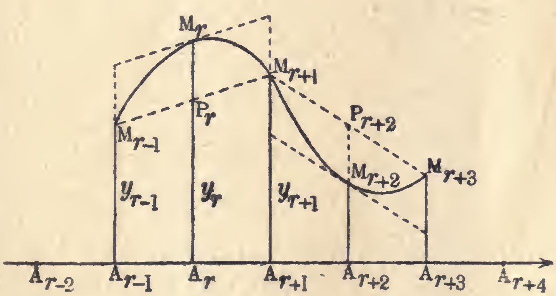
Questa è appunto la *formula di Bézout*, e corrisponde alla *interpolazione lineare.*

635. *Formula di* SIMPSON. Indicata come al n.° precedente la superficie da quadrare, si scomponga, come ivi fu fatto, l'intervallo AB in un certo numero n di parti, che *ora supporremo pari*, $n = 2m$, si conducano le ordinate corrispondenti ai punti di divisione, e, per ogni coppia di tratti adiacenti AA_1A_2, $A_2A_3A_4, \dots$, $A_{r-1}A_rA_{r+1}, \dots$, $A_{2m-2}A_{2m-1}B$, si sostituisca al tratto di curva $M_{r-1}M_rM_{r+1}$, un *arco di parabola* passante per questi stessi punti, con l'asse parallelo all'asse delle y.

L'area del segmento parabolico $M_{r-1}M_{r+1}M_r$ è data (n.° 630) da due terzi dell'area del parallelogrammo determinato dalla corda $M_{r-1}M_{r+1}$ e dalla saetta $\overline{P_rM_r}$.

Assunto, come base di questo parallelogrammo, uno dei lati paralleli a P_rM_r, l'altezza risulta data da $2h$; la base medesima ha per lunghezza

$$\overline{P_rM_r} = \overline{A_rM_r} - \frac{1}{2}(A_{r-1}M_{r-1} + A_{r+1}M_{+1}) = y_r - \frac{y_{r-1} + y_{r+1}}{2}.$$



L'area di detto parallelogrammo è dunque data da

$$2h\left(y_r - \frac{y_{r-1} + y_{r+1}}{2}\right) = h(2y_r - y_{r-1} - y_{r+1})$$

e quella del segmento parabolico, quindi, da

$$\frac{2h}{3}(2y_r - y_{r-1} - y_{r+1}).$$

Aggiungendo a questa l'area del trapezio $A_{r-1}A_{r+1}M_{r+1}M_{r-1}$, cioè

$$2h\left(\frac{y_{r-1} + y_{r+1}}{2}\right) = h(y_{r-1} + y_{r+1}),$$

avremo

$$\frac{h}{3}(4y_r + y_{r-1} + y_{r+1}).$$

Facendo $r = 1, 3, 5, \dots 2m - 1$ e sommando, abbiamo

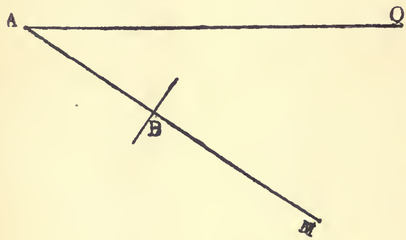
$$S = \frac{h}{3}\{y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\}.$$

Questa è appunto la formula richiesta.

Corrisponde ad una *interpolazione parabolica* (parabola apolloniana).

636. Quadratura meccanica. Dopo aver disegnato accuratamente il contorno della superficie da quadrare, l'area si può ottenere col sussidio di opportuni strumenti detti **Planimetri** od *integratori*.

Uno dei più semplici, quello più comunemente usato dagli ingegneri, è il **Planimetro polare** detto di Amsler.



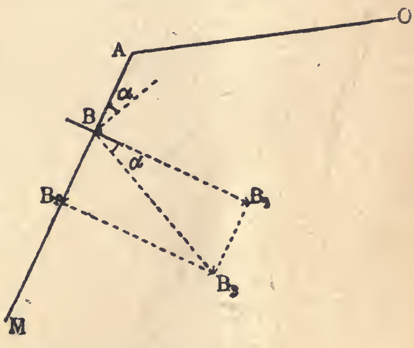
Consiste essenzialmente in due aste OA, AM, articolate in A, delle quali la prima porta all'estremità O (polo) una punta che può essere fissata sul piano del disegno, in modo che tutto l'apparecchio possa ruotare liberamente intorno ad O.

L'altro braccio AM porta nell'estremità libera M uno stilo, cui si fa percorrere il contorno dell'area da misurare, ed in uno dei punti B del segmento AM (o del suo prolungamento), una ruota *(ruota integrante)* il cui asse è nella direzione AM, e che può ruotare in un piano normale a questo segmento, poggiando col suo bordo sul piano del disegno. A questa ruota è connesso un *contagiri* che può dare, con esattezza più o meno sensibile, il numero dei giri e delle porzioni di giro (di solito fino ad $\frac{1}{100}$ di giro) percorsi dalla ruota.

Quando il punto M descrive una data linea sul piano del disegno, la ruota è trascinata nel movimento, e poichè il suo bordo è aderente al piano medesimo, essa avrà anche un movimento di rotazione (misurato dal contagiri) tale che l'angolo di rotazione risulterà proporzionale all'arco che in questo movimento vien descritto dal punto del bordo della ruota, che all'inizio del moto era aderente al piano del disegno.

637. Ora si avverta che se in questo movimento il punto B percorre un segmento BB_1 normale al piano della ruota (cioè l'asse AM scorre su se stesso), la ruota non ha alcun movimento di rotazione.

Se invece si muove normalmente all'asse AM, percorrendo un segmento $\overline{BB_2} = s$, un punto qualunque del bordo della ruota descriverà un arco di lunghezza s, cioè, indicando con m il raggio della ruota, il contagiri segnerà un angolo φ tale che risulti



$$s = m\varphi.$$

Se poi il punto B si sposta in una direzione BB_3, qualsiasi, che formi angolo α col piano della ruota, considerando questo spostamento come risultante dei due BB_1, BB_2, (normale e parallelo al piano della ruota) si vede che l'arco descritto da un punto qualunque del bordo della ruota integrante, risulta eguale a

$$\overline{BB_2} = \overline{BB_3} \cos\alpha = s \cos\alpha.$$

Il contagiri dunque indicherà un angolo φ tale che

(1) $$m\varphi = s \cos\alpha.$$

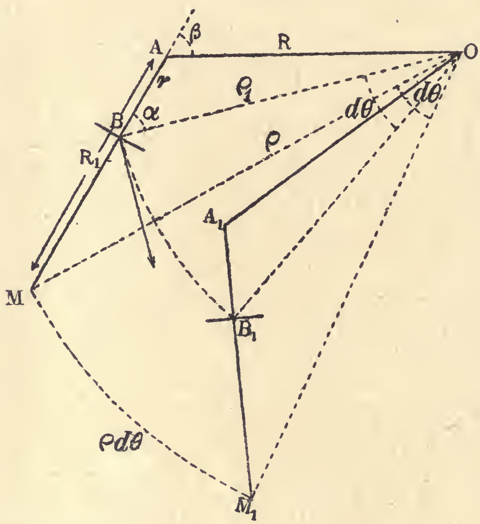
La formula ora scritta vale in ogni caso (qualunque sia α) e ci mostra che, se il punto B descrive sul piano del disegno un segmento rettilineo di lunghezza s, che formi angolo α col piano della ruota integrante, *la lunghezza dell'arco $m\varphi$ descritta da un punto della ruota integrante è sempre eguale al prodotto della lunghezza s del percorso fatto sul piano del disegno, pel coseno dell'angolo che il segmento percorso fa col piano della ruota.*

638. Ciò posto, ricordando che l'**elemento d'area a settori** è un settore circolare, corrispondente ad un angolo al centro infinitesimo, consideriamo il movimento rigido di rotazione di tutto lo strumento intorno ad O, per una rotazione piccolissima $d\theta$, che faccia percorrere ad M l'arco di cerchio MM_1.

Il **settore elementare** *dell'area da calcolare* è rappresentato da MOM_1.

Se indichiamo con ρ il raggio vettore $|\overline{OM}|$, per avere l'elemento d'area si tratterà di calcolare la espressione

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta.$$



Si ponga, a tal uopo,

$$\begin{cases} R = |\overline{OA}|, \quad R_1 = |\overline{AM}|, \quad r = |\overline{AB}|, \\ \rho_1 = |\overline{OB}|, \quad \rho = |\overline{OM}| \\ \alpha = \widehat{ABO}, \quad \beta = \widehat{rR}. \end{cases}$$

Proiettando su AM la spezzata OAB, si ha

(2) $$\rho_1 \cos\alpha = r + R\cos\beta.$$

Dal triangolo OAM si ha poi

$$\rho^2 = R^2 + R_1^2 + 2RR_1 \cos\beta,$$

da cui

$$R\cos\beta = \frac{\rho^2 - R^2 - R_1^2}{2R_1}$$

e sostituendo nella (2),

$$\rho_1 \cos\alpha = \frac{\rho^2 - R^2 - R_1^2 + 2rR_1}{2R_1}.$$

Poichè r, R, R_1 sono quantità note, potremo porre

$$k^2 = R^2 + R_1^2 - 2R_1 r$$

ed avremo

$$\rho_1 \cos\alpha = \frac{\rho^2 - k^2}{2R_1}$$

e, moltiplicando per $R_1 d\theta$

(3) $$R_1 \cdot \rho_1 d\theta \cos\alpha = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta - \frac{1}{2}k^2 d\theta.$$

Ora si consideri che l'arco elementare BB_1, percorso dal punto B sul piano del disegno, (che può considerarsi come un segmento infinitesimo normale ad OB e quindi inclinato dell'angolo α sul piano della ruota), ha lunghezza

$$ds = \rho_1 d\theta;$$

dunque per la (1) il segnagiri dopo questo spostamento segnerà un angolo $d\varphi$ dato da

$$m d\varphi = ds \cos\alpha = \rho_1 d\theta \cos\alpha,$$

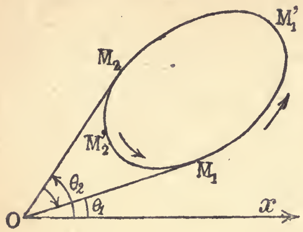
infine, per la (3), avremo

$$R_1 m d\varphi = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta - \frac{1}{2}k^2 d\theta;$$

onde l'elemento d'area a settori risulta dato da

(4) $$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = R_1 m d\varphi + \frac{1}{2}k^2 d\theta.$$

639. Supponiamo ora che l'area da misurare sia il settore OM_1M_2, nel quale i raggi vettori estremi OM_1OM_2 corrispondono alle anomalie θ_1, θ_2.



Facendo percorre allo stilo M l'arco M_1M_2, la ruota integrante compirà una rotazione (segnata dal contagiri), che indicheremo con $\varphi_2 - \varphi_1$, e si avrà dalla (4):

$$(5) \qquad S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = R_1m(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}k^2(\theta_2 - \theta_1).$$

La quantità $\varphi_2 - \varphi_1$ è data dal contagiri, dunque *basta conoscere i numeri costanti R_1m, k^2, per avere l'area S cercata.*

640. Le costanti R_1m, k^2, sono di solito indicate dal costruttore del planimetro, ma si possono anche calcolare con grande esattezza e molto semplicemente. La prima si òttiene calcolando per mezzo del planimetro *l'area racchiusa da una linea chiusa $M_1M_1'M_2M_2'$, essendo il polo O esterno ad essa.*

Quest'area risulta dalla differenza dei due settori

$$OM_1M_1'M_2, \quad OM_1M_2'M_2,$$

cioè dalla somma algebrica dei due

$$OM_1M_1'M_2, \quad OM_2M_2'M_1,$$

e si ottiene col planimetro facendo percorrere dallo stilo l'intiero contorno $M_1M_1'M_2M_2'$.

I valori estremi della anomalia, θ_2, θ_1, sono eguali, quindi dalla (5) si ha:

$$(6) \qquad S = R_1m(\varphi_2 - \varphi_1).$$

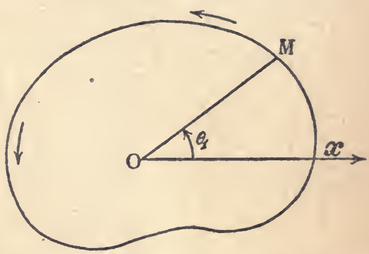
La differenza $\varphi_2 - \varphi_1$ è data dal contagiri, dunque, *se è nota la costante R_1m, con la formula* (6) **si calcolerà l'area** *S cercata.*

Se invece si è percorso il contorno di un'area nota (p. es. di un decimetro quadrato) **si calcolerà la costante** R_1m, *facendo il quoziente*

$$(7) \qquad R_1m = \frac{S}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

641. Si noti peraltro che questo strumento è, in generale, munito di un dispositivo che permette di allungare o di accorciare uno dei bracci, per modo da ridurre la costante $R_1 m$ (**scala delle aree**) ad un numero praticamente opportuno (in generale una potenza di 10).

642. In fine, per **calcolare la costante** k^2 si consideri che, quando si faccia percorrere allo stilo M una *curva chiusa, che contiene il polo nel suo interno,* l'angolo θ varia da θ_1 a $\theta_1 + 2\pi$, quindi si ha la formula:



$$S = R_1 m(\varphi_2 - \varphi_1) + \pi k^2.$$

Cioè *l'area da misurare è eguale alla somma dell'area calcolata mediante il contagiri e dell'area di un cerchio di raggio costante k, detto* **cerchio fondamentale.**

Se si percorre il contorno di un area nota, e si conosce di già la costante $R_1 m$, potremo dunque calcolare anche la costante k *(raggio del cerchio fondamentale)* mediante la formula

$$k^2 = \frac{1}{\pi}(S - R_1 m(\varphi_2 - \varphi_1)).$$

§ XIV. Cenno sulla rettificazione di curve piane.

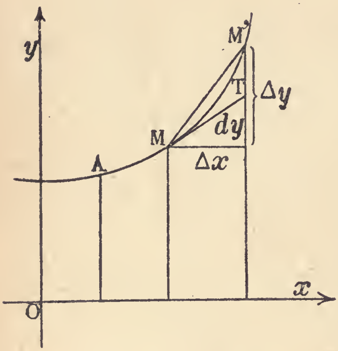
643. Abbiamo già accettata, come acquisita nel corso di Analisi, la nozione di *lunghezza di arco di curva piana*, e la formula che esprime il *differenziale dell'arco.*

Vediamo ora, con qualche mezzo di geometria intuitiva, di giustificare tale formula.

Supponiamo data una curva, rappresentata in coordinate cartesiane da una funzione $y = f(x)$, che supporremo ad un valore, finita, e continua insieme con la sua derivata $y' = \dfrac{df}{dx}$.

Indicando con $s(x)$ la lunghezza dell'arco compreso tra i punti A ed M di ascisse rispettive a ed x, questa sarà una funzione della x, in generale continua, che se si tien fisso a crescerà insieme con x.

Indichiamo con Δs l'incremento che essa subisce quando ad x si dà l'incremento Δx, vediamo sulla figura che questo Δs rappresenta la lunghezza dell'arco MM'. Ora se Δx è preso abbastanza piccolo, in modo che in questo intervallo la $f(x)$ non abbia che un sol punto (al più) di massimo o di minimo, e che l'arco MM' sia tutto da una stessa parte della tangente MT, vediamo che la lunghezza di qualunque poligonale inscritta nell'arco MM' è sempre minore della somma $\overline{MT} + \overline{TM'}$, ed è maggiore di $\overline{MM'}$. Dunque anche l'arco medesimo $MM' = \Delta s$ sarà compreso fra quegli stessi limiti, cioè avremo



$$\overline{MM'} < \Delta s < \overline{MT} + \overline{TM'}$$

ed anche

$$\Delta s - \overline{MM'} < \overline{MT} + \overline{TM'} - \overline{MM'}$$

cioè

$$\Delta s - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \overline{MT} + \overline{TM'} - \overline{MM'}.$$

Ma $\overline{TM'}$ è infinitesimo di ordine superiore a quello di Δx e il valore assoluto della differenza tra $\overline{MT}$ ed $\overline{MM'}$ è sempre minore di $\overline{TM'}$, dunque la differenza fra Δs e $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ è un infinitesimo di ordine superiore a quello di Δx. Dunque $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ è la parte principale di Δs, onde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{1}$$

Questa formula non contenendo che differenziali vale anche se x ed y si suppongono espresse in funzione di un parametro t qualunque.

644. Lunghezza dell'arco di curva piana. Dalla (1) mettendo in evidenza dx abbiamo

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

e questa ci mostra che la funzione $s(x)$ lunghezza dell'arco compreso tra i punti A ed M di ascissa a ed x è una primitiva della funzione $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Trovata una primitiva φ di tale funzione sarà

$$s(x)=\varphi(x)+c.$$

E per determinare c osserveremo che se gli archi si calcolano a partire dal punto di ascissa a, è $s(a)=0$ onde verrà

$$s(a)=\varphi(a)+c=0; \quad c=-\varphi(a),$$
$$s(x)=\varphi(x)-\varphi(a).$$

Per avere dunque la lunghezza dell'arco compreso tra i punti di ascisse a ed x nella curva $y=f(x)$ basta trovare una primitiva della funzione $\sqrt{1+f'(x)^2}$ e calcolare la differenza dei valori che tale primitiva assume nei punti x ed a.

Esempio I.

$$x=\frac{\varphi^3}{3}+\frac{1}{\varphi}, \quad y=2\varphi$$

$$dx=\left(\varphi^2-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi, \quad dy=2d\varphi$$

$$ds^2=\left(\varphi^4+\frac{1}{\varphi^4}-2+4\right)d\varphi^2=\left(\varphi^2+\frac{1}{\varphi^2}\right)^2 d\varphi^2$$

$$ds=\left(\varphi^2+\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi$$

$$s=\frac{\varphi^3}{3}-\frac{1}{\varphi}.$$

Esempio II. Si voglia ora trovare il differenziale dell'arco della *cicloide* (n.° 558, pag. 81), data mediante le equazioni parametriche

$$x=r(t-\operatorname{sen} t); \quad y=r(1-\cos t)$$

sarà

$$x'(t)=r(1-\cos t); \quad y'=r\operatorname{sen} t;$$

allora

$$ds=\sqrt{r^2(1+\cos^2 t-2\cos t)+r^2\operatorname{sen}^2 t}dt$$

cioè

$$ds = r\sqrt{2(1-\cos t)}dt = r\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}t}\,dt$$

ed infine

$$ds = 2r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t\,dt.$$

Ora una primitiva di $2r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t$ è:

$$\varphi(t) = -4r\cos\frac{1}{2}t,$$

avremo dunque per l'arco compreso fra 0 a π

$$s_0{}^{\pi} = \varphi(\pi) - \varphi(0) = 4r$$

e l'arco intero sarà

$$s_0{}^{2\pi} = 8r.$$

CAPITOLO II.

CURVE NELLO SPAZIO

§ I. Tangente. Piano normale. Piano osculatore.

645. Abbiamo già detto (n.[i] 459, 460, pp. 9-10) che una linea nello spazio può essere rappresentata, analiticamente, da un sistema di due equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} F(xyz)=0 \\ \Phi(xyz)=0, \end{cases}$$

quando si possa considerare come intersezione completa delle due superficie $F=0$, $\Phi=0$; oppure da un sistema di tre equazioni

$$(2)\qquad x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

che esprimono le coordinate dei suoi punti in funzione di un parametro t.

Abbiamo anche fatto osservare che in molti casi questo secondo modo di rappresentare analiticamente la curva, torna più opportuno.

Sia dunque data una curva nello spazio mediante il sistema

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

ed indichiamo con

$$P(xyz),\quad P_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$

i punti della curva corrispondenti ai valori t, $t+\Delta t$ del parametro.

Le equazioni della congiungente PP_1 saranno

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z},$$

e potremo anche scriverle sotto la forma:

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Supponiamo ora che il punto P_1, muovendosi sulla curva, si accosti indefinitamente a P; ammesso che siano soddisfatte le solite condizioni di continuità e di derivabilità, e che le tre derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, non siano tutte nulle nel punto che si considera, le equazioni della *posizione limite della retta* PP_1, *cioè della* **tangente** *in* P *alla curva* saranno

$$(3)\qquad \frac{X-x}{x'(t)}=\frac{Y-y}{y'(t)}=\frac{Z-z}{z'(t)},$$

e potremo anche scriverle:

$$(4)\qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz};$$

queste ci dicono, nel linguaggio infinitesimale, che, anche per le curve dello spazio *la tangente si può considerare come la congiungente di due punti successivi* (xyz), $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$, *corrispondenti a valori successivi* t, $t+dt$ *del parametro.*

Se la curva è data come intersezione completa di due superficie, cioè, analiticamente, mediante il sistema

$$f(xyz)=0,\quad \varphi(xyz)=0,$$

si avrà, differenziando,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0,\end{aligned}\right.$$

e scrivendo che $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ sono proporzionali a dx, dy, dz, avremo le equazioni della tangente sotto la forma:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0\\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z-z)=0.\end{aligned}\right.$$

Coseni direttori della tangente. Dalle formule (3) ricaviamo, per i coseni direttori della tangente, le espressioni

$$\alpha=\frac{x'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad \beta=\frac{y'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$
$$\gamma=\frac{z'}{\pm\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

che possiamo scrivere

$$(7)\qquad \alpha=\rho_1x',\quad \beta=\rho_1y',\quad \gamma=\rho_1z';\quad \rho_1=\frac{\pm 1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

nelle quali il segno del fattore di normalizzazione ρ_1 deve essere concorde con quello di z', e se $z'=0$, con quello di y'; finalmente, se $z'=0$, $y'=0$, con quello di x' (n.° 207).

Assumendo come nota dal calcolo la formula

$$(8)\qquad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,\quad ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

(ove il segno concorda con quello delle tre quantità z', y', x' che per prima è diversa dallo zero) che esprime il **differenziale dell'arco**, avremo

$$\rho_1=\frac{1}{s},\quad \alpha=\frac{x'}{s'},\quad \beta=\frac{y'}{s'},\quad \gamma=\frac{z'}{s'}$$

e potremo anche scrivere:

$$\alpha=\frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Da ciò si vede che il *verso positivo delle tangente corrisponde al verso per cui è positivo ds*, cioè *al verso in cui gli archi vanno crescendo.*

646. Piano normale. Il piano perpendicolare alla tangente nel punto di contatto si dice **piano normale** *alla curva* in tale punto.

La sua equazione (n.° 192) ha quindi una delle forme:

$$(9)\qquad \begin{cases} x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0\\ \alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0\\ (X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0.\end{cases}$$

Nel caso che la curva sia data mediante il sistema

$$f(xyz)=0, \quad \varphi(xyz)=0,$$

l'equazione del piano normale assume la forma

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

che immediatamente si ricava dalle (6).

647. Piano osculatore. Siano $P_1 P_2 P_3$ tre punti della curva, corrispondenti ai tre valori del parametro t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$.

Se indichiamo con x, y, z le coordinate di P_1, per note formule di calcolo le coordinate degli altri due potranno indicarsi scrivendo:

$$P_2(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$
$$P_3(x+2\Delta x+\Delta^2 x,\ y+2\Delta y+\Delta^2 y,\ z+2\Delta z+\Delta^2 z),$$

e l'equazione del piano per quei tre punti sarà

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x+\Delta x & y+\Delta y & z+\Delta z & 1 \\ x+2\Delta x+\Delta^2 x & y+2\Delta y+\Delta^2 y & z+2\Delta z+\Delta^2 z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta^2 x & \Delta^2 y & \Delta^2 z \end{vmatrix} = 0$$

o, infine,

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} & \frac{\Delta y}{\Delta t} & \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} & \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} & \frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Se ora supponiamo che Δt sia infinitesimo, cioè che i punti P_2, P_3, percorrendo la curva, tendano a P_1, ammettendo le solite condizioni di continuità e derivabilità, e nella ipotesi che non siano nulli contemporaneamente tutti i minori di secondo ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

la equazione (11) assume la forma:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ dx^2 & dy^2 & dz^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

e rappresenta un piano, che vien detto **piano osculatore** *della curva* nel punto $P_1(xyz)$.

Da quanto precede risulta che *il piano osculatore è il piano dei tre punti successivi* (xyz), $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$, $(x+2dx+d^2x,\ y+2dy+d^2y,\ z+2dz+d^2z)$ corrispondenti ai tre valori successivi t, $t+dt$, $t+2dt$ del parametro.

Perciò il *piano osculatore è anche il piano della tangente alla curva in P e della tangente successiva.*

Tutti i piani del fascio che ha per asse la tangente in P_1 alla curva si dicono **piani tangenti** *alla curva in* P_1; il piano osculatore è un particolare piano tangente, il quale può considerarsi come la posizione limite di un piano tangente che contenga un punto P_3 della curva, quando P_3 muovendosi lungo la curva tende a P_1.

Il *piano osculatore in generale attraversa la curva*, mentre ciò non accade per un piano tangente generico.

648. Binormale. *I coseni direttori della normale al piano osculatore* (coseni direttori del piano osculatore), che indicheremo con λ, μ, ν, sono proporzionali ai determinanti di 2.° ordine della matrice:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

La normale al piano osculatore nel punto P_1 di osculazione si dice **binormale** *della curva in tale punto.*

I coseni direttori della binormale saranno dunque:

$$(14) \qquad \begin{cases} \lambda = \rho_2(y'z'' - z'y''), \ \mu = \rho_2(z'x'' - x'z''), \ \nu = \rho_2(x'y'' - y'x'') \\ \rho_2 = \dfrac{1}{\pm\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + \ldots}} \end{cases}$$

il segno da attribuire al radicale essendo quello del primo dei tre numeri

$$x'y'' - x''y', \quad z'x'' - z''x', \quad y'z'' - y''z'$$

che non è nullo.

649. Normale principale. La intersezione del piano normale col piano osculatore in un punto P vien detta **normale principale** della curva in tale punto.

Per avere le equazioni della normale principale basterà dunque far sistema delle equazioni del piano normale e del piano osculatore

$$(15) \qquad \begin{cases} \lambda(X - x) + \mu(Y - y) + \nu(Z - z) = 0 \\ \alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema equivale all'altro:

$$(16) \qquad \frac{X - x}{\mu\gamma - \nu\beta} = \frac{Y - y}{\nu\alpha - \lambda\gamma} = \frac{Z - z}{\lambda\beta - \mu\alpha}.$$

I coseni direttori della normale principale, che indicheremo con ξ, η, ζ, saranno dunque proporzionali ai binomi

$$\mu\gamma - \nu\beta, \quad \nu\alpha - \lambda\gamma, \quad \lambda\beta - \mu\alpha.$$

Considerando che la tangente, la normale principale e la binormale formano un triedro trirettangolo, si trovano direttamente i coseni direttori della normale principale, applicando le formule trovate al n.° 173, che *servono a determinare la direzione normale a due date.*

Il determinante dei nove coseni

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}, \tag{17}$$

ha, nel caso nostro valore ± 1, *secondo che il triedro della tangente, della normale principale e della binormale, è sinistrorso o destrorso*; dunque in applicazione di dette formule, avremo:

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon(\mu\gamma - \nu\beta), \quad \eta = \varepsilon(\nu\alpha - \lambda\gamma), \quad \zeta = \varepsilon(\lambda\beta - \mu\alpha) \\ \varepsilon = \pm 1. \end{cases} \tag{18}$$

Il segno di ε è dato, analiticamente, dal segno di quella delle tre quantità

$$\lambda\beta - \mu\alpha, \quad \nu\alpha - \lambda\gamma, \quad \mu\gamma - \nu\beta,$$

che per prima non è nulla.

650. Le formule trovate possono esser semplificate, per mezzo della relazione

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \tag{19}$$

e di quella che se ne deduce per derivazione:

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''. \tag{20}$$

Queste relazioni, quando si assume come parametro l'arco s, si riducono alle seguenti:

$$s' = 1, \quad s'' = 0. \tag{21}$$

Dalla identità

$$(y'z'' - z'y'')^2 + \dots = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2)$$

si ricava

$$\rho_2 = \frac{\pm 1}{s' \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}, \tag{22}$$

(col segno di $x'y'' - y'x''$); dunque i *coseni direttori della binor-*

male si esprimono semplicemente con le formule

$$(23)\quad \lambda = \frac{y'z'' - z'y''}{\pm s'\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}, \quad \mu = \frac{z'x'' - x'z''}{s'\sqrt{\dots}}, \quad \nu = \dots$$

Infine

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu\gamma - \nu\beta &= \rho_1\rho_2 \{ (z'x'' - x'z'')z' - (x'y'' - y'x'')y' \} \\ &= \rho_1\rho_2 s'(x''s' - x's'') = \rho_2(x''s' - x's'') \end{aligned} \right.$$

dunque i *coseni direttori della normale principale* si possono esprimere al modo seguente:

$$(25)\left\{ \begin{aligned} &\xi = \varepsilon\rho_2(x''s' - x's''), \quad \eta = \dots, \quad \zeta = \dots, \\ &\xi = \frac{x''s' - x's''}{\pm s'\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}, \quad \eta = \frac{y''s' - y's''}{\pm s'\sqrt{\dots}}, \quad \zeta = \frac{z''s' - z's''}{\pm s'\sqrt{\dots}} \end{aligned} \right.$$

ove il segno deve concordare con quello di $(z''s' - z's'')s'$.

Assumendo come parametro l'arco s, si ha:

$$(26)\quad \xi = \frac{x''}{\pm\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}, \quad \eta = \frac{y''}{\pm\sqrt{\dots}}, \quad \zeta = \frac{z''}{\pm\sqrt{\dots}}$$

il segno del radicale essendo date dal segno di quella delle tre quantità z'', y'', x'', che per prima non è nulla.

651. È interessante il determinare il *verso in cui vanno considerate la tangente, la normale principale e la binormale, affinchè il triedro fondamentale formato da queste tre semirette, nell'ordine in cui sono state nominate,* (triedro principale), *risulti concorde col triedro formato dalle direzioni positive degli assi coordinati.*

Perchè ciò avvenga occorre che il determinante dei nove coseni abbia per valore 1 (n.° 176), cioè che sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1.$$

Giovandoci delle formule (7), (14), (26), potremo scrivere il determinante dei nove coseni sotto la forma

$$\Delta = \rho_1\rho_2\varepsilon \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ y'z''-z'y'' & z'x''-x'z'' & x'y''-y'x'' \end{vmatrix}$$

$$= \rho_1\rho_2\varepsilon \{ (y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-y'x'')^2 \}.$$

Da cui risulta che *la condizione perchè Δ sia positivo è che dei fattori di normalizzazione ρ_1, ρ_2, ε, uno solo, o tutti e tre siano positivi.*

In particolare quindi: *il triedro principale è concorde col triedro fondamentale quando la tangente, la normale principale e la binormale si assumano nel verso che corrisponde al valor positivo del loro rispettivo fattore di normalizzazione.*

652. Esempi:

1.° **L'Elica cilindrica** (n.° 462, pag. 13), è rappresentata dalle equazioni:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta, \quad z = mr\theta.$$

Derivando rispetto a θ si ha

$$x' = -r\operatorname{sen}\theta, \quad y' = r\cos\theta, \quad z' = mr$$
$$x'' = -r\cos\theta, \quad y'' = -r\operatorname{sen}\theta, \quad z'' = 0.$$

Inoltre, essendo $r > 0$, se si suppone che sia anche $m > 0$, è $z' > 0$, dunque

$$\begin{cases} s' = r\sqrt{1+m^2}, \quad s'' = 0, \quad \rho_1 = \dfrac{1}{r\sqrt{1+m^2}}, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2, \quad \rho_2 = \dfrac{1}{r^2\sqrt{1+m^2}}. \end{cases}$$

Equazioni della tangente:

$$\frac{X - r\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = \frac{Y - r\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{Z - mr\theta}{m}.$$

Coseni direttori della tangente. Avendo supposto $m > 0$, abbiamo

$$\alpha = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \beta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

La tangente all'elica fa dunque angolo costante con l'asse Z, quindi anche con tutte le generatrici del cilindro intorno a cui l'elica si avvolge.

Equazione del piano osculatore

$$\begin{vmatrix} X - r\cos\theta & Y - r\operatorname{sen}\theta & Z - mr\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & mr \\ -r\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z - rm\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & m \\ -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Equazioni della normale principale

$$\begin{cases} -X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta + (Z - mr\theta)m = 0 \\ Xm\operatorname{sen}\theta - Ym\cos\theta + Z - mr\theta = 0. \end{cases}$$

Coseni direttori della normale principale

$$\xi = \pm\cos\theta, \quad \eta = \pm\operatorname{sen}\theta, \quad \zeta = 0$$

col segno di sen θ.

Si verifica immediatamente che la normale principale e l'asse z sono incidenti nel punto $(0, 0, mr\theta)$, e da ciò si conclude che *la normale principale taglia l'asse delle z ed è parallela al piano xy.*

Coseni direttori della binormale

$$\lambda = \frac{m\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \mu = \frac{m\cos\theta}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

2.° **Ellissi sferica.** Curva intersezione di una sfera e di un ellissoide

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

assumendo come parametro z, si ha, per derivazione,

$$\begin{cases} x\dfrac{dx}{dz}+y\dfrac{dy}{dz}+z=0 \\ \dfrac{x}{a^2}\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{y}{b^2}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{z}{c^2}=0. \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{dx}{dz}=\frac{z}{x}\frac{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{z}{y}\frac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{c^2}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}},$$

Ponendo, per semplicità di scrittura

$$A=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}, \quad B=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}, \quad C=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$$

si ha

$$x'=\frac{dx}{dz}=\frac{A}{C}\cdot\frac{z}{x}, \quad y'=\frac{dy}{dz}=\frac{B}{C}\cdot\frac{z}{y}, \quad z'=\frac{dz}{dz}=1.$$

Di qui, derivando nuovamente,

$$x''=\frac{A}{C}\left(\frac{1}{x}-\frac{A}{C}\frac{z^2}{x^3}\right), \quad y''=\frac{B}{C}\left(\frac{1}{y}-\frac{B}{C}\frac{z^2}{y^3}\right), \quad z''=0.$$

Possiamo dunque scrivere le *equazioni della tangente*

$$\frac{(X-x)x}{A}=\frac{(Y-y)y}{B}=\frac{(Z-z)z}{C}$$

e quella del *piano osculatore*

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{A}{C}\dfrac{z}{x} & \dfrac{B}{C}\dfrac{z}{y} & 1 \\ \dfrac{A}{C}\dfrac{1}{x}-\dfrac{A^2}{C^2}\dfrac{z^2}{x^3} & \dfrac{B}{C}\dfrac{1}{y}-\dfrac{B^2}{C^2}\dfrac{z^2}{y^3} & 0 \end{vmatrix}=0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{A}{x} & \dfrac{B}{y} & \dfrac{C}{z} \\ \dfrac{A^2}{x^3} & \dfrac{B^2}{y^3} & \dfrac{C^2}{z^3} \end{vmatrix}=0.$$

§ II. Cerchio osculatore. Flessione. Torsione.

653. Data una curva nello spazio mediante le tre equazioni

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

consideriamo i tre punti corrispondenti ai valori t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$ del parametro

$$\begin{aligned} &P_1(x,\ y,\ z) \\ &P_2(x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z) \\ &P_3(x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \quad y + 2\Delta y + \Delta^2 y, \quad z + 2\Delta z + \Delta^2 z) \end{aligned}$$

ed il cerchio determinato da questi tre punti.

Al tendere di Δt allo zero varieranno con continuità le coordinate del centro ed il raggio di tale cerchio, e, in generale, tenderanno, (nelle solite ipotesi di continuità e derivabilità), a valori limiti determinati.

Il cerchio corrispondente a questi valori limiti si dice **cerchio osculatore** *alla curva nel punto* $P(xyz)$.

Potremo anche dire, dunque, che il cerchio osculatore in P è il cerchio che passa per P e per due punti successivi a P sulla curva.

E, poichè il piano per quei tre punti successivi è il *piano osculatore* in P alla curva, ne viene che il cerchio osculatore è la intersezione del piano osculatore con la sfera avente il centro in questo piano e passante per i tre punti successivi considerati della curva.

Se indichiamo con p, q, r le coordinate del centro e con ρ il raggio di tale sfera, passante per i tre punti P_1, P_2, P_3, avremo fra le variabili p, q, r, ρ, le relazioni

$$(27)\quad \begin{cases} \psi(t) = (x(t) - p)^2 + (y(t) - q)^2 + (z(t) - r)^2 - \rho^2 = 0 \\ \psi(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t) - p)^2 + (y(t + \Delta t) - q)^2 + \dots - \rho^2 = 0 \\ \psi(t + 2\Delta t) = (x(t + 2\Delta t) - p)^2 + \dots - \rho^2 = 0. \end{cases}$$

Al sistema (27) potremo sostituire l'altro equivalente:

$$\psi(t) = 0, \quad \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} = 0,$$

$$\frac{\psi(t + 2\Delta t) - 2\psi(t + \Delta t) + \psi(t)}{\Delta t^2} = 0,$$

ossia

$$\psi(t)=0,\quad \frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}=0,\quad \frac{\Delta^2\psi(t)}{\Delta t^2}=0;$$

al limite, per $\Delta t=0$,

$$\psi(t)=0,\quad \psi'(t)=0,\quad \psi''(t)=0. \tag{28}$$

Queste, e la equazione del piano osculatore in P alla curva, sono dunque le equazioni cui debbono soddisfare le coordinate p, q, r del centro ed il raggio ρ del cerchio osculatore in P alla curva.

Eseguendo le derivazioni indicate dalle (28) e aggiungendo l'equazione del piano osculatore, avremo il sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2-\rho^2=0 \\ (x-p)x'+(y-q)y'+(z-r)z'=0 \\ (x-p)x''+(y-q)y''+(z-r)z''+x'^2+y'^2+z'^2=0 \\ (x-p)\lambda+(y-q)\mu+(z-r)\nu=0. \end{array}\right. \tag{29}$$

Ricordando che $x'^2+y'^2+z'^2=s'^2$, potremo scrivere le tre ultime equazioni sotto la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)=0 \\ x''(x-p)+y''(y-q)+z''(z-r)=-s'^2 \\ \lambda(x-p)+\mu(y-q)+\nu(z-r)=0. \end{array}\right. \tag{30}$$

Il sistema della prima e terza di queste equazioni dà la condizione di appartenenza del punto (pqr) alla normale principale: dunque *il centro del cerchio osculatore appartiene alla normale principale.*

Risolvendo rispetto ad $x-p$, $y-q$, $z-r$, si trova

$$(x-p)=\begin{vmatrix} 0 & y' & z' \\ -s'^2 & y'' & z'' \\ 0 & \mu & \nu \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},\ldots$$

Giovandoci delle formule (7), (14) e (25), che danno i coseni direttori della tangente, della binormale e della normale principale, avremo

$$(x-p)=\frac{-\frac{s'^2}{\rho_1}(\mu\gamma-\nu\beta)}{\frac{1}{\rho_2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}=-s'^2\frac{\rho_2}{\rho_1}(\mu\gamma-\beta\nu)$$
$$=-s'^3\rho_2^2(x''s'-x's'')$$

cioè

$$(31)\qquad\begin{cases} p-x=s'^3\rho_2^2(x''s'-x's'') \\ q-y=s'^3\rho_2^2(y''s'-y's'') \\ r-z=s'^3\rho_2^2(z''s'-z's''). \end{cases}$$

Ricordando la osservazione fatta a proposito delle formule (25), circa il segno delle ξ, η, ζ, si vede che il segno di $r-z$ concorda con quello del fattore di normalizzazione $\varepsilon\rho_2$ nella espressione dei coseni direttori della normale principale.

Dunque anche il segmento $\overline{PC}$ che va dal punto $P(xyz)$ al centro di curvatura $C(pqr)$ ha verso concorde col verso positivo della normale principale, od opposto ad esso, secondo che tale fattore di normalizzazione è positivo o negativo.

Od, in altri termini, *il verso positivo della normale principale, è rivolto verso il centro di curvatura, od in senso opposto, secondo che è positivo o negativo il fattore di normalizzazione.*

654. Tenendo conto delle prime delle (25) potremo scrivere:

$$p-x=\varepsilon s'^3\rho_2\xi,\quad q-y=\varepsilon s'^3\rho_2\eta,\quad r-z=\varepsilon s'^3\rho_2\zeta.$$

Quadrando e sommando otteniamo, pel **raggio di curvatura**, la espressione:

$$\rho^2=\overline{PC}^2=s'^2\rho_2^2=\frac{s'^2}{s'^2(x''^2+y''^2+z''^2-s''^2)}$$

ossia

$$(32)\qquad \rho^2=\frac{s'^2}{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}.$$

Nella ipotesi che si assuma l'arco s come parametro, si ha semplicemente:

$$\rho^2=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}.$$

655. Esempio. Per l'elica cilindrica, (n.[i] 462, 652)

$$x = a\cos\theta \quad y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \quad z = am\theta,$$

essendo

$$s' = a\sqrt{1+m^2}, \quad s'' = z'' = 0,$$

$$\begin{cases} p - x = (1+m^2)(-a\cos\theta), & p = -am^2\cos\theta \\ q - y = (1+m^2)(-a\,\mathrm{sen}\,\theta), & q = -am^2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ r - z = 0 & r = z = am\theta, \end{cases}$$

abbiamo

$$\rho = a(1+m^2).$$

Il raggio del cerchio osculatore è costante, il cerchio osculatore è in un piano parallelo al piano xy.

656. Prima curvatura o flessione. Data la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

consideriamo su di essa i punti

$$P(xyz) \quad P_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$

corrispondenti ai valori t, $t+\Delta t$ del parametro, e le tangenti l, l_1, in questi punti.

Si dice **prima curvatura** o **flessione** *della curva nel punto P, il limite*

$$f = \lim_{\Delta t=0} \frac{\widehat{ll_1}}{\Delta s}$$

del rapporto dell'angolo $\widehat{ll_1}$ delle tangenti nei punti P, P_1 alla lunghezza Δs dell'arco PP_1, quando il punto P_1, muovendosi sulla curva, tende al punto P.

Considerando che

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\widehat{ll_1}}{\mathrm{sen}\,\widehat{ll_1}} = 1,$$

potremo cercare il limite

$$f = \lim_{\Delta t=0} \frac{\mathrm{sen}\,\widehat{ll_1}}{\Delta s}.$$

Indicando con α, β, γ, i coseni direttori della tangente l, e posto

$$m^2 = \frac{1}{(\alpha+\Delta\alpha)^2 + (\beta+\Delta\beta)^2 + (\gamma+\Delta\gamma)^2}$$

avremo i coseni direttori della l_1 espressi da

$$m(\alpha + \Delta\alpha), \quad m(\beta + \Delta\beta), \quad m(\gamma + \Delta\gamma);$$

onde:

$$\operatorname{sen}^2 \widehat{ll_1} = \left| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ m(\alpha + \Delta\alpha) & m(\beta + \Delta\beta) & m(\gamma + \Delta\gamma) \end{matrix} \right|^2;$$

e considerando che, al tendere allo zero di Δt, m tende al limite 1, avremo

$$f = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\pm 1}{\Delta s} \sqrt{(\beta\Delta\gamma - \gamma\Delta\beta)^2 + (\gamma\Delta\alpha - \alpha\Delta\gamma)^2 + (\alpha\Delta\beta - \beta\Delta\alpha)^2}$$

ove il segno da scegliere è quello della prima delle quantità

$$\beta\Delta\gamma - \gamma\Delta\beta, \quad \gamma\Delta\alpha - \alpha\Delta\gamma, \quad \alpha\Delta\beta - \beta\Delta\alpha,$$

che non è nulla.

Dividendo numeratore e denominatore per Δt e passando al limite, avremo

$$f = \frac{\pm 1}{s'} \sqrt{(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}$$

e ricordando che

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

$$f = \frac{\pm 1}{s'} \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

Ma si ha (pag. 169)

$$\alpha = \frac{x'}{s'}, \quad \beta = \frac{y'}{s'}, \quad \gamma = \frac{z'}{s'},$$

onde:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = (x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2) \frac{1}{s'^2}$$

e infine,

$$f = \pm \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}{s'^2}.$$

Ricordando la formula (32) si vede che

$$|f| = \frac{1}{\rho}$$

cioè, che la flessione è eguale (in valore assoluto) all'inverso del raggio di curvatura.

Il segno dovrebbe essere scelto conforme a quello di

$$s'(\beta\gamma' - \gamma\beta')$$

cioè a quello di $s'(y'z'' - z'y'')$; ma questo segno per solito non si considera e *si assume come valore della flessione l'inverso del raggio di curvatura.*

Se il parametro t è l'arco s, abbiamo semplicemente:

$$f = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

657. Seconda Curvatura, o Torsione. Data la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

consideriamo su di essa i punti $P(xyz)$, $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ corrispondenti a valori t, $t + \Delta t$ del parametro ed i piani osculatori alla curva in questi punti.

Il limite, per $\Delta t \to 0$ del rapporto dell'angolo dei piani osculatori alla curva nei punti P, P_1, alla lunghezza dell'arco P_1P, compreso fra questi due punti, si dice **Torsione** *della curva nel punto P.*

Indicando con r, r_1 le binormali alla curva nei punti P, P_1 con Δs l'arco fra esse compreso, la torsione in P, che indicheremo con $\frac{1}{T}$, sarà dunque data da

$$\frac{1}{T} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\widehat{rr_1}}{\Delta s}. \tag{33}$$

Per calcolare questa espressione, indicando con λ, μ, ν, $m(\lambda + \Delta\lambda)$ $m(\mu + \Delta\mu)$ $m(\nu + \Delta\nu)$, i coseni direttori delle binormali nei punti P, P_1, seguiremo procedimento interamente analogo a quello tenuto al n.° precedente, e troveremo

$$-\frac{1}{T} = \frac{\pm 1}{s'} \sqrt{(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2 + (\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2};$$

ed anche:

$$-\frac{1}{T} = \frac{\pm 1}{s'} \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$$

ove il segno del radicale è quello di $\lambda\mu' - \mu\lambda'$.

Ricordando le formule

$$\begin{cases} \lambda = \rho_2(y'z'' - z'y''), \quad \mu = \rho_2(z'x'' - x'z''), \quad \nu = \rho_2(x'y'' - y'x'') \\ \rho_2 = \dfrac{\pm 1}{s'\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}, \end{cases}$$

si trova

$$\lambda\mu' - \mu'\lambda' = \rho_2^2 \{(y'z'' - z'y'')(z'x''' - x'z''') - (y'z''' - z'y''')(z'x'' - z''x')\}.$$

Ossia, indicando con W il Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

(41) $$\lambda\mu' - \mu\lambda' = \rho_2^2 z' W;$$

il segno da attribuire al radicale è dunque quello di $z'W$, ossia di $s'W$, e per conseguenza il segno da attribuire alla torsione $\frac{1}{T}$ è contrario a quello di W.

Inoltre si ha:

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2 + (\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 = \rho_2^2 s'^2 W^2,$$

dunque avremo, in valore e segno:

(42) $$-\frac{1}{T} = \rho_2^2 W = \frac{W}{s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2)} = \frac{W\rho^2}{s'^6}.$$

Il segno della Torsione ha un notevole significato geometrico; esso esprime una proprietà *intrinseca* della curva, che si ricava calcolando il *momento* delle due binormali r_t, $r_{t+\Delta t}$ nei punti vicini $P(xyz)$ $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Indicando i coseni direttori delle r_t, $r_{t+\Delta t}$, con

$$\begin{cases} r_t(\lambda\mu\nu), \quad r_{t+\Delta t}(m(\lambda + \Delta\lambda), m(\mu + \Delta\mu), m(\nu + \Delta\nu)) \\ m^2 = \dfrac{1}{(\lambda + \Delta\lambda)^2 + (\mu + \Delta\mu)^2 + (\nu + \Delta\nu)^2} \end{cases}$$

si ha

$$\cos \widehat{r_t r_{t+\Delta t}} = m \{ \lambda(\lambda + \Delta\lambda) + \mu(\mu + \Delta\mu) + \nu(\nu + \Delta\nu) \}.$$

Considerando che m tende al limite 1 per Δt infinitesimo (in valore e segno) e che anche

$$\lambda(\lambda + \Delta\lambda) + \mu(\mu + \Delta\mu) + \nu(\nu + \Delta\nu)$$

tende al limite 1, vediamo che, per valori Δt abbastanza piccoli, cioè *per punti P, P_1, abbastanza vicini, è sempre* $\cos \widehat{r_t r_{t+\Delta t}} > 0$.

Dunque, nella espressione del momento:

$$M = \varepsilon D = \varepsilon \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \lambda & \mu & \nu \\ m(\lambda + \Delta\lambda) & m(\mu + \Delta\mu) & m(\nu + \Delta\nu) \end{vmatrix},$$

trovata al n.° 220 (Vol. I pag. 189), il segno di ε, dovendo esser concorde con quello di $\cos \widehat{r_t r_{t+\Delta t}}$, sarà *sempre positivo*, e per Δt infinitesimo, avremo il *momento delle binormali in due punti successivi* espresso da:

$$M = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda + d\lambda & \mu + d\mu & \nu + d\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} dt^2,$$

ossia, per le (41), (42), da

$$M = \rho_2{}^2 W \cdot ds^2 \cdot = -\frac{1}{T} \cdot ds^2 .$$

Segue da ciò, che:

la torsione di una curva sghemba in un punto ha segno contrario al momento della binormale in questo punto e della binormale successiva: cioè essa è positiva o negativa secondo che la coppia formata dalle binormali in due punti successivi è sinistrorsa o destrorsa.

659. *Due curve simmetriche rispetto ad un piano* (o *rispetto ad un punto*) *hanno, nei punti simmetrici, torsioni eguali e contrarie.*

Ciò si vede assumendo il piano di simmetria come uno dei piani coordinati di riferimento (od il centro di simmetria come origine) ed osservando che cambiando il segno ad una delle coordinate (od a tutte e tre) il Wronskiano muta segno.

660. *Una curva la cui torsione è costantemente nulla giace in un piano.*

Ed infatti l'annullarsi del Wronskiano W delle x' y' z' implica l'esistenza di una relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

da questa, integrando rispetto a t, ed indicando con D la costante di integrazione, si ha

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

equazione di un piano su cui giacciono tutti i punti della curva.

661. Osservazione. I ragionamenti fatti per dimostrare le formule che danno la flessione e la torsione di una curva sghemba in un punto P, potrebbero presentare qualche difficoltà nel caso in cui la tangente (o la binormale) in P fosse nel piano xy; poichè allora potrebbe darsi che l'angolo di detta tangente con la tangente successiva passasse bruscamente da valori prossimi a π a valore nullo.

Questa difficoltà si può togliere con una trasformazione di assi, la quale non può alterare nè la flessione, nè la torsione della curva considerata.

662. Esempio. Per l'elica cilindrica (n.i 462, 652, 655), essendo

$$\begin{array}{lll}
x = r\cos\theta & y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & z = mr\theta \\
x' = -r\,\mathrm{sen}\,\theta & y' = r\cos\theta & z' = mr \\
x'' = -r\cos\theta & y'' = -r\,\mathrm{sen}\,\theta & z'' = 0 \\
x''' = r\,\mathrm{sen}\,\theta & y''' = -r\cos\theta & z''' = 0,
\end{array}$$

abbiamo

$$W = \begin{vmatrix} -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & mr \\ -r\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta & -r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = mr^3,$$

inoltre

$$s' = r\sqrt{1+m^2} \qquad s'' = z'' = 0$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2$$

dunque

$$\frac{1}{T} = -\frac{m}{(1+m^2 r}.$$

Ricordando (n.° 655) che il raggio del centro osculatore dell' elica è $\rho = r(1 + m^2)$, e che la flessione è, quindi,

$$f = \frac{1}{r(1 + m^2)}$$

si può concludere: nell' *elica circolare la flessione e la torsione sono costanti.*

Si vede inoltre che nell' elica la torsione ha *segno contrario a quello di m.*

Ora quando m è positivo l' *elica è destrorsa*, cioè un osservatore in piedi sulla pagina positiva del piano osculatore, nel punto P di osculazione, rivolto verso il centro di flessione, vede un punto che si muove lungo la curva innalzandosi, rispetto all' osservatore stesso, passare dalla sua sinistra alla destra, mentre attraversa il punto P (1).

Quando invece mr è negativo l' elica è sinistrorsa.

Dunque a *torsione positiva corrisponde* **curva sinistrorsa**, a *torsione negativa* **curva destrorsa.**

È facile vedere che le riflessioni ora fatte per l' elica si possono ripetere per una curva qualunque.

(1) Alcuni autori nel definire il senso destrorso o sinistrorso, dell' elica, suppongono l' osservatore situato nel centro di flessione (lungo l' asse del cilindro) così facemmo noi pure a pag. 12.

CAPITOLO III.

SUPERFICIE

§ I. Piano tangente.

662. L'equazione di una superficie può essere data sotto una delle tre forme

$$\begin{cases} z = f(xy) \\ F(xyz) = 0 \\ x = x(u,\ v), \quad y = y(u,\ v), \quad z = z(u,\ v). \end{cases}$$

Nella *Parte Terza* del nostro corso abbiamo dato (Cap. I) qualche notizia di ordine generale sulla rappresentazione analitica delle superfici, ed abbiamo, in particolare, studiato le *superficie del 2.° ordine, o quadriche*, quelle cioè per le quali la funzione $F(xyz)$, primo membro della equazione $F(xyz) = 0$, che ne è espressione analitica, è un polinomio intero del 2.° grado nelle variabili x, y, z.

Molte delle cose dette per le quadriche, si estendono alle *superficie algebriche di ordine m, qualunque*: a quelle superficie cioè, che sono rappresentate da una equazione

$$F(xyz) = 0$$

dove F è simbolo di polinomio intero di grado m nelle tre variabili x, y, z.

663. In particolare si può immediatamente estendere la nozione di **piano tangente**, e trovare la *equazione di questo piano*.

Scriveremo la equazione della superficie, in *coordinate cartesiane omogenee*

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0, \tag{1}$$

e, preso un punto $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$ sulla superficie, tale cioè che sia

(2) $$F(x_1'x_2'x_3'x_4')=0,$$

scriveremo le equazioni di una retta r generica per questo punto, sotto la forma parametrica

(3) $$\left\{\begin{array}{lll} x_1=x_1'+hX_1, & x_2=x_2'+hX_2, & x_3=x_3'+hX_3 \\ & & x_4=x_4'+hX_4, \end{array}\right.$$

dove $X_1X_2X_3X_4$ sono le coordinate di un punto P dello spazio, che insieme col punto P', determina la retta considerata.

I punti di intersezione della retta r con la superficie saranno dati dai valori di h che soddisfano la relazione

(4) $$F(x_1'+hX_1,\ x_2'+hX_2,\ x_3'+hX_3,\ x_4'+hX_4)=0.$$

Il primo membro di questa equazione, per una nota formula di analisi [1], si può scrivere:

$$\begin{aligned} F(x_1' \dots x_4') &+ h\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}+ \\ &+\frac{h^2}{2!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}^{(2)}+\dots \\ &\dots+\frac{h^m}{m!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}^{(m)}=0. \end{aligned}$$

Ma, per ipotesi è

$$F(x_1'x_2'x_3'x_4')=0,$$

rimane dunque

(5) $$\left\{\begin{aligned} & h\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}+\frac{h}{2!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}^{(2)}+\dots \\ &\qquad \dots+\frac{h^m}{m!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}X_1+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_4}X_4\right\}_{(x')}^{(m)}=0. \end{aligned}\right.$$

Questa equazione ha in ogni caso (cioè qualunque sia il punto P che supponiamo congiunto con P') una radice $h=0$, che corrisponde al punto P', per ipotesi giacente sulla su-

[1] La formula del Taylor, che, almeno per polinomi, si suppone nota.

perficie; ora se vogliamo che $h=0$ *sia radice doppia*, cioè che la retta $P'P$ tagli la superficie in due punti coincidenti in P', occorre e basta che $P(X_1X_2X_3X_4)$ sia tale da rendere

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{x'} X_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{x'} X_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{x'} X_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_{x'} X_4 = 0. \tag{6}$$

Questa è l'equazione di un piano, sul quale $X_1X_2X_3X_4$ sono coordinate correnti.

Esiste dunque un piano tale che tutte le rette $P'P$ in esso contenute e passanti per P' incontrano la superficie in due punti coincidenti in P' (*cioè* **sono tangenti alla superficie** *in P'*).

Questo piano si dice **piano tangente** alla superficie in P', e la sua equazione è la (6).

664. Considerando che il punto $P'(x_1'x_2'x_3'x_4')$ *appartiene alla superficie*, si ha ancora (pel Teorema di Eulero)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{(x')} x_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{(x')} x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{(x')} x_3' + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_{x_4'} x_4' = 0. \tag{7}$$

Supponiamo ora x_4' diverso dallo zero, e limitiamoci alla considerazione di punti proprii del piano tangente, pei quali è $X_4 \neq 0$.

Potremo passare alle coordinate non omogenee, dividendo la (6) per X_4, e la (7) per x_4', ponendo

$$\frac{X_1}{X_4} = X, \quad \frac{X_2}{X_4} = Y, \quad \frac{X_3}{X_4} = Z,$$

$$\frac{x'_1}{x'_4} = x, \quad \frac{x'_2}{x'_4} = y, \quad \frac{x'_3}{x'_4} = z,$$

e sottraendo; si ha così **la equazione del piano tangente** *alla superficie*

$$F(xyz) = 0$$

nel suo punto generico $P(xyz)$ sotto la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0, \tag{8}$$

nella quale si intende che le derivate parziali siano calcolate nel punto $P(xyz)$ di contatto sulla superficie, e *non siano nulle tutte e tre in tale punto.*

665. Con un semplice ragionamento, che qui non staremo a ripetere [1] si dimostra che le conclusioni cui siamo giunti valgono anche per superficie $F(xyz)=0$ non algebriche, purchè siano soddisfatte per la F le solite condizioni di continuità e derivabilità.

La retta perpendicolare al piano tangente nel suo punto P di contatto si dice **normale** *alla superficie.*

Le sue equazioni si ricavano immediatamente dalla (8) ed hanno la forma

$$(9)\qquad \frac{X-x}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

I coseni direttori della normale sono dunque

$$(10)\quad \alpha=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},\quad \beta=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\gamma=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Il segno del radicale deve essere concorde con quello di $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, *se questa è zero nel punto P, con quello di* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, *e finalmente se contemporaneamente è* $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, *con quello di* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

666. Se la equazione della superficie ha la forma esplicita

$$z=f(xy),$$

cioè

$$F(xyz)=f(xy)-z=0$$

[1] Cfr. Lezioni di calcolo Infinitesimale di S. Pincherle. Cap. XVII, § 1°.

usando le *notazioni di Monge*

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

si hanno le equazioni del piano normale e della normale sotto la forma:

$$(11) \qquad \begin{cases} p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0 \\ \dfrac{X - x}{p} = \dfrac{Y - y}{q} = -(Z - z), \end{cases}$$

ed i coseni direttori della normale sono dati, in valore e segno, dalle espressioni

$$(12) \quad \alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

667. Si vede immediatamente che *la tangente a qualunque linea tracciata sulla superficie e passante per P, appartiene al piano tangente per P alla superficie.*

Infatti una linea tracciata sulla data superficie, è intersezione (totale o parziale) di questa con una seconda superficie opportunamente data

$$\varphi(xyz) = 0;$$

Le equazioni della sua tangente in P saranno dunque (n.° 645)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni ci dicono appunto che la tangente in P alla linea *tracciata è la intersezione dei due piani tangenti in P, alla superficie data* $F(xyz) = 0$ *ed a quella con cui essa si suppone intersecata,* $\varphi(xyz) = 0$.

Abbiamo sempre supposto che il punto P, considerato sulla superficie, sia tale che in esso non siano contemporaneamente nulle tutte le derivate parziali del primo ordine della $F(xyz)$. Punti così fatti si dicono **ordinarî**, quelli invece in cui tutte le derivate sono ad un tempo nulle, si dicono punti **singolari** della superficie. Supporremo nel seguito, salvo contraria indicazione, di considerare punti ordinarî.

§ II. Intersezione della superficie col piano tangente [1].

668. Per evitare ragionamenti che esigono famigliarità coi metodi infinitesimali, faremo anche qui l'ipotesi che si abbia che fare con *superficie algebriche*, $F(xyz)=0$; ma i risultati varranno in casi molto più generali, poichè esigono solamente la sviluppabilità secondo la serie del Taylor delle funzioni $F(xyz)$.

Sia data dunque una superficie algebrica di ordine m

$$F(xyz)=0,$$

e consideriamo un punto $P(x_1y_1z_1)$ di essa, in cui sia determinato il piano tangente.

Assumiamo questo piano come piano coordinato xy, e la normale, nel suo verso positivo, come asse z.

L'equazione del piano tangente dovrà ridursi a $z=0$, quindi avremo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1y_1z_1}=0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_1y_1z_1}=0;$$

il punto $P(x_1y_1z_1)$ essendo nell'origine, sarà $x_1=y_1=z_1=0$, ed appartenendo esso alla superficie sarà ancora $F(000)=0$. Dunque la equazione della superficie avrà la forma [2]

$$F(xyz)=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{000}z+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right)^{(2)}_{000}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right)^{(m)}_{000}=0.$$

[1] Si confronti questo § col § 3 del Cap. II, sulle *Quadriche*, ove si fa una analoga discussione.

[2] Supponiamo nota, almeno per polinomi, la formula di Taylor

$$F(xyz)=F(000)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right)_{000}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right)^{(2)}_{000}+\ldots.$$

La intersezione col piano tangente si avrà ponendo $z=0$, e sarà dunque data dalla equazione

$$f(xy)=F(xy0)=\frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{000}x^2+2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_{000}xy+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{000}y^2\right\}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{m!}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y+\frac{\partial F}{\partial z}z\right\}_{000}^{(m)}=0.$$

Si vede da questa formula che la curva algebrica piana, (*intersezione del piano tangente con la superficie*)

$$f(xy)=0,$$

passante per la origine, ***ha quivi un punto singolare***, perchè entrambe le derivate parziali prime della $f(xy)$ risultano in tale punto eguali allo zero (n.[i] 581, 582).

Per conoscere la natura di questo punto occorre esaminare l'HESSIANO (n.° 582) delle derivate seconde di $f(xy)$, che, nell'origine, coincide con l'Hessiano della $F(xyz)$,

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}\end{vmatrix}.$$

Ricordando la discussione fatta al n.° 582 vediamo che:

I. Se l'Hessiano è negativo *la intersezione del piano tangente con la superficie ha nel punto di contatto un punto doppio a tangenti distinte* (un **nodo**).

In questo caso il punto P è detto **punto iperbolico** *della superficie*, e le due tangenti reali in P alla curva intersezione si dicono le **direzioni asintotiche** *della superficie in* P; si dice che in un tale punto la superficie ha **curvatura totale negativa.**

II. *Se l'Hessiano è positivo, le tangenti in P alla intersezione sono immaginarie*, questa intersezione ha quivi un **punto isolato**: e la superficie, nella vicinanza di un tale punto è tutta da una medesima parte rispetto al piano tangente. Un tale punto si dice **punto ellittico** della superficie.

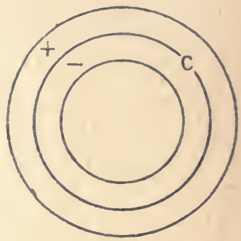
Si dice anche che la superficie è **convessa** in un tale punto, o che ha quivi **curvatura totale positiva.**

III. *Se l' Hessiano è nullo*, le due tangenti alla intersezione sono coincidenti, cioè questa intersezione ha quivi una cuspide, o più generalmente un *punto doppio a tangenti coincidenti.*

Le due **direzioni asintotiche** *della superficie, in un tal punto, coincidono in una sola.*

Si dice che un tale punto è **punto parabolico** della data superficie, oppure che la *superficie ha* **curvatura totale nulla** *in un tale punto.*

ESEMPIO. Nella superficie del TORO (superficie generata dalla rotazione di un cerchio intorno ad un asse del suo piano) il piano tangente normale all'asse tocca la superficie secondo un cerchio C.



In un punto P di questo cerchio la curvatura totale è nulla, il piano tangente alla superficie per un punto P di questo cerchio taglia la superficie secondo due cerchi coincidenti nel cerchio C. La tangente in P a questo cerchio segna la direzione asintotica della superficie in P. Il punto P è *punto parabolico.*

Il cerchio C ed il suo simmetrico rapporto al piano dell'equatore del toro, dividono la superficie in due parti: sulla parte rivolta verso l'asse, i punti sono *iperbolici* (curvatura negativa) sull'altra i punti sono *ellittici* (curvatura positiva).

669. Come risulta dalla discussione fatta al n.° 668, il punto di contatto di una superficie col suo piano tangente è, generalmente, punto doppio per la curva intersezione. Più in generale, se diciamo *punto doppio* di una curva nello spazio un punto che conti per due tra le intersezioni di un piano generico passante per quel punto, con la curva, abbiamo questo notevole teorema: *se due superficie sono tangenti, il loro punto di contatto è un punto almeno doppio per la loro curva d'intersezione.* Infatti se una curva C è intersezione di due superficie S_1, S_2, le intersezioni di un piano π con la curva C sono tutte e sole le intersezioni delle due curve piane, secondo cui π incontra le due superficie. Ora se queste sono tangenti in un punto P di C, (ossia hanno ivi lo stesso piano tangente τ), un qualunque piano π passante per P le interseca secondo due curve che si toccano nel punto P stesso (e hanno per tangente comune la intersezione di π col piano tangente comune) e quindi hanno in P almeno due intersezioni.

La tangente in un punto doppio è indeterminata, però si può dimostrare che in generale esistono — come per le curve piane — due particolari rette che hanno nel punto con la curva contatto tripunto.

Per esempio la curva detta ***Finestra di Viviani*** (n.° 461), intersezione di una sfera con un cilindro, che ha il raggio della sfera come diametro di una sezione retta, ha un punto doppio nel punto in cui le due superficie sono tangenti, come abbiamo già accennato (pag. 12).

§ III. Superficie rigate. Sviluppabili.

670. Abbiamo visto al n.° 613 che data una famiglia (semplicemente infinita, cioè ad un parametro) di curve piane

$$f(xya) = 0$$

esiste in generale una curva ***inviluppo*** la cui equazione si ottiene eliminando a dal sistema

$$\begin{cases} f(xya) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0. \end{cases}$$

Se è data una famiglia di curve gobbe ***non esiste invece, in generale, alcuna curva da essa inviluppata.***

Ed infatti, data la famiglia di curve nello spazio rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} f(xyza) = 0 \\ \varphi(xyza) = 0, \end{cases}$$

la condizione perchè esista una curva da essa inviluppata è che siano compatibili le equazioni del sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} f(xya) = 0 \\ \varphi(xya) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} = 0. \end{cases}$$

671. È interessante il caso in cui le curve della famiglia considerata *siano rette*; l'insieme di queste rette costituisce (n.° 468) una superficie (**superficie rigata**) e *le rette medesime inviluppano una curva, detta* **spigolo di regresso** *della rigata, solo se per esse sono soddisfatte le condizioni* (1).

Per veder quali forme assumano in questo caso speciale tali condizioni, scriviamo le equazioni della superficie rigata sotto la forma (ridotta)

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = t, \end{cases}$$

dove si suppone che m, n, a, b siano funzioni di un parametro u.

Le equazioni della retta generica della famiglia saranno

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$$

e la condizione perchè esista l'inviluppo sarà data dalla condizione di coesistenza delle quattro equazioni

$$\begin{cases} x = mz + a & y = nz + b \\ 0 = zdm + da & 0 = zdn + db. \end{cases}$$

E, poichè dalle due ultime ricaviamo

$$z = -\frac{da}{dm} = -\frac{db}{dn},$$

la condizione ora accennata potrà scriversi

$$\frac{da}{dm} = \frac{db}{dn}$$

ossia

(2) $$\begin{vmatrix} dm & da \\ dn & db \end{vmatrix} = 0.$$

Ma questa è anche la condizione di complanarità (n.° 217, Vol. I, pag. 187) delle due rette

$$\begin{cases} x = mz + a & y = nz + b \\ x = (m + dm)z + a + da, & y = (n + dn)z + b + db \end{cases}$$

che corrispondono a valori successivi u, $u + du$ del parametro u.

Dunque *la condizione perchè esista una curva inviluppata da tutte le rette delle date rigate, coincide con la condizione perchè due generatrici successive siano incidenti, e l'inviluppo medesimo (cioè lo spigolo di regresso delle rigate) è il luogo dei punti di incidenza di due generatrici successive.*

672. *La superficie rigata si dice* **sviluppabile** *quando due generatrici successive sono incidenti.* Da quanto è stato esposto nel n.° precedente risulta che:

La condizione perchè una rigata rappresentata dalle equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} x = m(u)t + a(u), \\ y = n(u)t + b(u) \\ z = t, \end{cases}$$

sia sviluppabile, è data dall'annullarsi del determinante delle derivate (o dei differenziali) *dei coefficienti*, cioè da:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} dm & da \\ dn & db \end{vmatrix} = 0.$$

Le rigate *non sviluppabili* si dicono **gobbe.**

673. Abbiamo visto che le generatrici di una rigata sviluppabile inviluppano una curva gobba, che abbiamo chiamato *spigolo di regresso* della rigata medesima. Reciprocamente, le *tangenti di una curva gobba sono generatrici di una rigata sviluppabile, che si dice* **sviluppabile osculatrice** *della curva medesima.*

Ed infatti, data una curva mediante le sue equazioni parametriche

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

la sua tangente generica è data dalle equazioni

$$\frac{X - x}{x'(u)} = \frac{Y - y}{y'(u)} = \frac{Z - z}{z'(u)} = t;$$

considerando t come parametro variabile possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} X &= x(u) + tx'(u) \\ Y &= y(u) + ty'(u) \\ Z &= z(u) + tz'(u), \end{aligned}$$

ed abbiamo così la rappresentazione analitica di una superficie rigata, luogo delle tangenti alla curva data.

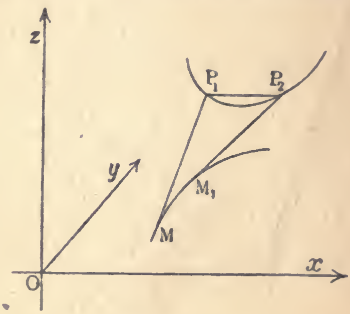
Essa è sviluppabile, perchè le tangenti inviluppano la curva, e quindi due tangenti successive sono incidenti.

674. Il piano tangente *ad una superficie rigata in un punto qualunque P di essa, contiene tutta la generatrice passante per questo punto,* perchè la generatrice è una linea tracciata su la superficie e la tangente a questa linea è la linea stessa.

Il piano tangente ad una rigata in un punto P_1 di essa sarà dunque determinato dalla generatrice per P_1 e dalla tangente ad un' altra linea qualunque della superficie, passante per P_1.

675. Supponiamo che la *rigata sia sviluppabile.*

Tracciata per P_1 una linea qualunque P_1P_2 sulla superficie, consideriamo la generatrice MP_1, ed il punto M dove essa tocca lo spigolo di regresso; di poi, preso un punto M_1 su questo spigolo, vicino ad M, indichiamo con M_1P_2 la generatrice che tocca lo spigolo medesimo in M_1, e con P_2 il punto dove questa generatrice incontra la curva P_1P_2 da noi tracciata sulla superficie.



Il piano tangente alla rigata in P_1 sarà la posizione limite del piano MP_1P_2 quando P_2, percorrendo la curva P_1P_2, tende a P_1.

Ma il punto P_2 appartiene alla generatrice P_2M_1, e quando P_2 tende a P_1 la generatrice P_2M_1 tende a coincidere con la P_1M.

Dunque *il piano tangente in P_1* sarà *il piano delle due generatrici successive, passanti per M e pel punto successivo ad M dello spigolo di regresso.*

D' altra parte sappiamo che il piano di due tangenti successive ad una curva sghemba è il piano osculatore alla curva medesima (n.° 647); dunque possiamo concludere:

1.° Che *il piano tangente alla rigata sviluppabile in un punto P_1 contiene tutta la generatrice passante per P_1;*

2.° *ed è* **piano osculatore allo spigolo di regresso** *nel punto dove detto spigolo è toccato dalla generatrice uscente da* P_1.

Tutto ciò si dimostra anche con facili considerazioni analitiche.

Indichiamo infatti con

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

le equazioni dello spigolo di regresso MM_1.

Le coordinate del punto M_1 saranno espresse da

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = x(u + \Delta u) = x + x_u'(u + \theta\Delta u)\Delta u \\ y_1 = y(u + \Delta u) = y + y_u'(u + \theta\Delta u)\Delta u \\ z_1 = z(u + \Delta u) = z + z_u'(u + \theta\Delta u)\Delta u. \end{cases}$$

Indicando con $X_1\ Y_1\ Z_1$ le coordinate del punto P_1, poichè questo appartiene alla tangente MP_1 uscente dal punto M allo spigolo di regresso, avremo (n.° 644)

$$\frac{X_1 - x}{x_u'} = \frac{Y_1 - y}{y_u'} = \frac{Z_1 - z}{z_u'} = \rho$$

da cui

$$(6) \qquad X_1 = x + x_u'\rho, \quad Y_1 = y + y_u'\rho, \quad Z_1 = z + z_u'\rho.$$

Similmente pel punto P_2, appartenente alla tangente M_1P_2, avremo:

$$X_2 = x_1 + x_u'(u + \Delta u)\cdot\rho_1, \quad Y_2 = \dots \quad Z_2 = \dots$$

ossia

$$X_2 = x_1 + (x_u' + \Delta u\cdot x_u''(u + \theta_1\Delta u))\rho_1,$$

e sostituendo le (5),

$$\begin{aligned} X_2 &= x + \Delta u x_u'(u + \theta\Delta u) + \rho_1 x_u' + \rho_1 \Delta u x_u''(u + \theta_1\Delta u) \\ Y_2 &= \dots \\ Z_2 &= \dots \end{aligned}$$

L'equazione del piano per i tre punti MP_1P_2 sarà dunque

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & \dots & \dots & 1 \\ x + \rho x' & \dots & \dots & 1 \\ x + \rho_1 x' + \Delta u(x'(u + \theta\Delta u) + \rho_1 x''(u + \theta_1\Delta u)) & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & \dots \\ x'(u+\theta\Delta u)+\rho_1 x''(u+\theta_1\Delta u) & y'(u+\theta\Delta u)+\rho_1 y''(u+\theta_1\Delta u) & \dots \end{vmatrix} = 0$$

al limite, per $\Delta u \to 0$, si ha, pel piano tangente in P_1, la equazione

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Ma questa è la *equazione del piano osculatore allo spigolo di regresso nel punto M dove la generatrice per P_1 tocca lo spigolo medesimo* (n.° 647), e, poichè questo risultato vale qualunque sia il punto P_1 preso su la generatrice MP_1, la nostra proposizione risulta dimostrata.

676. Osservazione. Le *superficie coniche e cilindriche* (vedi Parte III, Cap. I, pag. 6-7, 17-18) sono rigate sviluppabili: infatti tutte le generatrici di una tale superficie incidono in uno stesso punto, (proprio od improprio), il vertice. Anche analiticamente, si verifica subito che la condizione (4) di pagina 198 è soddisfatta per tali superficie, rappresentate, sotto forma parametrica, dalle (27) di pag. 17 e dalle (29) di pag. 18. Le superficie sviluppabili hanno la proprietà che *tutti i loro* **punti sono punti parabolici**; poichè il piano tangente in un punto qualunque taglia la superficie secondo due rette coincidenti nella generatrice di contatto.

Secondo la denominazione adottata (n.° 668) potremo anche dire che *le superficie sviluppabili hanno curvatura totale nulla in tutti i loro punti.* Si dimostra anche la proprietà reciproca, che qui ci limiteremo ad enunciare: ogni superficie a punti tutti parabolici è una rigata sviluppabile.

§ IV. Cenno sugli inviluppi di superficie.

677. Inviluppo di una famiglia di superficie dipendenti da un sol parametro. Una equazione della forma

$$(1) \qquad F(xyza) = 0,$$

nella quale a rappresenta un parametro variabile, rappresenta una famiglia di superficie ad un parametro, (o semplicemente infinita).

È facile vedere, con ragionamento analogo a quello fatto per gli inviluppi di curve piane, che *ogni superficie* S (corrispondente ad un determinato valore del parametro a) *della famiglia incontra la superficie successiva* (corrispondente al valore successivo $a + da$ del parametro) *secondo una curva, rappresentata analiticamente dal sistema delle due equazioni*

$$(2) \qquad F(xyza) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Questa curva, vien detta **linea caratteristica** della superficie S.

Eliminando a dal sistema delle equazioni (2) si ottiene la equazione di una superficie cui appartengono tutte le linee caratteristiche ed alla quale si dà il nome di **inviluppo** della famiglia di superficie $F(xyza) = 0$.

L'inviluppo incontra ciascuna superficie S della famiglia secondo la rispettiva linea caratteristica, e nei punti di questa linea la superficie S ha con l'inviluppo a comune il piano tangente. Cioè *ogni superficie della famiglia tocca l'inviluppo lungo la linea caratteristica.*

Le linee caratteristiche di una famiglia di superficie hanno in generale un inviluppo (n.° 670).

Infatti derivando nuovamente rispetto al parametro a le equazioni (2) della caratteristica e facendo sistema delle equazioni risultanti, cioè delle

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0, \end{array} \right.$$

si hanno tre equazioni distinte

$$(3) \qquad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0,$$

e la eliminazione della a da queste, darà origine alle equazioni della linea inviluppo delle caratteristiche.

Tale linea vien detta: **spigolo di regresso** *dell'inviluppo della data famiglia.*

678. Esempi: 1.° *Inviluppo di una famiglia ad un parametro di piani.*

Se nella equazione di un piano generico

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

supponiamo che i coefficienti siano funzioni date di un parametro a, avremo la rappresentazione analitica di una famiglia di piani.

Le equazioni delle linee caratteristiche si hanno derivando rispetto ad a e considerando il sistema

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Dunque *le caratteristiche sono rette.*

L'inviluppo della data famiglia di piani è quindi una *rigata.*

Questa rigata è sviluppabile. Ed infatti le linee caratteristiche inviluppano lo spigolo di regresso, definito dal sistema delle tre equazioni

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

le quali determinano x, y, z in funzione del parametro a.

2.° Inviluppo di una sfera di raggio costante il cui centro descrive una curva data: superficie canale.

Indicando con xyz le coordinate del centro e con XYZ le coordinate di un punto generico della sfera, con r il raggio, avremo

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 - r^2 = 0$$

e, siccome il centro $C(xyz)$ percorre una linea data l, le sue coordinate soddisferanno le equazioni di una tale linea, che scriveremo

$$x = x(a), \quad y = y(a), \quad z = z(a).$$

Avremo dunque, come equazione della famiglia di sfere:

$$(X-x(a))^2+(Y-y(a))^2+(Z-z(a))^2-r^2=0,$$

e, per avere le equazioni delle caratteristiche, basterà far sistema di questa e della sua derivata rispetto ad a,

$$(X-x(a))x'(a)+(Y-y(a))y'(a)+(Z-z(a))z'(a)=0.$$

Quest'ultima rappresenta il piano passante pel punto $C(xyz)$ della linea l e *normale* in questo punto alla linea medesima (n.° 646).

La caratteristica di ogni sfera S della famiglia è dunque la intersezione della S col piano normale alla linea l nel centro C della sfera medesima.

L'inviluppo, luogo di questi cerchi, è una superficie canale, essa è descritta da un cerchio di raggio r che si muove in modo che il suo centro C descriva la linea l data, ed il suo piano, per ogni posizione di C, coincida col piano normale alla l medesima.

Così ad esempio: se l è una retta, la superficie canale è un cilindro, se l è un cerchio, essa è un toro, ecc.

La superficie canale ha in generale uno *spigolo di regresso*; che nel caso del cilindro, o del toro, si riduce ad un punto, (il vertice) o ad una coppia di punti (i punti comuni ai due cerchi secondo cui un qualunque piano per l'asse interseca il toro).

679. Inviluppo di una famiglia di superficie a due parametri.

Se nella equazione di una superficie generica

$$F(xyzab)=0 \tag{4}$$

compariscono due parametri indipendenti, col fissare in modo arbitrario i valori di essi parametri si ottiene un sistema doppiamente infinito di superficie, o, come si dice, una famiglia di superficie a due parametri.

Con ragionamento analogo a quello seguita nella ricerca degli inviluppi di curve piane, si vede che facendo sistema delle tre equazioni

$$F(xyzab)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial b}=0, \tag{5}$$

si trova, *in generale*, la equazione di una superficie, che vien detta *inviluppo della famiglia di superficie* $F = 0$: la quale tocca ogni superficie S del sistema in punti (in numero finito) le cui coordinate sono le soluzioni delle equazioni numeriche che si ottengono dal sistema (5) quando in esse si pongono i valori dei parametri corrispondenti alla superficie S che si considera.

ESEMPIO. L'inviluppo della famiglia di piani

$$ax + by + z + ab = 0, \tag{6}$$

dove a e b sono parametri variabili, si ottiene facendo sistema della (6) e delle due equazioni derivate

$$x + b = 0, \quad y + a = 0$$

ed eliminando a, b, da questo sistema. Si trova così il paraboloide

$$z - xy = 0.$$

§ V. Curvatura delle superficie.

680. Sia data una superficie S mediante una equazione della forma

$$z = f(xy) \tag{1}$$

e consideriamo sopra di essa un punto ordinario P.

Riferendo la nostra superficie ad un sistema di assi avente la origine in P, e l'asse z coincidente in direzione e verso con la normale alla superficie, il piano xy risulterà tangente in P alla superficie, ed i coseni direttori della normale saranno 0, 0, 1; cioè si avrà

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{00} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{00} = 0;$$

od usando le notazioni di Monge,

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

sarà

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0. \tag{2}$$

Poichè l'origine appartiene alla superficie, sarà ancora

$$f(00) = 0.$$

Sviluppando $f(xy)$ secondo la formula di Mac Laurin, in questa saranno dunque nulli i primi due termini, e si avrà:

$$z = f(xy) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{0\\0}} x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{0\\0}} y\right\}^{(2)} + \frac{1}{3\,!}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{0\\0}} x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{0\\0}} y\right\}^{(3)} + \ldots$$

ossia

$$z = \frac{1}{2} \{ r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 \} + \varepsilon, \tag{3}$$

dove ε indica una quantità infinitesima di ordine superiore al secondo rispetto all'infinitesimo principale $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Consideriamo ora le sezioni che si possono fare nella superficie con piani uscenti dalla origine, e cerchiamo i raggi di curvatura nella origine, di tali sezioni.

Poichè l'espressione del raggio di curvatura contiene solo le derivate prime e seconde, e queste, nella origine, sono le medesime sia per la $f(xy)$, sia per la

$$z = \frac{1}{2} \{ r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 \}, \tag{4}$$

che rappresenta un paraboloide per la origine e tangente al piano xy, possiamo concludere che i raggi di curvatura di sezioni fatte con piani determinati nella superficie data $z = f(xy)$, e nel paraboloide

$$z = \frac{1}{2} (r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2)$$

sono i medesimi.

Possiamo dunque, in vista della ricerca che ci siamo proposti, sostituire alla data superficie il paraboloide [1]

$$z = \frac{1}{2} (r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2).$$

La sezione di questa superficie col piano tangente è la

[1] Cfr. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale* (2.ª Edizione) pag. 591 e segg.

conica degenere

(5) $$r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 = 0.$$

Possiamo, con una opportuna trasformazione di assi (assumendo come assi x, y gli assi della conica) ridurre questa alla forma normale

(6) $$AX^2 + BY^2 = 0$$

dove A e B sono le radici (sempre reali) della equazione

(7) $$\rho^2 - (r_0 + t_0)\rho + (r_0t_0 - s_0^2) = 0$$

e precisamente:

(8) $$\begin{cases} A = \frac{1}{2}\left\{ r_0 + t_0 + \sqrt{(r_0 + t_0)^2 - 4(r_0t_0 - s_0^2)} \right\} \\ B = \frac{1}{2}\left\{ r_0 + t_0 - \sqrt{(r_0 + t_0)^2 - 4(r_0t_0 - s_0^2)} \right\} \end{cases}$$

(cfr. il n.° 307, Vol. I, pag. 263), e l'equazione del paraboloide assume allora la forma:

(9) $$Z = \frac{1}{2}(AX^2 + BY^2).$$

681. Curvature principali. Indicatrice di Dupin. Le sezioni fatte (sia nel paraboloide che nella data superficie) coi piani ZX, ZY si dicono **sezioni normali principali**, ed i relativi raggi di curvatura che indicheremo con R_1, R_2, si dicono **raggi di curvatura principali**; e le inverse di questi raggi $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ **curvature principali** della superficie nel punto P.

Le espressioni di tali raggi si trovano immediatamente osservando che la sezione col piano ZX è la parabola

$$Z = \frac{1}{2}AX^2,$$

il cui raggio di curvatura nella origine è

(10) $$R_1 = \frac{(1 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}}{Z''} = \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{R_1} = A$$

analogamente si trova

$$R_2 = \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{R_2} = B. \tag{11}$$

Dunque, le curvature principali della superficie nel punto P considerato sono espresse dai numeri A, B, (radici della equazione (7)) che risultano come coefficienti nella equazione normale della sezione della quadrica (4) col piano tangente.

Se questi numeri risultano dello stesso segno, cioè se le due curvature principali hanno egual segno, detta sezione è una coppia di rette immaginaria (coppia ellittica), se di segno contrario, è una coppia di rette reali (coppia iperbolica) e questi diversi casi si distinguono dal segno del termine noto nella equazione (7), cioè dal segno dell'Hessiano

$$H = r_0 t_0 - s_0^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{00}.$$

Se questo Hessiano è nullo, la sezione col piano tangente è una coppia di rette parallele, infinitamente vicine, (vedi n.° 676): nella riduzione a forma normale della (5), il coefficiente B risulta eguale allo zero.

682. CURVATURA DELLA SUPERFICIE. Per determinare la *curvatura della superficie* in un punto, si sono assunte varie espressioni formate coi raggi principali R_1 e R_2.

Notevoli fra le altre le seguenti:

1.° **La curvatura di Gauss, o curvatura totale,** è il prodotto delle due curvature principali,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = AB = r_0 t_0 - s_0^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}_{00} = H,$$

corrisponde all'*Hessiano*, calcolato nel dato punto (considerato come origine delle coordinate cui la superficie è riferita).

Si vede bene ora la ragione delle denominazioni introdotte al n.° 668, ove appunto si dissero punti a *curvatura totale positiva, nulla o negativa* (ellittici parabolici, iperbolici) quelli in cui l'Hessiano risulta positivo nullo o negativo.

2.° La **curvatura media**, media aritmetica delle due curvature principali

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{A+B}{2}=r_0+t_0+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

3.° La **curvatura di Casorati**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}\right)=r_0{}^2+t_0{}^2+2s_0{}^2.$$

683. Curvatura delle sezioni normali. Supponiamo ora di segare la superficie (e quindi anche il paraboloide (1)) con un piano qualsiasi π_α, passante per l'asse z, ed indichiamo con α l'angolo che questo piano forma col piano XZ. Le sezioni determinate nella S da piani passanti per l'asse z che è normale alle superficie, si dicono **sezioni normali della** S.

Per avere la curvatura della sezione normale fatta con un piano π_α, trasportiamo sul piano π_α il piano ZX mediante la rotazione di assi

$$\begin{cases} X=X_1\cos\alpha-Y_1\operatorname{sen}\alpha \\ Y=X_1\operatorname{sen}\alpha+Y_1\cos\alpha \\ Z=Z_1 \end{cases}$$

troveremo così, pel paraboloide, l'equazione

$$Z_1=(A\cos^2\alpha+B\operatorname{sen}^2\alpha)X_1{}^2+2(B-A)\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\, X_1Y_1+$$
$$+(A\operatorname{sen}^2\alpha+B\cos^2\alpha)Y_1{}^2,$$

e dovremo far sistema di questa equazione e di quella del piano π_α, che ora coincide col piano X_1Z_1, per avere l'equazione della sezione normale. Basterà dunque fare $Y_1=0$, e si troverà così la parabola:

$$Z_1=(A\cos^2\alpha+B\operatorname{sen}^2\alpha)X_1{}^2.$$

Il raggio di curvatura si trova subito, come precedentemente, sotto la forma:

$$R_\alpha = \frac{1}{A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

cioè

$$\frac{1}{R_\alpha} = A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha$$

od infine, per le formule (10) e (11),

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{R_2}. \tag{12}$$

Questa formula, che ***serve a calcolare la curvatura della sezione normale fatta col piano*** π_α, ***in funzione delle due curvature principali***, è nota col nome di **formula di Eulero.**

La formula di Eulero serve a studiare la variazione della curvatura della sezione normale, al variare dell'angolo α che il piano secante forma col primo piano principale ZX.

Lo studio di questa variazione viene semplificato dall'esame della **indicatrice di Dupin** della superficie S nel punto considerato.

La indicatrice di Dupin è la curva che si ottiene portando sopra ogni raggio OM_α, appartenente al piano XY e formante angolo α con la direzione principale OX, un segmento $\rho = \sqrt{|R_\alpha|}$ eguale al valore numerico della radice quadrata del raggio di curvatura della sezione normale fatta col piano π_α (inclinato dell'angolo α sul piano ZX).

I punti M_α così determinati sono sopra una curva, che è appunto detta la indicatrice di Dupin relativa al punto O, e che è una conica come ora vedremo.

Ciò posto supponiamo che l'Hessiano sia positivo, cioè che la superficie abbia in P curvatura totale positiva, o, in altri termini, che P sia un punto ellittico per la superficie (n.° 668).

Le curvature principali $A = \frac{1}{R_1}$, $B = \frac{1}{R_2}$ avranno egual segno, e supposto che siano positive (ciò che si può sempre fare orientando l'asse Z in modo conveniente), posto

$$a = \sqrt{R_1}$$
$$b = \sqrt{R_2}$$

per la formula di Eulero avremo:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}.$$

Indicando con x, y le coordinate del punto M_α (della indicatrice), ossia ponendo

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\operatorname{sen}\alpha$$

si ha dunque per tali punti la relazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dunque nel nostro caso la indicatrice di Dupin è una ellisse.

Le due curvature principali corrispondono agli assi di questa ellisse, le curvature delle altre sezioni normali, ai diametri; dunque i massimi e minimi raggi di curvatura delle sezioni normali si hanno per le sezioni principali.

Le due radici delle (7) sono eguali quando è

$$r_0 = t_0, \quad s_0 = 0.$$

In questo caso le due curvature principali risultano eguali, la indicatrice di Dupin è un cerchio, e tutte le sezioni normali hanno la medesima curvatura.

Un siffatto punto P è detto **ombelico o punto circolare** della superficie (cfr., per le quadriche, al n.° 549).

Supponiamo, in secondo luogo che l'*Hessiano* sia ***negativo.*** Il punto P sarà un punto iperbolico, ed in questo punto la curvatura totale risulterà negativa.

I segni dei raggi principali R_1 ed R_2 risulteranno fra loro contrari. Sia, ad es., $R_1 > 0$; posto

$$\rho = \sqrt{|R_\alpha|}, \quad a = \sqrt{|R_1|}, \quad b = \sqrt{|-R_2|}$$
$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho\operatorname{sen}\alpha,$$

avremo per la formula di Eulero

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1,$$

e la indicatrice di Dupin consterà di due iperbole coniugate.

Il raggio di curvatura R_α risulta infinito (e la corrispondente curvatura risulta nullo) per gli angoli α che corrispondono agli asintoti di tali iperbole, cioè per

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \pm \frac{a}{b}.$$

Queste sono appunto le **direzioni asintotiche** della superficie (n.° 668) cioè le direzioni delle tangenti in P alla curva sezione della superficie S data col piano tangente.

Finalmente, se l'*Hessiano è nullo*, la superficie ha curvatura totale nulla, il punto P è punto parabolico per la superficie, l'indicatrice di Dupin degenera nel sistema delle due rette parallele

$$x^2 = a^2,$$

la curvatura ha lo stesso segno per tutte le sezioni normali, e si riduce a zero per $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

684. Tangenti principali. Tangenti asintotiche. I diametri della indicatrice di Dupin sono le tangenti in P alla superficie. Ora le coppie di diametri coniugati rispetto a tale conica, che formano le coppie di una involuzione, (Vol. I, n.° 277, pag. 240), si dicono *tangenti coniugate* della superficie in P. La coppia ortogonale della involuzione delle tangenti coniugate, (che esiste in ogni caso ed è costituita dagli assi della indicatrice), è formata dalle tangenti alle sezioni principali, le quali si dicono **tangenti principali** della superficie nel punto considerato; gli asintoti, invece, sono le tangenti alle sezioni normali che in P hanno curvatura nulla, si dicono **tangenti asintotiche**, o rette osculatrici e sono reali e distinte solo per punti iperbolici.

685. Una linea λ tracciata sulla superficie S, si dice **linea di curvatura** di S, se *in ogni punto della linea λ, la tangente a questa linea è una tangente principale della superficie S.*

686. Una linea γ tracciata sulla superficie S si dice **linea asintotica** di S, *se per ogni punto di γ la tangente a questa linea è tangente asintotica della superficie.*

687. Una linea l tracciata sulla superficie S si dice **linea geodetica** *della S, se in ogni punto P di l il piano osculatore della linea è piano normale della superficie.*

688. Curvatura delle sezioni oblique. Consideriamo la sezione fatta nella superficie S con un piano π per il punto considerato P, e non contenente la normale alla superficie in P.

Assumendo come piano xy il piano tangente, come origine il punto P, come asse x la traccia sul piano tangente del piano π, (tangente alla sezione considerata), si consideri anche la sezione normale fatta col piano zx, e si indichi con λ l'angolo del piano π col piano zx, cioè detta oZ la normale alla Ox contenuta nel piano π, il rettilineo $\widehat{zoZ}$ del diedro formato da questi due piani.

L'equazione della S avrà la solita forma (n.° 680)

$$z = \frac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + \varepsilon. \tag{13}$$

Si faccia ora una trasformazione di coordinate nel piano zy, con una rotazione di assi che posti oz in oZ, e l'asse oy in oY, normale ad oZ giacente nel piano zoZ.

Le formule di trasformazione saranno

$$\begin{aligned} x &= X \\ y &= Y\cos\lambda + Z\,\mathrm{sen}\,\lambda \\ z &= -Y\,\mathrm{sen}\,\lambda + Z\cos\lambda, \end{aligned}$$

e l'equazione della superficie assumerà la forma:

$$\begin{aligned} -Y\,\mathrm{sen}\,\lambda + Z\cos\lambda = \frac{1}{2}\,\{\, & r_0X^2 + 2s_0(XY\cos\alpha + XZ\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ & + t_0(Y\cos\lambda + Z\,\mathrm{sen}\,\lambda)^2 \,\} + \varepsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Le coordinate XYZ del punto successivo a P (origine delle coordinate), sono da considerare come infinitesimi, ed Y, Z di ordine superiore ad X, eguagliando nella formula (14) gli infinitesimi di ordine inferiore avremo la equazione di una superficie

$$-Y\,\mathrm{sen}\,\lambda + Z\cos\lambda = \frac{1}{2}\,r_0X^2 \tag{15}$$

che potremo sostituire alla S nella ricerca dei raggi di curvatura, perchè le equazioni (14), (15) di queste due superficie differiscono per infinitesimi di ordine superiore al secondo [1].

Per avere dunque la curvatura della sezione obliqua determinata nella S dal piano π, basterà segare con questo piano, (cioè col piano $Y=0$) la superficie (15), e cercare il raggio R_λ di curvatura della parabola risultante:

$$Z\cos\lambda=\frac{1}{2}r_0X^2 \quad \left(\text{cioè } Z=\frac{1}{2}\frac{r_0}{\cos\lambda}X^2\right).$$

Troveremo, col solito calcolo:

$$R_\lambda=\frac{1}{\dfrac{r_0}{\cos\lambda}}=\frac{\cos\lambda}{r_0},$$

e ricordando che $\dfrac{1}{r_0}=R$ è il raggio di curvatura della corrispondente sezione normale, avremo $R_\lambda=R\cos\lambda$, d'onde il teorema (detto di MEUNIER):

Il raggio di curvatura di una sezione obliqua è eguale alla *proiezione* (sulla normale di questa sezione, uscente dal punto P considerato) *del raggio di curvatura della sezione normale* che ha, col piano della sezione obliqua, comune la traccia sul piano tangente.

§ VI. Formule di Cavalieri, di Torricelli, e di Guldino, pel calcolo dei volumi.

689. Consideriamo un segmento *solido* limitato da una superficie, in generale curva, e da due sezioni piane, parallele, che diremo *basi*.

Non escluderemo il caso che uno, od entrambi, i piani che determinano queste sezioni *(piani di base)* tocchino la superficie in un punto solo, come avverrebbe se si conducessero due piani tangenti all'ellissoide negli estremi di un diametro. Il solido considerato sarebbe in questo caso l'intiero ellissoide.

[1] Cfr. PINCHERLE, loc. cit., pag. 599.

Assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali di riferimento, nel quale il piano xy risulti parallelo alle basi del solido proposto, rappresentiamo con $z = z_0$, $z = z_1$ le equazioni dei piani di base, e supponiamo che *per ogni valore $\bar{z}$ di z* compreso fra z_0 e z_1 (gli estremi inclusi) *l'area $S(\bar{z})$ della sezione parallela alle basi* fatta col piano $z = \bar{z}$, possa esprimersi con una funzione nota $S(\bar{z})$ di z.

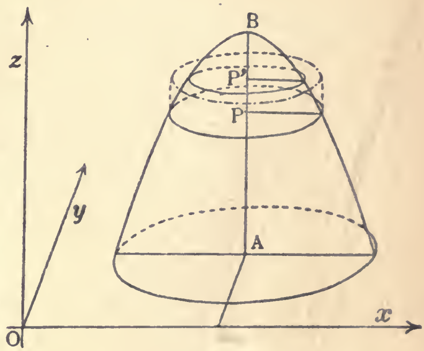
Il volume compreso fra la base $z = z_0$, e la sezione parallela corrispondente ad un valore di z generico (compreso fra z e z_1) sarà una certa funzione di z che indicheremo con $V(z)$.

L'accrescimento finito di questa funzione corrispondente all'accrescimento finito Δz della variabile z, sarà il disco compreso fra i piani paralleli z, $z + \Delta z$, e la superficie del solido.

Questo disco si può immaginare come somma algebrica di un disco cilindrico avente la base $S(z)$, e l'altezza eguale a Δz, e di un involucro cilindrico avente la stessa altezza e base eguale ad una frazione propria (positiva o negativa) della oscillazione $DS(z)$ della $S(z)$ nell'intervallo $z - z + \Delta z$.

Indicando una tale frazione con θ, avremo dunque:

$$\Delta V = S(z)\Delta z + \theta DS(z) \cdot \Delta z.$$



La parte principale di questo accrescimento, cioè il differenziale dV, sarà allora dato da

$$dV = S(z) \cdot dz,$$

ed il volume cercato sarà espresso dall'integrale

$$V = \int_{z_0}^{z_1} S(z) dz. \tag{1}$$

Questa formula (di Cavalieri) esprime il volume cercato come somma di infiniti cilindri elementari aventi per basi le successive sezioni fatte nel solido con piani paralleli, e per altezza la distanza infinitesima dz di due sezioni successive.

Praticamente, nota l'espressione $S(z)$ dell'area di una sezione generica corrispondente all'ordinata z, basterà cercare una primitiva di $S(z)$ $\left(\text{cioè una } \varphi(z) \text{ tale che } \frac{d\varphi}{dz} = S(z)\right)$ e calcolare le differenze $\varphi(z_1) - \varphi(z_0)$ dei valori che tale primitiva assume in corrispondenza delle due basi del solido da misurare.

690. Formula di Torricelli. La regola di Cavalieri assume una forma assai semplice quando la funzione $S(z)$, che esprime l'area della sezione in funzione della distanza del piano secante dalla base, è razionale, intera, di grado non superiore al terzo.

Ed infatti, supposto per semplicità $z_0 = 0$, $z_1 = h$, nella ipotesi

$$S = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

il volume cercato viene espresso dalla formula

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)dz = \frac{1}{4} a_0 h^4 + \frac{1}{3} a_1 h^3 + \frac{1}{2} a_2 h^2 + a_3 h \\ &= \frac{h}{6}\left(\frac{3}{2} a_0 h^3 + 2a_1 h^2 + 3a_2 h + 6a_3\right) \\ &= \frac{h}{6}\left\{\begin{array}{l} a_3 + \\ a_0 h^3 + a_1 h^2 + a_2 h + a_3 \\ + 4\left(a_0\left(\frac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2 \frac{h}{2} + a_3\right) \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Considerando che $a_3 = S(0)$ è l'area della base inferiore (corrispondente al valore $z = 0$); che

$$a_0 h^3 + a_1 h^2 + a_2 h + a_3 = S(h)$$

è l'area della base superiore, ed infine che

$$a_0\left(\frac{h}{2}\right)^3 + a_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{h}{2}\right) + a_3 = S\left(\frac{h}{2}\right)$$

è l'area della sezione mediana, abbiamo la formula (di Torricelli)

(2) $$V = \frac{h}{6}\left\{S(0) + S(h) + 4S\left(\frac{h}{2}\right)\right\};$$

da cui la regola:

Il volume del segmento solido limitato da due faccie piane parallele, nel quale le aree delle sezioni con piani paralleli alle basi, si esprimono in funzione, di grado non superiore al terzo, della distanza dalla base inferiore del piano secante, è data dal prodotto della sesta parte della altezza per la somma delle aree delle due basi e del quadruplo della sezione mediana.

691. La formula di Torricelli assume forma più semplice se $S(z)$ è **lineare**, cioè se $S(z) = az + b$.

Allora

$$S(0) = b$$

$$S(h) = ah + b$$

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = a\frac{h}{2} + b$$

$$S(0) + S(h) + 4\,S\left(\frac{h}{2}\right) = 3[S(0) + S(h)]$$

e quindi

(3) $$V = \frac{h}{2}[S(0) + S(h)].$$

Cioè *il volume è eguale al prodotto dell'altezza per la media aritmetica delle aree delle due basi.*

692. La formula di Torricelli dà immediatamente l'espressione esatta del volume di *segmenti a basi parallele di solidi quadrici.*

Per l'ellissoide, che supponiamo riferito agli assi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la sezione con un piano parallelo al piano xy è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

avente per semiassi

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \qquad b' = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

l'area di tale ellisse è (n.° 631)

$$S(z) = \pi a'b' = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

funzione di 2° grado in z.

Il volume del segmento compreso fra due piani $z = z_1$ $z = z_2$ sarà

$$V_{z_1 z_2} = \frac{\pi ab(z_2 - z_1)}{6}\left\{\left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) + \left(1 - \frac{z_2^2}{c^2}\right) + 4\left(1 - \frac{(z_1 + z_2)^2}{4c^2}\right)\right\}$$

$$V_{z_1 z_2} = \pi ab(z_2 - z_1)\left\{1 - \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2}{3c^2}\right\}.$$

Per avere **il volume dell'intero ellissoide** basterà fare $z_1 = -c$, $z_2 = c$, e si troverà

$$V = \frac{4}{3}\pi abc. \tag{4}$$

In modo analogo si trova il volume di un *segmento a basi parallele (a sezione ellittica) di un* **iperboloide.**

Quanto al **paraboloide ellittico**

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

le sezioni fatte con piani paralleli al piano xy sono ellissi, i cui semiassi sono dati da

$$a' = \sqrt{2pz}, \qquad b' = \sqrt{2qz},$$

e l'area è

$$S(z) = \pi a'b' = 2\pi z\sqrt{pq}$$

cioè *è funzione lineare di z.*

Si può dunque applicare la *formula ridotta* data al n.° 691, e scrivere

$$V_{z_1 z_2} = \frac{h}{2}(S_1 + S_2) = \pi\sqrt{pq}\,(z_1 + z_2)(z_2 - z_1) \tag{5}$$

$$V_{z_1 z_2} = \pi\sqrt{pq}\,(z_2^2 - z_1^2).$$

In particolare il volume del *segmento parabolico* compreso fra il vertice ed un piano perpendicolare all'asse a distanza z dal vertice è dato da

$$V = \pi\sqrt{pq}\cdot z^2.$$

693. La regola di Torricelli che dà la misura esatta del segmento solido, nei casi indicati dalle proposizioni precedenti, serve pel calcolo **approssimato dei volumi, di segmenti solidi a basi parallele**, in ogni altro caso.

In particolare si può applicare al calcolo del **volume delle botti**; ed il valore ottenuto sarà l'espressione esatta del volume cercato se la sezione longitudinale della botte è, nella sua parte curvilinea, un arco di sezione conica.

Per il calcolo approssimato del volume delle botti detta regola è stata data, anche prima che dal TORRICELLI, da BONAVENTURA CAVALIERI, nel suo libro « *Centuria di vari problemi* » (Bologna 1639) al problema 80, sotto la forma seguente: *Se moltiplicaremo la terza parte della lunghezza della botte in due cerchi maggiori et uno dei minori, ci verrà la capacità della botte.* Cioè

$$V=\frac{h}{3}\left(S(0)+2S\left(\frac{h}{2}\right)\right).$$

(Naturalmente si suppone che i due fondi della botte siano eguali cioè, che sia $S(0)=S(h)$, onde la formula (3) può scriversi appunto nel modo ora indicato).

694. VOLUMI DI SEGMENTI A BASI PARALLELE DI SOLIDI DI ROTAZIONE. In un solido di rotazione tutte le sezioni fatte con piani perpendicolari all'asse sono cerchi.

Assumendo come piano xy, nel sistema di assi di riferimento, un piano perpendicolare all'asse di rotazione, l'equazione della linea meridiana potrà esprimersi sotto la forma

$$\rho=f(z),$$

dove ρ è il raggio del cerchio sezione del solido col piano parallelo al piano xy, distante da questo della lunghezza z.

L'area della sezione è dunque espressa da

$$S(z)=\pi[f(z)]^2,$$

e, per la *formula di Cavalieri*, il volume del segmento compreso fra i piani $z=z_1$, $z=z_2$, è dato da

$$V_{z_1z_2}=\pi\int_{z_1}^{z}[f(z)]^2dz=\pi\int_{z_1}^{z}\rho^2dz. \tag{6}$$

Es., il volume del segmento di **paraboloide di rivoluzione** avente per linea meridiana la parabola

$$\rho^2 = 2pz,$$

è dato da

$$V_{z_1 z_2} = \pi \int_{z_1}^{z_2} 2pz dz = \pi p (z_2^2 - z_1^2).$$

Questa formula si ottiene come caso particolare della (5) per $p = q$.

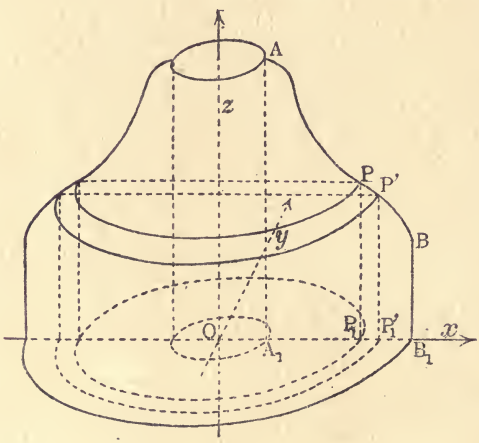
695. Volumi di involucri cilindrici (solidi armillari). Si vuol calcolare il volume della porzione di solido di rotazione, compresa fra due cilindri rotondi, aventi a comune col solido l'asse di rotazione.

Il solido sia quello generato dalla rotazione della linea APB, avente equazione

$$z = f(\rho)$$

ed i cilindri siano quelli che hanno raggi

$$\rho = \rho_0, \quad \rho = \rho_1, \quad \{ \rho_0 = OA_1, \ \rho_1 = OB_1 \}.$$



Il volume cercato è quello dell'involucro generato dalla rotazione della figura AA_1B_1BP, attorno all'asse z.

Ad ogni valore OP_1 di ρ, corrisponde un involucro (generato dalla rotazione di AA_1P_1P), il cui volume $V(\rho)$ può considerarsi come funzione di ρ.

Se alla ρ si dà un accrescimento $\Delta\rho$, il volume $V(\rho)$ subisce un accrescimento ΔV, rappresentato dall'involucro generato dalla rotazione di $PP_1P_1'P'$.

Questo può considerarsi come un involucro cilindrico, avente per base la corona circolare generata dalla rotazione del segmento P_1P_1' (di lunghezza $\Delta\rho$), e per altezza un segmento (compreso fra $z=\overline{P_1P}$, e $z+\Delta z=\overline{P_1'P_1}$) la cui lunghezza rappresenteremo con $z+\theta\Delta z$.

Avremo dunque

$$\Delta V = \pi \{ (\rho+\Delta\rho)^2 - \rho^2 \} \{ z+\theta\Delta z \}$$
$$\Delta V = 2\pi\rho z\Delta\rho + \pi\Delta\rho^2(z+\theta\Delta z).$$

Se si considera $\Delta\rho$ come infinitesimo, la parte principale di ΔV cioè il differenziale dV è espresso da

$$dV = 2\pi\rho z d\rho,$$
$$dV = 2\pi\rho f(\rho) d\rho.$$

Si avrà quindi V calcolando l'integrale:

$$V = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho f(\rho)\cdot d\rho. \tag{7}$$

Questa formula serve a *calcolare il volume dell'involucro compreso fra i cilindri rotondi di raggi* $\rho_1\rho_2$, *e la superficie di rotazione*

$$z = f(\rho),$$

essendo l'asse z, *asse comune di rotazione dei cilindri e della superficie data.*

696. La formula trovata serve, in particolare, a misurare il volume generato dalla rotazione di un area piana intorno ad una retta del suo piano.

697. Osservazione. L'area considerata al n.° precedente, dalla cui rotazione vien generato il solido da misurare, sarà limitata da una linea chiusa, perciò ad ogni valore di ρ corrisponderanno, in generale, due valori di z, $z=f(\rho)$, $z_1=f_1(\rho)$, ed il volume cercato si presenterà come differenza dei due integrali

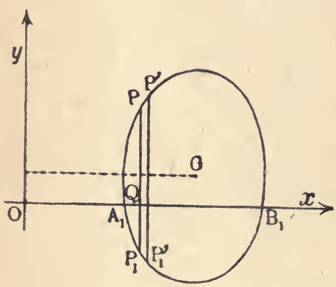
$$V = 2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho f_1(\rho)d\rho - 2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho f(\rho)d\rho$$

ossia si avrà:

$$V = 2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho(f_1(\rho) - f(\rho))d\rho. \tag{8}$$

698. Teorema di Guldino. *Il volume generato dalla rotazione di una figura omogenea piana intorno ad un asse giacente nel suo piano è dato dal prodotto dell'area della figura generatrice per la lunghezza della circonferenza generata dalla rotazione del centro di gravità di detta figura.*

È noto infatti che se immaginiamo la figura piana riferita ad un sistema ortogonale di assi di riferimento Ox, Oy, e ad ogni valore di x facciamo corrispondere l'elemento d'area compreso fra l'ordinata $\overline{PP_1}$ corrispondente, e la ordinata successiva $\overline{P'P_1'}$, la somma dei prodotti delle aree di questi elementi $\overline{PP_1P'P_1'}$, per le distanze $\overline{OQ}$ dall'asse, è eguale al prodotto dell'area dell'intera figura per la distanza $\overline{OG}$ dell'asse dal centro di gravità.



Cioè, indicando con ρ_1 e ρ_2 le ascisse dei punti A_1, B_1, con g l'ascissa $\overline{OG}$ del centro di gravità, e con S l'area della figura, si ha

$$\Sigma\overline{OQ}\cdot(\overline{PP_1P_1'P'}) = gS.$$

Indicando con $f(\rho)$, $f_1(\rho)$ le ordinate $\overline{QP}$, $\overline{QP_1}$ dei due punti in cui la parallela all'asse y uscente da Q incontra il contorno, a meno di infinitesimi di ordine superiore avremo:

$$\Sigma\rho\cdot(f(\rho) - f_1(\rho))\Delta\rho = gS,$$

da cui

$$gS = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho(f(\rho) - f_1(\rho))d\rho$$

moltiplicando per 2π, e ricordando la formula (8), si ha appunto

$$V = 2\pi g \cdot S, \tag{9}$$

ove $2\pi g$ è la circonferenza descritta dal centro G di gravità, ed S è l'area della figura generatrice.

699. Osservazione. Se la figura generatrice taglia l'asse di rotazione, i volumi generati dalle due parti della figura situate da bande opposte dell'asse, risultano di segni contrari, epperò non è la somma, ma la differenza di tali volumi che viene espressa dal teorema di Guldino.

In particolare, se l'asse passa pel centro di gravità si trova volume totale nullo.

700. Esempio. *Il volume del toro* generato dalla rotazione di un cerchio di raggio r intorno ad un asse situato nel suo piano alla distanza g dal centro, è dato da

$$V = 2\pi g \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 g r^2.$$

ERRATA-CORRIGE

Nel Primo volume:

Pag.	xxv	Nota (38) Ernesto Danti	Egnazio Danti
»	24	linea 20 $(X_1X_2X_3X_4)$	$(X_2X_3X_1X_4)$
»	40	» 14 $ax'+b'$, $ax+d$,	$ax'+b$, $ax+b$,
»	40	form. (14') $x+x$	$x+x'$
»	114	linea 22 $\mp\sqrt{a^2+b^2}$	$\pm\sqrt{a^2+b^2}$
»	129	» 14 $\lambda x_3'+x\mu_3''$ $\lambda x_2'+\mu x_2''$	$\lambda x_3'+\mu x_3''$ $\lambda x_2'+\mu x_2''$
»	148	linea ultima C_2	C_3
»	149	» 6 (dal basso) $O(r_1r_2r_2)$	$O(r_1r_2r_3)$
»	182	» 13 $z-c$	$z-o$
»	209	form. (21) $n,\ m=1,\ 2$	$n,\ m=1,\ 2,\ 3$
»	288	linea 3 (dal basso) contrario	eguale
»	353	» 17-18 coniche della stessa specie	parabole della stessa serie

Nella figura alla pag. 143 il segmento AM dovrebbe essere parallelo all'asse y.

Nel Secondo volume:

Pag.	5	linea 16 x^2	x_4^2
»	32	» 5 PP''	$P'P''$

INDICE

225

PARTE III.

LE QUADRICHE

CAPITOLO I.

SUPERFICIE E LINEE DELLO SPAZIO

CAPITOLO II.

EQUAZIONE GENERALE DELLE QUADRICHE

CAPITOLO III.

POLARITÀ DEFINITA DA UNA QUADRICA

Capitolo IV.

PROPRIETÀ DIAMETRALI DELLE QUADRICHE

Capitolo V.

STUDIO DELLE QUADRICHE SULLE LORO EQUAZIONI NORMALI

Parte IV.

ELEMENTI DELLA TEORIA GENERALE DELLE CURVE E DELLE SUPERFICIE

Capitolo I.

CURVE PIANE

Capitolo II.

CURVE NELLO SPAZIO

Capitolo III.

SUPERFICIE

231

Finito di stampare
il giorno 25 maggio 1923
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna.

QA Bortolotti, Ettore
551 Lezioni di geometria
B67 analitica

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY