

## INTEGRALI DOPPI

### Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a)  $\int_A xy \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(b)  $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$ ;

(c)  $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ ;

(d)  $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$ ;

(e)  $\int_A xy \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$ ;

(f)  $\int_A (x + y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ ;

(g)  $\int_A \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$ ;

(h)  $\int_A (x + 2y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}$ ;

(i)  $\int_A x \sin |x^2 - y| \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(j)  $\int_A |\sin x - y| \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(k)  $\int_A x^2 \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$ .

2. Sia  $A$  la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici  $A_1 = (0, 0)$ ,  $A_2 = (1, 1)$  e  $A_3 = (2, 0)$  e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di  $A$  rispetto al vertice  $A_1$ .

3. Sia  $B$  la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici  $B_1 = (0, 0)$ ,  $B_2 = (0, 1)$  e  $B_3 = (1, 0)$  e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di  $B$  rispetto al vertice  $B_3$ .

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a)  $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ ;

(b)  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a)  $\int_D y^2 \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ;

(b)  $\int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ ;

(c)  $\int_D x^2 \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ ;

$$(d) \int_D y \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}.$$

6. Sia  $D$  un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in  $C = (r, 0)$  e raggio  $r$ . Verificare la relazione  $I_0 = I_C + r^2 A$ , dove  $I_0$  e  $I_C$  sono i momenti di inerzia di  $D$  rispetto a  $O$  e a  $C$  e  $A$  è l'area di  $D$ .

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$ .

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\};$$

$$(b) \int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(c) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(d) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\};$$

$$(e) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$$

**INTEGRALI DOPPI**  
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a)  $\int_A xy \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[ \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b)  $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$ .

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy &= \int_1^2 \left( \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[ -\frac{1}{x+y} \right]_3^4 dy = \\ &= \int_1^2 \left( -\frac{1}{4+y} + \frac{1}{3+y} \right) dy = [-\log(4+y) + \log(3+y)]_1^2 = \ln\left(\frac{25}{24}\right). \end{aligned}$$

(c)  $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ .

La regione  $A$  è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per verticali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 (2x^2 + 3y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ 2x^2 y + \frac{3}{2} y^2 \right]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{7}{2} x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = \left[ -\frac{7}{10} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

(d)  $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$ .

La regione  $A$  è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (x - 2y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left( \int_0^{2-y} (x - 2y) \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2}{2} - 2xy \right]_0^{2-y} dy = \\ &= \int_0^2 \left( \frac{5}{2} y^2 - 6y + 2 \right) dy = \left[ \frac{5}{6} y^3 - 3y^2 + 2y \right]_0^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(e)  $\int_A xy \, dx \, dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$ .

La regione  $A$  è sia orizzontalmente che verticalmente convessa, ma per la forma esplicita di  $A$  è più conveniente integrare per verticali. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_A xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{1+x} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1+x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

(f)  $\int_A (x+y) dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ .

La regione  $A$  è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali risulta

$$\begin{aligned} \int_A (x+y) dx dy &= \int_0^2 \left( \int_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} (x+y) dx \right) dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} dy = \\ &= \int_0^2 \left( -\frac{y^4}{32} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^{2/3}}{2^{5/3}} + \frac{y^{4/3}}{2^{1/3}} \right) dy = \left[ -\frac{y^5}{5 \cdot 32} - \frac{y^4}{16} + \frac{3y^{5/3}}{5 \cdot 2^{5/3}} + \frac{3y^{7/3}}{7 \cdot 2^{1/3}} \right]_0^2 = \frac{39}{35}. \end{aligned}$$

(g)  $\int_A \frac{\sin y}{y} dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$ .

Sebbene la regione  $A$  sia verticalmente e orizzontalmente convessa, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale per verticali, infatti la funzione  $(\sin y)/y$  non è integrabile elementarmente rispetto a  $y$ . Integrando per orizzontali si ottiene invece

$$\int_A \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \left( \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right) dy = \int_0^\pi \sin y dy = [-\cos y]_0^\pi = 2.$$

(h)  $\int_A (x+2y) dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}$ .

L'insieme  $A$  può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$$

la cui intersezione si riduce ad un punto delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A (x+2y) dx dy = \int_{A_1} (x+2y) dx dy + \int_{A_2} (x+2y) dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{A_1} (x+2y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x (x+2y) dy \right) dx = \int_0^1 [xy + y^2]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_2} (x+2y) dx dy &= \int_1^2 \left( \int_x^{x^2} (x+2y) dy \right) dx = \int_1^2 [xy + y^2]_x^{x^2} dx = \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + x^3 + x^4) dx = \left[ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{317}{60} \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x+2y) dx dy = \frac{13}{60} + \frac{317}{60} = \frac{11}{2}.$$

(i)  $\int_A x \sin |x^2 - y| dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

Poichè

$$\sin |x^2 - y| = \begin{cases} \sin (x^2 - y) & \text{se } y \leq x^2 \\ \sin (y - x^2) & \text{se } y > x^2, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A x \sin |x^2 - y| dx dy = \int_{A_1} x \sin (x^2 - y) dx dy + \int_{A_2} x \sin (y - x^2) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{A_1} x \sin(x^2 - y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} x \sin(x^2 - y) dy \right) dx = \int_0^1 x [\cos(x^2 - y)]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(x^2)) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{A_2} x \sin(y - x^2) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 x \sin(y - x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x [-\cos(y - x^2)]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(1 - x^2)) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \sin(1 - x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x + 2y) dx dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 = 1 - \sin 1.$$

(j)  $\int_A |\sin x - y| dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$ .

Poichè

$$|\sin x - y| = \begin{cases} \sin x - y & \text{se } y \leq \sin x \\ y - \sin x & \text{se } y > \sin x, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \int_{A_1} (\sin x - y) dx dy + \int_{A_2} (y - \sin x) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{A_1} (\sin x - y) dx dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{\sin x} (\sin x - y) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[ y \sin x - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sin x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{A_2} (y - \sin x) dx dy &= \int_0^\pi \left( \int_{\sin x}^1 (y - \sin x) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[ \frac{y^2}{2} - y \sin x \right]_{\sin x}^1 dx = \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{4} (1 - \cos 2x) - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[ \frac{3}{4} x - \frac{1}{8} \sin 2x + \cos x \right]_0^\pi = \frac{3}{4} \pi - 2.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \pi - 2 = \pi - 2.$$

(k)  $\int_A x^2 dx dy$ ,  $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$ .

L'insieme  $A$  può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0, -x^2 - x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\},$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x^2 + 2x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\}$$

aventi in comune solo punti delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A x^2 dx dy = \int_{A_1} x^2 dx dy + \int_{A_2} x^2 dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali.

Si ha

$$\int_{A_1} x^2 dx dy = \int_{-2}^0 \left( \int_{-x^2-x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_{-2}^0 \left( \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[ \frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_{-2}^0 = 2$$

e

$$\int_{A_2} x^2 dx dy = \int_0^2 \left( \int_{-x^2+2x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left( -\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[ -\frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_0^2 = 2$$

Quindi

$$\int_A x^2 dx dy = 2 + 2 = 4.$$

2. Sia  $A$  la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici  $A_1 = (0,0)$ ,  $A_2 = (1,1)$  e  $A_3 = (2,0)$  e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di  $A$  rispetto al vertice  $A_1$ .

Essendo

$$A = \{(x,y) : y \leq x \leq 2-y, 0 \leq y \leq 1\}$$

si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left( \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_y^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{8}{3}y^3 + 4y^2 - 4y + \frac{8}{3} \right) dy = \left[ -\frac{2}{3}y^4 + \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + \frac{8}{3}y \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3. Sia  $B$  la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici  $B_1 = (0,0)$ ,  $B_2 = (0,1)$  e  $B_3 = (1,0)$  e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di  $B$  rispetto al vertice  $B_3$ .

Risulta

$$B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Poichè la distanza del generico punto  $(x,y) \in B$  dal vertice  $B_3$  è  $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ , si ha

$$\begin{aligned} I_{B_3} &= \int_B ((x-1)^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} ((x-1)^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ y(x-1)^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x-1)^3 dx = -\frac{1}{3} [(x-1)^4]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a)  $A = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1\}$ .

Siano  $\bar{x}_A$  e  $\bar{y}_A$  le coordinate del baricentro di  $A$ .

Per simmetria risulta  $\bar{x}_A = 0$ .

Invece

$$\bar{y}_A = \frac{1}{M(A)} \int_A y dx dy$$

dove  $M(A)$  è la massa di  $A$ .

Poichè

$$M(A) = \int_A dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

e

$$\int_A y dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5},$$

risulta  $\bar{y}_A = 3/5$ .

- (b)  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

Siano  $\bar{x}_B$  e  $\bar{y}_B$  le coordinate del baricentro di  $B$ .

Per simmetria risulta  $\bar{x}_B = 0$ .

Invece

$$\bar{y}_B = \frac{1}{M(B)} \int_B y \, dx \, dy$$

dove  $M(B)$  è la massa di  $B$ .

Poichè

$$M(B) = \int_B dx \, dy = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_B y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

risulta  $\bar{y}_B = 4/(3\pi)$ .

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

- (a)  $\int_D y^2 \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , la condizione  $x^2 + y^2 \leq 1$  diventa  $0 \leq \rho \leq 1$ , mentre  $y \geq 0$  diventa  $\sin \theta \geq 0$ , ossia  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

L'insieme di integrazione nel piano  $\rho, \theta$  è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo  $\rho$  lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\begin{aligned} \int_D y^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^\pi \rho^3 \sin^2 \theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left( \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

- (b)  $\int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ ;

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , la condizione  $x^2 + y^2 \leq 1$  diventa  $0 \leq \rho \leq 1$ , mentre  $0 \leq y \leq x$  diventa  $0 \leq \sin \theta \leq \cos \theta$ , ossia  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ .

L'insieme di integrazione nel piano  $\rho, \theta$  è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Essendo  $\rho$  lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/4} \rho^3 \, d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

- (c)  $\int_D x^2 \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ .

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , la condizione  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  diventa  $1 \leq \rho \leq 2$ , mentre  $y \geq 0$  diventa  $0 \leq \theta \leq \pi$ . L'insieme di integrazione nel piano  $\rho, \theta$  è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo  $\rho$  lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} \int_D x^2 dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^\pi \rho^3 \cos^2 \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left( \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{8} \pi. \end{aligned}$$

(d)  $\int_D y dx dy, \quad D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}.$

Per il calcolo dell'integrale è utile riscrivere la disequazione che definisce  $D$  come

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} \leq 1,$$

da cui

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1.$$

$D$  risulta quindi essere metà di una ellisse di semiassi  $a = 3$  e  $b = 2$ . Utilizzando la trasformazione

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \theta \\ y = 2\rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

l'insieme di integrazione nel piano  $\rho, \theta$  diventa il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo  $6\rho$  lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D y dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^\pi 12\rho^2 \sin \theta d\theta \right) d\rho = \int_0^1 12\rho^2 [-\cos \theta]_0^\pi d\rho = 24 \int_0^1 \rho^2 d\rho = 8[\rho^3]_0^1 = 8.$$

6. Sia  $D$  un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in  $C = (r, 0)$  e raggio  $r$ . Verificare la relazione  $I_0 = I_C + r^2 A$ , dove  $I_0$  e  $I_C$  sono i momenti di inerzia di  $D$  rispetto a  $O$  e a  $C$  e  $A$  è l'area di  $D$ .

Risulta

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r + r)^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + 2r(x - r) + r^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + y^2) dx dy + r^2 \int_D dx dy + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_c + r^2 A + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_c + r^2 A \end{aligned}$$

poichè per simmetria risulta

$$\int_D (x - r) dx dy = 0.$$

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$ .

Poichè l'insieme  $C$  è invariante rispetto alla simmetria per l'origine e la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  è pari rispetto a tale simmetria risulta

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{C'} (x^2 + y^2) dx dy$$

dove

$$C' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, y \geq 0\}.$$

L'integrale può ora essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

L'insieme di integrazione nel piano  $\rho, \theta$  è quindi il seguente:

$$\{(\rho, \theta) : 2 \cos \theta \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 3, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo  $\rho$  lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_{2 \cos \theta}^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta \right) = 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_{2 \cos \theta}^3 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 d\theta \right) = \\ &= 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \frac{81}{4} - 4 \cos^4 \theta \right) d\theta + \frac{81}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \right) = 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \frac{75}{4} - 2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta + \frac{81}{8} \pi \right) = \\ &= 2 \left[ \frac{75}{4} \theta - \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} + \frac{81}{4} \pi = 39\pi. \end{aligned}$$

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a)  $\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}$ .

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy &= \int_1^R \left( \int_0^{2\pi} \rho^{-2\alpha+1} d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_1^R \rho^{-2\alpha+1} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

e quindi l'integrale diverge positivamente se  $\alpha \leq 1$ , vale  $\pi/(\alpha - 1)$  se  $\alpha > 1$ .

(b)  $\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ;

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 2)$$

allora

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy &= \int_2^R \left( \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) d\rho = \\ &= \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) \left( \int_2^R \frac{1}{\rho} d\rho \right) = \frac{\pi}{4} (\log R - \log 2).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow +\infty} (\log R - \log 2) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.

(c)  $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^R \left( \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^R \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_0^{\pi/2} d\rho = \\ &= \int_1^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_1^R = 1 - \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) = 1.$$

(d)  $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \int_\epsilon^1 \left( \int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 [\sin \theta]_0^{\pi/4} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \epsilon).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e)  $\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ ,  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$ .

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_\epsilon^1 \left( \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_{-\pi/4}^0 d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_\epsilon^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.