1 Il Teorema della funzione implicita o del Dini

Ricordiamo che dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$, un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ che contiene x si dice intorno (aperto) di x.

Teorema 1.1. *(I Teorema del Dini) Sia $f : A$ (aperto) $\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su A. Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ tale che*

$$f(x_0, y_0) = c$$

(ovvero, P_0 appartiene all'insieme di livello $\{f = c\} = \{(x, y) \in A \,:\, f(x, y) = c\}$). Valgono le seguenti affermazioni.

(i) Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$, allora esiste un rettangolo $I \times J = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, con $a, b > 0$, tale che l'insieme

$$\{f = c\} \cap (I \times J) = \{(x, y) \in I \times J \,:\, f(x, y) = c\}$$

e' il grafico di una funzione $y = \phi(x)$, con $\phi : I \to J$ di classe C^1 su $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ (ovvero, per ogni $x \in I$ esiste un unico $y = \phi(x) \in J$ tale che $f(x, \phi(x)) = c$; inoltre si ha $\phi \in C^1(I)$). In particolare deve essere $\phi(x_0) = y_0$ ($I \times J$ e' un intorno di P_0).

(ii) Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) \neq 0$, allora esiste un rettangolo $I \times J = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, con $a, b > 0$, tale che l'insieme

$$\{f = c\} \cap (I \times J)$$

e' il grafico di una funzione $x = \psi(y)$, con $\psi : J \to I$ di classe C^1 su $J = (y_0 - b, y_0 + b)$ (ovvero, per ogni $y \in J$ esiste un unico $x = \psi(y) \in I$ tale che $f(\psi(y), y) = c$; inoltre si ha $\psi \in C^1(J)$). In particolare deve essere $\psi(y_0) = x_0$.

Quindi se $\nabla f(P_0) \neq (0, 0)$, almeno una delle due precedenti tesi (i) e (ii) e' vera.

Osservazione 1.2. (a) Il teorema del Dini chiarisce il seguente fatto. Se fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e risulta

$$\text{per ogni } P_0 \in \{f = c\}, \quad \text{vale } \nabla f(P_0) \neq (0, 0), \tag{1.1}$$

allora *localmente* $\{f = c\}$ e' il sostegno di una curva cartesiana $x \mapsto (x, \phi(x))$ o $y \mapsto (\psi(y), y)$ (o, equivalentemente, *localmente* $\{f = c\}$ e' il grafico di una funzione $y = \phi(x)$ o $x = \psi(y)$).

Se vale (1.1) *diciamo che l'equazione $f(x, y) = c$ definisce una curva regolare (in forma implicita).*

(b) Nel caso (i) si usa dire che l'equazione $f(x, y) = c$ definisce implicitamente y come funzione di x in un intorno di $P_0 = (x_0, y_0)$ (questa espressione non e' pero' molto precisa poiche' la funzione $y = \phi(x)$ e' definita in realta' in un *intorno I di x_0*). Si usa anche dire che nel caso (i) dall'equazione $f(x, y) = c$ si puo' esplicitare y come funzione di x nell'intorno di P_0. Si usano espressioni simili anche per il caso (ii).

Corollario 1.3. *Sia $f : A$ (aperto) $\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su A. Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = c$. Allora si ha:*

(i) Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$ *e* $y = \phi(x)$ *e' la funzione definita implicitamente da* $f(x,y) = c$ *per* $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, *risulta:*

$$\phi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(P_0)}{\partial_y f(P_0)}.$$

(ii) Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) \neq 0$ *e* $x = \psi(y)$ *e' la funzione definita implicitamente da* $f(x,y) = c$ *per* $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$, *risulta:*

$$\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(P_0)}{\partial_x f(P_0)}.$$

Nel caso (i) il vettore gradiente $\nabla f(P_0)$ *e' ortogonale al grafico di* ϕ *in* P_0. *Nel caso (ii) il vettore gradiente* $\nabla f(P_0)$ *e' ortogonale al grafico di* ψ *in* P_0.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la (i). La dimostrazione di (ii) e' simile. Sappiamo che, per ogni $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, vale

$$f(x, \phi(x)) = c.$$

Deriviamo rispetto a x:

$$\frac{d}{dx}c = 0 = \partial_x f(x, \phi(x)) + \partial_y f(x, \phi(x))\phi'(x), \quad x \in (x_0 - a, x_0 + a).$$

Poniamo $x = x_0$,

$$0 = \partial_x f(x_0, \phi(x_0)) + \partial_y f(x_0, \phi(x_0))\phi'(x_0), \tag{1.2}$$

da cui la tesi (i), dividendo per $\partial_y f(x_0, \phi(x_0)) = \partial_y f(P_0)$ (occorre ricordarsi che $\phi(x_0) = y_0$).

Osserviamo che (1.2) si puo' scrivere anche cosi'

$$\langle \nabla f(P_0), (1, \phi'(x_0)) \rangle = 0.$$

Questo mostra che il vettore gradiente $\nabla f(P_0)$ e' ortogonale al grafico di ϕ in P_0. ■

Teorema 1.4. *(II Teorema del Dini, per funzioni di 3 variabili) Sia* $f : A$ *(aperto)* $\subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *su* A. *Sia* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ *tale che*

$$f(x_0, y_0, z_0) = c$$

(ovvero, P_0 *appartiene all'insieme di livello* $\{f = c\} = \{(x,y,z) \in A \,:\, f(x,y,z) = c\}$*). Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) Se $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$, *allora esiste un intorno* U *di* P_0, $U = B \times J = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \times (z_0 - r, z_0 + r)$, *con* $a, b, r > 0$, *dove* $B = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, *tale che l'insieme*

$$\{f = c\} \cap (B \times J) = \{(x,y,z) \in B \times J \,:\, f(x,y,z) = c\}$$

e' il grafico di una funzione $z = h(x,y)$, *con* $h : B \to J$ *di classe* C^1 *su* B *(ovvero, per ogni* $(x,y) \in B$ *esiste un unico* $z = h(x,y) \in J$ *tale che* $f(x,y,h(x,y)) = c$*; inoltre si ha* $h \in C^1(B)$*). In particolare deve essere* $h(x_0, y_0) = z_0$.

(ii) *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) \neq 0$*, allora esiste un intorno* U *di* P_0 *tale che l'insieme*

$$\{f = c\} \cap U$$

e' il grafico di una funzione $x = k(y, z)$*, con* k *di classe* C^1 *in un intorno di* (y_0, z_0) *(in particolare deve essere* $k(y_0, z_0) = x_0$*).*

(iii) *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$*, allora esiste un intorno* U *di* P_0 *tale che l'insieme*

$$\{f = c\} \cap U$$

e' il grafico di una funzione $y = l(x, z)$*, con* l *di classe* C^1 *in un intorno di* (x_0, z_0) *(in particolare deve essere* $l(x_0, z_0) = y_0$*).*

Inoltre, se $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$*, allora vale:*

$$\nabla h(x_0, y_0) = -\frac{1}{\partial_z f(P_0)}(\partial_x f(P_0), \partial_y f(P_0)). \tag{1.3}$$

Osservazione 1.5. (a) Se $\nabla f(P_0) \neq (0, 0, 0)$, almeno una delle tre precedenti tesi (i), (ii), (iii) e' vera; se $\nabla f(P_0) \neq (0, 0, 0)$, posso quindi dire che localmente in un intorno di P_0, l'insieme di livello $\{f = c\}$ coincide con il sostegno o immagine di una superficie cartesiana $(x, y, h(x, y))$ o $(k(y, z), y, z)$ o $(x, l(x, z), z)$ (o, equivalentemente, in un intorno di P_0, $\{f = c\}$ e' il grafico di una funzione $z = h(x, y)$ o $x = k(y, z)$ o $y = l(x, z)$).

(b) Nel caso (i) si usa dire che l'equazione $f(x, y, z) = c$ definisce implicitamente z come funzione di x e y in un intorno di $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (questa espressione non e' pero' molto precisa poiche' la funzione $z = h(x, y)$ e' definita in realta' in un *intorno* B *di* (x_0, y_0)). Si usa anche dire che nel caso (i) dall'equazione $f(x, y, z) = c$ si puo' esplicitare z come funzione di x e di y nell'intorno di P_0. Si usano espressioni simili anche per i casi (ii) e (iii).

Una conseguenza del II Teorema del Dini e' la seguente definizione:

Definizione 1.1. *(Superfici di livello) Sia* $f : A$ *(aperto)* $\subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *su* A*. Fissiamo* $c \in \mathbb{R}$*. L'equazione*

$$f(x, y, z) = c$$

definisce una superficie regolare $S = \{f = c\}$ *(in forma implicita) se per ogni* $P \in \{f = c\}$ *(cioe'* $P \in A$ *e* P *risolve l'equazione* $f(x, y, z) = c$*) si ha* $\nabla f(P) \neq (0, 0, 0)$*.*

Consideriamo una superficie regolare (in forma implicita) $S = \{f = c\}$ e supponiamo che $P_0 \in S$ e $\partial_z f(P_0) \neq 0$. Allora sappiamo che S coincide in un intorno di P_0 con la superficie cartesiana di equazione $z = h(x, y)$. Proviamo al calcolare il piano tangente π in $P_0 = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$. Il piano π ha equazione

$$z - z_0 = \partial_x h(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y h(x_0, y_0)(y - y_0)$$

($z_0 = h(x_0, y_0)$). Usando la formula (1.3) posso scrivere

$$z - z_0 = -\frac{\partial_x f(P_0)}{\partial_z f(P_0)}(x - x_0) - \frac{\partial_y f(P_0)}{\partial_z f(P_0)}(y - y_0)$$

da cui l'equazione di π e'

$$\partial_z f(P_0)(z-z_0)+\partial_x f(P_0)(x-x_0)+\partial_y f(P_0)(y-y_0)=0 \text{ ovvero } \langle \nabla f(P_0), P-P_0\rangle = 0, \tag{1.4}$$

dove $P=(x,y,z)$ varia in π.

Si puo' dimostrare (senza difficolta') che per qualunque $P_0 \in S$, l'equazione (1.4) e' sempre l'equazione del piano tangente ad S in P_0 (anche se P_0 non soddisfa $\partial_z f(P_0) \neq 0$ ma invece verifica $\partial_x f(P_0) \neq 0$ oppure $\partial_y f(P_0) \neq 0$).

Esempio 1.6. L'equazione

$$f(x,y,z)=x^3+2x+e^z+y+z^3=0$$

definisce una superficie regolare $S=\{f=0\}$ (in forma implicita). Infatti

$$\nabla f(P)=(3x^2+2,1,e^z+3z^2)\neq \bar{0}, \text{ per } P=(x,y,z)\in S.$$

Il piano tangente ad S in $P_0 \in S$ ha equazione:

$$(e^{z_0}+3z_0^2)(z-z_0)+(3x_0^2+2)(x-x_0)+(y-y_0)=0.$$

2 Esercizi

1. Data la funzione

$$f(x,y)=y^3+2x^3+xy-4x^2+2x$$

a. Verificare che in un intorno di $P=(1,0)$ l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente una funzione $y=\phi(x)$.

b. Calcolare $\phi'(1)$.

Soluzione.

a. Osserviamo che $f(1,0)=0$. Inoltre, poiche'

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,0)=1\neq 0,$$

è possibile esplicitare f rispetto alla variabile y ricavando la funzione $y=\phi(x)$ con $x\in I=(1-a,1+a)$.

b. Derivando rispetto a x l'identita'

$$0=f(x,\phi(x))=\phi(x)^3+2x^3+x\phi(x)-4x^2+2x, \quad x\in I,$$

si trova

$$0=3\phi'(x)\phi(x)^2+6x^2+\phi(x)+x\phi'(x)-8x+2$$

Ponendo $x=1$, e usando che $\phi(1)=0$, si trova che $\phi'(1)=0$.

Questo e' in accordo con la formula del teorema del Dini:

$$\phi'(1)=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1,0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,0)}=-\frac{0}{1}=0,$$

2. Data
$$f(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$$
(i) verificare che in un intorno di $P = (0, e, 2)$ l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = h(x, y)$.

(ii) Calcolare $\partial_x h(0, e)$.

Soluzione. (i) Osserviamo subito che $f(0, e, 2) = 0$. Per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si ha:
$$\partial_z f(x, y, z) = x + 2z - e^z \implies \partial_z f(0, e, 2) = 4 - e^2 \neq 0.$$
Grazie al teorema del Dini la (i) vale.

(ii) Sappiamo che $h(0, e) = 2$ con h di classe C^1 in un intorno B di $(0, e)$. Derivando rispetto a x l'identita'
$$y^2 + xh(x, y) + h^2(x, y) - e^{h(x,y)} - 4 = 0, \quad \text{per } (x, y) \in B,$$
si trova
$$h(x, y) + x\partial_x h(x, y) + 2h(x, y)\partial_x h(x, y) - e^{h(x,y)}\partial_x h(x, y) = 0.$$
Ponendo $(x, y) = (0, e)$, si ricava: $\partial_x h(0, e) = -\frac{2}{4-e^2}$.

---

3. Si consideri la funzione
$$f(x, y) = e^{3x+y} + \sin(x - y).$$

a. Dimostrare che
$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$$
in un intorno di $(0, 0)$ coincide con il grafico di una funzione $x = \varphi(y)$.

b. Determinare lo sviluppo di MacLaurin di $\varphi(y)$ centrato in $y_0 = 0$ e arrestato al secondo ordine.

c. Verificare che $y_0 = 0$ è un punto di massimo relativo per $\varphi(y)$.

Soluzione.

a. Osserviamo che $f(0, 0) = 1$. Poichè
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = 4 \neq 0,$$
per il teorema di Dini concludiamo che, in un intorno di $(0, 0)$, E_1 coincide con il grafico di una funzione $x = \varphi(y)$, dove $\varphi \in C^1(-a, a)$.

b. Si sa che $\varphi(0) = 0$. Derivando l'dentita'

$$(*) \quad e^{3\varphi(y)+y} + \sin(\varphi(y) - y) = 1$$

rispetto a y e ponendo poi $y = 0$, si trova $\varphi'(0) = 0$. Per ottenere lo sviluppo richiesto occorre derivare due volte rispetto a y l'identita' (*) e poi porre $y = 0$. Si ricava $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$. Quindi lo sviluppo al secondo ordine è

$$\varphi(y) = \varphi(0) + \varphi'(0)y + \frac{1}{2}\varphi''(0)y^2 + o(y^2) = -\frac{1}{8}y^2 + \ o(y^2), \quad \text{per } \ y \to 0.$$

c. Dal punto *b.* si ottiene che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$, da cui $y = 0$ è punto di massimo relativo per $x = \varphi(y)$.

---

4. Determinare tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ tali che sia applicabile il teorema di Dini per l'esistenza di un funzione $y = \phi(x)$ definita implicitamente in un opportuno intorno di $(0, y_0)$ dall'equazione

$$f(x, y) = x^3 - y^2 + e^{x+y} + y^3 - e^y + ye^x - y = 0.$$

Soluzione. Dal teorema di Dini si ha che deve essere $\partial_y f\,(0, y_0) \neq 0$, d'altronde:

$$\partial_y f\,(0, y) = -2y + 3y^2 = y(3y - 2) = 0 \quad \text{per } y = 0,\ y = 2/3;$$

inoltre:

$$f\,(0, y) = -y^2 + y^3 = y^2(y - 1) = 0 \quad \text{per } y = 0,\ y = 1.$$

Affinche' sia applicabile il teorema del Dini NON puo' essere $y_0 = 0$. Segue allora che $y_0 = 1$.

Dunque il teorema di Dini garantisce l'esistenza di un funzione $y = \phi(x)$ in un opportuno intorno di $(0, 1)$.