**Il problema della rotazione**

**della teoria della relatività generale**[1]

**Kornel Lanczos** a Friburgo

(ricevuto l'1 febbraio 1923)

L'interpretazione straordinariamente bella che la teoria della relatività generale dà per la forza di Coriolis e per la forza centrifuga si fonda, com'è noto, essenzialmente sul fatto che l'elemento di linea euclideo viene trasformato a coordinate rotanti[2]. Nella teoria della relatività generale il vettore accelerazione dello spazio euclideo dev'essere completato mediante certi termini aggiuntivi per diventare un vero vettore. Non le $-\ddot{x}_i$, ma le quantità

$$-\ddot{x}_i - \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\} \dot{x}_r \dot{x}_s \tag{1}$$

costituiscono le componenti controvarianti di un vettore, che si può indicare come il vettore accelerazione della teoria della relatività generale[3]. Esso appare così composto di due parti, delle quali tuttavia nessuna presa da sola possiede un significato oggettivo. Da un lato l'accelerazione propriamente detta: $-\ddot{x}_i$, dall'altro una somma quadratica sulle componenti della velocità:

$$- \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\} \dot{x}_r \dot{x}_s \ . \tag{2}$$

Se vogliamo mantenere ancora la legge fondamentale della dinamica: "Massa per accelerazione uguale forza motrice", possiamo farlo, soltanto dobbiamo aggiungere alle forze date anche una "apparente"

---

[1]Zeitschr. f. Phys. **14**, 204 (1923).

[2]*Vedi per esempio* M. v. Laue, Die Relativitätstheorie II, 162, 1921. *Per una esposizione complessiva delle idee qui trattate e criticate vedi* A. Kopff, Das Rotationsproblem in der Relativitäts-theorie, Die Naturwissenschaften **9**, 9, 1921.

[3]*Il punto indica derivazione rispetto all'elemento di linea ds, la cui parte spaziale assumiamo positiva. Da ciò il segno negativo nell'espressione (1).*

che deriva dalla metrica dell'universo, ed ha il valore:

$$F^{i} = m \begin{Bmatrix} r\ s \\ i \end{Bmatrix} \dot{x}_r \dot{x}_s \ , \qquad (3)$$

dove $m$ indica la massa. Per piccole velocità la forza $F^{i}$ si può scindere in tre forze parziali, separando l'indice 4 ed estendendo le somme sugli indici solo alle tre coordinate spaziali. Otteniamo così una forza indipendente dalla velocità (I):

$$\frac{m}{g_{44}} \begin{Bmatrix} 4\ 4 \\ i \end{Bmatrix} ,$$

una forza (II) che dipende linearmente dalle componenti delle velocità:

$$\frac{2m}{g_{44}} \begin{Bmatrix} 4\ s \\ i \end{Bmatrix} x'_s ,$$

e infine una forza (III) nella quale la dipendenza è quadratica:

$$\frac{m}{g_{44}} \begin{Bmatrix} r\ s \\ i \end{Bmatrix} x'_r x'_s .$$

Gli apici indicano derivazione rispetto al tempo. Esempi per queste "forze apparenti" sono non solo la forza centrifuga e la forza di Coriolis, che compaiono in un sistema di coordinate euclideo rotante, ma anche la forza di gravitazione, poiché il moto libero in un campo di gravitazione secondo la teoria di Einstein è un moto in assenza di forze. E in particolare la forza di gravitazione di Newton e la forza centrifuga sono un esempio per la forza (I), la forza di Coriolis per la forza (II), mentre la forza (III) a causa della sua piccolezza di solito non interviene.

Per dare un'applicazione nel caso della rotazione, che qui ci interessa principalmente, trasformiamo quindi l'elemento di linea euclideo

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$$

a coordinate rotanti, per le quali introduciamo in luogo di $x$ ed $y$ nuove variabili, che possono essere riassunte nella forma della seguente equazione complessa:

$$x+iy = \exp(i\omega t)(\bar{x}+i\bar{y}) \ .$$

L'elemento di linea trasformato si scrive:

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2-2\omega ydxdt+2\omega xdydt-[1-\omega^2(x^2+y^2)]dt^2 \ ,$$

dove $\omega$ è la velocità angolare della rotazione. Per piccole velocità risulta ora per la forza (I) - quindi per la forza centrifuga:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\omega^2 x \\ Y &= m\omega^2 y \end{aligned}\right\} \ ,$$

per la forza (II) - la forza di Coriolis:

$$\left.\begin{aligned} X &= 2m\omega y' \\ Y &= -2m\omega x' \end{aligned}\right\} \ ,$$

in entrambi i casi non compare una componente Z.

Osserviamo che la forza (3) va trattata solo come "forza apparente", poiché essa non rappresenta un vettore reale ed è determinata soltanto dal sistema di coordinate di volta in volta utilizzato. Essa può essere suscitata con una scelta opportuna delle coordinate, ed allo stesso modo ridotta a zero. Ciò è vero in generale, ma con un'eccezione, e proprio quest'eccezione è della massima importanza. Si è abituati a dire: "In un corpo elastico rotante compare la forza centrifuga e gli sforzi elastici da essa generati le fanno equilibrio". In questo caso trattiamo la forza centrifuga come una forza del tutto reale, e con ragione. Infatti la nostra asserzione è solo una formulazione più comoda per il principio del moto, che in questo caso dovrebbe suonare: "Perché la rotazione sia possibile dev'essere presente una forza centripeta corrispondente". Abbiamo per così dire portato i termini delle equazioni del moto in un membro e formulato così il principio dinamico: "Forza motrice meno massa per accelerazione uguale zero." Si è soliti anche indicare la quantità da sottrarre come "forza d'inerzia", e di fatto l'introduzione di questo concetto è assai vantaggiosa, ma solo per un sistema di coordinate nel quale le masse sono a riposo, cioè per esempio nel caso della rotazione per un sistema di coordinate co-rotanti. Allora la forza d'inerzia - che è in questo caso la forza centrifuga - fà equilibrio alle forze esterne. Misurata in un tale sistema di coordinate, anche la forza (3) assume un significato oggettivo. Infatti misuriamo proprio il vettore:

$$m\left(\ddot{x}_i + \left\{ {r\ s \atop i} \right\} \dot{x}_r \dot{x}_s\right) , \tag{4}$$

quindi la forza d’inerzia della teoria della relatività generale, solo che il primo termine sparisce, poiché l’accelerazione è zero. (Pensiamo qui solo alle tre componenti spaziali: $i$=1,2,3. Ma in questo modo la forza d’inerzia è caratterizzata compiutamente, poiché la quarta componente a causa dell’equazione dell’energia è determinata dalle altre tre). Se non solo l’accelerazione, ma anche la velocità è nulla, interviene solo la forza (I), cioè dobbiamo costruire solo le tre quantità:

$$\frac{m}{g_{44}} \left\{ {4\ 4 \atop i} \right\} . \tag{5}$$

Con ciò abbiamo dato anche il valore della forza esterna, che è necessaria per tenere il punto permanentemente a riposo, e che fa equilibrio alla forza d’inerzia.

Possiamo anche dire riassumendo che la forza (3) in generale rappresenta una forza apparente, tuttavia risulta essere una forza vera - la forza d’inerzia - quando la si misura in un sistema "a riposo". La forza d’inerzia dipende, a prescindere dalla massa, solo dai coefficienti per la determinazione delle lunghezze, quindi da quantità puramente geometriche. Ciò è anche ovvio, poiché la forza d’inerzia costituisce una misura della deviazione dalla linea geodetica, e pertanto la sua natura corrisponde a un’idea geometrica. In un campo di gravitazione puro la forza d’inerzia è uguale a zero. Essa compare sempre quando si ha a che fare con un movimento forzato, nel quale il punto materiale è deviato dalla geodetica da forze esterne - l’esempio più semplice si ha con la rotazione[4].

---

[4]*Ho deliberatamente ricapitolato diffusamente queste premesse elementari, malgrado esse costituiscano fatti abbastanza noti. La maggior parte dei malintesi nel campo della teoria della relatività si fonda tuttavia sempre di nuovo su una comprensione*

Per questo caso la forza d’inerzia risultante si deriva dalla metrica puramente euclidea - quindi senza tenere alcun conto delle masse gravitanti. Quanto più strana è l’affermazione diffusa in generale - e in particolare nelle esposizioni divulgative della teoria questo punto è sottolineato con vigore -, che questa forza d’inerzia sia da intendersi come l’azione del campo gravitazionale generato dalle altre masse. E’ proprio giusto trattare la forza centrifuga - in generale la forza d’inerzia - come azione gravitazionale, essa è l’effetto del campo metrico, e questo campo metrico è proprio il campo gravitazionale. Ciò che tuttavia non è giusto accettare è il ruolo che in essa dovrebbero giocare le masse esterne. Essa interviene proprio in quei punti del campo dove è presente una massa da sola, e basta soltanto prendere una densità di massa abbastanza grande per rendere il campo esterno trascurabilmente piccolo rispetto a quello proprio.

Di fatto non si cerca neanche una dimostrazione esatta per quell’affermazione, ma ci si accontenta di un sillogismo, che si riduce a questo, che per la sola presenza di un’unica massa non può apparire alcuna forza centrifuga, perché questa sarebbe equivalente ad un moto assoluto rispetto allo spazio vuoto, cosa che secondo la teoria della relatività, la cui essenza si scorge proprio nel fatto che essa vede il moto come qualcosa di determinato in modo puramente relativo, va considerata come priva di senso. Poiché dunque la forza centrifuga dovrebbe annullarsi con la scomparsa delle masse esterne, la ragione per la sua comparsa andrebbe cercata solo nella presenza di questo mondo esterno e della rotazione rispetto ad esso. Ora non può essere tuttavia contestato che secondo le equazioni originarie della gravitazione di Einstein anche con la scomparsa di ogni materia resta pur sempre lo spazio euclideo, per cui non si può escludere la possibilità di una rotazione assoluta e della forza centrifuga ad essa associata. Quindi queste equazioni non renderebbero conto completamente del postulato della relatività. Inoltre vengono prescritte delle equazioni che , per dirla in breve, non ammettono nessuna soluzione priva di singolarità, nella quale il campo sia

---

*errata dei fondamenti di principio.*

determinato esclusivamente dalla materia[5]. Si dovrebbe per lo meno trattare come fisicamente accettabile solo una soluzione nella quale l'annullarsi di ogni materia porti con sè l'annullarsi dell'intero campo metrico. Einstein è stato condotto da tali considerazioni alle sue equazioni "cosmologiche".

A mio giudizio anche da qui non ci viene aiuto. In qualunque geometria potremo sempre introdurre un "sistema di coordinate normali"[6] e per determinare la metrica dovremo poi dare la posizione e la distribuzione del tensore materiale. Per una distribuzione spaziale della materia quando è data la funzione di distribuzione per il tensore materiale sarà determinata anche la posizione della materia, mentre per una distribuzione superficiale tanto la posizione degli strati di materia (nello spazio tetradimensionale) quanto la distribuzione della materia su di essi sono elementi necessari per la caratterizzazione di una metrica. In questo caso la posizione delle ipersuperfici può essere prescritta a piacere, mentre la distribuzione del tensore materiale è ristretta dalle condizioni sull'ortogonalità e sulla divergenza. Non c'è nessuna ragione, e in ogni caso non è necessario per l'esistenza di una geometria, che le linee d'universo di una singola massa esistente debbano necessariamente essere assunte come geodetiche, di modo che la forza d'inerzia si annulli. Per una rappresentazione semplice pensiamo lo spazio come un continuo monodimensionale, di modo che l'universo spazio-temporale sia rappresentato da una superficie curva del nostro spazio euclideo intuitivo. Si abbia ora un punto materiale, - la cui linea d'universo costituisca geometricamente un bordo della superficie d'universo. Le equazioni della gravitazione di Einstein dicono ora che la superficie d'universo è una superficie sviluppabile. Evidentemente si possono disporre due superfici sviluppabili in modo tale che esse si taglino lungo un bordo arbitrario, che non ha affatto bisogno d'essere geodetico. Con le

---

[5] *Einstein indica questo come "principio di Mach". Vedi* Einstein, Ann. d. Phys. **55**, 241, 1918.

[6] *Vedi il mio lavoro:* Zur Theorie der Einsteinschen Gravitations-gleichungen. Z.S. f. Phys. **13**, 7, 1923.

equazioni cosmologiche abbiamo a che fare con superfici sviluppabili da una sfera, ma anche questo non cambia essenzialmente la situazione. L'esempio che di solito si porta per illustrare il comportamento delle equazioni cosmologiche: l'"universo cilindrico" di Einstein, qui in realtà non c'entra. Infatti questo caratterizzerà lo stato dell'universo su grande scala, con materia pensata distribuita uniformemente, e non può aver a che fare con l'astrazione di un singolo corpo presente nello spazio dell'universo. L'idea, che una tale situazione non sarà in questo caso ammissibile, poiché per le equazioni cosmologiche non si ha in generale alcun mondo privo di massa, e quindi non esiste la possibilità di pensare la massa concentrata in un sol luogo, è sbagliata. Per un elemento di linea positivo definito lo si vede senz'altro. In questo caso la geometria sferica prende il ruolo di quella euclidea, e l'universo vuoto di materia sarà rappresentato da una sfera dello spazio a cinque dimensioni. La circostanza che la determinazione delle distanze ha un carattere pseudoeuclideo e che la corrispondente "pseudosfera" corrisponde ad una superficie aperta non muta il fatto, che in ogni caso non vi è ragione di respingere per la teoria degli invarianti questa soluzione priva di massa e di non veder più in essa l'esatto equivalente dell'universo pseudoeuclideo delle equazioni originarie[7]. D'altronde bisogna notare che l'universo cilindrico di Einstein non rappresenta una soluzione specifica delle equazioni cosmologiche, ma è compatibile anche con le equazioni originarie, quando si tratti la materia come una specie di fluido in quiete che riempia l'intero universo. Il termine cosmologico rappresenta allora la pressione negativa costante ovunque presente in questo fluido[8].

---

[7]*Vedasi anche il mio lavoro:* Bemerkung zur de Sitterschen Welt. Phys. Z.S. **23**, 539, 1922. *D'altronde l'elemento di linea dato da de Sitter rappresenta solo una parte di questa pseudosfera.*

[8]E. Schrödinger, Phys. Z.S. **19**, 20, 1918. *Ivi si introduce una certa "massa newtoniana gravitante" con la densità:* $T^4_4 - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3$, *per cui la massa totale dell'universo si deve annullare e quindi bisogna anche postulare la presenza di masse negative. In realtà*

Credo che l'intera presunta difficoltà che, come or ora notato, anche mediante l'introduzione del termine cosmologico non può essere evitata, sia provocata dal fatto che si ascrive all'idea di movimento un ruolo troppo importante, che esso in realtà non possiede. Considerando le cose dal punto di vista tetradimensionale non si ha nè moto relativo, nè assoluto. "Moto" significa variazione della posizione nel tempo e corrisponde quindi a fare una divisione dell'universo in spazio e tempo determinata dallo stato biologico, che vale solo come fenomeno soggettivo della coscienza. Uno può fare tutte le misure che vuole in riferimenti spaziali presi a piacere - non giungerà mai alla costruzione della metrica dell'universo. Lo spazio dell'intuizione corrisponde in generale ad una qualche superficie dello spazio dell'universo. Si può pensare una serie di tali superfici scelte in modo tale che le separazioni dei punti d'universo misurate su di esse lungo le geodetiche siano temporalmente costanti - che si abbia quindi quiete relativa. Ma allo stesso modo si può produrre mediante distorsione di queste superfici un moto relativo dei punti l'uno rispetto all'altro. In realtà esiste solo un vero sistema di riferimento e questo è l'intero spazio tetradimensionale dell'universo. Oggettivi sono gli scalari, i vettori, i tensori di questo spazio d'universo - in generale strutture alle quali è associato un significato anche dal punto di vista geometrico. In particolare il concetto del moto di un punto è sostituito dalle proprietà di curvatura di una linea d'universo, e quindi proprietà per le quali l'esistenza o meno di altre linee

---

*questa quantità non ha alcun significato secondo la teoria della relatività. E' assai più importante che la densità di massa* $\mu=T_4^4$ *risulti col giusto segno, cioè positivo, e stia nello stesso rapporto con il raggio di curvatura dell'universo:* $R = (3/\mu)^{1/2}$*, come dev'essere in generale all'interno di un fluido incompressibile. (Vedi per esempio* Laue, l.c. II, p. 232*). Problematico è solo come la pressione media dell'universo possa essere negativa. Ma l'indagine di questo problema esula da qui, e tra breve riporterò gli sviluppi ad esso relativi in un altro luogo ed in un altro contesto.*

d’universo è senza importanza. Nulla impedisce di supporre che la linea d’universo di un corpo pensato esistere da solo nello spazio dell’universo sia una spirale, cosa che nell’interpretazione fisica corrisponderebbe ad una rotazione assoluta - malgrado il fatto che un tale moto sia concettualmente privo di significato. Su quel corpo si può quindi manifestare la forza centrifuga, e l’idea, secondo la quale nel caso della forza centrifuga si ha a che fare con un’azione delle masse esterne, dev’esser dichiarata sbagliata. Che noi si scelga questo o quel sistema di equazioni di campo rimane senza importanza al riguardo.

Deve ora essere notata una circostanza. Nel calcolo della forza centrifuga come forza d’inerzia nel caso di una rotazione abbiamo trascurato il campo gravitazionale delle masse e calcolato con il puro elemento di linea euclideo. In realtà questa forza d’inerzia assomma la forza centrifuga e l’azione gravitazionale, e queste due parti non si possono separare secondo la teoria degli invarianti. Se vogliamo essere conseguenti, invece di parlare della forza centrifuga dobbiamo parlare della forza d’inerzia complessiva. Secondo la linea di pensiero precedente la forza d’inerzia per un corpo isolato deve annullarsi. Ma allora anche la soluzione statica sferosimmetrica delle equazioni di campo andrebbe contestata dal punto di vista fisico, sebbene in quel caso non si parli di alcun moto. Infatti in quel caso non si annulla la forza d’inerzia all’interno e sulla superficie della sfera. Evidentemente è a questo proposito equivalente che si introduca o meno un termine cosmologico. Questo termine si fa sentire sulle distanze grandi, per il campo interno di una sfera gravitante abbastanza piccola esso è senza importanza.

La forza d’inerzia si annullerebbe tuttavia di fatto per esempio nel caso di un cilindro cavo, che ruoti con una velocità tale che la forza di gravità e la forza centrifuga siano in equilibrio. Arriviamo quindi al risultato paradossale, che proprio per mezzo di una "rotazione assoluta" arriviamo ad imporre l’eliminazione di un moto assoluto. Osservo che secondo me non c’è alcuna possibilità di comprendere l’idea di moto in un modo soddisfacente per la teoria degli invarianti. Infatti dovremmo per questo presupporre l’esistenza di uno spazio assoluto, cosa che non è consentita nella teoria della relatività. L’idea di moto si fonda in modo del tutto essenziale sul fatto che la forma con cui il mondo esterno si manifesta alla nostra coscienza risulta suddivisa in due elementi - lo spazio ed il tempo - di essenza diversa, ma questo dualismo è superato nella teoria della relatività - e con ciò tuttavia al "moto" viene negato ogni significato oggettivo. Ciò vale non solo per il moto assoluto, ma anche per quello relativo. Ma, si può dire, per un "moto assoluto" si era trovata già prima un'interpretazione adatta. Nella teoria della relatività speciale trattiamo la rotazione come un moto assoluto. Con quale fondamento? Perché un tal moto si può riconoscere oggettivamente, appaiono in esso dei cambiamenti fisici osservabili. E perché questi cambiamenti si possono constatare? Perché le linee d'universo di un corpo rotante non sono diritte, ma curve; per il mantenimento di un tale stato è tuttavia necessaria l'azione di una forza, la comparsa della quale comporta un qualche mutamento fisico. Basta dire "geodetica" al posto di "retta" perché la stessa definizione si possa applicare anche per la teoria della relatività generale[9]. L'intera differenza sta nel fatto che l'universo spaziotemporale della teoria della relatività speciale esiste indipendentemente dalla materia, mentre esso è ora generato mediante la materia. Ma, come abbiamo visto prima, per fissare la metrica dev'esser data anche la posizione della materia, ed è perciò possibile che la materia relativamente ai proprii campi introduca anche in questo caso un "moto assoluto". Se si osservasse una violazione dei principi della relatività generale e si costruisse da ciò una contraddizione logica, ci si scontrerebbe con le leggi della geometria differenziale e si perverrebbe al risultato, che queste stesse non sono da applicarsi senz'altro ai processi naturali. Ma appare più plausibile

---

[9] *Con ciò tuttavia il concetto di "moto" avrebbe perso completamente il suo carattere sensibile-intuitivo. Si potrebbe sempre parlare di un moto assoluto, quando in qualche modo comparisse una forza d'inerzia. Ma allora si dovrebbe attribuire anche ai punti di una sfera omogenea a riposo in un campo gravitazionale statico sferosimmetrico un moto assoluto, cosa che evidentemente è priva di senso.*

allontanare la contraddizione, rinunciando fin dall'inizio ad ogni tentativo di introdurre nella trattazione geometrica degli elementi che contraddicano il suo carattere generale[10].

Esiste un solo studio rigoroso che pare di fatto render plausibile che la forza centrifuga debba interpretarsi come un'azione gravitazionale delle masse esterne. E' il noto calcolo di Thirring, secondo il quale all'interno di una sfera cava rotante devono comparire forze centrifughe e di Coriolis[11]. Questo tentativo presenta tuttavia un grosso difetto: il tensore materiale scelto a fondamento non è a divergenza nulla. Quindi il campo di gravitazione calcolato non rappresenta una soluzione reale delle equazioni di campo. Poiché infatti le equazioni scelte per determinare il sistema di coordinate utilizzato:

$$\frac{\partial \gamma_{is}}{\partial x_s} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0 \qquad (g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik})$$

sono soddisfatte, è necessario che il tensore materiale sia sottoposto alla condizione

$$\frac{\partial T_{is}}{\partial x_s} = 0 \ .$$

Nel caso di Thirring questa condizione è soddisfatta solo per la componente temporale ($i$=4), non per quelle spaziali. Lo si può anche vedere senza difficoltà. Thirring assume come tensore materiale semplicemente il tensore dell'impulso cinetico, cosa che è ammissibile solo quando le linee d'universo dei punti materiali siano delle geodetiche, ovvero la forza d'inerzia si annulli, ossia con altre parole: quando non vi siano forze vincolari. Ma la rotazione è un moto vincolato e allora si deve tener conto anche del tensore dell'energia e degli sforzi di queste forze vincolari.

---

[10]*Si è sollecitati a questo, in modo analogo ai tentativi di interpretazione meccanica dell'etere, dalla grande e immediata "evidenza" delle immagini meccaniche. Col tempo questi tentativi spariscono dalla scena da sè e prende il sopravvento l'astrazione governata dallo spirito della matematica.*

[11]H. Thirring, Phys. Z.S. **19**, 33, 1918 e **22**, 29, 1921.

Solo in un caso la rotazione sarebbe un moto "libero". Quando si trattasse di un cilindro cavo che ruotasse con velocità tale che la forza centrifuga così risultante compensasse sulla superficie la forza di gravitazione propria. Ma questa rotazione sarebbe lenta, per poter applicare l'integrazione approssimata della forza centrifuga, e quest'ultima sarebbe solo infinitesima del second'ordine. Perché il conto di Thirring c'entri qualcosa la velocità di rotazione [non] dev'essere assai piccola rispetto alla velocità della luce, ma grande rispetto a questa velocità, e perché sia valido richiede la comparsa di forze vincolari.

Di che tipo sia il tensore materiale risultante dipende interamente dalla natura di questa forza vincolare. Potrebbe essere interessante, senza ipotesi fisiche di qualche tipo chiedersi del tutto in generale quale forma sia possibile per la parte spaziale del tensore materiale, quando lo stesso è distribuito su una superficie di rotazione e deve presentare simmetria di rotazione. Ci restringiamo naturalmente ad un campo statico infinitamente debole e assumiamo per semplicità che la superficie di rotazione sia una sfera di raggio 1.

Quando la materia è disposta in una distribuzione superficiale si devono prescrivere per il tensore materiale due condizioni vettoriali[12]. Da un lato la condizione di ortogonalità:

$$T_i^s \nu_s = 0 \ , \tag{6}$$

dall'altro la condizione della divergenza:

$$\mathrm{div}\Gamma T = 0 \ , \tag{7}$$

dove $\Gamma$ indica il valore assoluto del gradiente della superficie

---

[12] *Vedasi a p. 541 del mio lavoro, citato a p. 209, nota 1. Se la materia nella sua distribuzione spaziale riempie uno strato di spessore finito, le condizioni non sono essenzialmente diverse. All'interno dello strato abbiamo allora solo l'equazione della divergenza:*

$$\mathrm{div} T = 0 \ ,$$

*ma sulle due superficie di contorno anche la condizione (6).*

data $F(x_1...x_4) = 0$:

$$\Gamma = \left(g^{rs} \frac{\partial F}{\partial x_r} \frac{\partial F}{\partial x_s}\right)^{1/2}.$$

Per l'equazione (6) il tensore materiale deve stare completamente entro il piano tangente alla superficie sferica. Assumiamo che i suoi assi principali siano rispettivamente nella direzione dei cerchi paralleli e meridiani della sfera, di modo che in ogni caso il tensore materiale può essere composto di due parti, delle quali una può essere interpretata fisicamente come tensore dell'impulso cinetico di una corrente rotante, l'altra come una tensione che agisce uniformemente nel piano. (Tensione o pressione significa qui, poiché si ha a che fare con uno spazio bidimensionale: forza per unità di lunghezza). In coordinate rettilinee, con l'asse $Z$ come asse di rotazione, la prima parte è rappresentata dallo schema:

$$Q\cdot\begin{bmatrix} -y^2 & xy & 0 \\ yx & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\tag{I}$$

la seconda parte dallo schema

$$P\cdot\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix}.\tag{II}$$

Per l'interpretazione fisica come corrente bisogna porre: $Q = \mu\omega^2$ ($\mu$ è la densità di massa, $\omega$ la velocità angolare) mentre $P$ indica il modulo della tensione scalare. $P$ e $Q$ possono essere funzioni dell'altezza polare $z$.

Esse saranno ora determinate mediante l'equazione della divergenza. Scriviamo l'equazione per la terza riga (quindi per $i$=3), e otteniamo così un'equazione differenziale per $P$, ossia:

$$-2zP+(1-z^2)\frac{dP}{dz} = 0\,,\tag{8}$$

la cui soluzione è

$$P = \frac{P_0}{1-z^2} , \tag{9}$$

dove la costante $P_0$ indica la tensione per $z = 0$, ossia all'equatore. Le altre due equazioni danno per $Q$ concordemente la relazione:

$$Q-2p-z \frac{dP}{dz} = 0 , \tag{10}$$

quindi:

$$Q = \frac{2P_0}{(1-z^2)^2} . \tag{11}$$

Riuniamo ora i due tensori, ma per una migliore comprensione trasferiamo il nostro sistema di coordinate nel piano tangente, di modo che l'asse $X$ coincida con la tangente del cerchio meridiano, l'asse $Y$ con la tangente del cerchio parallelo. Otteniamo per il tensore degli sforzi risultante nella superficie lo schema seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{P_0}{1-z^2} & 0 \\ 0 & -\frac{P_0}{1-z^2} \end{bmatrix} .$$

Si ha quindi una tensione nel cerchio meridiano - e una pressione di ugual valore nel cerchio parallelo. Con un'estensione facile del nostro conto ci si può liberare della specializzazione fatta delle direzioni principali e come possibilità più generale si ottiene lo schema:

$$\frac{1}{1-z^2} \cdot \begin{bmatrix} P_0 & B_0 \\ B_0 & -P_0 \end{bmatrix} ,$$

dove anche $B_0$ è una costante.

Riconosciamo che la tensione $P$ che appartiene ad un certo parallelo cresce al crescere dell'altezza polare in modo inversamente proporzionale al quadrato del raggio e nel polo diventa infinita. La nostra soluzione può tuttavia avere a priori un valore finché il campo si può considerare infinitamente debole.

Essa non si può quindi utilizzare fino ai poli. Poiché il campo deve restare ovunque infinitamente debole, bisogna ad ogni polo tagliar via una corrispondente calotta o sostituirla con un piano[13].

Questa conseguenza notevole si può evitare solo quando tutte le componenti del tensore degli sforzi spaziale si annullano identicamente. ($P_0$=$B_0$=0.) Questo si verifica quando si abbia a che fare con la rotazione di un corpo solido elastico - la nostra soluzione discussa or ora non c'entra più. Gli sforzi elastici e il tensore dell'impulso cinetico si cancellano esattamente. Si può dimostrare questo facilmente per esempio nel caso di un cilindro cavo rotante. A causa della forza centrifuga il raggio della sezione crescerà finché gli sforzi elastici antagonisti produrranno una risultante di ugual valore. Questo sforzo agisce nei cerchi paralleli sotto forma di una tensione, mentre ortogonalmente non si dà alcuno sforzo. Abbiamo quindi adesso il seguente schema tensoriale degli sforzi elastici per il sistema di coordinate scelto nel piano tangente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} ,$$

dove $p$ è l'intensità della tensione. Da questa tensione nella superficie risulta una pressione diretta verso l'interno del valore $p/r$ (nel senso dell'equazione di Laplace per gli sforzi superficiali), e quando noi la uguagliamo alla tensione della forza centrifuga, otteniamo la relazione

$$\frac{p}{r} = \mu\omega^2 r \, , \tag{12}$$

quindi

$$p = \mu\omega^2 r^2 \, . \tag{13}$$

Altrettanto grande, solo con la direzione opposta è tuttavia la corrispondente componente del tensore dell'impulso cinetico, di

---

[13] *Un appiattimento per esempio in un ellissoide non basta. Il piano è la sola superficie di rotazione per la quale la tensione al polo non è infinita.*

modo che il tensore dell'impulso è compensato dal tensore degli sforzi elastici.

Al posto dell'ipotesi di Thirring per il tensore materiale dobbiamo quindi sostituire ovunque 0 nelle componenti spaziali, e ci si deve chiedere ora se anche la quarta riga, che già soddisfa la relazione della divergenza, non sperimenti una variazione a causa degli sforzi elastici. Per rispondere a questa domanda la cosa più conforme allo scopo consiste nel portare a riposo momentaneo il punto considerato della periferia mediante una trasformazione di Lorentz. In questo sistema a riposo è corretta l'ipotesi che le tre componenti fuori diagonale della quarta riga e della quarta colonna del tensore d'energia e degli sforzi debbano annullarsi, poiché l'energia meccanica non presenta alcuna corrente[14]. Al posto di $T_4^4$ possiamo sostituire la densità di massa a riposo, mentre l'energia potenziale della forza elastica è trascurabile per deformazioni abbastanza piccole. Con queste quattro condizioni risultano determinate le quattro quantità incognite $T_{i4}$. Ritrasformiamo nel sistema in moto, otteniamo allora le componenti corrispondenti del tensore d'impulso, con deviazioni che si fanno sentire la prima volta con termini in $\omega^3$ e d'ordine più alto e possono quindi essere trascurati. La quarta riga della forma assunta da Thirring resta così invariata.

Ora è proprio vero che per la forza di Coriolis e per la forza centrifuga interviene principalmente la quarta riga. L'intera correzione del risultato di Thirring si riduce esclusivamente al fatto che la forza centrifuga calcolata va moltiplicata per 1/2. Ma questo valore non è caratteristico per la teoria della relatività generale. La forza centrifuga apparente è determinata solo da $T_4^4$ e deve la sua origine alla correzione relativistica della massa, che per gradi di latitudine diversi ha valore diverso, a causa del diminuire della velocità andando verso i poli. Pertanto la stessa forza risulterebbe anche dalla teoria della relatività speciale, si deve solo presupporre l'equivalenza tra massa gravitazionale e inerziale e calcolare la forza di gravitazione con il consueto potenziale newtoniano. Caratteristica

---

[14] *Vedi* Laue, l.c. I, p. 214.

della relatività generale è quindi soltanto la comparsa di una forza di Coriolis apparente. Ma anche questa dice molto di più riguardo alla natura della forza elastica che riguardo alla natura della vera forza di Coriolis. Si potrebbero introdurre forze vincolari tali da non solo invertire la parte spaziale del tensore impulso, ma anche le componenti non diagonali della quarta riga. Allora non ci sarebbe nessuna forza di Coriolis. E non è neppure giusto mettere sullo stesso piano i due sistemi: sfera rotante e osservatore in quiete da un lato; sfera in quiete e osservatore rotante dall’altro lato; non si tratta infatti di una pura trasformazione di coordinate, ma di due sistemi completamente diversi. Nel primo caso compaiono degli sforzi elastici che agiscono assieme alle forze gravitazionali, nell’altro no. D’altra parte si può vedere facilmente che il campo centrifugo apparente che interviene nel caso della rotazione non ha alcun rapporto intrinseco con un campo centrifugo reale. Pensiamo alle masse non distribuite su di una sfera, ma su un cilindro cavo che ruoti attorno al suo asse. La correzione alla massa è ora ovunque la stessa e dà luogo ad una pura diminuzione apparente della densità di massa costante. Se il cilindro è infinitamente lungo al suo interno non compare nessun campo di forze. Possiamo approssimare questo caso limite a piacere allungando di sopra e di sotto il cilindro e contemporaneamente aumentando la sua massa. In linea di principio tuttavia dovrebbe essere equivalente che si dispongano le masse su una sfera o su un cilindro, e l’effetto dovrebbe aumentare con l’aumento della massa, non diminuire.

## Riepilogo.

Si è fatto il tentativo di correggere alcune idee diffuse, e secondo l’autore errate, sulla posizione della teoria della relatività generale riguardo alle forze che compaiono nel caso di una rotazione. Questi fraintendimenti derivano dall’intrusione di speculazioni sulla relatività del moto in una disciplina, per la quale il concetto contraddittorio di moto significa un elemento non pertinente e superfluo. La grande portata e la superiore bellezza della teoria della relatività paiono all’autore non consistere in quella linea positivistica che mediante considerazioni epistemologiche sulla relatività del moto ha fornito lo stimolo immediato per la costruzione della teoria, ma in quella linea matematica astratta che si propone di trattare l'intero universo "more geometrico", poiché i principi della geometria nella loro più alta perfezione e chiarezza, nella forma della geometria differenziale, sono divenuti utilizzabili per la comprensione della natura, e la fisica affronta ora il compito di studiare la geometria realizzata in natura. Ma poiché quelle considerazioni positivistiche sono di gran lunga più accessibili alla divulgazione, non c'è da stupirsi che nella maggior parte delle esposizioni della teoria siano esageratamente sottolineate, sicché talvolta un superamento dei limiti di validità di siffatti principi impregnati di elementi soggettivi antropomorfi non può essere evitato. L'autore ha indagato alcune conseguenze che si danno nelle consuete presentazioni sulla relatività della forza centrifuga, secondo le quali questa andrebbe intesa come azione gravitazionale delle masse esterne, prodotta dalla rotazione relativamente a quelle, e dovrebbe annullarsi per un corpo che esistesse da solo nello spazio dell'universo. Contro quest'idea si sollevano principalmente i seguenti argomenti:

1. La densità di massa in un luogo può sempre essere scelta così grande che il campo esterno risulti trascurabile rispetto al campo proprio.

2. Nulla impedisce di assumere le linee d'universo di un corpo esistente da solo come spirali, di modo che ne risulti una forza centrifuga. L'introduzione delle equazioni cosmologiche non muta nulla in linea di principio.

3. La forza centrifuga e la forza gravitazionale non si possono dividere in modo invariante, esse costituiscono insieme la forza d'inerzia. Si dovrebbe quindi imporre l'annullarsi della forza d'inerzia per i corpi isolati. Ma allora si dovrebbe mettere in discussione anche il campo statico di una sfera omogenea a riposo.

4. Lo studio di Thirring sulla forza centrifuga e sulla forza di Coriolis che compaiono all'interno di una sfera cava rotante è valido solo in parte e non probante, poiché il tensore materiale preso a fondamento non soddisfa la condizione della divergenza. Viene proposta la correzione del procedimento.

Freiburg i.B., Physikalisches Institut, gennaio 1923.