

1. Geometria analitica del piano: esercizi.

ESERCIZIO. Fissato nel piano un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, determinare la circonferenza tangente alle rette

$$\begin{aligned}r_1 &: x + y = 0 \\r_2 &: 2x - y + 1 = 0\end{aligned}$$

e passante per il punto $Q(0, 1)$ di r_2 .

Si osservi che, poiché $Q \in r_2$, ci si aspetta che il problema geometrico proposto sia risolto da due circonferenze distinte: una in ciascuno dei due angoli formati da r_1 ed r_2 che hanno per lato comune la semiretta di r_2 a cui appartiene Q .

Svolgimento. Si tratta di determinare centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio R di

$$\gamma: (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

in modo che le condizioni del testo siano soddisfatte. Osserviamo innanzitutto che

- la tangenza tra r_1 e γ equivale all'uguaglianza tra R e la distanza di C da r_1
- la tangenza tra r_2 e γ equivale all'ortogonalità tra r_2 ed il vettore $\overrightarrow{QC}$, in quanto il punto di tangenza tra r_2 e γ deve ovviamente essere Q (il quale appartiene ad r_2 e si richiede appartenga anche a γ).

Essendo $\overrightarrow{QC} = C - Q = (\alpha, \beta - 1)$ ed essendo $\mathbf{n} = (2, -1)$ normale ad r_2 , imponiamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} = R^2 & (d(C, r_1)^2 = R^2) \\ \frac{\alpha}{2} = -(\beta - 1) & (\overrightarrow{QC} \perp r_2, \text{ ossia } \overrightarrow{QC} \parallel \mathbf{n}) \\ \alpha^2 + (1 - \beta)^2 = R^2 & (\text{appartenenza } Q \in \gamma). \end{cases}$$

Ricavando α dalla seconda equazione e sostituendo nelle altre si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} (2 - \beta)^2 = 2R^2 \\ \alpha = 2 - 2\beta \\ 5(1 - \beta)^2 = R^2, \end{cases}$$

dove prima ed ultima equazione implicano $(2 - \beta)^2 = 10(1 - \beta)^2$, la quale equivale a

$$\beta = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}. \quad (1)$$

Il sistema è allora risolto da (1) insieme a

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - 2\beta = -\frac{2}{3}(1 \pm \sqrt{10}) \\ R^2 &= 5(1 - \beta)^2 = \frac{5}{9}(-1 \pm \sqrt{10})^2 = \frac{5}{9}(11 \pm 2\sqrt{10}),\end{aligned}$$

a cui corrispondono le due circonferenze

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: \left(x + \frac{2(1 + \sqrt{10})}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4 + \sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}(11 + 2\sqrt{10}) \\ \gamma_2 &: \left(x + \frac{2(1 - \sqrt{10})}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4 - \sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}(11 - 2\sqrt{10}).\end{aligned}$$

■

ESERCIZIO. Fissato nel piano un riferimento ortonormale $\mathcal{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, scrivere l'equazione della conica con centro in $C(1, 1)$, passante per $Q(2, 2)$ ed avente un vertice in $V(3, 1)$.

Svolgimento. Poiché si parla di conica a centro, l'equazione cercata sarà quella di un'ellisse o di un'iperbole; inoltre, in quest'ultimo caso, si tratterebbe di un'iperbole con asse focale parallelo all'asse delle ascisse (e precisamente $y = 1$), in quanto sia il centro $C(1, 1)$ che il vertice $V(3, 1)$ giacciono sulla retta $y = 1$. Dunque, in ogni caso, si tratta di determinare a^2 e b^2 in modo che la conica

$$\gamma: \frac{(x-1)^2}{a^2} \pm \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

(ellisse o iperbole, a seconda del segno tra i termini a primo membro) soddisfi le condizioni richieste. Siccome a ha il significato di distanza tra C e V , risulta subito che deve essere $a^2 = d(C, V)^2 = 4$. Allora, imponendo il passaggio per $Q(2, 2)$, si ottiene

$$Q \in \gamma \iff \frac{1}{4} \pm \frac{1}{b^2} = 1,$$

da cui deve essere $\pm 1/b^2 = 3/4$ e quindi

$$\gamma: \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{3}{4}(y-1)^2 = 1.$$

La conica cercata è dunque l'ellisse di equazione $(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 4$. ■

Fissato un riferimento ortonormale $R(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano bidimensionale ordinario, trovare e studiare il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti AB , dove A si trova sull'asse x , B sull'asse y e sia $|(\vec{OA} \cdot \vec{i})(\vec{OB} \cdot \vec{j})| = 1$.

Dobbiamo considerare due punti qualsiasi $A(\alpha, 0)$ e $B(0, \beta)$ tali che

$$1 = |(\vec{OA} \cdot \vec{i})(\vec{OB} \cdot \vec{j})| = |(\alpha \vec{i} \cdot \vec{i})(\beta \vec{j} \cdot \vec{j})| = |\alpha \beta|$$

e descrivere il luogo γ dei punti medi di AB .

Si ha che $P(x, y) \in \gamma$ se e solo se P è punto medio di AB , cioè

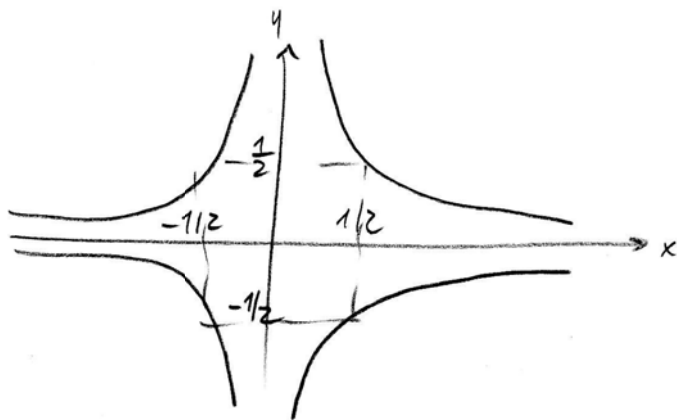
$$P(x, y) \in \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

da cui $xy = \frac{\alpha\beta}{4}$, cioè (essendo $\alpha\beta = \pm 1$) $xy = \pm 1/4$, che esprime l'appartenenza di $P(x, y)$ ad una delle iperboli equilateri riferite ai propri asintoti

$$\gamma_1: xy = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \gamma_2: xy = -\frac{1}{4}.$$

Dunque γ è l'insieme dei punti che stanno su γ_1 oppure γ_2 ,

$$\text{cioè } \boxed{\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2}$$



Fissato nel piano un riferimentoortonormale $R(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$,
trovare e studiare il luogo geometrico L dei punti medi delle corde
della conica $\gamma: x^2 + 5xy + 6y^2 - 4 = 0$ parallelo al vettore $\vec{j}$.

Per visualizzare graficamente la situazione dovremmo ridurre γ a
forma canonica (v. oltre), ma ciò non è necessario e si può
procedere algebricamente.

Le corde in questione hanno estremi A, B su una retta di equazione $x = k$
con $k \in \mathbb{R}$ e sulla conica γ , le cui coordinate sono quindi
soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 - 4 = 0 \\ x = k. \end{cases} \quad \text{Sostituendo per trovare } y, \text{ si trova}$$

$$6y^2 + 5ky + k^2 - 4 = 0$$

cioè

$$y = \frac{-5k \pm \sqrt{k^2 + 96}}{12}.$$

Dunque $A(k, \frac{-5k + \sqrt{k^2 + 96}}{12})$
 $B(k, \frac{-5k - \sqrt{k^2 + 96}}{12})$.

L è il luogo dei punti medi del segmento AB (al variare di k),
cioè

$$P(x, y) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k+k}{2} \\ y = \frac{1}{2} \left(\frac{-5k + \sqrt{k^2 + 96}}{12} + \frac{-5k - \sqrt{k^2 + 96}}{12} \right) \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} x = k \\ y = -\frac{5}{12}k \end{cases}$ che fornisce l'equazione
parametrica di L , dove
il parametro k varia in $\mathbb{R}$.

L è quindi una retta per O e parallela al vettore $\vec{i} - \frac{5}{12}\vec{j}$,
ed ha equazione cartesiana

$$L: y = -\frac{5}{12}x.$$

Visualizzazione grafica (non richiesta dal testo)

- La matrice della forma quadratica di γ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 6 \end{pmatrix}$, il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5/2 \\ 5/2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda) - \frac{25}{4} = \lambda^2 - 7\lambda - \frac{1}{4}.$$

Gli autovalori di A (soluzioni di $P(\lambda)=0$) sono allora

$$\lambda_1 = \frac{7+5\sqrt{2}}{2} > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{7-5\sqrt{2}}{2} < 0.$$

- cerchiamo una ~~base~~ ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ di autovettori.

Per $\lambda = \lambda_1$, si ha il sistema
$$\begin{cases} (1 - \frac{7+5\sqrt{2}}{2})x + \frac{5}{2}y = 0 \\ \frac{5}{2}x + (6 - \frac{7+5\sqrt{2}}{2})y = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} -(1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad y = (1+\sqrt{2})x.$$

Dunque gli autovettori relativi a λ_1 sono della forma $\vec{v} = \alpha(1, 1+\sqrt{2})$.

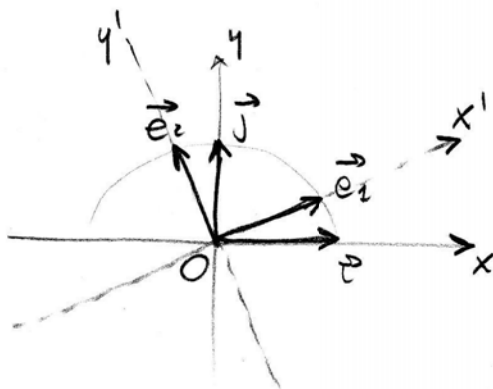
Un autovettore unitario è $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1, 1+\sqrt{2})$.

Per $\lambda = \lambda_2$, si ottiene il sistema
$$\begin{cases} -(1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad y = (1-\sqrt{2})x.$$

Dunque gli autovettori relativi a λ_2 sono della forma $\vec{v} = \beta(1, 1-\sqrt{2})$.

Un autovettore unitario $\vec{e}_2$ tale che $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sia una base possibile è

$$\vec{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1, 1-\sqrt{2}) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(-1-\sqrt{2}, 1)$$



(*) Per le proprietà dei radicali, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

- Le coordinate (x, y) nel riferimento $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ e le coordinate (x', y') nel riferimento $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sono legate dalle equazioni $X = P X'$ di cambiamento di base, dove

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -(1+\sqrt{2}) \\ 1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice di passaggio dalla base $(\vec{i}, \vec{j})$ alla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

ossia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} (x' - (1+\sqrt{2}) y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} ((1+\sqrt{2}) x' + y') \end{cases}$$

- Nelle nuove coordinate (x', y') l'equazione di γ diventa allora

$$\frac{1}{4+2\sqrt{2}} (x'^2 + (1+\sqrt{2})^2 y'^2 - 2(1+\sqrt{2}) x' y') + \frac{5}{4+2\sqrt{2}} (x' - (1+\sqrt{2}) y') ((1+\sqrt{2}) x' + y') + \frac{6}{4+2\sqrt{2}} ((1+\sqrt{2})^2 x'^2 + y'^2 + 2(1+\sqrt{2}) x' y') - 4 = 0$$

cioè

$$x'^2 + (1+\sqrt{2})^2 y'^2 - 2(1+\sqrt{2}) x' y' + 5(1+\sqrt{2}) x'^2 + 5 x' y' - 5(1+\sqrt{2})^2 y' x' + - 5(1+\sqrt{2}) y'^2 + 6(1+\sqrt{2})^2 x'^2 + 6 y'^2 + 12(1+\sqrt{2}) x' y' - 4(4+2\sqrt{2}) = 0$$

cioè

$$(1+5+5\sqrt{2}+6+12+12\sqrt{2}) x'^2 + (1+2+2\sqrt{2}-5-5\sqrt{2}+6) y'^2 + (-2-2\sqrt{2}+8-8-10-10\sqrt{2}+12+12\sqrt{2}) x' y' - 8(2+\sqrt{2}) = 0$$

cioè

$$\boxed{\gamma: (24+17\sqrt{2}) x'^2 + (4-3\sqrt{2}) y'^2 - 8(2+\sqrt{2}) = 0} \quad \text{IPERBOLE}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{>0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{<0}$

N.B. $24+17\sqrt{2} = (4+2\sqrt{2}) \lambda_1$

$4-3\sqrt{2} = (4+2\sqrt{2}) \lambda_2$

$$\gamma: \frac{x'^2}{\frac{8(2+\sqrt{2})}{24+17\sqrt{2}}} - \frac{y'^2}{\frac{8(2+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}-4}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{8(2+\sqrt{2})}{24+17\sqrt{2}}} \approx 0.75, \quad b = \sqrt{\frac{8(2+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}-4}} \approx 10.6$$

