

Funzioni implicite e teorema del Dini

Il succo dell'argomento può essere presentato così. Sia f una funzione a valori reali, definita in un aperto G del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ e sufficientemente buona; consideriamo un valore C di f e consideriamo

$$L = \text{retroimmagine di } C,$$

cioè l'insieme di tutti i punti di G in cui f assume il valore C . L è il luogo dei punti di G le cui coordinate x e y verificano l'equazione

$$f(x, y) = C$$

e potrebbe essere chiamato una *linea di livello* di f . Ad esempio, se f è un polinomio di secondo grado, l'insieme L è una conica. Valgono queste proposizioni.

Prima. Se (x_0, y_0) è un punto di L , ma *non* è un punto critico di f — vale a dire,

$$f(x_0, y_0) = C \text{ e } \nabla f(x_0, y_0) \neq 0$$

— allora la parte di L , contenuta in un intorno opportunamente piccolo di (x_0, y_0) , è una *curva regolare*. Più precisamente, essa è un *grafico regolare*, cioè il grafico di una *funzione reale* abbastanza liscia.

Questa proposizione informa che le curve piane regolari possono essere rappresentate non solo mediante equazioni parametriche, ma anche come linee di livello di funzioni di due variabili. Ad esempio, una conica non degenera — cioè una conica che non consiste in una coppia di rette — è una curva regolare.

Le funzioni reali, il cui grafico coincide con parti di L , si dicono *implicite*, oppure *definite implicitamente* da L .

Seconda. Se (x_0, y_0) è un punto di L , ma *non* è un punto critico di f , allora la *retta tangente* a L nel punto (x_0, y_0) ha equazione

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

In altri termini, *il gradiente di f in un punto (x_0, y_0) è ortogonale alla linea di livello passante per il punto (x_0, y_0)* — oppure è nullo.

Questa proposizione mette in relazione la *direzione* del gradiente con la geometria delle *linee di livello* e consente di determinare rette tangenti a curve piane non parametriche.

Terza. Se L contiene un punto *isolato* (x_0, y_0) , oppure *due o più* archi regolari che si intersecano o si toccano in un punto (x_0, y_0) , allora (x_0, y_0) è un *punto critico* di f .

Ad esempio, se f è un polinomio di secondo grado e l'equazione $f(x, y) = 0$ rappresenta una coppia di rette distinte — cioè una conica semplicemente degenera — allora l'intersezione di tali rette è un punto critico di f .

Le proposizioni sopra enunciate sono una conseguenza del seguente **teorema del Dini**.

Ipotesi:

(i) f è una funzione a valori reali, differenziabile e dotata di derivate parziali prime continue in un aperto G del piano euclideo $\mathbb{R}^2$;

(ii) esiste un punto (x_0, y_0) appartenente a G e tale che

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad (1)$$

— dunque un punto di G che annulla f , ma che **non** annulla il gradiente di f .

Conclusioni. Esistono due numeri positivi h e k ed una funzione reale ϕ che hanno queste proprietà:

(iii) ϕ è **definita** nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$, ha **valori** nell'intervallo $[y_0 - k, y_0 + k]$, è **derivabile** ed ha derivata prima **continua** ;

(iv) la parte della linea di livello

$$\left\{ (x, y) \in G : f(x, y) = 0 \right\}, \quad (2)$$

contenuta nel rettangolo

$$[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k], \quad (3)$$

è esattamente il **grafico** di ϕ .

Dimostrazione. Passo 1. Definiamo una funzione ausiliaria g con la formula seguente

$$g(x, y) = y - y_0 - \frac{f(x, y)}{f_y(x_0, y_0)}. \quad (4)$$

Evidentemente g è differenziabile ed ha derivate parziali prime continue in G ; la derivata parziale di g rispetto a y è data da

$$g_y(x, y) = 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)}. \quad (5)$$

Leggiamo sulla (5) che $g_y(x_0, y_0) = 0$, usiamo la continuità di g_y e ricordiamo che G è aperto. Deduciamo che esistono un numero positivo k e un numero positivo a tali che

$$|g_y(x, y)| \leq 1/2 \text{ se } (x, y) \in [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - k, y_0 + k].$$

La prima delle (1) e la (4) implicano che $g(x_0, y_0) = 0$; informano in particolare che la funzione $x \mapsto g(x, y_0)$ si annulla nel punto x_0 . Pertanto esiste un numero positivo b tale che

$$|g(x, y_0)| \leq k/2 \text{ se } x \in [x_0 - b, x_0 + b].$$

Se poniamo $h = \min\{a, b\}$, abbiamo

$$|g_y(x, y)| \leq 1/2 \text{ per ogni } (x, y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k], \quad (6)$$

inoltre

$$|g(x, y_0)| \leq k/2 \text{ per ogni } x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (7)$$

I numeri h e k così definiti

sono quelli che compaiono nell'enunciato del teorema.

Le disuguaglianze (6), (7), e le seguenti (8) e (9), sono decisive nella presente dimostrazione. La (6) e il teorema di Lagrange per funzioni di una variabile, oppure la formula $g(x, v) - g(x, u) = \int_u^v (\partial g / \partial y)(x, y) dy$, dicono immediatamente che

$$|g(x, v) - g(x, u)| \leq (1/2)|v - u| \quad (8)$$

$$\text{se } (x, v) \ \& \ (x, u) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k].$$

La (7), la (8) e la disuguaglianza $|g(x, y)| \leq |g(x, y_0)| + |g(x, y) - g(x, y_0)|$ informano che $|g(x, y)| \leq \frac{k}{2} + \frac{1}{2}|y - y_0|$ se $(x, y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$. Pertanto

$$|g(x, y)| \leq k \text{ per ogni } (x, y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]. \quad (9)$$

Passo 2. Definiamo ricorsivamente una successione di funzioni $\{\phi_n\}$ ponendo

$$\phi_0(x) = y_0 \quad (10a)$$

$$\phi_n(x) = y_0 + g(x, \phi_{n-1}(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10b)$$

Valgono le proposizioni seguenti, la prima delle quali informa che ϕ_n è ben definita nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$ e ha valori nell'intervallo $[y_0 - k, y_0 + k]$.

$$\phi_n([x_0 - h, x_0 + h]) \subseteq [y_0 - k, y_0 + k] \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

$$\phi_n \text{ è continua in } [x_0 - h, x_0 + h] \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$\{\phi_n\} \text{ converge uniformemente in } [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (13)$$

Dimostrazione della (11). La (10a) assicura largamente che $\phi_0([x_0 - h, x_0 + h])$ è contenuto in $[y_0 - k, y_0 + k]$.

Supponiamo che $\phi_{n-1}([x_0 - h, x_0 + h]) \subseteq [y_0 - k, y_0 + k]$ per qualche intero positivo n . Allora

$(x, \phi_{n-1}(x)) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ se $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Conseguentemente la (9) garantisce che $|g(x, \phi_{n-1}(x))| \leq k$ se $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. La (10b) dice che $\phi_n(x) - y_0 = g(x, \phi_{n-1}(x))$. Concludiamo che $|\phi_n(x) - y_0| \leq k$ se x appartiene a $[x_0 - h, x_0 + h]$, in altri termini $\phi_n([x_0 - h, x_0 + h]) \subseteq [y_0 - k, y_0 + k]$.

Per il principio d'induzione la (11) è dimostrata.

Dimostrazione della (12). Può essere facilmente fatta per induzione.

Dimostrazione della (13). La (10a) e la (10b) dicono che $\phi_1(x) - \phi_0(x) = g(x, y_0)$; conseguentemente la (7) assicura che

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq k/2$$

se $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

La (10a) e la (10b) dicono che $\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = g(x, \phi_{n-1}(x)) - g(x, \phi_{n-2}(x))$ se $n = 2, 3, 4, \dots$; conseguentemente la (8) e la (11) assicurano che

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq (1/2) \cdot |\phi_{n-1}(x) - \phi_{n-2}(x)|$$

se $n = 2, 3, 4, \dots$ e $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Le maggiorazioni trovate implicano

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq k \cdot 2^{-n}$$

se $n = 1, 2, 3, \dots$ e $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

L'ultima disuguaglianza assicura che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$$

converge totalmente, dunque uniformemente, nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$. Siccome

$$\phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x),$$

la (13) è provata.

Passo 3. La funzione ϕ , che compare nell'enunciato del teorema, è definita così

$$\boxed{\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)} . \quad (14)$$

La definizione (10b) e le proposizioni (11), (12) e (13) implicano facilmente le seguenti proprietà:

$$\phi([x_0 - h, x_0 + h]) \subseteq [y_0 - k, y_0 + k], \quad (15)$$

$$\phi \text{ è continua nell'intervallo } [x_0 - h, x_0 + h], \quad (16)$$

$$\phi(x) = y_0 + g(x, \phi(x)) \text{ per ogni } x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (17)$$

Passo 4. Dimostriamo che la funzione ϕ è *derivabile* ed ha derivata *continua*.

Se prendiamo x e $x + \Delta x$ entrambi in $[x_0 - h, x_0 + h]$, deduciamo dalla (17) che

$$\phi(x + \Delta x) = y_0 + g(x + \Delta x, \phi(x + \Delta x)) \text{ e } \phi(x) = y_0 + g(x, \phi(x)).$$

Conseguentemente, definito $\Delta\phi$ in questo modo

$$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x),$$

troviamo

$$\Delta\phi = g(x + \Delta x, \phi(x) + \Delta\phi) - g(x, \phi(x)).$$

Il teorema di Lagrange per funzioni di due variabili consente di scrivere

$$\begin{aligned} g(x + \Delta x, \phi(x + \Delta x)) - g(x, \phi(x)) = \\ g_x(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi)\Delta x + g_y(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi)\Delta\phi, \end{aligned}$$

dove θ è un opportuno numero compreso fra 0 e 1. Abbiamo quindi

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = g_x(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi) + g_y(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi)\frac{\Delta\phi}{\Delta x},$$

ovvero

$$[1 - g_y(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi)] \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = g_x(x + \theta\Delta x, \phi(x) + \theta\Delta\phi),$$

dove θ è compreso fra 0 e 1.

Passiamo al limite per $\Delta x \rightarrow 0$. Teniamo presente la continuità delle derivate parziali di g e che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta\phi = 0,$$

a causa della già provata proposizione (16). Teniamo presente anche che

$$g_y(x, \phi(x)) \neq 0 \text{ se } x \in [x_0 - h, x_0 + h], \quad (18)$$

a causa della proposizione (15) e della disuguaglianza (6). Otteniamo

$$\boxed{\phi'(x) = \frac{g_x(x, \phi(x))}{1 - g_y(x, \phi(x))}}. \quad (19)$$

La formula (19), la disuguaglianza (18) e la proposizione (16) mostrano chiaramente che ϕ' è *continua* nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$. La proprietà (iii), che compare nell'enunciato del teorema del Dini, è dimostrata.

Osserviamo incidentalmente che la formula (19) può essere riscritta in questo modo

$$\boxed{\phi'(x) = -\frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))}}.$$

Passo 5. A causa della (4), la proprietà (17) equivale alla seguente

$$f(x, \phi(x)) = 0 \text{ per ogni } x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (20)$$

In altri termini, abbiamo dimostrato che

$$(\text{grafico di } \phi) \subseteq \left\{ (x, y) \in G : f(x, y) = 0 \right\}. \quad (21)$$

Dimostriamo ora che

$$\text{se } (x, y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k] \text{ e } f(x, y) = 0 \text{ allora } y = \phi(x). \quad (22)$$

Supponiamo che il punto (x, y) stia nel rettangolo $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ e che annulli f . Abbiamo

$$y - \phi(x) = g(x, y) - g(x, \phi(x)),$$

perchè vale la (17) e la (4) dice che $y = y_0 + g(x, y)$. La (15) e la (8) implicano

$$|g(x, y) - g(x, \phi(x))| \leq (1/2) \cdot |y - \phi(x)|.$$

Dunque

$$|y - \phi(x)| \leq (1/2) \cdot |y - \phi(x)|$$

e concludiamo che

$$y = \phi(x).$$

La (22) è provata.

Le inclusioni (21) e (22) significano che il grafico di ϕ coincide con l'intersezione dell'insieme $\left\{ (x, y) \in G : f(x, y) = 0 \right\}$ e del rettangolo $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$. La proprietà (iv), che appare nell'enunciato del teorema del Dini, è così provata.

Fine della dimostrazione.