

Formulario di Fisica 2

Flaminia Germoni

a.a.2000/2001

1 Elettrostatica

1.1 operatori:

	cartesiane	cilindriche	polari
$d\vec{l}$	dx, dy, dz	$d\rho, \rho d\varphi, dz$	$dr, r d\vartheta, r \sin \vartheta d\varphi$
$(\overrightarrow{grad} f)$	$(\nabla f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ $(\nabla f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$	$(\nabla f)_\rho = \frac{\partial f}{\partial \rho}$ $(\nabla f)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ $(\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$	$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}$ $(\nabla f)_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ $(\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$
$div \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta v_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$
$rot \vec{v}$	$\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{matrix}$	$(rot \vec{v})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$ $(rot \vec{v})_\varphi = \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}$ $(rot \vec{v})_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right)$	$(rot \vec{v})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\sin \vartheta v_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right)$ $(rot \vec{v})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}$ $(rot \vec{v})_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right)$

Il gradiente dà come risultato un vettore,
mentre la divergenza uno scalare.

1.1.1 Operazioni tra operatori:

$$\text{rotgrad} = 0$$

$$\text{divrot} = 0$$

$$\text{divgrad}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}f)$$

$$\text{divgrad}\vec{v} = (\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z) = (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\text{rotrot}\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{v} = \text{graddiv}\vec{v} - \nabla^2 \vec{v}$$

il risultato di questo operatore è un vettore.

1.2 Campi Elettrici:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\vec{\nabla}V = \text{potenziale elettrico}$$

$$\text{densità lineare} : \lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\text{densità superficiale} : \sigma = \frac{dq}{dS}$$

1.3 Forza di Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = qE_0$$

1.4 Teorema di Gauss:

$$\phi_s = \int_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{tot}^{int}}{\epsilon_0}$$

Il teorema di Gauss è utile nel caso in cui il sistema sia dotato di simmetria sferica.

simmetria sferica	$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$V(\infty) = 0$
simmetria cilindrica	$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\frac{r}{r_0})$	$V(r_0) = 0$
simmetria piana	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$	$V(0) = 0$

1.5 Energia del Campo Elettrico:

$$U = -\vec{E} \cdot \vec{p} = Vq$$

$$\vec{p} = \delta q = \text{momento di dipolo}$$

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1.6 Dipolo:

Campo Elettrico: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$

Potenziale: $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \right)$

approssimazione di dipolo: $r \gg d$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\delta \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cos \vartheta}{r^2}$$

Campo elettrico in coordinate polari:

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3} \quad \vec{E}_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}$$

1.7 Conduttore:

Condizione d'equilibrio: $\vec{E} = 0$ $V = \text{cost}$ $\rho = 0$

Capacità: $C = \frac{q}{V}$

Lavoro di estrazione: $\Delta V = V_i - V_e = -\frac{L_e}{q}$

Il campo elettrico interno ad un conduttore è nullo.

Continuità della componente tangenziale del campo elettrico:
 Passando da un mezzo ad un altro la componente del campo elettrico tan-

gente alla superficie di separazione NON può subire discontinuità.

In vicinanza di un conduttore il campo elettrostatico è ORTOGONALE alla superficie del conduttore stesso.

La componente del campo elettrostatico normale alla superficie di un conduttore subisce una discontinuità.

Il volume interno ai conduttori e la superficie che delimita i conduttori sono EQUIPOTENZIALE.

In elettrostatica la carica posseduta da un conduttore si distribuisce in superficie.

Teorema di Coulomb:

In un punto vicino ad un conduttore, il campo elettrico ha modulo pari a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ed è diretto secondo la normale : uscente se $\sigma > 0$; entrante se $\sigma < 0$.

$$\vec{E}_e = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \vec{E}_i = 0$$

In prossimità della superficie il campo elettrico dipende SOLO dalla DENSITA'

$$\sigma \propto \frac{1}{R} \quad \vec{E} \propto \sigma$$

$$\sigma = \frac{q}{A} \epsilon_0 = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \sigma_2 = -\sigma_1 \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \sigma = \frac{Q}{S}$$

Induzione Completa:

la somma delle cariche indotte è nulla;

le cariche indotte si distribuiscono in modo da rendere equipotenziale il conduttore.

Energia di interazione:

$$U = \frac{1}{2} \sum q_i V_i \quad \text{discreto}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad \text{continuo}$$

1.8 Condensatori:

Energia:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q V$$

Densità di energia:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Forza:

$$f_x = \frac{\delta U}{\delta x}$$

Capacità:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Condensatori in parallelo:

stessa differenza di potenziale;

$$C = C_1 + C_2.$$

Condensatori in serie:

stessa carica;

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Capacità:

$$\text{Condensatore sferico: } C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\text{Condensatore cilindrico: } C = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{1}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

$$\text{Condensatore piano: } C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

1.9 Dielettrici:

$$\Delta V < \Delta V_0 \quad \frac{C}{C_0} = \varepsilon_r \quad C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

$\varepsilon_r = \text{costante dielettrica relativa} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \text{costante dielettrica assoluta}$

$$\text{All'interno dei dielettrici: } \vec{E} \neq 0 \quad \vec{E} < \vec{E}_0$$
$$V = \int_0^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_R^\infty E(r) dr$$

momento di dipolo: $\vec{p} = \alpha \vec{E}$

Polarizzabilità:

$$\text{per deformazione: } \alpha_d = 4\pi\varepsilon_0 R^3$$

$$\text{per orientazione: } \alpha_0 = \frac{p_0^2}{3KT}$$

Vettore Polarizzazione Elettrica (intensità di polarizzazione):

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{d\tau} = \varepsilon_0 \chi$$

Suscettività elettrica:

$$\chi = (\varepsilon_r - 1)$$

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_0 = \frac{3\varepsilon_0}{n} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

Spostamento elettrico:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$E_r = \frac{D(r)}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0}$$

$$D = D_0 \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \quad V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D}$$

Polarizzazione superficiale:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) \vec{D}$$

σ_p = densità di cariche polarizzate nella superficie del dielettrico.

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P}$$

ρ_p = densità di cariche polarizzate nel dielettrico; se P è uniforme $\rho_p = 0$

Teorema di Gauss:

$$\phi_s(\vec{D}) = \int_s \vec{D} d\vec{S} = Q_i$$

Teorema di Coulomb:

$$\vec{D} = \sigma n = \frac{Q}{S}$$

Considerando due mezzi:

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

$$E_{t1} = E_{t2}; \quad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$$

Legge di rifrazione delle linee di forza del campo elettrico:

$$\frac{E_{t1}}{\varepsilon_1 E_{n1}} = \frac{E_{t2}}{\varepsilon_2 E_{n2}}$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}; \tan \vartheta_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$$

1.10 Corrente elettrica:

Corrente elettrica: $I = \frac{dQ}{dt} = \vec{J} d\vec{S}$

Densità di corrente: $\vec{J} = nq\vec{v}_d$

$$\vec{v}_d = \vec{E} K$$

Principio di conservazione della carica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Resistività:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

Legge di Ohm:

$$\Delta V = RI$$

$\vec{E} = \rho \vec{J}$ è una relazione locale=legge di Ohm in forma microscopica.
 $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ρ =resistività; σ =conduttività.

$$L = QV$$

$$W = \frac{dL}{dt} = I\Delta V = \text{legge di Joule}$$

Densità di potenza dissipata:

$$w = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{dL}{d\tau dt}$$

Forza elettromotrice:

$$f = \oint \vec{E} d\vec{l} = \frac{dL}{dQ}$$

$w = fI = I(V_a - V_b + w^d)$ =potenza erogata dal generatore
 $w^d = \frac{dL}{dt} = I^2 r$; r =resistenza interna del generatore.

Resistenze:

in serie: $R = R_1 + R_2$; stessa I.

in parallelo: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; stessa d.d.p.

Se i conduttori si trovano in una configurazione di "induzione completa":

$$CR = \rho\epsilon$$

2 Magnetismo

2.1 Fenomeni magnetici stazionari nel vuoto:

Seconda legge di Laplace:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Se agisce anche un campo elettrico:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ se ruota: } I = \frac{dq}{T}; \quad T = \text{periodo} \quad I = \frac{\sigma dS\omega}{2\pi}$$

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{M} = I \oint (\vec{r} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})) = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$\vec{m} = ISn = \text{momento magnetico della spira.}$

Energia potenziale:

$$U = -I \vec{B} \cdot \vec{S} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \Delta \vec{r}}{(\Delta \vec{r})^3}$$

Per circuiti filiformi:

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{d\vec{l} \wedge \Delta \vec{r}}{(\Delta \vec{r})^3}$$

in generale per circuiti NON filiformi:

$$I = \int_S \vec{J}(\vec{r}) d\vec{S}$$

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_s (\vec{J}(\vec{r}) d\vec{S}) \frac{d\vec{l} \wedge \Delta \vec{r}}{(\Delta \vec{r})^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{J}(\vec{r}) \wedge \vec{r}}{(\Delta \vec{r})^3} d\tau$$

Teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum I^{\text{concatenate}}$$

$$dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = \text{corona circolare(?)} d\vartheta$$

2.1.1 Campi di induzione magnetica notevoli:

Filo rettilineo indefinito:

$$\vec{B}_0(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

Spira circolare:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} = \text{al centro della spira};$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \text{sull'asse di una spira circolare};$$

Nastro conduttore rettilineo:

$$dI = I \frac{dx}{b}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(\frac{l+b}{l}\right)$$

Solenoide:

$$d\vec{B}_0 = (nd\xi) \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + (x-\xi)^2)^{3/2}}$$

n=numero di spire; d\xi=spessore

$$\vec{B}_0 = n\mu_0 I$$

Campo generato a distanza r da una carica in moto con velocità v:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

(in genere si applica la legge di Felici)

Forze tra fili rettilinei percorsi da corrente stazionaria:

$$\frac{d\vec{F}_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} = -\frac{dF_{12}}{dl_1}$$

2.2 Magnetismo nella materia:

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \text{vettore campo magnetico.}$$

Teroema della circuitazione di Ampere relativo al campo magnetico:

$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i$ nei problemi dotati di particolare simmetria consente di calcolare il campo magnetico $\vec{H}$ generato dalle correnti sorgenti.

Condizioni di raccordo per $\vec{B}$ e $\vec{H}$ al passaggio da un materiale ad un altro:

$$B_{n1} = B_{n2}; \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2}; \quad H_{t1} = H_{t2}$$

$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\frac{H_{t1}}{H_{n1}}}{\frac{H_{t2}}{H_{n2}}} = \frac{\frac{B_{t1}}{B_{n1}}}{\frac{B_{t2}}{B_{n2}}} = \text{legge di rifrazione delle linee di forza da B ed H.}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

μ = permeabilità magnetica = $\mu_0 \mu_r$

μ_0 e μ_r sono indipendenti da B nei materiali paramagnetici e diamagnetici.

2.2.1 Sostanze Diamagnetiche:

suscettività magnetica: $\chi_m = \mu_r - 1$; χ_m è indipendente da T.
 χ_m rappresenta il fattore di proporzionalità tra H ed M.

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

2.2.2 Sostanze Paramagnetiche:

χ_m varia al variare di T secondo la legge di Curie: $\chi_m = \frac{C\rho}{T}$ C=costante.

2.2.3 Sostanze Ferromagnetiche:

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = \text{permeabilità differenziale assoluta.}$$

$$\mu_{dr} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} = \text{permeabilità differenziale relativa.}$$

Esiste una temperatura T_c (temperatura di Curie) al di sopra della quale il materiale si comporta come un materiale paramagnetico, con suscettività variabile secondo la legge di Curie- Wiess:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c}$$

2.2.4 Circuiti Magnetici:

Teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = NI$$

Flusso uscente da una qualunque Σ :
 $\oint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0$

$$\phi = BS = \text{cost.}; \quad B = \frac{\phi}{S} = \mu \vec{H}$$

$$NI = \oint \vec{H} d\vec{l} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu} d\vec{l} = \phi \int \frac{dl}{\mu S}$$

Legge di Hopkinson:
 $I = R\phi$

Forza magnetomotrice:
 $F = NI$

Riluttanza:
 $R = \oint \frac{dl}{\mu S} = \frac{l}{\mu S}$

Se in serie:

$$R_s = \sum R_i$$

Se in parallelo:

$$\frac{1}{R_p} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$\phi = \frac{F}{R}$$

Circuiti magnetici	Circuiti elettrici
$\text{div} \vec{B} = 0$	$\text{div} \vec{J} = 0$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
$F = \oint \vec{H} d\vec{l}$	$f = \oint \vec{E} d\vec{l}$

2.2.5 Elettromagneti:

è un circuito magnetico con ciclo di isteresi stretto.

Il vettore induzione magnetica ha nel traferro un valore B_0 pari al valore B che esso ha internamente al nucleo.

$$B_0 = \frac{\phi}{S_0} = \frac{\phi}{S} = B$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}; \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \quad \frac{H_0}{H} = \mu_r$$

Se il nucleo dell'elettromagnete ha sezione costante:

$$NI = Hl + H_0 d = Hl + \frac{B}{\mu_0} d; \quad l = \text{lunghezza}; \quad d = \text{sezione}.$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{d} - \frac{Hl \mu_0}{d}$$

2.2.6 Magneti permanenti:

$$0 = \oint \vec{H} d\vec{l} = Hl + H_0 d; \quad B = B_0 = \mu_0 H_0$$

$$H = -H_0 \frac{d}{l} = -\frac{B_0}{\mu_0} \frac{d}{l} = -\frac{B}{\mu_0} = \frac{d}{l}$$

2.3 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo:

Legge di Faraday-Neumann:

$$f_i = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

$$f_i = \oint \vec{E}_i d\vec{l}; \quad E_i = \text{campo elettromagnetico indotto}.$$

$$\phi(\vec{B}) = \int \vec{B} d\vec{S}$$

Legge di Lenz:

Il verso della forza elettromotrice indotta è tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera.

Fenomeno dell'autoinduzione:

Consideriamo un qualunque circuito elettrico in condizioni quasi stazionarie. La corrente I che circola nel circuito genera un campo d'induzione magnetica $\vec{B}(t)$ con flusso concatenato al circuito non nullo. Se I varia anche B e quindi anche $\phi(B)$, per Faraday-Neumann si genera una forza elettromotrice autoindotta.

$$\phi(\vec{B}) = LI$$

L = costante di autoinduzione = INDUTTANZA, il suo valore è determinato dalla geometria del circuito e dal materiale circostante.

Forza autoindotta:

$$f_a = -\frac{d\phi_a}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Legge di Felici:

$$Q = \frac{1}{R}[\phi_i - \phi_f] = \frac{NSB}{R}$$

2.3.1 Coefficienti di autoinduzione notevoli:

Solenoido nel vuoto:

$$L = \frac{\phi(\vec{B})}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$$

Solenoido nel dielettrico:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \pi R^2}{l}$$

Linea elettrica bifilare:

$$\phi_s(B) = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) h dx = \frac{\mu_0 I h}{\pi} \ln\left(\frac{D}{a}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 h}{\pi} \ln\left(\frac{D}{a}\right)$$

D=distanza tra i due fili; a=raggio dei fili; h=lunghezza fili;
x=distanza tra il filo conduttore ed il filo dove calcolo L.

Cavo coassiale:

$$\phi_s(B) = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

h=lunghezza del cavo; b=raggio del cavo; a=raggio del filo conduttore

Mutua induzione:

Consideriamo due circuiti affiancati C_1 e C_2 :

$$\phi_2(\vec{B}_1) = M_{21} I_1; \quad M_{21} = \frac{\phi_2(B_1)}{I_1}$$

M_{21} =coefficiente di mutua induzione.

Se $I_1(t)$ varia nel tempo, in C_2 si genera una forza elettromotrice indotta:

$$f_{2m} = -\frac{d\phi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

analogamente:

$$\phi_1(\vec{B}_2) = M_{12} I_2; \quad M_{12} = \frac{\phi_1(B_2)}{I_2}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

Spira circolare:

$$M = \frac{\mu \pi r^2}{2R}$$

Tubo cilindrico di cartone con due avvolgimenti di filo conduttore N_1 e N_2 :

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 S}{l}$$

2.3.2 Circuiti accoppiati:

Consideriamo due circuiti RL affiancati di cui uno solo ha il generatore:

$$R_1 I_1 = f(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

$$R_2 I_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

forza elettromotrice autoindotta: $-L_1 \frac{dI_1}{dt}$

forza elettromotrice di mutua induzione: $-M \frac{dI_2}{dt}$

analogamente per il secondo circuito.

2.3.3 Analisi energetica di un circuito RL:

$$f = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$dQ = I dt$$

$$f I dt = RI^2 dt + LI dI$$

$f I dt$ = energia erogata dal generatore; RI^2 = energia dissipata per effetto Joule.

La presenza dell'induttanza comporta l'erogazione, da parte del generatore, dell'energia aggiuntiva:

$$dU_L = LI dI$$

$U_L = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$ = energia posseduta da un'induttanza percorsa da corrente I .

Potenza: $W = fI$

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$L \frac{dI}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$

$$dU_L = NS \frac{dB}{dt}$$

Incremento della densità d'energiacorrispondente all'incremento dB:
 $\frac{dU_L}{dt} = du_L = HdB$

$$du_L = \frac{BdB}{\mu}; \quad u_M = u_L(B) = \int_0^B u_L = \frac{1}{2}\mu H^2$$

$$Q = fC$$

Se consideriamo due circuiti accoppiati RL(entrambi con qgeneratore):

$$f_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = R_1 I_1$$

$$f_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2$$

facendo i conti:

$$dU_M = d(\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2)$$

$$U_M = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Forza magnetica applicata ad una sbarretta(filo):
 $F_M = -\frac{B^2 l^2 v}{R} = iBl$

2.4 Corrente alternata:

Potenziale ai capi di R:

$$\Delta V = IR$$

Potenziale ai capi di L:

$$\Delta V = -L \frac{dI}{dt}$$

Potenziale ai capi di C:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt$$

$$f = F \sin \omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

Lavoro:

$$dL = Vdq = VIdt$$

Potenza:

$$W = \frac{dL}{dt} = VI$$

$$f = Fe^{\alpha t}; \quad \alpha = j\omega$$

$$I = I_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{dI}{dt} = j\omega I$$

$$\int I dt = -\frac{j}{\omega} I$$

$$V_L(t) = j\omega LI(t)$$

$$V_C(t) = -\frac{j}{\omega C} I(t)$$

$$V_R(t) = RI(t)$$

$$V = ZI; \quad Z = \text{impedenza.}$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Z_R = R$$

L'impedenza di più componenti in seire:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots$$

L'impedenza di più componenti in parallelo:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Fenomeno della risonanza(RLC in serie):

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \omega_0; \quad Z=R; \quad I_0 = \frac{F_0}{R}; \quad \varphi_1 = 0$$

fattore di merito:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Antirisonante(RLC in parallelo):

Potenza assorbita:

istantanea:

$$W(t) = V(t)I(t) = I_0^2 Z \cos \omega(t) \cos(\omega t + \varphi) = I_0^2 Z \cos \varphi \cos^2 \omega t - \frac{1}{2} I_0^2 Z \sin \varphi \sin(2\omega t)$$

totale:

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{I_0^2 Z}{2} \cos \varphi = \frac{I_0 V_0}{2} \cos \varphi = I_{eff} V_{eff} \cos \varphi$$

apparente:

$$P_a = I_{eff} V_{eff}$$

3 Ottica:

3.1 Interazione tra radiazione e materia:

Legge di riflessione:

$$\vartheta_i = \vartheta'_i$$

Legge di Snell:

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r$$

L'onda riflessa e quella rifratta devono avere la stessa frequenza di quella incidente.

Angolo limite (riflessione totale):

$$n_1 > n_2$$

$$\sin \vartheta_{iL} = \frac{n_2}{n_1}$$

Angolo di Brewster:

$$\vartheta_{iB} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Indice di rifrazione relativo:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_r}$$

3.1.1 Relazioni di Fresnel:

per polarizzazione normale al piano di incidenza:

$$\frac{E'_{0i}(\perp)}{E_{0i}(\perp)} = -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_r)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_r)}$$

$$\frac{E_{0r}(\perp)}{E_{0i}(\perp)} = \frac{2 \sin \vartheta_r \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_r)}$$

per polarizzazione parallela al piano di incidenza:

$$\frac{E'_{0i}(\parallel)}{E_{0i}(\parallel)} = \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \vartheta_i - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \vartheta_r}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \vartheta_i + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \vartheta_r}$$

$$\frac{E_{0r}(\parallel)}{E_{0i}(\parallel)} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \vartheta_i}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \vartheta_i + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \vartheta_r}$$

Se $\vartheta_i = 0$, $E_i \perp$ al piano,:

$$E'_{0i} = E_0 \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$E_{0r} = E_0 \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Intensità media di un'onda sinusoidale:

$$I = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \simeq \frac{E_0^2}{2Z}$$

Riflettanza:

$$\frac{I'_i}{I_i} = \left(\frac{E'_{0i}}{E_{0i}} \right)^2 = r(\vartheta_i, \frac{n_2}{n_1})$$

Trasmittanza:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{0r}^2 n_2}{E_{0i}^2 n_1} = t(\vartheta_i, \frac{n_2}{n_1})$$

Interferenza tra due onde coerenti:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta$$

Δ = sfasamento.

$$\Delta = k_2 r_2 - k_1 r_1 = 2\pi \left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) = \frac{2\pi \vartheta}{c} (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}$$

3.1.2 Diffrazione di Fraunhofer:

una fenditura rettilinea:

$$I \propto \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} k d \sin \vartheta$$

Se ci sono due sorgenti i cui raggi si intersecano durante il cammino prima dello schermo e formano un angolo $\Delta\vartheta$:

$$\Delta\vartheta = \frac{\lambda}{d} = \text{potere risolutivo angolare o potere separatorio} = \vartheta_{min}$$

una fenditura circolare:

$$2\Delta\vartheta = 1.22 \frac{2\lambda}{d}$$

doppia fenditura:

$$\Delta = \frac{2\pi D \sin \vartheta}{\lambda}$$

$$I = 2I_c (1 + \cos \Delta)$$

reticolo:

$$\text{Passo del reticolo: } D = \frac{b}{N}$$

b=larghezza complessiva del reticolo; N=numero delle fenditure.

Sfasamento rispetto alla prima onda:

$$\Delta = \frac{\pi \sin \vartheta}{\lambda} \frac{b}{N} = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$$

$$I = k \frac{\sin^2 N\Delta}{\sin^2 \Delta}$$

Massimi principali:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{D}$$

Minimi principali:

$$\sin \theta = \frac{(nN+1)\lambda}{ND}$$

Potere risolutivo:

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = Nn$$

Rapporto di intensità:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{1}{N^2}$$

I_s =max secondario; I_p =max principale.

Semilarghezza dei max principali:

$$d\theta = \frac{\lambda}{ND \cos \theta}$$

Dispersione angolare:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{D \cos \theta}$$

$$\phi = kl - k_0l; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

3.2 Ottica geometrica:

3.2.1 Riflessione:

Specchio sferico:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} = -\frac{1}{f}$$

$$I = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}$$

3.2.2 Rifrazione:

Diottro sferico:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{(n'-n)}{R}$$

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$$

$$f_1 = \frac{n}{(n'-n)}R$$

$$f_2 = \frac{n'}{(n'-n)}R$$

$$I = \frac{nq}{n'p}$$

Lente sottile:

$$\frac{n_s}{p} + \frac{n_d}{q} = \left(\frac{n-n_s}{R_1}\right) + \left(\frac{n_d-n}{R_2}\right)$$

Lente sottile in aria:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$I = \frac{q}{p}$$