



Appunti di
**“Fondamenti di Relatività
Ristretta”¹**

di V. Formato

A.A. 2006/2007

4 crediti

¹dalle lezioni di E. Pace

Ringraziamenti

Desidero ringraziare le seguenti persone che mi sono state di grande aiuto nella realizzazione di questo lavoro:

- Prof. Emanuele Pace per le lezioni e i chiarimenti.
- Claudia Antolini, Francesco Guescini e Daniele Belardinelli per le correzioni e l'aiuto in fase di revisione.

Indice

Introduzione	3
1 Trasformazioni di Lorentz	5
2 Relatività Ristretta	8
2.1 Trivettori e quadrivettori	8
2.2 Il quadrispazio, gli eventi	8
2.3 L'effetto Doppler relativistico	10
2.4 Cinematica Relativistica	11
2.4.1 Composizione delle velocità	11
2.4.2 Energia e impulso relativistici. Quadrivettore impulso.	13
3 Il gruppo di Lorentz	20
3.1 Analisi tensoriale	20
3.2 Forma matriciale delle trasformazioni di Lorentz	22
3.2.1 Generatori del gruppo di Lorentz	25
4 Elettromagnetismo Relativistico	29
4.1 Covarianza delle equazioni di Maxwell	31
4.2 Moti in campi elettromagnetici	32
5 Dinamica delle particelle relativistiche	36
5.1 Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana	36
5.2 Descrizione Lagrangiana dei campi	41
5.3 La Lagrangiana di Proca e il fotone massivo	44
5.4 Descrizione Hamiltoniana dei campi	45
5.4.1 Il teorema di Poynting	47
5.5 Campi in presenza di sorgenti	51

Introduzione

Le origini della relatività ristretta sono insite nelle Equazioni di Maxwell. Alla fine del 1800 Maxwell aveva unificato tramite le sue equazioni l'elettromagnetismo, le radiazioni e le onde elettromagnetiche in una scrittura sintetica e potente.

$$\text{Equazioni di Maxwell} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda le onde elettromagnetiche, si ipotizzava che esse si trasmettessero attraverso un mezzo particolare, chiamato *etere* e si cercava di ricavarne le proprietà supponendo che valessero le regole della relatività galileiana. consideriamo due sistemi di riferimento inerziali k e k' con coordinate rispettivamente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ la legge di trasformazione delle coordinate associata a tali sistemi è

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \end{array} \right.$$

Supponiamo in k' un sistema di n particelle. In tale sistema di riferimento la legge di Newton per l' i -esima particella si scrive:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt'} = -\nabla'_i \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|)$$

Vogliamo ora ricavare la stessa espressione, espressa nel sistema di riferimento k , ove $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$, $\nabla'_i = \nabla_i$, $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt'}$ e $\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. Ne consegue quindi che nel sistema k l'equazione si scrive:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla_i \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

ovvero con la stessa identica forma (in questo caso, quando un'equazione assume la stessa forma in sistemi di riferimento diversi diremo che tale equazione è *covariante*).

Molti fisici del tempo si chiesero allora se anche l'equazione delle onde, che riguarda molto da vicino le teorie di Maxwell, fosse covariante per trasformazioni di Galileo. Anche in questo caso andremo a calcolare come varia tale equazione nel passaggio dal sistema k' al sistema k . In k' l'equazione ha la seguente forma:

$$\left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \Psi'(\mathbf{x}', t') = 0$$

dove l'operatore tra parentesi è l'*operatore di D'Alembert*. Supponiamo per semplicità $\Psi'(\mathbf{x}', t') = \Psi(\mathbf{x}, t)$ e quindi $\nabla_i \Psi = \nabla'_i \Psi'$. Notiamo però la seguente differenza:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \Psi'(\mathbf{x}', t') = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{v}t, t) = \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \Psi'(\mathbf{x}', t') = (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \nabla) \Psi + 2\mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

per cui l'equazione in k diventa:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = 0$$

e dovremmo quindi supporre (correttamente) che l'equazione delle onde *non* è covariante per trasformazioni di Galileo. Potremmo aver commesso noi un errore nel considerare $\Psi' = \Psi$ (ad esempio l'equazione di Schrödinger risulta covariante operando la sostituzione $\Psi' = \Psi e^{i\alpha(\mathbf{x}, t)}$).

All'epoca furono vagliate diverse ipotesi:

1. Maxwell aveva sbagliato e le sue teorie erano errate.
2. La relatività Galileiana vale solo per sistemi meccanici. (quindi esiste un sistema di riferimento privilegiato)
3. Esiste un principio di relatività che vale sia per la meccanica che per l'elettromagnetismo, ma non è quello di Galileo.

La prima ipotesi è certamente errata, le equazioni di Maxwell erano corrette e lo sono tutt'ora, inoltre qualsiasi esperimento progettato per trovare errori in tali equazioni non mostrava nulla.

La seconda ipotesi era quella che in quel momento suscitava maggior interesse e anche in questo caso furono messi in atto esperimenti per trovare le leggi di trasformazione a cui erano soggetti i campi elettromagnetici in sistemi di riferimento inerziali diversi, e per cercare di capire le leggi che regolavano il moto dell'etere rispetto alla terra. Tra tutti gli esperimenti quello più noto è senz'altro l'*esperimento di Michaelson-Morley*, il quale non riuscì a mettere in evidenza alcun tipo di moto relativo tra etere e terra.

Nel frattempo **Hendrik Antoon Lorentz** e **Jules Henri Poincaré** ricavarono l'espressione della legge di trasformazione per cui le equazioni di Maxwell risultino covarianti, senza tuttavia riuscire a spiegare perchè le equazioni da loro trovate avessero quella forma. Bisognerà attendere le ricerche di Einstein per provare la validità di tali equazioni. La spiegazione che riuscirono a trovare per le trasformazioni di Lorentz-Poincaré fu quella di pensare che l'etere fosse parzialmente trascinato dagli oggetti che in esso si muovevano, e che tale trascinamento dipendesse in qualche modo dall'indice di rifrazione.

Senza il supporto di alcuna evidenza sperimentale Einstein formulò i seguenti postulati

Postulati della relatività speciale 1 (Principio di relatività) *Tutte le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Postulati della relatività speciale 2 (Invarianza della luce) *La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore o dalla velocità della sorgente di luce.*

Vari esperimenti² negli anni '60 tagliarono definitivamente la testa al toro, chiudendo tutte le discussioni allora in atto riguardo l'esistenza o meno dell'etere, e convalidando una volta per tutte la teoria della relatività.

²vedi CHAMPENEY PHYS. LETT. vol.7 (1963) pg. 241 e ALVAGER et al. PHYS. LETT. vol.12 (1964)

Capitolo 1

Trasformazioni di Lorentz

Assumiamo per veri i *Postulati della relatività speciale* e vediamo come da essi si possano dedurre le trasformazioni di Lorentz, a riprova della validità di tale teoria. Condiseriamo i due sistemi di riferimento k e k' come disegnati in Figura 2.1

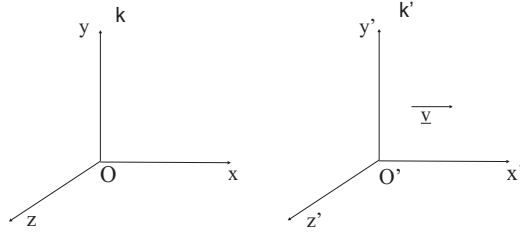


Figura 1.1: I sistemi di riferimento k e k'

Supponiamo per semplicità che $t' = t = 0$ quando $O' \equiv O$ e supponiamo inoltre che ci sia una sorgente luminosa in O che al tempo $t = 0$ emetta un impulso luminoso. Data la costanza della velocità della luce, avremo che nei due sistemi, al tempo t , l'equazione del fronte d'onda sarà:

$$\begin{aligned} c^2 t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 && \text{in } k \\ c'^2 t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 && \text{in } k' \end{aligned}$$

Cerchiamo ora il modo di avere una relazione lineare tra le coordinate dei due sistemi di riferimento.

$$\begin{cases} t' &= \alpha t + \beta x \\ x' &= \delta t + \gamma x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad (1.1)$$

Giustificiamo le ultime due equazioni del sistema. Prendiamo un piano in k' definito dall'equazione $y' = a'$, questo piano deve rimanere tale anche in k (per l'omogeneità dello spazio) e la sua equazione in k sarà $y = a$ con $\frac{a'}{a} = h(v)$ dove h è una funzione della sola velocità. Se invertiamo le coppie di assi x', z' e x, z è come se ora fosse k a muoversi rispetto a k' quindi avremmo $\frac{a}{a'} = h(v)$. Moltiplicando tra loro le due relazioni otteniamo $h^2(v) = 1$. Se, per ipotesi, $h = -1$ avremmo $y = -y'$, quindi per come abbiamo costruito i nostri due sistemi dobbiamo avere $h(v) = 1 \Rightarrow y = y'$.

Sostituiamo ora le relazioni che abbiamo ipotizzato in (1.1) nelle equazioni dei fronti d'onda:

$$c^2(\alpha^2 t^2 + \beta^2 x^2 + 2\alpha\beta xt) = \delta^2 t^2 + \gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta xt + y^2 + z^2 \quad (1.2)$$

Uguagliando i rispettivi coefficienti otteniamo

$$\begin{cases} c^2 \alpha^2 - \delta^2 = c^2 \\ \gamma^2 - c^2 \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta c^2 - 2\gamma\delta = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Il punto $x' = 0$ si muove con velocità tale che $x = vt$, quindi dalla (1.1) abbiamo

$$\delta t + \gamma vt = 0 \Rightarrow \delta = -\gamma v \quad (1.4)$$

quindi $x' = \gamma(x - vt)$ e

$$\begin{cases} c^2\alpha^2 - \gamma^2v^2 = c^2 \\ \gamma^2 - c^2\beta^2 = 1 \\ 2c^2\alpha\beta = -2\gamma^2v \end{cases} \quad (1.5)$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 + \frac{\gamma^2v^2}{c^2} \\ \beta^2 = \frac{1}{c^2}(\gamma^2 - 1) \\ c^4\alpha^2\beta^2 = \gamma^4v^2 \end{cases} \Rightarrow c^4 \left(1 + \frac{\gamma^2v^2}{c^2}\right) (\gamma^2 - 1) \frac{1}{c^2} = \gamma^4v^2$$

$$(c^2 + \gamma^2v^2)(\gamma^2 - 1) = \gamma^4v^2$$

$$c^2\gamma^2 - c^2 + \gamma^4v^2 - \gamma^2v^2 = \gamma^4v^2$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ma dato che vogliamo che per $t > 0$ x e x' siano equiversi, allora necessariamente:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.6)$$

Quindi da qui otteniamo il valore degli altri tre parametri (considerando che imponiamo la condizione che anche t e t' siano equiversi)

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\frac{\gamma v}{c} \\ \delta = -\gamma v \end{cases}$$

Scriviamo quindi la legge di trasformazione ottenuta, adottando la seguente notazione:

$$x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

e definendo un nuovo $\beta = \frac{v}{c}$ otteniamo:

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Notiamo che le trasformazioni inverse si ottengono sostituendo a v $v' = -v$.

Per una qualsiasi velocità $\mathbf{v}$ le trasformazioni sono:

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\beta \cdot \mathbf{x})\beta - \gamma\beta x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

con $\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}$. Dimostriamolo. Consideriamo una rotazione R e applichiamola ai sistemi k e k' ottenendo i due sistemi $\tilde{k}$ e $\tilde{k}'$ in cui ora la velocità non è più parallela all'asse x . Le relazioni tra le coordinate in k e $\tilde{k}$ sono: $\mathbf{x} = R\tilde{\mathbf{x}}$ che possiamo anche scrivere come $x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}\tilde{x}_j$.

Adotteremo però quella che viene chiamata la *convenzione di sommatoria* per la quale ometteremo il simbolo di sommatoria sottintendendo che la somma vada sempre effettuata sugli indici che in una formula compaiono più di una volta. Alla luce di ciò riscriviamo le relazioni tra i vari sistemi di riferimento:

$$x_i = R_{ij}\tilde{x}_j \quad \text{e} \quad x'_i = R_{ij}\tilde{x}'_j$$

R_{l1} rappresenta il vettore delle componenti nel sistema k del vettore $\tilde{e}_1 = (1, 0, 0)$ in $\tilde{k}$, e R come tutte le matrici di rotazione ha la seguente proprietà

$$R^T R = I \Rightarrow R_{lj}^T R_{ji} = \delta_{li} \Rightarrow R_{jl} R_{ji} = \delta_{li}$$

Poniamo $\beta_j = \beta R_{1j}$, il che porta a

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta R_{1j} \tilde{x}_j) = \gamma(x_0 - \beta_j \tilde{x}_j) = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{x}}) \quad (1.9)$$

La (1.9) è la prima delle equazioni nel sistema (1.8). Per le altre seguiamo il seguente ragionamento. Partiamo da ciò che sappiamo grazie a (1.7):

$$\begin{cases} R_{1j} \tilde{x}'_j = \gamma(R_{1j} \tilde{x}_j - \beta x_0) \\ R_{2j} \tilde{x}'_j = R_{2j} \tilde{x}_j \\ R_{3j} \tilde{x}'_j = R_{3j} \tilde{x}_j \end{cases}$$

Ora moltiplichiamo rispettivamente la prima equazione per R_{1l} , la seconda per R_{2l} e la terza per R_{3l} , dopodichè sommiamo membro a membro le tre equazioni, ottenendo per il primo membro:

$$R_{nl} R_{nj} \tilde{x}'_j = \delta_{lj} \tilde{x}'_j = \tilde{x}'_l$$

mentre per il secondo membro abbiamo:

$$R_{1l} \gamma R_{1j} \tilde{x}_j - \gamma \beta R_{1l} x_0 + [R_{1l} R_{1j} \tilde{x}_j - R_{1l} R_{1j} \tilde{x}_j] + R_{2l} R_{2j} \tilde{x}_j + R_{3l} R_{3j} \tilde{x}_j$$

dove abbiamo aggiunto i termini tra parentesi quadre, in quanto hanno somma nulla, facilitando la scrittura:

$$R_{nl} R_{nj} \tilde{x}_j - \gamma \beta R_{1l} x_0 + R_{1l} R_{1j} (\gamma - 1) \tilde{x}_j$$

moltiplichiamo e dividiamo l'ultimo addendo per β^2 e otteniamo

$$R_{nl} R_{nj} \tilde{x}_j - \gamma \beta R_{1l} x_0 + \beta R_{1l} \beta R_{1j} \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \tilde{x}_j = \tilde{x}_l - \gamma x_0 \beta_l + \beta_l (\boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{x}}) \frac{\gamma - 1}{\beta^2}$$

Sommando entrambe i membri sull'indice l otteniamo la seguente relazione, valida per sistemi di riferimento in moto relativo tra di loro con una velocità qualsiasi:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} x_0 \quad (1.10)$$

La (1.10) è proprio la seconda equazione del sistema (1.8).

Possiamo definire un nuovo parametro $\zeta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$ chiamato *rapidità* in modo che $\beta = \tanh \zeta$. La particolarità del parametro ζ è che mentre β è vincolato, perlopiù dall'evidenza sperimentale, a rimanere $0 \leq \beta \leq c$, $0 \leq \zeta \leq +\infty$. Inoltre

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{e^\zeta - e^{-\zeta}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{[e^{2\zeta} + e^{-2\zeta} + 2 - e^{2\zeta} - e^{-2\zeta} + 2]^{\frac{1}{2}}}$$

quindi

$$\gamma = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2} = \cosh \zeta \quad \text{e} \quad \gamma \beta = \sinh \zeta$$

e potremmo riscrivere le (1.7) nel seguente modo:

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \cosh \zeta - x_1 \sinh \zeta \\ x'_1 = -x_0 \sinh \zeta + x_1 \cosh \zeta \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad (1.11)$$

Capitolo 2

Relatività Ristretta

2.1 Trivettori e quadrivettori

Nello spazio euclideo a tre dimensioni definiamo *vettore* (o *trivettore*, per distinguere più avanti dal *quadrivettore*) un oggetto $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ le cui coordinate, sottoposte ad cambio di coordinate del sistema di riferimento, si trasformano come le coordinate del sistema di riferimento stesso.

Non è difficile estendere una simile definizione ad un oggetto $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ le cui coordinate, sottoposte ad una trasformazione di Lorentz, si trasformano come le quattro coordinate $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, e le cui coordinate A_1, A_2, A_3 si trasformano per rotazioni come le coordinate x_1, x_2, x_3 . Chiameremo tale oggetto *quadrivettore*. A livello di notazione useremo il simbolo di vettore $\mathbf{A}$ per i trivettori (A_1, A_2, A_3) , mentre verrà omesso per i quadrivettori (A) . Possiamo scrivere quindi come varia un quadrivettore sottoposto alle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) \\ A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) \\ A'_\perp = A_\perp \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $A_\parallel$ e $A_\perp$ sono le componenti del trivettore $\mathbf{A}$ rispettivamente parallela e perpendicolare al trivettore $\boldsymbol{\beta}$. Dal secondo postulato di Einstein discende direttamente che:

$$A_0'^2 - |\mathbf{A}'|^2 = A_0^2 - |\mathbf{A}|^2 \quad (2.2)$$

per verificare ciò basta notare che è la precisa riscrittura delle equazioni dei fronti d'onda che abbiamo utilizzato all'inizio del capitolo 2. Inoltre presi due quadrivettori A e B qualunque, è invariante il prodotto scalare così definito:

$$A'_0 B'_0 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (2.3)$$

Per dimostrare ciò definiamo il quadrivettore somma

$$A + B = (A_0 + B_0, A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

per cui $(A + B)^2 = (A + B)_0^2 - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$

$$(A + B)^2 = (A' + B')^2 \Rightarrow (A + B)_0^2 - (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (A' + B')_0^2 - (\mathbf{A}' + \mathbf{B}')^2$$

$$A_0^2 + B_0^2 + 2A_0 B_0 - \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_0'^2 + B_0'^2 + 2A_0' B_0' - \mathbf{A}'^2 - \mathbf{B}'^2 - 2\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$$

il che porta a

$$A'_0 B'_0 - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

che è la (2.3)

2.2 Il quadrispazio, gli eventi

Cerchiamo ora di analizzare lo spazio in cui stiamo lavorando, e di scoprirne le caratteristiche più peculiari. Lo spazio in questione è uno spazio vettoriale a 4 dimensioni, e ogni punto di questo spazio è detto *evento*. Possiamo pensare ad un cammino da un evento A ad un evento B e ci chiediamo quali siano le restrizioni su questo cammino.

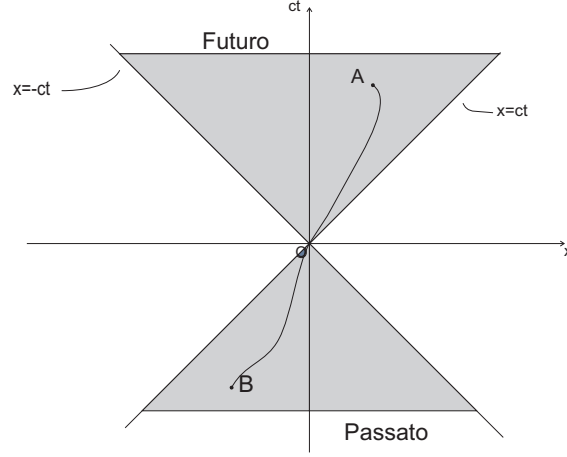


Figura 2.1: Lo spazio-tempo e il cono di luce

Per semplificare le idee consideriamo la rappresentazione seguente, in cui le tre dimensioni spaziali sono state contratte in un'unica dimensione.

Supponiamo all'istante $t = 0$ che ci sia una particella nell'origine degli assi. Se disegniamo le due rette di equazioni $x = ct$ e $x = -ct$ ci accorgiamo subito che dato che nessun corpo massivo può viaggiare a velocità superiore di c il cammino deve necessariamente giacere tutto all'interno di questo cono bidimensionale. La parte superiore del cono è detta *futuro* dell'evento e la parte in basso è detta *passato*, la traiettoria che unisce O ad un altro evento è la *linea di universo*, il cono descritto poc'anzi è il *cono-luce* ovvero il luogo dei punti che possono essere raggiunti se la particella viaggia a velocità c , che può essere generalizzato al luogo dei punti racchiuso dalla superficie $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ nell'ordinario quadrispazio.

Dati due eventi $P_1 = (ct_1, \mathbf{x}_1)$ e $P_2 = (ct_2, \mathbf{x}_2)$ definiamo il *Quadrato dell'intervallo tra due punti* nel seguente modo:

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 \quad (2.4)$$

e discutiamo i vari casi al variare del suo valore:

1. $S_{12}^2 > 0$ diremo allora che la separazione tra i due eventi è di tipo *TEMPO*
2. $S_{12}^2 < 0$ diremo allora che la separazione tra i due eventi è di tipo *SPAZIO*
3. $S_{12}^2 = 0$ diremo allora che la separazione tra i due eventi è di tipo *LUCE*

Consideriamo il primo caso. Per due eventi la cui separazione è di tipo TEMPO è sempre possibile trovare un sistema di riferimento k' in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo, ma in tempi diversi, ovvero: $\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_2'$ e

$S_{12}^2 = c^2(t_1' - t_2')^2$, inoltre S_{12}^2 è un invariante per Trasformazioni di Lorentz. Consideriamo infatti due particelle $P_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$. Scriveremo (utilizzando la (1.7)):

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ x_2' &= \gamma(x_2 - \beta ct_2) \end{aligned}$$

Affinchè i due eventi avvengano nello stesso punto occorre avere:

$$x_1' - x_2' = \gamma[x_1 - x_2 - \beta c(t_1 - t_2)] = 0$$

il che porta a:

$$|\beta| = \frac{|x_1 - x_2|}{c|t_1 - t_2|}$$

e dato che $S_{12}^2 > 0$ allora ne consegue che $|\beta| < 1$ il che è ragionevole, poichè significherebbe che il sistema k' viaggia a velocità minore di c rispetto a k . Seguendo un ragionamento analogo nel secondo caso è sempre possibile trovare un sistema di riferimento k'' in cui i due eventi avvengono nello stesso istante ma in luoghi diversi, mentre nel terzo caso abbiamo che gli eventi sono l'uno sul cono-luce dell'altro. Inoltre due eventi separati spazialmente non possono interagire l'uno con l'altro, dato che si trovano l'uno nell'altrove dell'altro, e che per collegarli occorrerebbe un mezzo più veloce della luce, possiamo quindi

concludere che una relazione di tipo *causale* tra due eventi si può avere solo se la loro separazione è di tipo TEMPO.

Consideriamo ora una particella che nel sistema di riferimento k si muove con velocità $\mathbf{u}$ e che in un tempo dt percorre un tratto $d\mathbf{x} = \mathbf{u}dt$. La separazione tra la posizione finale e quella iniziale è:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2$$

che in k possiamo riscrivere come $dS^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2)$. Consideriamo ora un sistema di riferimento k' in cui la particella ad ogni istante è vista ferma, per cui $d\mathbf{x}' = 0$ e $dt \equiv d\tau$. Ma il fatto che dS^2 è un invariante ci permette di scrivere

$$dS^2 = c^2 d\tau^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{c} dS$$

$d\tau$ è anche esso un invariante di Lorentz ed è chiamato *Intervallo di tempo proprio*. La relazione che intercorre tra due intervalli di tempo misurati nei due sistemi di riferimento è la seguente:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta(t)^2} = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad (2.5)$$

quindi un osservatore in k misura un intervallo di tempo

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}} \quad (2.6)$$

2.3 L'effetto Doppler relativistico

Consideriamo un fronte d'onda generato da una sorgente qualsiasi. Data la definizione di *fase* ϕ dell'onda come il numero di creste che attraversa un punto qualsiasi in un'unità di tempo ne consegue immediatamente che tale grandezza è un invariante, poichè qualsiasi osservatore, quale che sia il sistema di riferimento in cui si trova, deve misurare sempre lo stesso numero di creste in un'unità temporale, questo a causa del secondo postulato della relatività. Per una qualsiasi onda nello spazio ordinario la fase è

$$\phi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{x}'$$

notiamo quindi che, ad esempio, un'onda piana in K deve rimanere tale anche in K' . Dalla precedente uguaglianza ricaviamo, utilizzando la (1.7):

$$\omega \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) - k \gamma (x' + \beta c t') = \omega' t' - k' x'$$

e tale relazione deve valere $\forall x', t'$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega \gamma - k \gamma \beta c = \omega' \\ \omega \gamma \frac{\beta}{c} - k \gamma = -k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k \right) \\ k' = \gamma \left(k - \omega \frac{\beta}{c} \right) \end{cases}$$

Ora poniamo:

$$\frac{\omega}{c} = k_0 \quad \text{e} \quad \frac{\omega'}{c} = k'_0 \Rightarrow \begin{cases} k'_0 = \gamma (k_0 - \beta k) \\ k' = \gamma (k - \beta k_0) \end{cases}$$

Per un $\mathbf{k}$ qualsiasi avremmo ottenuto:

$$\begin{cases} k'_0 = \gamma (k_0 - \beta \cdot \mathbf{k}) \\ k'_\parallel = \gamma (k_\parallel - \beta k_0) \\ k'_\perp = k_\perp \end{cases} \quad (2.7)$$

Possiamo quindi concludere che $(k_0, \mathbf{k})$ è un quadrivettore, e interpretare l'invarianza di ϕ come l'invarianza del prodotto scalare tra due quadrivettori:

$$\phi = k \cdot x = \frac{\omega}{c} ct - \mathbf{k}\mathbf{x} = \frac{\omega'}{c} ct' - \mathbf{k}'\mathbf{x}' = k' \cdot x'$$

Abbiamo inoltre che per le onde luminose vale la seguente relazione:

$$k_0 = |\mathbf{k}| \Rightarrow \omega' = \omega(1 - \beta \hat{k}) = \omega(1 - \beta \cos \theta)$$

$$\frac{k'_\perp}{k'_\parallel} = \tan \theta' = \frac{k_\perp}{\gamma(k_\parallel - \beta k_0)} = \frac{k \sin \theta}{\gamma(k \cos \theta - \beta k_0)} \stackrel{k_0=k}{=} \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}$$

dove θ è l'angolo che il vettore $\mathbf{k}$ forma con β e in generale $\theta \neq \theta'$. La differenza con l'effetto Doppler galileiano è in un fattore γ che mette in evidenza quello che viene chiamato *l'effetto Doppler trasverso*, ovvero una modifica di frequenza anche quando $\theta = \frac{\pi}{2}$

2.4 Cinematica Relativistica

Vogliamo ora considerare particelle in moto rispetto a diversi sistemi di riferimento e vedere come variano le caratteristiche del moto da un sistema all'altro.

2.4.1 Composizione delle velocità

Consideriamo i due sistemi di riferimento k e k' come in figura

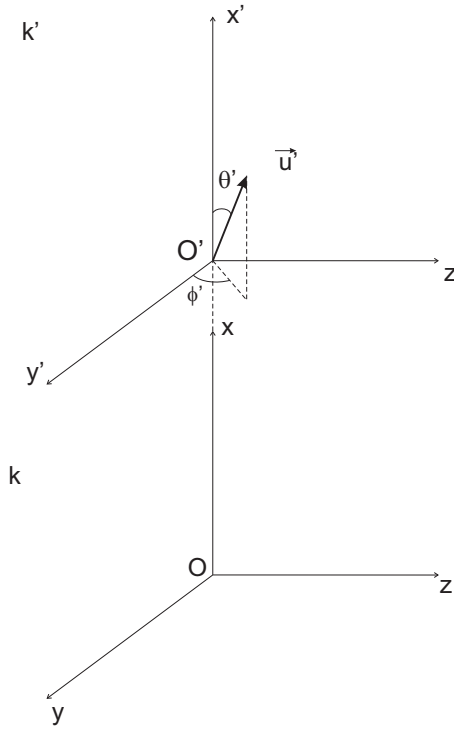


Figura 2.2:

dove $\mathbf{u}' = u'(u', \theta', \phi')$. Vogliamo trovare il modo di scrivere la velocità $\mathbf{u}$ della particella in k . Scriviamo la trasformazione di coordinate dal sistema k' al sistema k :

$$\begin{cases} dx_0 = \gamma_v (x'_0 + \beta x'_1) \\ dx_1 = \gamma_v (x'_1 + \beta x'_0) \\ dx_2 = dx'_2 \\ dx_3 = dx'_3 \end{cases} \quad \text{con } \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ e } \beta = \frac{v}{c}$$

e definiamo

$$\gamma_u = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \gamma_{u'} = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u'_i = c \frac{dx'_i}{dx'_0} \quad u_i = c \frac{dx_i}{dx_0}$$

da cui ricaviamo:

$$u_1 = c \frac{dx_1}{dx_0} = c \frac{\gamma_v (dx'_1 + \beta dx'_0)}{\gamma_v (dx'_0 + \beta dx'_1)} = c \frac{\frac{dx'_1}{dx'_0} + \beta}{1 + \beta \frac{dx'_1}{dx'_0}} = \frac{u'_1 + \beta c}{1 + \beta \frac{u'_1}{c}}$$

$$u_2 = \frac{u'_2}{\gamma_v \left(1 + \beta \frac{u'_2}{c}\right)} \quad u_3 = \frac{u'_3}{\gamma_v \left(1 + \beta \frac{u'_3}{c}\right)}$$

Questo utilizzando le (1.7), per un β qualsiasi avremmo trovato:

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \quad \text{con } u_{\parallel} = \mathbf{u} \cdot \hat{\beta} \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} \quad \text{con } \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - u_{\parallel} \hat{\beta} \quad (2.9)$$

Nel caso semplificato di prima avremmo trovato

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma_v} \quad \text{e} \quad \frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}} = \tan \theta = \frac{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}{u'_{\parallel} + v} \cdot \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}$$

$$\tan \theta = \frac{u' \sin \theta'}{\gamma_v (u' \cos \theta' + v)}$$

Inoltre:

$$|\mathbf{u}| = u = \frac{\left[u'^2_{\perp} (1 - \beta^2) + u'^2 \cos^2 \theta' + v^2 + 2u'v \cos \theta' \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{u'v \cos \theta'}{c^2}} =$$

$$= \frac{\left[u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - \left(\frac{u'v}{c} \sin \theta' \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{u'v \cos \theta'}{c^2}} \quad (2.10)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata l'identità $u'_{\perp} = u' \sin \theta'$. Supponiamo $v \ll c$ e ritroviamo la composizione galileiana delle velocità. La composizione relativistica delle velocità, per velocità parallele può essere sintetizzata in:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (2.11)$$

Notiamo che la velocità massima raggiungibile è c difatti se poniamo $u' = c$ troviamo $u = c$.

Queste leggi di somma però valgono per dei trivettori, per i quali la legge di trasformazione non è detto che sia della forma (1.8). Cercheremo quindi di costruire un *quadrivettore velocità* che quindi abbia già insita in sé la legge di trasformazione che ci permette di calcolarne il valore a seconda del sistema di riferimento che prendiamo in considerazione. Per far questo ci risulterà utile dimostrare la seguente identità:

$$\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right) \quad (2.12)$$

ma anche questo può portare una mole di lavoro molto consistente. La via più breve di giungere al nostro obiettivo (non senza una certa quantità di calcoli) è di dimostrare l'identità per l'inverso dei quadrati dei vari γ :

$$\gamma_u^{-2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2 - u^2}{c^2} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{c^2} \left\{ c^2 - \frac{\left[u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta' - \left(\frac{u'v}{c} \sin \theta' \right)^2 \right]}{\left(1 + \frac{u'v \cos \theta'}{c^2} \right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[\frac{c^2 + \frac{u'^2 v^2 \cos^2 \theta'}{c^2} + c^2 \frac{2u'v \cos \theta'}{c^2} - u'^2 - v^2 - 2u'v \cos \theta' + \left(\frac{u'v}{c} \sin \theta' \right)^2}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\beta}}{c} \right)^2} \right] =$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\frac{c^2 + \frac{u'^2 v^2}{c^2} - u'^2 - v^2}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\beta}}{c} \right)^2} \right] = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right)}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\beta}}{c} \right)^2} = \frac{\gamma_v^{-2} \gamma_{u'}^{-2}}{\left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\beta}}{c} \right)^2} \quad \text{c.v.d.}$$

Ora moltiplichiamo la (2.12) prima per l'espressione di $u_{\parallel}$ trovata sopra:

$$\gamma_u u_{\parallel} = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right) \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \gamma_v (\gamma_{u'} u'_{\parallel} + \gamma_{u'} v) \quad (2.13)$$

e poi per $\mathbf{u}_{\perp}$:

$$\gamma_u \mathbf{u}_{\perp} = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \right) \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} = \gamma_{u'} \mathbf{u}_{\perp} \quad (2.14)$$

Per concludere notiamo che la quadrirelatività da noi cercata non è altri che il quadri-vettore $U = (c\gamma_u, \gamma_u \mathbf{u})$, difatti:

$$c\gamma_u = c\gamma_v \left(\frac{c\gamma_{u'} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}' \gamma_{u'}}{c} \right) = \gamma_v (c\gamma_{u'} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}' \gamma_{u'})$$

Possiamo quindi finalmente identificare le seguenti quantità:

$$\begin{cases} U_0 = c\gamma_u \\ \mathbf{U} = \gamma_u \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.15)$$

Potevamo anche definire

$$U = \frac{dx}{d\tau} \quad (2.16)$$

infatti:

$$U_0 = \frac{dx_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c\gamma_u$$

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \mathbf{u} \gamma_u$$

(abbiamo utilizzato le (1.7) e la (2.5))

2.4.2 Energia e impulso relativistici. Quadri-vettore impulso.

In questa sezione ci occuperemo di ricavare l'espressione dell'energia E di una particella e del suo impulso $\mathbf{p}$ in termini relativistici, e di vedere come variano al variare del sistema di riferimento in considerazione.

Iniziamo col considerare la forma delle espressioni classiche delle due quantità:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad E = E_0 + \frac{1}{2}mu^2 \quad (2.17)$$

La loro forma ci suggerisce di cercare due quantità che abbiano la seguente forma:

$$\mathbf{p} = M(u)\mathbf{u} \quad E = \mathcal{E}(u)$$

Con M e $\mathcal{E}$ funzioni continue e derivabili in u . Dato che per velocità piccole rispetto a c devono valere le relazioni galileiane occorre che:

$$\lim_{u \rightarrow 0} M(u) = m \quad \left. \frac{d\mathcal{E}}{du^2} \right|_{u^2=0} = \frac{m}{2} \quad (2.18)$$

Supponiamo ora di avere due particelle in moto e definiamo k' il sistema di riferimento solidale al centro di massa delle due particelle. Supponiamo inoltre che le velocità delle due particelle siano dirette come in figura, che abbiano modulo v , e che l'urto sia elastico. Per ora fingiamo che in figura non vi siano

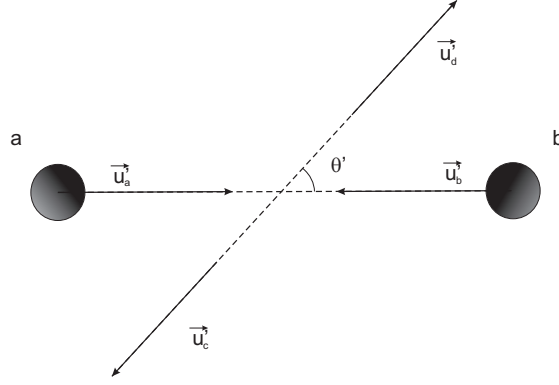


Figura 2.3:

disegnate le velocità finali delle particelle u'_c e u'_d delle quali ignoriamo direzione verso e intensità, dato che a priori non sono conosciute. Cerchiamo quindi di ricavare queste velocità incognite imponendo che in k' l'impulso totale e l'energia totale vengano conservati durante un urto elastico.

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_a + \mathbf{p}'_b = \mathbf{p}'_c + \mathbf{p}'_d \\ E'_a + E'_b = E'_c + E'_d \end{cases}$$

ovvero:

$$0 = M(v)\mathbf{v} - M(v)\mathbf{v} = M(v')\mathbf{v}' + M(v'')\mathbf{v}''$$

$$\mathcal{E}(v) + \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(v') + \mathcal{E}(v'')$$

Dato che le due particelle sono identiche, non c'è motivo per cui non abbiano la stessa energia, sia prima che dopo l'urto, quindi ciò implica necessariamente che $\mathcal{E}(v') = \mathcal{E}(v'')$ e, dato che $\mathcal{E}(u)$ è monotona allora $\Rightarrow v' = v'' = v$. Dalla prima equazione ricaviamo invece:

$$M(v')\mathbf{v}' + M(v'')\mathbf{v}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}' = -\mathbf{v}''$$

Ma allora combinando quello che sappiamo dalla prima e dalla seconda equazione abbiamo determinato:

$$|\mathbf{u}'_c| = |\mathbf{u}'_d| = v \quad \mathbf{u}'_c = -\mathbf{u}'_d \quad (2.19)$$

Ciò giustifica il disegno in figura 3.3, poichè sebbene conosciamo il modulo delle velocità finali e sappiamo che sono tra loro opposte, a priori non saranno parallele alle velocità iniziali, piuttosto formeranno con esse un angolo $\theta' \neq 0$.

Per semplicità supporremo che in k' il moto si svolge sul piano $x'z'$. Dopodiché definiamo k come il sistema di riferimento in cui la particella b è in quiete. E' facile convincersi che allora la velocità relativa con cui k' si muove rispetto a k è v (v. Figura 3.4) Possiamo utilizzare la (2.8) e la (2.9) per convincercene.

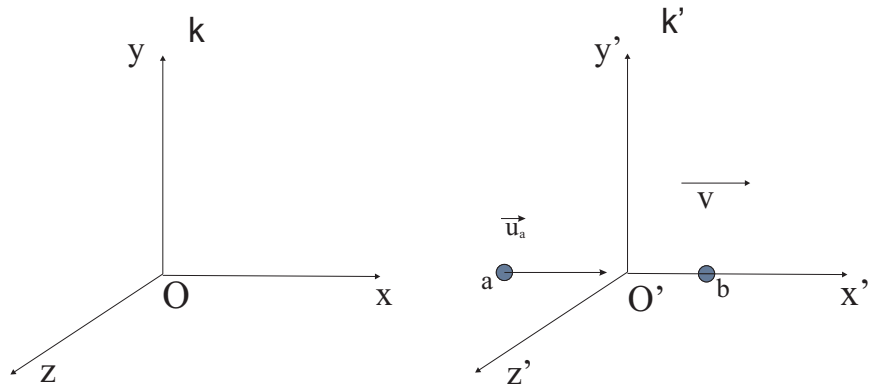


Figura 2.4:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_{b\parallel} = -v \\ \mathbf{u}'_{b\perp} = 0 \end{array} \right. \xRightarrow{(3.8)-(3.9)} \left\{ \begin{array}{l} u_{b\parallel} = \frac{u'_{b\parallel} + v}{1 + \frac{\mathbf{u}'_b \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = 0 \\ \mathbf{u}_{b\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{b\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{u}'_b \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{u}_b = 0$$

Mentre per la particella a:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_{a\parallel} = v \\ \mathbf{u}'_{a\perp} = 0 \end{array} \right. \xRightarrow{(3.8)-(3.9)} \left\{ \begin{array}{l} u_{a\parallel} = \frac{u'_{a\parallel} + v}{1 + \frac{\mathbf{u}'_a \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \mathbf{u}_{a\perp} = \frac{\mathbf{u}'_{a\perp}}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{u}'_a \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{u}_a = \frac{2\mathbf{v}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

In k il moto si svolge sul piano xz sia prima che dopo l'urto, e le velocità delle due particelle dopo l'urto saranno:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_c)_x &= \frac{(\mathbf{u}'_c)_x + v}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_c}{c^2}} = \frac{c\beta(1 + \cos \theta')}{1 + \beta^2 \cos \theta'} \\ (\mathbf{u}_c)_z &= \frac{(\mathbf{u}'_c)_z}{\gamma_v \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_c}{c^2}\right)} = \frac{v \sin \theta'}{\gamma_v(1 + \beta^2 \cos \theta')} \end{aligned}$$

e ricordando che $\mathbf{u}'_d = -\mathbf{u}'_c$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_d)_x &= \frac{c\beta(1 - \cos \theta')}{1 - \beta^2 \cos \theta'} \\ (\mathbf{u}_d)_z &= -\frac{v \sin \theta'}{\gamma_v(1 - \beta^2 \cos \theta')} \end{aligned}$$

La legge di conservazione in k impone che:

$$M(u_a)\mathbf{u}_a + M(u_b)\mathbf{u}_b = M(u_c)\mathbf{u}_c + M(u_d)\mathbf{u}_d \quad (2.20)$$

$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(u_b) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d) \quad (2.21)$$

Prendiamo in esame la componente z dell'equazione (2.20) e supponiamo $\theta' \ll 1$ in modo da poter sviluppare in serie di Taylor le velocità attorno al valore $\theta' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= M(u_c) \frac{v \sin \theta'}{\gamma_v(1 + \beta^2 \cos \theta')} - M(u_d) \frac{v \sin \theta'}{\gamma_v(1 - \beta^2 \cos \theta')} \Rightarrow \\ \Rightarrow M(u_c) &= \frac{1 + \beta^2 \cos \theta'}{1 - \beta^2 \cos \theta'} M(u_d) \xrightarrow{\theta' \rightarrow 0} M(u_c) = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} M(u_d) \end{aligned}$$

Notiamo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_a^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{4v^2}{c^2(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1 + \beta^2}{\left[1 + \frac{v^4}{c^4} + \frac{2v^2}{c^2} - \frac{4v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Quindi:

$$M(u_c) = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} M(u_d) \Rightarrow M(u_c) = \gamma_a M(0) = \gamma_a m \Rightarrow \mathbf{p} = M(u)\mathbf{u} = \gamma_u m \mathbf{u}$$

tenendo conto del fatto che per $\theta' \approx 0 \Rightarrow \mathbf{u}_d \approx 0$ Dopo aver ora trovato l'espressione relativistica per l'impulso, passiamo a ricavare quella per l'energia di una particella, iniziando scrivendo la conservazione nel sistema k .

$$\mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(u_c) + \mathcal{E}(u_d)$$

Ricaviamo ora il modulo quadro della velocità $\mathbf{u}_c$:

$$u_c^2 = \frac{v^2(1 + \cos^2 \theta' + 2 \cos \theta') + v^2 \sin^2 \theta' (1 - \beta^2)}{(1 + \beta^2 \cos \theta')^2}$$

dove nell'espressione di $(u_c)_z$ abbiamo operato la seguente sostituzione: $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}$. Procedendo:

$$u_c^2 = \frac{2v^2(1 + \cos \theta') - v^2 \beta^2 \sin^2 \theta'}{(1 + \beta^2 \cos \theta')^2}$$

Operiamo ora uno sviluppo di Taylor fino al secondo ordine in θ' per $\theta' \ll 1$

$$u_c^2 \approx \frac{2v^2 \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\theta'^2\right) - v^2 \beta^2 \theta'^2}{(1 + \beta^2 (1 - \frac{1}{2}\theta'^2))^2}$$

Trascuriamo i termini che darebbero un contributo di ordine superiore al 2°:

$$u_c^2 = \frac{-v^2 \theta'^2 (1 + \beta^2)}{(1 + \beta^2)^2} + \frac{4v^2}{\left[1 + \beta^2 \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right)\right]^2} = \frac{-v^2 \theta'^2 (1 + \beta^2)}{(1 + \beta^2)^2} + \frac{4v^2}{(1 + \beta^2)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \theta'^2}{1 + \beta^2}\right)^2}$$

Ricordando lo sviluppo notevole $\frac{1}{(1 - \frac{1}{2}x)^2} \approx 1 + x$

$$\begin{aligned} u_c^2 &= \frac{-v^2 \theta'^2 (1 + \beta^2)}{(1 + \beta^2)^2} + \frac{4v^2 \left(1 + \frac{\beta^2 \theta'^2}{1 + \beta^2}\right)}{(1 + \beta^2)^2} = \frac{4v^2}{(1 + \beta^2)^2} + \frac{v^2 \theta'^2}{(1 + \beta^2)^3} [4\beta^2 - (1 + \beta^2)^2] \\ &= u_a^2 + \frac{v^2 \theta'^2}{(1 + \beta^2)^3} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} [-1 + 2\beta^2 - \beta^4] = u_a^2 - \frac{v^2 \theta'^2}{(1 + \beta^2)^3} \frac{(1 - \beta^2)^3}{(1 - \beta^2)} \end{aligned}$$

Definiamo ora $\eta = \frac{v^2 \theta'^2}{(1 - \beta^2)}$ e ricorriamo alla (2.22):

$$u_c^2 = u_a^2 - \eta \frac{(1 - \beta^2)^3}{(1 + \beta^2)^3} \stackrel{(2.22)}{=} u_a^2 - \frac{\eta}{\gamma_a^3} + o(\theta'^2) \quad (2.23)$$

Allo stesso modo procediamo per u_d^2

$$u_d^2 = \frac{c^2 \beta^2 (1 - \cos \theta')^2 + v^2 \sin^2 \theta' (1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \cos \theta')^2} \approx \frac{c^2 \beta^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right)\right]^2 + v^2 \theta'^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2}$$

trascurando i termini di ordine superiore al 2°:

$$u_d^2 \approx \frac{v^2 \theta'^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^2} = \eta + o(\theta'^2) \quad (2.24)$$

Utilizziamo ora la (2.23) e la (2.24) nell'espressione della conservazione dell'energia per effettuare uno sviluppo in serie di $\mathcal{E}(u)$ attorno ai valori u_a e 0:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_a) + \mathcal{E}(0) &= \mathcal{E}(u_a) + \left[\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{d(u_c^2)} \frac{d(u_c^2)}{d\eta} \right]_{\eta=0} \eta + \mathcal{E}(0) + \left[\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{d(u_d^2)} \frac{d(u_d^2)}{d\eta} \right]_{\eta=0} \eta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\eta}{\gamma_a^3} \left[\frac{d\mathcal{E}(u_c)}{d(u_c^2)} \right]_{\eta=0} = \eta \left[\frac{d\mathcal{E}(u_d)}{d(u_d^2)} \right]_{\eta=0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

dalla (2.23):

$$\left. \frac{d\mathcal{E}(u_c)}{d(u_c^2)} \right|_{\eta=0} = \frac{d\mathcal{E}(u_a)}{d(u_a^2)}$$

mentre dalla (2.24) e dalle condizioni che abbiamo imposto in (2.18):

$$\left. \frac{d\mathcal{E}(u_d)}{d(u_d^2)} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{d\mathcal{E}}{d(u^2)} \right|_{u^2=0} = \frac{m}{2}$$

Combinando queste espressioni nella (2.25) otteniamo:

$$\frac{d\mathcal{E}(u_a)}{d(u_a^2)} = \frac{m}{2} \gamma_a^3 = \frac{m}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{u_a^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.26)$$

Integrando la (2.26) otteniamo:

$$\mathcal{E}(u_a) - \mathcal{E}(0) = \int_0^{u_a^2} \frac{d\mathcal{E}(u_a)}{d(u_a^2)} d(u_a^2) = mc^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_a^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] = T(u_a) \quad (2.27)$$

dove con $T(u_a)$ indichiamo l'energia cinetica della particella a.

Arrivati a questo punto rimane solo da determinare $\mathcal{E}(0)$, e per fare ciò possiamo seguire due vie:

1. Misurare $\mathcal{E}(0)$ per via sperimentale, attraverso esperimenti con urti completamente anelastici tra particelle.
2. Ricavare il valore di $\mathcal{E}(0)$ per via teorica.

Noi procederemo in entrambe i modi. Nei processi anelastici le particelle incidenti vengono trasformate in particelle di uno o più tipi diversi, con masse diverse. Consideriamo per esempio il decadimento di un mesone neutro K in due fotoni, $K^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Nel riferimento di quiete del mesone K la conservazione dell'energia impone che la somma delle energie dei due fotoni sia uguale a $\mathcal{E}_K(0)$. Per il decadimento di un mesone K^0 in due pioni, l'energia cinetica di ciascun pione nel riferimento di quiete del mesone K deve essere:

$$T_\pi = \frac{1}{2} \mathcal{E}_K - \mathcal{E}_\pi(0)$$

La misura dell'energia cinetica (3.26) dei due pioni e la conoscenza di $\mathcal{E}_K$ dalla prima parte dell'esperimento permette di ricavare $\mathcal{E}_\pi(0)$. In numerosi esperimenti come questo si è sempre trovato che l'energia in quiete di una particella è data dalla famosa formula di Einstein:

$$\mathcal{E}(0) = mc^2 \quad (2.28)$$

Seguiamo ora il secondo procedimento. Il secondo postulato impone che la legge di conservazione si scriva allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento, e cercheremo di sfruttare questo fatto per ricavare l'energia a riposo di una particella. Iniziamo col notare che le componenti di $\mathbf{p}$ sono proporzionali alle componenti spaziali della quadrivelocità U , sembrerebbe quindi spontaneo costruire un *quadrivettore impulso* così definito: $p = mU$, dove la componente temporale di questo quadrivettore è $p_0 = mU_0 = cm\gamma_u$. Confrontiamo l'espressione di p_0 con l'equazione (3.26) per notare che $\mathcal{E}(u) = cp_0 + [\mathcal{E}(0) - mc^2]$. Scriviamo ora la legge di conservazione riferita al quadrivettore p :

$$\sum_{a(\text{iniziali})} (p_0)_a - \sum_{b(\text{finali})} (p_0)_b = \Delta_0$$

$$\sum_{a(\text{iniziali})} \mathbf{p}_a - \sum_{b(\text{finali})} \mathbf{p}_b = \mathbf{\Delta} = 0$$

$(\Delta_0, \mathbf{\Delta})$ è un quadrivettore, dal momento che è somma di quadrivettori, e dalla costruzione di $\mathbf{p}$ segue che $\mathbf{\Delta} = 0$ in ogni sistema di riferimento. Ma dato che $(\Delta_0, \mathbf{\Delta})$ è un quadrivettore, nel passare da un sistema di riferimento ad un altro deve seguire le (2.8) quindi:

$$\begin{cases} \Delta'_0 = \gamma(\Delta_0 - \beta \mathbf{\Delta} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{\Delta}' = \mathbf{\Delta} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{\Delta}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \beta \Delta_0 \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$

Ma $\Delta = \Delta' = 0$ quindi:

$$\begin{cases} 0 = -\gamma\beta\Delta_0 \\ \Delta'_0 = \gamma(\Delta_0) \end{cases}$$

e quindi $\Delta_0 = 0$ in ogni sistema di riferimento. Ma

$$\Delta_0 = \sum_{b(\text{finali})} [\mathcal{E}_b(0) - m_b c^2] - \sum_{a(\text{iniziali})} [\mathcal{E}_a(0) - m_a c^2] = 0$$

e dato che in genere il numero totale di particelle all'inizio e alla fine dell'urto non si conserva occorre necessariamente che per ogni particella i

$$\mathcal{E}_i(0) = m_i c^2$$

(altrimenti si cancellerebbero solo i contributi dovuti alle particelle che sono rimaste dall'inizio alla fine del processo, e quelli delle particelle create negli urti darebbero somma diversa da 0).

Passiamo ad alcune considerazioni utili sul quadrivettore impulso, la prima è che possiamo scrivere la velocità di una particella in funzione del suo impulso e della sua energia E :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \frac{c^2}{c^2} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} \quad (2.29)$$

L'altra considerazione utile riguarda il modulo quadro del quadrivettore p :

$$|p|^2 = p_0^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{m^2 c^2}{1 - \beta^2} - \frac{m^2 u^2}{1 - \beta^2} = \frac{m^2 c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{1 - \beta^2} = m^2 c^2 \quad (2.30)$$

e inoltre

$$p_0^2 = m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2 \Rightarrow c^2 p_0^2 = m^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}|^2 \Rightarrow E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}|^2} \quad (2.31)$$

Assegniamo ora $\mathbf{p}_\perp$ e ζ in k e consideriamo la trasformazione in k' in cui poniamo $p'_z = 0$ e $\mathbf{p}'_\perp = \mathbf{p}_\perp$.

$$\beta = \tanh \zeta = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = x'_0 \cosh \zeta + x'_3 \sinh \zeta \\ x_3 = x'_3 \cosh \zeta + x'_0 \sinh \zeta \end{cases}$$

ricaviamo ζ imponendo

$$\begin{aligned} 0 &= -p_0 \sinh \zeta + p_z \cosh \zeta = p'_z \\ p_0 (e^\zeta - e^{-\zeta}) - p_z (e^\zeta + e^{-\zeta}) &= 0 \Rightarrow e^\zeta (p_0 - p_z) = e^{-\zeta} (p_0 + p_z) \\ e^{2\zeta} &= \frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \Rightarrow 2\zeta = \ln \left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right) \\ p'_0 &= \frac{E'}{c} = \Omega = \sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{p}_\perp|^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} p_z &= \Omega \sinh \zeta \\ p_0 &= \Omega \cosh \zeta \end{aligned}$$

In generale utilizzando questi parametri si ottiene:

$$\tilde{\zeta}_i = \zeta_i - Z$$

dove se indichiamo con $\tilde{k}$ un altro sistema di riferimento, con k_i il sistema di riferimento solidale alla i -esima particella, e se indichiamo con una freccia una particolare trasformazione di Lorentz abbiamo:

$$k \xrightarrow{\zeta_i} k_i \xleftarrow{\tilde{\zeta}_i} \tilde{k}$$

e la Z è la rapidità della trasformazione da k a $\tilde{k}$. Dimostriamolo. Intanto assegniamo al sistema $\tilde{k}$ i parametri $\mathbf{B}$ e Γ che ne definiscono il moto rispetto a k .

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right) &= 2\zeta & \ln \left(\frac{\tilde{p}_0 + \tilde{p}_z}{\tilde{p}_0 - \tilde{p}_z} \right) &= 2\tilde{\zeta} \\ 2(\tilde{\zeta} - \zeta) &= \ln \left[\frac{(\tilde{p}_0 + \tilde{p}_z)(p_0 - p_z)}{(\tilde{p}_0 - \tilde{p}_z)(p_0 + p_z)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_0 &= \Gamma(p_0 - Bp_z) \\ \tilde{p}_z &= \Gamma(p_z - Bp_0) \quad \text{con } \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}\end{aligned}$$

$$\tilde{p}_0 + \tilde{p}_z = \Gamma(p_0 + p_z)(1 - B) \quad \text{e} \quad \tilde{p}_0 - \tilde{p}_z = \Gamma(p_0 - p_z)(1 + B)$$

quindi

$$\begin{aligned}2(\tilde{\zeta} - \zeta) &= \ln \left(\frac{1 - B}{1 + B} \right) = \ln \left(\frac{\cosh Z - \sinh Z}{\sinh Z + \cosh Z} \right) = \ln \left(\frac{e^{-Z} + e^{-Z}}{e^Z + e^Z} \right) = \\ &= \ln e^{-2Z} = -2Z \quad \text{c.v.d.}\end{aligned}$$

La comodità di utilizzare come parametri $\mathbf{p}$ e ζ è quella per cui in due diversi sistemi di riferimento le rapidità delle particelle risultano traslate di un valore fisso Z che rappresenta la rapidità della trasformazione di Lorentz che collega i due sistemi di riferimento.

Capitolo 3

Il gruppo di Lorentz

Abbiamo già definito la distanza nel quadrispazio della relatività ristretta attraverso la (3.4). Possiamo ora interrogarci su quali siano quelle trasformazioni che lascino invariata la distanza così definita. Chiameremo il gruppo di queste trasformazioni *Gruppo di Lorentz* (o più brevemente $O(1, 3)$). Per ricavare l'espressione generale di tali trasformazioni abbiamo prima bisogno di alcune nozioni di analisi tensoriale.

3.1 Analisi tensoriale

Finora abbiamo utilizzato la notazione con indici per denotare le coordinate di un quadrivettore, e abbiamo posto questi indici sempre in basso. Ora, per motivi che spiegheremo poco più avanti adotteremo la seguente notazione:

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad (3.1)$$

e supponiamo di avere una legge di trasformazione da un sistema di coordinate ad un altro che sia della forma:

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Possiamo ora definire un *TENSORE di rango 0* (o scalare di Lorentz) una quantità scalare che non varia per trasformazioni di Lorentz. Definiamo inoltre un *TENSORE di rango 1 CONTROVARIANTE* A^α (o vettore) una quantità le cui coordinate variano, al variare del sistema di riferimento, secondo la regola:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \quad (3.3)$$

allo stesso modo definiamo un *TENSORE di rango 1 COVARIANTE* B_α una quantità le cui coordinate variano, al variare del sistema di riferimento, secondo la regola:

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \quad (3.4)$$

in particolare se le trasformazioni sono lineari

$$x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta$$

con a^α_β opportuna matrice. Infine definiamo i *TENSORI di rango 2* distinguendone tre tipi: *CONTROVARIANTE*:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}$$

COVARIANTE:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta}$$

MISTO:

$$H'^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H^\gamma_\delta$$

Il prodotto interno tra un vettore covariante e un vettore controvariante è:

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha \quad (3.5)$$

ed è uno scalare di Lorentz. Dimostriamolo:

$$B' \cdot A' = B'_\alpha A'^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma$$

notiamo la seguente identità:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

Utilizzando questa identità nella relazione di prima abbiamo raggiunto il nostro scopo, infatti:

$$B' \cdot A' = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \delta^\beta_\gamma B_\beta A^\gamma = B_\beta A^\beta \quad (3.6)$$

Allo stesso modo definiamo il prodotto tra due tensori di rango 2:

$$F^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = H^\alpha_\gamma \quad (3.7)$$

questa operazione viene anche chiamata *contrazione dell'indice* β (il motivo è evidente).

Inoltre nel quadrispazio la forma quadratica

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (3.8)$$

è la *metrica* dello spazio-tempo.

Possiamo esprimere ds^2 attraverso il seguente prodotto:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.9)$$

dove il tensore $g_{\alpha\beta}$ è così definito:

$$g_{00} = 1 \text{ e } g_{ii} = -1 \quad i = 1, 2, 3$$

mentre le altre entrate sono tutte nulle. Il tensore $g_{\alpha\beta}$ viene chiamato *tensore metrico covariante* e rispetta la seguente proprietà:

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$$

dove $g^{\alpha\beta}$ è il *tensore metrico controvariante*. Se effettuiamo la contrazione tra i due tensori metrici otteniamo:

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \quad (3.10)$$

Sappiamo che il prodotto interno è un invariante di Lorentz, e che lo è anche il modulo quadro di un quadrivettore. Per cui potremmo avanzare l'ipotesi che

$$x^2 = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2 = x_\alpha x^\alpha \quad \text{con} \quad x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta$$

quindi, se la nostra ipotesi fosse corretta, avremmo:

$$x^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta$$

Per controllare se l'ipotesi è corretta verifichiamo che il tensore x_α ottenuto da x^β per contrazione con $g_{\alpha\beta}$ sia effettivamente covariante, ovvero che:

$$x'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} x_\beta$$

Sappiamo che:

$$x_\alpha x^\alpha = x'_\alpha x'^\alpha$$

Deriviamo questa relazione rispetto alle coordinate x'^β

$$\frac{\partial (x_\alpha x^\alpha)}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial (x'_\alpha x'^\alpha)}{\partial x'^\beta}$$

svolgiamo il primo membro dell'equazione:

$$\frac{\partial (x_\alpha x^\alpha)}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x_\alpha + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'^\beta} x^\alpha = \frac{\partial (g_{\alpha\gamma} x^\gamma)}{\partial x'^\beta} x^\alpha + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x_\alpha = g_{\alpha\gamma} x^\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x_\alpha$$

$$= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} x_\gamma + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x_\alpha = 2 \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x_\alpha$$

Applicando lo stesso ragionamento al secondo membro si ottiene:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} x_\beta = 2 \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta} x'_\alpha = 2 x'_\beta$$

notare che nell'ultimo passaggio abbiamo derivato un tensore rispetto alle sue componenti, è ovvio quindi che tale derivata vale 1 se $\alpha = \beta$ e 0 altrimenti. Avremmo potuto applicare lo stesso ragionamento in forma infinitesimale e ottenere:

$$dx_\alpha dx^\alpha = dx'_\alpha dx'^\alpha \Rightarrow dx'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} dx_\alpha \Rightarrow \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$$

e viceversa:

$$\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}$$

e, comunque, in generale vale che per un tensore generico

$$F^{\dots\alpha\dots} = g^{\alpha\beta} F_{\dots\beta\dots} \quad (3.11)$$

In ogni caso dalla definizione del tensore metrico discende la regola con cui si associa ad un dato tensore controvariante il suo corrispondente covariante:

$$A^\alpha = (A^0, \mathbf{A}) \Rightarrow A_\alpha = (A^0, -\mathbf{A}) \quad (3.12)$$

Prendiamo ora in considerazione l'operatore di derivata rispetto ad una coordinata:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

e notiamo che se deriviamo rispetto ad una coordinata controvariante l'operatore allora si trasforma come le componenti di un tensore covariante, viceversa se deriviamo rispetto ad una coordinata covariante l'operatore si trasforma come le componenti di un tensore controvariante, quindi per abbreviare la scrittura e facilitare la comprensione possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}; -\nabla \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rightarrow \partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}; \nabla \right)$$

Preso un quadrivettore A qualsiasi posso definirne la *quadridivergenza* come

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.13)$$

è evidente come la quadridivergenza sia uno scalare di Lorentz. Analogamente definiamo l'operatore *D'Alembertiano* come:

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha \quad (3.14)$$

per cui:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \nabla^2 \quad (3.15)$$

3.2 Forma matriciale delle trasformazioni di Lorentz

Per lavorare in forma matriciale adottiamo la seguente notazione:

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

e definiamo il prodotto interno tra matrici:

$$(a, b) = ab = (a^0, a^1, a^2, a^3) \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = a^t b$$

Iniziamo quindi col dare una forma matriciale al tensore metrico della relatività speciale:

$$g_{\alpha\beta} = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

il che porta a dire

$$g^2 = I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

cosa che già sapevamo dalla (3.10). Possiamo trovare altre conferme delle regole tensoriali che già sappiamo lavorando in forma matriciale:

$$gx = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\alpha\beta}x^\beta = x_\alpha \quad (3.18)$$

$$a \cdot b = (a, gb) = (ga, b) = a^t gb \Rightarrow a^\alpha b_\alpha = a^\alpha g_{\alpha\beta} b^\beta \quad (3.19)$$

Consideriamo ora una trasformazione, identificata dalla matrice A , in modo che $x' = Ax$, e tale che (x, gx) sia invariante. Allora

$$x^t gx = (x, gx) = (x', gx') = x'^t gx' = (Ax)^t gAx = x^t A^t gAx \Rightarrow A^t gA = g$$

quindi, passando ai determinanti

$$\det(A^t gA) = \det(g) \Rightarrow \det(gA A^t) = \det(g) \cdot \det(A)^2 = \det(g) \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \\ \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \quad (3.20)$$

Possiamo quindi dividere le trasformazioni di Lorentz in due classi distinte: tutte le trasformazioni che possono essere portate a coincidere con l'identità in maniera continua sono le trasformazioni di Lorentz *proprie* e sono le trasformazioni con determinante 1 (chiameremo questo gruppo il *gruppo di Lorentz omogeneo* o più brevemente $SO(1,3)$); mentre viceversa le trasformazioni di Lorentz che non possono essere portate con continuità a coincidere con l'identità sono le trasformazioni *improprie*. Notiamo che non tutte le trasformazioni improprie hanno determinante -1 .

Esempio:

$$A = g \quad \text{è impropria, e} \quad \det(A) = -1 \\ A = -I_{4 \times 4} \quad \text{è impropria, ma} \quad \det(A) = +1$$

Torniamo a considerare la condizione $A^t gA = g$. Tale condizione fornisce 16 equazioni che riguardano le entrate di A , ma non tutte sono tra loro indipendenti, poichè g è una matrice simmetrica. La simmetria di g comporta che, ad esempio, le entrate sotto la diagonale principale sono uguali alle entrate sopra la diagonale principale, il che elimina 6 equazioni dal sistema (le entrate in gioco per la simmetria sono proprio 6), quindi le condizioni indipendenti sono $16 - (1 + 2 + 3) = 10$ e abbiamo quindi 6 parametri liberi. Diremo infatti che il gruppo di Lorentz è un gruppo *a 6 parametri*. Possiamo scegliere i 6 parametri come preferiamo, ad esempio 3 per identificare una generale rotazione spaziale e 3 per identificare la velocità di traslazione tra i due sistemi di riferimento.

Prima di procedere possiamo notare che per ogni trasformazione propria A ne esiste sicuramente almeno una impropria data da $-A$.

$$A^t gA = g \Rightarrow A^{t\alpha\sigma} g_{\sigma\gamma} A^{\gamma\beta} = g^{\alpha\beta} \Rightarrow A^{\sigma\alpha} g_{\sigma\gamma} A^{\gamma\beta} = g^{\alpha\beta}$$

Moltiplicando ambo i membri per $g_{\beta\delta}$

$$A_\gamma^\alpha A^{\gamma\delta} = \delta^\alpha_\delta$$

confrontiamo questa espressione con la definizione di matrice inversa:

$$(A^{-1})^\alpha_\gamma A^{\gamma\delta} = \delta^\alpha_\delta$$

otteniamo la relazione:

$$A_\gamma^\alpha = (A^{-1})^\alpha_\gamma \quad (3.21)$$

Consideriamo una trasformazione che differisca in modo infinitesimo dall'identità, che potremo scrivere come

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= (\delta^\alpha_\beta + \varepsilon^\alpha_\beta) x^\beta & \forall \varepsilon^\alpha_\beta \in SO(1,3) \\ \Rightarrow x'^\alpha &= (\delta^\alpha_\beta + \varepsilon^\alpha_\beta) g^{\beta\gamma} x_\gamma = (g^{\alpha\gamma} + \varepsilon^{\alpha\gamma}) x_\gamma \end{aligned}$$

e analogamente la trasformazione inversa sarà

$$x^\alpha = (g^{\alpha\gamma} + \varepsilon^{\alpha\gamma}) x'_\gamma$$

lo stesso vale in forma covariante

$$\begin{aligned} x'_\gamma &= (g_{\gamma\delta} + \varepsilon_{\gamma\delta}) x^\delta \\ \Rightarrow x^\alpha &= (g^{\alpha\gamma} + \varepsilon^{\alpha\gamma}) (g_{\gamma\delta} + \varepsilon_{\gamma\delta}) x^\delta = (g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\delta} + \varepsilon'^{\alpha}_\delta + \varepsilon^\alpha_\delta + \varepsilon'^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\delta}) x^\delta \end{aligned}$$

trascuriamo l'ultimo termine all'interno della parentesi in quanto infinitesimo di ordine superiore e otteniamo:

$$x^\alpha = \delta^\alpha_\delta x^\delta + (\varepsilon'^\alpha_\delta + \varepsilon^\alpha_\delta) x^\delta \Rightarrow \varepsilon'^\alpha_\delta + \varepsilon^\alpha_\delta = 0$$

quindi

$$\varepsilon'^\alpha_\delta = -\varepsilon^\alpha_\delta \quad (3.22)$$

ovvero la matrice infinitesima della trasformazione inversa è l'opposta della matrice infinitesima di trasformazione. Ma ricordandoci la condizione per cui $(g^{\alpha\gamma} + \varepsilon^{\alpha\gamma}) \in SO(1,3)$ abbiamo che

$$(g + \varepsilon)^t g (g + \varepsilon) = g \Rightarrow g + \varepsilon^t + \varepsilon + \varepsilon^t g \varepsilon = g$$

trascurando $\varepsilon^t g \varepsilon$ otteniamo

$$\varepsilon^t = -\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha} \quad (3.23)$$

Consideriamo ora una trasformazione del tipo:

$$x' = \left(I + \frac{L}{N} \right)^N x \quad \text{con } L \in SO(1,3) \text{ e } N \in \mathcal{N}$$

che equivale ad applicare la trasformazione $I + \frac{L}{N}$ N volte al tensore x . Supponiamo quindi che L sia costruita in modo che

$$\frac{L^\alpha_\beta}{N} = \varepsilon^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}$$

Oppure in forma compatta:

$$\frac{L}{N} = \varepsilon$$

il che comporta le seguenti implicazioni :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{L}{N} g &= \varepsilon \xRightarrow{(3.23)} \left(\frac{L}{N} g \right)^t = -\frac{Lg}{N} \\ (Lg)^t &= -Lg \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow gL^t &= -Lg \Rightarrow gL^t g = -L \Rightarrow L^t g = -gL \\ (gL)^t &= -gL \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ora definiamo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{L}{N} \right)^N = e^L \quad (3.26)$$

dove

$$e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} \in SO(1,3) \quad (3.27)$$

Ma sappiamo dalla (3.23) che

$$L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha}$$

quindi possiamo ipotizzare la forma di L

$$L_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ -L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ -L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare facilmente anche $L^\gamma{}_\beta = g^{\gamma\alpha} L_{\alpha\beta}$:

$$L^\gamma{}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & -L_{12} & -L_{13} \\ L_{02} & L_{12} & 0 & -L_{23} \\ L_{03} & L_{13} & L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Per verificare che $SO(1,3)$ è realmente un gruppo a 6 parametri, iniziamo col dimostrare la seguente proprietà:

$$\det A = \det e^L = e^{\text{Tr} L} \quad (3.28)$$

iniziamo col notare che date le proprietà di A allora esiste sicuramente una matrice U tale che la matrice $A' = U^{-1}AU$ sia diagonale, allora anche la matrice L è diagonalizzabile, e si ha:

$$\begin{aligned} L' &= U^{-1}LU = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^{L'} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_1^n}{n!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_2^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_3^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_4^n}{n!} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^{L'} &= \begin{pmatrix} e^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{l_4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det e^L = \det e^{L'} = e^{l_1+l_2+l_3+l_4} = e^{\text{Tr} L} \end{aligned}$$

utilizzando quindi la (3.20) insieme al fatto che $A \in SO(1,3)$ otteniamo

$$\det A = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} L = 0 \quad (3.29)$$

3.2.1 Generatori del gruppo di Lorentz

Introduciamo ora 6 matrici 4x4 fondamentali:

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & S_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & S_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nei prossimi passi ci accingeremo a dimostrare che le matrici S rappresentano rotazioni rispetto agli assi spaziali e le matrici K rappresentano delle trasformazioni di Lorentz tra sistemi di riferimento in movimento reciproco. Iniziamo col calcolare i quadrati di tali matrici:

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il passo successivo è dimostrare la seguente uguaglianza:

$$(\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{S})^3 = -\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \quad (3.30)$$

con $\hat{\varepsilon}$ un qualsiasi versore e $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$

$$(\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{S})^3 = \hat{\varepsilon} \mathbf{S} \cdot (\hat{\varepsilon} \mathbf{S})^2 =$$

$$= \hat{\varepsilon} \mathbf{S} [\varepsilon_1^2 S_1^2 + \varepsilon_2^2 S_2^2 + \varepsilon_3^2 S_3^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (S_1 S_2 + S_2 S_1) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (S_2 S_3 + S_3 S_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (S_1 S_3 + S_3 S_1)]$$

avendo definito S_1 , S_2 e S_3 non risulta quindi difficile calcolare che

$$S_1 S_2 + S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$S_2 S_3 + S_3 S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_1 S_3 + S_3 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo anche che $S_i^3 = S_i^2 S_i = -S_i$, difatti per S_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo per semplicità il caso in cui $\varepsilon_3 = 0$, allora

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)^3 = \\ & = \varepsilon_1 S_1 \cdot \varepsilon_1^2 S_1^2 + \varepsilon_1 S_1 \cdot \varepsilon_2^2 S_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 S_1 (S_1 S_2 + S_2 S_1) + \varepsilon_2 S_2 \varepsilon_1^2 S_1^2 + \\ & \quad + \varepsilon_2 S_2 \varepsilon_2^2 S_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 S_2 (S_1 S_2 + S_2 S_1) = \\ & = \varepsilon_1 \{-\varepsilon_1^2 S_1 + \varepsilon_2^2 [S_1 S_2^2 + S_2 (S_1 S_2 + S_2 S_1)]\} + \varepsilon_2 \{-\varepsilon_2^2 S_2 + \varepsilon_1^2 [S_1^2 S_1 + S_1 (S_1 S_2 + S_2 S_1)]\} \end{aligned}$$

riconosciamo nelle parentesi quadre rispettivamente $-S_1$ e $-S_2$, per convincercene basta notare che:

$$S_1 S_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_1 (S_1 S_2 + S_2 S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

il che porta a

$$(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)^3 = -\varepsilon_1 S_1 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) - \varepsilon_2 S_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) = -\varepsilon_1 S_1 - \varepsilon_2 S_2 \quad \text{c.v.d.}$$

Allo stesso modo si può dimostrare che

$$(\hat{\varepsilon} \mathbf{K})^3 = \hat{\varepsilon} \mathbf{K} \quad (3.31)$$

Quindi possiamo individuare una matrice L qualsiasi ponendo:

$$L = -\omega \mathbf{S} - \zeta \mathbf{K} \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow A = e^L = e^{-\omega \mathbf{S} - \zeta \mathbf{K}}$$

Possiamo adesso verificare che le matrici S rappresentano rotazioni nello spazio euclideo e le matrici K rappresentano Trasformazioni di Lorentz speciali del tipo (1.7). Per brevità dimostriamolo nel caso più semplice in cui $\zeta = \zeta \hat{e}_1$ e $L = -\zeta K_1$ allora:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} = I - \zeta K_1 + \zeta^2 \frac{K_1^2}{2} - \zeta^3 \frac{K_1^3}{3!} + \zeta^4 \frac{K_1^4}{4!} + \dots$$

notiamo che $K_1^3 = K_1$ e che $K_1^4 = K_1^2$ e così via per potenze superiori, quindi riordinando l'espressione di prima in base alle potenze pari o dispari di K_1 otteniamo:

$$A = I - \zeta K_1 - \frac{\zeta^3}{3!} K_1 + \dots + \frac{\zeta^2}{2} K_1^2 + \frac{\zeta^4}{4!} K_1^2 + \dots$$

aggiungendo e sottraendo K_1^2

$$A = I - K_1^2 - \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3!} + \dots \right) K_1 + \left(1 + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{4!} + \dots \right) K_1^2$$

ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$ possiamo scrivere:

$$A = I - K_1^2 - K_1 \sinh \zeta + K_1^2 \cosh \zeta$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sinh \zeta + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cosh \zeta$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice che rappresenta le trasformazioni (1.11) per $\beta = \tanh \zeta$

Ora consideriamo $\zeta = 0$ e $\omega = \omega \hat{e}_3$ e $L = -\omega S_3$, allora analogamente:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} = I + S_3^2 - S_3 \left(\omega - \frac{\omega^3}{3!} + \dots \right) - S_3^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{4!} \right) + \dots$$

quindi

$$A = I + S_3^2 - S_3 \sin \omega - S_3^2 \cos \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che rappresenta una matrice di rotazione attorno all'asse z Consideriamo ora un generico ζ :

$$A = e^{-\zeta \mathbf{K}}$$

poniamo allora $\zeta = \hat{\beta} \tanh^{-1} \beta \Rightarrow \beta = \tanh |\zeta|$

$$A = e^{-\hat{\beta} \mathbf{K} \tanh^{-1} \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^n (\hat{\beta} \mathbf{K})^n}{n!}$$

$$A = I - \zeta \hat{\beta} \mathbf{K} + \frac{\zeta^2}{2} (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 - \frac{\zeta^3}{3!} (\hat{\beta} \mathbf{K})^3 + \frac{\zeta^4}{4!} (\hat{\beta} \mathbf{K})^4 - \frac{\zeta^5}{5!} (\hat{\beta} \mathbf{K})^5 + \dots$$

$$A = I - \zeta (\hat{\beta} \mathbf{K}) + \frac{\zeta^2}{2} (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 - \frac{\zeta^3}{6} (\hat{\eta} \mathbf{K}) + \frac{\zeta^4}{4!} (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 - \frac{\zeta^5}{5!} (\hat{\beta} \mathbf{K}) + \dots$$

$$A = I - (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 - (\hat{\beta} \mathbf{K}) \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} + \dots \right) + (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{4!} + \dots \right)$$

$$A = I - (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 + (\hat{\beta} \mathbf{K}) \sinh \zeta + (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 \cosh \zeta$$

dove

$$\sinh \zeta = \frac{\frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta}}{\sqrt{1 - \tanh^2 \zeta}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

quindi

$$A = I - (\hat{\beta} \mathbf{K}) \beta \gamma + (\hat{\beta} \mathbf{K})^2 (\gamma - 1)$$

ma

$$(\hat{\beta} \mathbf{K})^2 = \beta_x^2 K_x^2 + \beta_y^2 K_y^2 + \beta_z^2 K_z^2 + \hat{\beta}_x \hat{\beta}_y (K_x K_y + K_y K_x) + \hat{\beta}_y \hat{\beta}_z (K_y K_z + K_z K_y) + \hat{\beta}_x \hat{\beta}_z (K_x K_z + K_z K_x)$$

Sviluppando i prodotti tra matrici arriviamo alla forma della matrice per una generica Trasformazione di Lorentz:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1 \gamma & -\beta_2 \gamma & -\beta_3 \gamma \\ -\beta_1 \gamma & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_1^2}{\beta^2} & \hat{\beta}_x \hat{\beta}_y (\gamma - 1) & \hat{\beta}_x \hat{\beta}_z (\gamma - 1) \\ -\beta_2 \gamma & \hat{\beta}_x \hat{\beta}_y (\gamma - 1) & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_2^2}{\beta^2} & \hat{\beta}_y \hat{\beta}_z (\gamma - 1) \\ -\beta_3 \gamma & \hat{\beta}_x \hat{\beta}_z (\gamma - 1) & \hat{\beta}_y \hat{\beta}_z (\gamma - 1) & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

Le matrici S e K sono dette *generatori* del gruppo di Lorentz proprio.

Notiamo che per ω e ζ piccoli possiamo esprimere A con lo sviluppo

$$A \approx I - \omega \mathbf{S} - \zeta \mathbf{K}$$

Inoltre utilizzando la notazione delle parentesi di Lie (o *commutatori*) abbiamo le seguenti proprietà:

$$[S_1, S_2] \stackrel{def}{=} S_1 S_2 - S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_3 \quad (3.33)$$

Sviluppando le parentesi per tutte le combinazioni delle matrici S_i otteniamo le seguenti regole:

$$[S_1, S_2] = S_3 \quad [S_1, S_3] = -S_2 \quad [S_2, S_3] = S_1 \quad (3.34)$$

Che possono essere riassunte nella seguente formula:

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k \quad (3.35)$$

dove ε_{ijk} è il *tensore completamente antisimmetrico di Ricci* così definito:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 1 & \text{per ogni permutazione pari degli indici } i, j, k \\ \varepsilon_{ijk} = -1 & \text{per ogni permutazione dispari degli indici } i, j, k \\ \varepsilon_{ijk} = 0 & \text{se due indici qualsiasi sono uguali} \end{cases} \quad (3.36)$$

analogamente si ricavano le seguenti regole:

$$[S_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k \quad [K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} S_k \quad (3.37)$$

Da notare: rispetto alla nuova operazione definita poco fa le matrici S_i formano un gruppo, mentre le matrici K_i no.

Capitolo 4

Elettromagnetismo Relativistico

In questo capitolo vedremo come applicare le nozioni che abbiamo appreso nei capitoli precedenti per ricavare una formulazione covariante dell'elettromagnetismo. Abbiamo bisogno, in primo luogo, di definire come variano le grandezze $\rho, \mathbf{j}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ sotto trasformazioni del gruppo di Lorentz. Iniziamo col considerare le equazioni del moto in forma classica:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (4.1)$$

Sappiamo che $\mathbf{p}$ deve trasformarsi come la componente spaziale del quadrimpulso $p^\alpha = mU^\alpha$ quindi iniziamo col riscrivere la (4.1) derivando rispetto a τ invece che a t :

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{c} (U^0 \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (4.2)$$

e notiamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{q}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{c} \gamma_u \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{c} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3)$$

abbiamo così trovato come varia il quadrimpulso rispetto al tempo proprio τ . Dato che τ è un invariante di Lorentz e che p^α è un quadrivettore allora i secondi membri delle (4.2) e (4.3) devono variare rispettivamente come la componente spazio e come la componente tempo di un quadrivettore. Iniziamo con l'esaminare come varia q per via sperimentale.

Per quel che ne sappiamo, la carica elettrica gode di una proprietà di conservazione assoluta. Negli esperimenti di King si tentava di rivelare una eventuale carica elettrica residua in un contenitore metallico da cui si faceva uscire il gas di idrogeno o elio inizialmente contenuto. Non fu osservato alcun effetto e si poté così stabilire un limite superiore pari a $10^{-19}e$ per la carica netta per molecola, sia di H_2 che di He. Siccome gli elettroni dell'atomo di He si muovono a velocità doppia rispetto agli elettroni dell'atomo di H_2 , la carica dell'elettrone non può dipendere dalla sua velocità, almeno per velocità dell'ordine di $(0,01 - 0,02)c$.

Nell'esperimento di Fraser, Carlson e Hughes un apparecchio a fasci atomici veniva impiegato per rivelare la deflessione elettrostatica di fasci di atomi neutri di cesio e potassio. Anche in questo caso non si osservò alcun effetto, e si stabilì un limite superiore di $3,5 \times 10^{-19}$ per la differenza relativa tra le cariche del protone e dell'elettrone. Il cesio e il potassio hanno $Z = 55$ e $Z = 19$, rispettivamente, e gli elettroni più esterni dell'atomo di cesio si muovono con velocità dell'ordine di $0,4c$. Questi due esperimenti forniscono un forte argomento a favore dell'invarianza della carica elettrica.

Assumendo quindi che la carica elettrica sia Lorentz-invariante e imponendo che i secondi membri delle (4.2) e (4.3) debbano variare rispettivamente come la componente spazio e come la componente tempo di un quadrivettore possiamo ricavare le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico. Ora, dato che $\mathbf{U} \cdot \mathbf{E}$ deve comportarsi come la componente tempo di un quadrivettore, e dato che a sua volta $\mathbf{U}$ è la componente spazio di un quadrivettore, allora le componenti di $\mathbf{E}$ devono comportarsi come le componenti tempo-spazio di un tensore di rango due $F^{\alpha\beta}$ in modo da poter scrivere $\mathbf{U} \cdot \mathbf{E} = F^{0\beta} U_\beta$. Benchè questo modo ci permetterebbe lo stesso di arrivare a scrivere esplicitamente il tensore $F^{\alpha\beta}$ procederemo in un altro modo.

Consideriamo l'equazione di continuità della corrente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \stackrel{(3.13)}{\Rightarrow} \quad \partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (4.4)$$

Abbiamo riscritto a destra l'equazione in una forma più compatta, introducendo $J^\alpha = (c\rho; \mathbf{j})$. Rimane solo da dimostrare che J^α è un quadrivettore. Iniziamo considerando una corrente che scorre lungo l'asse x^1 :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho S \frac{dx}{dt} \Rightarrow di = u \rho dS = \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$$

Mettiamo ora a confronto J^α con U^α per notarne la somiglianza:

$$J^\alpha = (c\rho; \mathbf{j}) = (c\rho; \rho \mathbf{u}) \quad U^\alpha = (c\gamma_u; \gamma_u \mathbf{u})$$

inoltre l'invarianza della carica ci dice che $\rho' d^3x' = \rho d^3x$. Dimostriamo ora che l'elemento infinitesimo di volume nel quadrispazio d^4x è un invariante:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| d^4x = |\det A| d^4x = d^4x$$

dato che $d^4x = dx^0 d^3x$ possiamo concludere che ρ si trasforma come dx^0 , il che ci dimostra che J^α è un quadrivettore.

Consideriamo ora le equazioni che nell'ambito classico definiscono i potenziali dei campi elettrico e magnetico:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi \rho \quad (4.6)$$

dove i potenziali sono vincolati dalla condizione di Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.7)$$

Ora esaminiamo le equazioni (4.5) e (4.6), nei rispettivi secondi membri compaiono le componenti del quadrivettore densità di corrente J^α quindi anche i primi membri devono comportarsi come le rispettive componenti, ma notiamo che i primi membri delle due equazioni contengono l'operatore D'Alembertiano, che è Lorentz-invariante, ne consegue quindi che $\mathbf{A}$ e Φ insieme formano un *quadrivettore potenziale* così definito:

$$A^\alpha = (\Phi; \mathbf{A}) \quad (4.8)$$

il che ci permette di riscrivere le (4.5) e (4.6) e la (4.7) in forma molto più comoda:

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha; \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (4.9)$$

Ora cerchiamo di riscrivere i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in termini del quadripotenziale A^α

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \Rightarrow E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

possiamo quindi generalizzare definendo un tensore di rango due, antisimmetrico, nel seguente modo:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (4.10)$$

Le componenti di $F^{\alpha\beta}$ sono le componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$F^{\alpha\beta}$ è il *tensore Intensità di campo elettromagnetico*, e risulta inoltre facile calcolare $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} F^{\mu\nu}$:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

¹è un ragionamento un po' grossolano ma funziona

Risulta utile definire il *tensore Intensità di campo duale*: $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$ dove $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore completamente antisimmetrico di Ricci di rango quattro. Esaminiamo alcune proprietà di questo tensore. $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ha, per definizione, le stesse componenti in ogni sistema di riferimento, la qual cosa gli conferisce alcune particolari proprietà di trasformazione. Consideriamo

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A^0_{\alpha}A^1_{\beta}A^2_{\gamma}A^3_{\delta} = \det A$$

come discende dalla definizione di determinante di una matrice (A è la matrice di una trasformazione di Lorentz)

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A^0_{\alpha}A^1_{\beta}A^2_{\gamma}A^3_{\delta} = \det A = \det A\varepsilon^{0123}$$

quindi

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta'}_{\beta}A^{\gamma'}_{\gamma}A^{\delta'}_{\delta} = \det A\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

possiamo immediatamente concludere che se la trasformazione è propria allora $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ si trasforma come un tensore, altrimenti lo ritroviamo col segno opposto. Per tale motivo si dice anche che $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è uno *pseudo-tensore*. Di conseguenza una quantità costruita come $P = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha}B_{\beta}C_{\gamma}D_{\delta}$ è uno *pseudo-scalare*, ovvero si comporta come uno scalare solo se la trasformazione è propria, altrimenti cambia segno. Calcoliamo $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

o più semplicemente possiamo notare che il tensore $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ si può ottenere dal tensore $F^{\alpha\beta}$ operando la seguente sostituzione:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \end{pmatrix}$$

4.1 Covarianza delle equazioni di Maxwell

Iniziamo col considerare le due equazioni di Maxwell non omogenee:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{cases} \quad (4.14)$$

e mostriamo che possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^{\beta} \quad (4.15)$$

Procediamo:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha}F^{\alpha 0} &= \partial_0F^{00} + \partial_1F^{10} + \partial_2F^{20} + \partial_3F^{30} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c}J^0 \end{aligned}$$

per quanto riguarda la seconda equazione la dimostreremo solo per la componente x , per le altre due componenti il procedimento è identico:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha}F^{\alpha 1} &= \partial_0F^{01} + \partial_1F^{11} + \partial_2F^{21} + \partial_3F^{31} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-E_x) + \frac{\partial}{\partial y}B_z + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y) = \\ &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_x + (\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_x = \frac{4\pi}{c}J^1 \end{aligned}$$

quindi la (4.15) ci restituisce le sue equazioni di Maxwell non omogenee. Per quanto riguarda le equazioni omogenee, prima di procedere notiamo una certa simmetria nei primi membri rispetto ai primi membri delle due equazioni non omogenee:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

potremmo anzi dire che i primi membri delle equazioni omogenee corrispondono ai primi membri delle equazioni non omogenee dove è stata operata la stessa sostituzione che abbiamo usato per ottenere $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ da $F^{\alpha\beta}$, quindi risulta naturale scrivere le equazioni omogenee nel seguente modo:

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.17)$$

oppure un modo alternativo che permette di scriverle in termini di $F^{\alpha\beta}$ è il seguente:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{per } \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha \quad (4.18)$$

4.2 Moti in campi elettromagnetici

Vogliamo ora scrivere le equazioni del moto per una particella in un campo elettromagnetico. Iniziamo dall'affermare:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta \quad (4.19)$$

e procediamo col dimostrarlo. Per $\alpha = 0$

$$F^{0\beta} U_\beta = \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}$$

mentre

$$\frac{d}{d\tau}(cp^0) = \gamma \frac{d}{dt} \mathcal{E} = \gamma q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = q \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}$$

Per $\alpha = 1$

$$F^{1\beta} U_\beta = E_x U_0 + (-B_z) U_2 + B_y U_3 = E_x U_0 + (\mathbf{U} \times \mathbf{B})_x$$

riconoscendo al secondo membro la componente x della forza di Lorentz.

In caso di campi all'interno della materia può essere utile definire un tensore $G^{\alpha\beta}$ in termini di $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ nello stesso identico modo in cui abbiamo definito $F^{\alpha\beta}$ in termini di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Le equazioni di Maxwell in questo caso diventano:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.20)$$

Passiamo ora a definire come si trasformano i campi nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro. Sappiamo già che $F^{\alpha\beta}$ è un tensore, quindi sotto trasformazioni di Lorentz varia in maniera ben definita secondo la regola

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}$$

oppure, se A è la matrice della trasformazione,

$$F' = A F A^t \quad \Rightarrow \quad F'^{\alpha\beta} = A^\alpha_\gamma A^\beta_\delta F^{\gamma\delta}$$

Consideriamo, per semplicità, una trasformazione tra K e K' in moto con velocità $\mathbf{v}$ parallela a $\hat{x}$, quindi $L = -\zeta K_1$ e

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F'^{10} &= E'_x = A^1_\gamma A^0_\delta F^{\gamma\delta} = -\sinh \zeta A^0_\delta F^{0\delta} + \cosh \zeta A^0_\delta F^{1\delta} = \\ &= -\sinh \zeta (A^0_1 F^{01} + A^0_2 F^{02} + A^0_3 F^{03}) + \cosh \zeta (A^0_0 F^{10} + A^0_2 F^{12} + A^0_3 F^{13}) = \\ &= -\sinh \zeta [-\sinh \zeta (-E_x)] + \cosh \zeta [\cosh \zeta (E_x)] = E_x (-\sinh^2 \zeta + \cosh^2 \zeta) = E_x \end{aligned}$$

analogamente

$$F'^{20} = E'_y = A^2_\gamma A^0_\delta F^{\gamma\delta} = A^0_0 E_y + A^0_1 B_z + A^0_3 (-B_x) = \gamma(E_y - \beta B_z)$$

continuando otteniamo le seguenti regole di trasformazione:

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) \quad (4.21)$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \quad (4.22)$$

O più in generale, per un β qualsiasi

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} \end{cases} \quad (4.23)$$

Passiamo a degli esempi specifici. Consideriamo i due soliti sistemi di riferimento K e K' in moto relativo con velocità $\mathbf{v}$ parallela all'asse x e consideriamo il punto P in K di coordinate $(0, b, 0)$. Poniamo ora una particella carica in O' solidale con il sistema K' come in figura 5.1

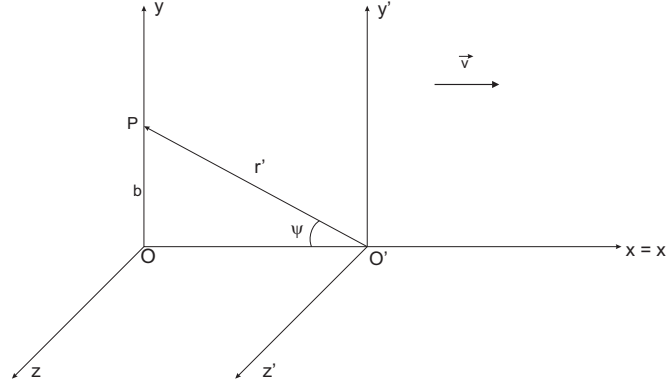


Figura 4.1:

La distanza del punto P dall'origine di K' , come è facile vedere, è $r' = \sqrt{b^2 + v^2 t'^2}$ con $t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x_P) = \gamma t$. I campi nel sistema K' hanno valore:

$$E'_x = -\frac{q}{r'^2} \frac{vt'}{r'} \quad E'_y = \frac{q}{r'^2} \frac{b}{r'} \quad E'_z = 0 \quad \mathbf{B}' = 0$$

(da notare: abbiamo sostituito $\cos \psi$ e $\sin \psi$ con i rispettivi rapporti trigonometrici dei lati del triangolo rettangolo OPO').

Sostituendo $t' = \gamma t$ abbiamo:

$$E'_x = -\frac{qv\gamma t}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad E'_y = \frac{qb}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Utilizziamo le inverse delle (4.23) per ottenere:

$$E_x = E'_x \quad E_y = \gamma E'_y \quad E_z = 0$$

$$B_x = 0 \quad B_y = 0 \quad B_z = \gamma\beta E'_y$$

Per velocità sufficientemente piccole possiamo scrivere

$$B_z = \frac{q}{c} \frac{vb}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Diamo un'occhiata all'andamento di E_y in funzione di vt riportato in figura (5.2) per vari valori di γ (0.2, 0.5, 0.7)

Il valore del massimo della funzione è $\frac{2q}{b^2}$ mentre l'apertura della campana, misurata con la distanza tra i due punti di flesso, è $\frac{b}{\gamma v}$, da cui si vede che più è elevato il valore di γ più la «campana» è alta e stretta. Calcoliamo ora

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_y v dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v\gamma qb dt}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qb d\xi}{(b^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\xi = \gamma vt)$$

Il risultato di questo calcolo è che l'area sottesa dalla curva non dipende affatto da β e di conseguenza neanche da γ .

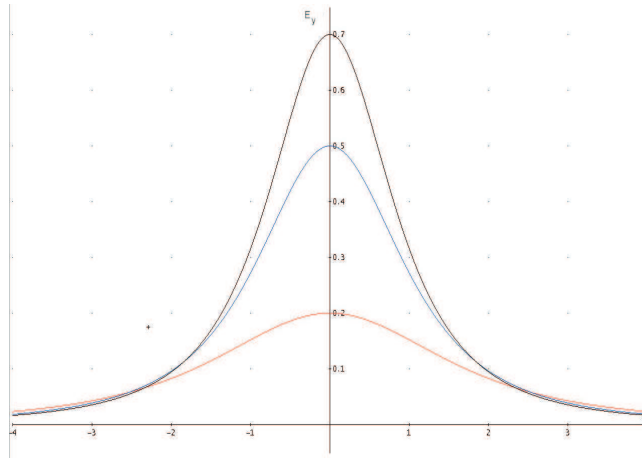


Figura 4.2: E_y

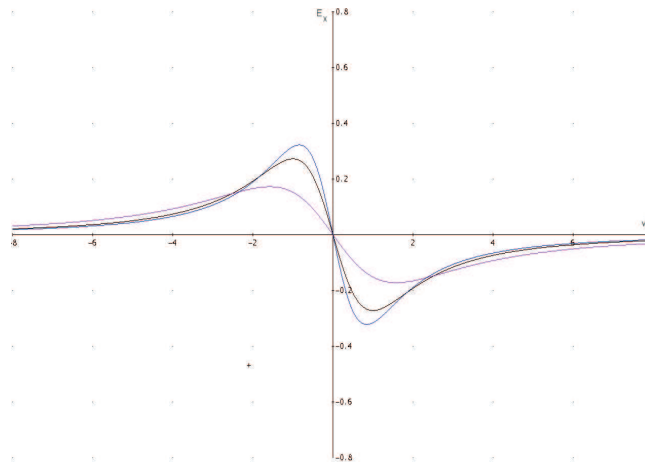


Figura 4.3: E_x

Osserviamo ora l'andamento del campo lungo $\hat{x}$ (figura 5.3): anche in questo caso è stato tracciato il grafico per i valori di γ corrispondenti a 0.2 , 0.5 e 0.7.

Potremmo quindi concludere che per v molto alta (prossimo al valore di c) una particella posta in P sente dei campi elettromagnetici molto simili a quelli di un'onda piana polarizzata linearmente lungo $\hat{y}$. Ma qual è la direzione del vettore $\mathbf{E}$ in K ? Iniziamo col considerare il vettore $\mathbf{r}_P = (-vt, b, 0)$ e ricordiamoci che forma con il piano xz un angolo ψ per cui $\tan \psi = -\frac{b}{vt}$ e calcoliamo invece l'angolo che il vettore $\mathbf{E}$ forma con il piano xz :

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = -\frac{\gamma qb}{(b^2 + v^2 \gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(b^2 + v^2 \gamma^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{qv \gamma t} = -\frac{b}{vt} = \tan \psi \quad \Rightarrow \quad \theta = \psi$$

da cui concludiamo che $\mathbf{E}$ è diretto esattamente come $\mathbf{r}$. Ora cercheremo di ottenere una espressione di $\mathbf{E}$ che dipenda dall'angolo ψ . Iniziamo con:

$$r'^3 = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}} = \quad (4.24)$$

(moltiplichiamo e dividiamo per $r^3 \gamma^3$ e successivamente aggiungiamo e sottraiamo al numeratore $b^2 \gamma^2$)

$$\begin{aligned} &= r^3 \gamma^3 \left[\frac{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}{\gamma^2 (b^2 + v^2 t^2)} \right]^{\frac{3}{2}} = r^3 \gamma^3 \left[\frac{b^2 + (v^2 \gamma^2 t^2 + b^2 \gamma^2) - b^2 \gamma^2}{\gamma^2 (b^2 + v^2 t^2)} \right]^{\frac{3}{2}} = \\ &= r^3 \gamma^3 \left[1 + \frac{b^2 (1 - \gamma^2)}{\gamma^2 (b^2 + v^2 t^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

notiamo che

$$\frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 - 1 = -\beta^2$$

e sostituiamo nella (4.25) per ottenere:

$$r'^3 = r^3 \gamma^3 \left[1 - \frac{b^2 \beta^2}{r^2} \right]^{\frac{3}{2}} = r^3 \gamma^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}} \quad (4.26)$$

sostituiamo quindi il valore di r' , e delle sue componenti, che si ricava dall'ultima equazione nelle componenti di $\mathbf{E}$ per ottenere:

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{r}}{r^3 \gamma^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.27)$$

la dipendenza da ψ indica chiaramente che il campo non è isotropo, a meno che non sia $\beta = 0$, che assume il valore massimo per $\psi = \frac{\pi}{2}$ e che rispetto ai valori in K' , E_x è diminuito di un fattore γ^2 mentre E_y è aumentato di un fattore γ . In figura 5.4 sono riportate le linee di forza del campo di una particella ferma e in movimento.

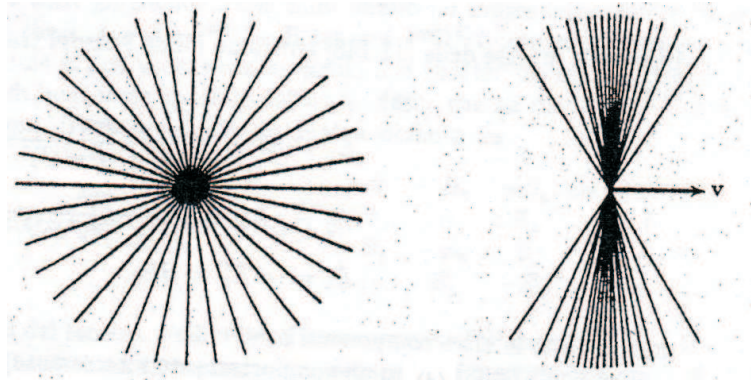


Figura 4.4: Linee di forza elettriche per una particella carica a riposo e in movimento ($\gamma = 3$). Le linee di forza sono emanate dalla posizione della carica all'istante di osservazione

Capitolo 5

Dinamica delle particelle relativistiche

5.1 Formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana

Abbiamo già visto che le equazioni del moto per una particella di carica e in presenza di campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} \end{cases} \quad (5.1)$$

possono essere riscritte nella forma covariante:

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} U_\beta \quad (5.2)$$

In generale le equazioni del moto scritte in forma covariante sono in grado di descrivere il più generale moto di una particella in un campo elettromagnetico, ma spesso viene preferita una formulazione Lagrangiana del moto della particella in quanto per molti versi è «più comoda». Dovremo quindi cercare di scrivere una *Lagrangiana* $\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ e un'azione A espressa in termini di $\mathcal{L}$ esattamente come nel caso classico, ossia:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (5.3)$$

e dalla quale la traiettoria seguita dalla particella si può esprimere come quella traiettoria per cui vale la relazione data dal *principio di minima azione*:

$$\delta A = 0$$

inoltre dovremo verificare che è possibile dedurre le equazioni del moto dalle *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (5.4)$$

per poi passare a definire una *Hamiltoniana* H :

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathcal{L} \quad (5.5)$$

e ricavare le *equazioni cardinali*.

Iniziamo con delle semplici considerazioni. Affinché le equazioni di Eulero-Lagrange siano covarianti occorre necessariamente che A sia uno scalare di Lorentz. Ricordando che $dt = \gamma d\tau$ dalla (2.5) otteniamo

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \mathcal{L} d\tau$$

e ricordando che τ è uno scalare ci rimane solo da imporre che $\gamma \mathcal{L}$ sia anch'esso uno scalare di Lorentz per trovare la nostra Lagrangiana.

In primo luogo possiamo affermare senza ombra di dubbio che $\mathcal{L}$ *non può* dipendere dalla posizione, in quanto, se così fosse, non sarebbe affatto invariante per traslazioni. Un'altra cosa che possiamo affermare senza timore di sbagliare è che per velocità $v \ll c$ $\mathcal{L}$ deve tendere alla Lagrangiana classica. Possiamo iniziare ad assegnare il ruolo delle $\dot{q}_i$ alle U^α , con le quali l'unico invariante che è possibile costruire è $U_\alpha U^\alpha = c^2$. Iniziamo col considerare la Lagrangiana di una particella libera. Dato che non sono presenti termini di interazione, la Lagrangiana della particella libera $\mathcal{L}_{free}$ moltiplicata per γ deve essere necessariamente una funzione dell'invariante c^2 e al più della massa della particella, per cui abbiamo:

$$\mathcal{L}_{free} = -mc^2 \gamma^{-1} \quad (5.6)$$

verifichiamo che per $\mathbf{u} \rightarrow 0$ la Lagrangiana della particella libera relativistica tende alla Lagrangiana della particella libera classica:

$$\mathcal{L}_{free} = -mc^2 \gamma^{-1} \approx -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2} mu^2 - mc^2$$

che effettivamente rappresenta la Lagrangiana di una particella libera nel limite classico¹. Verifichiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange per questa Lagrangiana ci diano proprio le equazioni del moto di una particella libera.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{2\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot 2 \frac{u_i}{c^2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} (m\gamma u_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\gamma u_i = \text{cost.} \end{aligned}$$

che rappresentano le equazioni del moto di una particella libera.

Ora preoccupiamoci della Lagrangiana di interazione, ovvero di quella parte della Lagrangiana totale che tiene conto delle interazioni con i campi presenti (nel nostro caso elettromagnetici, per cui aggiungiamo un termine $V = e\Phi$ dovuto al potenziale elettrostatico). Come al solito dobbiamo avere che la Lagrangiana risultante per velocità piccole si riduca alla Lagrangiana classica $\mathcal{L} = T - V$, quindi necessariamente $\mathcal{L}_{int} \rightarrow -V$.

Vediamo cosa abbiamo a nostra disposizione per costruire una Lagrangiana di interazione che, moltiplicata per γ , sia invariante. Le quantità a nostra disposizione sono le A^α , x^α e le p^α (anche se utilizzeremo le U^α al posto delle p^α). Per gli stessi identici motivi di cui sopra la Lagrangiana non può dipendere dalla posizione della particella, quindi dobbiamo necessariamente scartare le x^α dalla lista, quindi ci aspettiamo che $\mathcal{L}_{int}$ contenga il prodotto $A_\alpha U^\alpha$, dato che essi sono gli unici due quadrivettori rimasti disponibili. Quindi non sarà difficile convincerci che la Lagrangiana di interazione deve essere:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{e}{\gamma c} A_\alpha U^\alpha \quad (5.7)$$

Immediatamente otteniamo la lagrangiana di una particella carica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} = -\frac{mc^2}{\gamma} - \frac{e}{\gamma c} A_\alpha U^\alpha \quad (5.8)$$

oppure

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} - e\Phi \quad (5.9)$$

Verifichiamo ora che le equazioni di Eulero-Lagrange ci restituiscono effettivamente le equazioni del moto. Per far ciò conviene introdurre fin da subito gli impulsi coniugati P_i :

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \gamma m u^i + \frac{e}{c} A^i \quad (5.10)$$

oppure

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (5.11)$$

¹La forma generale della Lagrangiana di una particella è $\mathcal{L} = T - V$. In questo caso siamo in assenza di energia potenziale V e la quantità che compare al secondo membro è proprio lo sviluppo in serie dell'energia cinetica di una particella definita dalla (2.27)

mentre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \nabla_i \mathcal{L} = \frac{e}{c} \nabla_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) - e \nabla_i \Phi$$

sviluppando²

$$\nabla \mathcal{L} = \frac{e}{c} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})] - e \nabla \Phi$$

quindi combinando le equazioni di Eulero-Lagrange con la (5.11) otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \nabla \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} - e \nabla \Phi$$

e quindi³

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + e \nabla \Phi + \frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

che sono proprio le equazioni del moto. L'ultima equazione del sistema la ricaviamo da $cp_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$, infatti:

$$\frac{d}{dt}(cp_0) = \frac{1}{2} \frac{2c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}} = \frac{c^2 m \gamma \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}{c^2 m \gamma} = e \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$$

Possiamo ora definire una Hamiltoniana per una particella carica:

$$H = \sum_i u_i \frac{d\mathcal{L}}{du_i} - \mathcal{L} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} - \mathcal{L} \quad (5.12)$$

l'unica cosa che risulta difficile è esprimere $\mathbf{u}$ in funzione di $\mathbf{P}$. Procederemo così:

$$\begin{aligned} m\gamma \mathbf{u} = \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}}{m\gamma} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ \Rightarrow m^2 u^2 &= \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \quad \Rightarrow \quad u^2 \left[m^2 + \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] = \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \\ \Rightarrow u^2 &= \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}{m^2 + \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} \end{aligned}$$

quindi

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2 m^2}{c^2 m^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}$$

e allora

$$\mathbf{u} = \frac{c \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)}{\sqrt{c^2 m^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}}$$

Sostituiamo questa espressione in H e otteniamo:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot (c\mathbf{P} - e\mathbf{A}) + m^2 c^3}{\sqrt{c^2 m^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}} + e\Phi = \frac{c \left[c^2 m^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right]}{\sqrt{c^2 m^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}} + e\Phi = \\ &= \sqrt{m^2 c^4 + (c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2} + e\Phi = W \end{aligned}$$

Dove con W denotiamo l'energia totale della particella:

$$W = \mathcal{E} + e\Phi$$

possiamo quindi scrivere:

$$p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{W}{c} - \frac{e}{c} \Phi$$

²attraverso la formula: $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

³attraverso la formula: $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

Analizzando quest'ultima uguaglianza notiamo che $\frac{\varepsilon}{c}$ e $\frac{e}{c}\Phi$ si trasformano come la coordinata tempo di un quadrvettore, quindi di conseguenza anche $\frac{W}{c}$ deve trasformarsi allo stesso modo. Possiamo quindi costruire un *quadrvettore degli impulsi coniugati* P^α nel seguente modo:

$$P^\alpha = \left(\frac{W}{c}, \mathbf{P} \right) \quad (5.13)$$

Utilizziamo ora le equazioni di Hamilton-Jacobi per ottenere le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P^i} \\ \frac{dP^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{cases} \quad (5.14)$$

iniziamo con:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P^i} = \frac{1}{2} \frac{2(c\mathbf{P} - e\mathbf{A})_i c}{\sqrt{m^2 c^4 + (c\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}} \stackrel{(2.27)-(2.31)}{\downarrow} = \frac{c^2 p^i}{mc^2 \gamma} = \frac{m\gamma c^2 u^i}{mc^2 \gamma} = u^i$$

ma questa era la parte facile del calcolo. Procediamo oltre. Da un lato abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^i} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla_i [(c\mathbf{P} - e\mathbf{A}) (c\mathbf{P} - e\mathbf{A})]}{mc^2 \gamma} + e \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \stackrel{(5.11)}{\downarrow} = -\frac{e}{2} \frac{2(\mathbf{p}c \cdot \nabla) A^i + 2[c\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{A})_i]}{mc^2 \gamma} + e \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \\ &= -\frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \nabla) A^i - \frac{e}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})^i + e \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \end{aligned}$$

mentre dall'altro:

$$-\frac{dP^i}{dt} = -\frac{dp^i}{dt} - \frac{e}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \nabla) A^i$$

Ora utilizziamo la relazione $\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{dP^i}{dt}$ per scrivere:

$$-\frac{dp^i}{dt} - \frac{e}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \nabla) A^i = -\frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \nabla) A^i - \frac{e}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})^i + e \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - e \nabla \Phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ovvero le equazioni del moto⁴.

Nella rappresentazioni che abbiamo dato finora c'è un problema che sorge quasi spontaneo. La Lagrangiana che abbiamo introdotto in (5.9) dipende esplicitamente dai potenziali Φ e $\mathbf{A}$, i quali a loro volta dipendono dalla particolare gauge⁵ scelta. Il che potrebbe portare a dire che anche le equazioni del moto dipendono dalla particolare gauge scelta, il che sarebbe un assurdo. Analizziamo allora una generica trasformazione di gauge:

$$A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$$

per cui la Lagrangiana varierà di una quantità pari a

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Lambda - e \partial_0 \Lambda = -\frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt}$$

quindi l'azione corrispondente alla nuova Lagrangiana differirà da quella precedente di un termine

$$\Delta A = -\frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Lambda}{dt} dt = -\frac{e}{c} [\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)]$$

è facile vedere che tale termine non perturba minimamente il calcolo delle variazioni di A che porta alla traiettoria di minima azione⁶.

⁴basta ricordare come vengono espressi i campi in funzione dei potenziali $\mathbf{A}$ e Φ

⁵Ricordiamo che i campi elettrico e magnetico sono invarianti se operiamo le seguenti trasformazioni dei potenziali (trasformazione di gauge): $\Phi \rightarrow \Phi + k$ e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla S$

⁶Si ricordi che per calcolare δA si procede attraverso delle traiettorie parametrizzate da un parametro ε , per poi derivare A rispetto a ε . Il punto è che Λ non dipende da ε

Un'altra obiezione sollevabile al nostro procedimento potrebbe riferirsi al fatto che finora abbiamo utilizzato solo dei trivettori. E' possibile operare una formulazione covariante a vista dei concetti sviluppati finora? La risposta è sì. Tanto per iniziare torniamo alla definizione covariante della lagrangiana per una particella, già vista in precedenza:

$$\gamma \mathcal{L} = -\frac{1}{2} m U^\alpha U_\alpha - \frac{q}{c} U^\alpha A_\alpha \quad (5.15)$$

e ricaviamo da essa i quadriimpulsi coniugati⁷:

$$P^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\alpha} = m U^\alpha + \frac{q}{c} A^\alpha \quad (5.16)$$

ora vediamo a cosa corrispondono le equazioni di Eulero-Lagrange per questa lagrangiana:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(-m U^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) + \frac{q}{c} U_\beta \partial^\alpha A^\beta = 0$$

ma

$$\frac{dA^\alpha}{d\tau} = \partial^\beta A^\alpha \frac{dx_\beta}{d\tau} = U_\beta \partial^\beta A^\alpha$$

e quindi sostituendo otteniamo:

$$\frac{d}{d\tau} m U^\alpha = \frac{q}{c} U_\beta (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \frac{q}{c} U_\beta F^{\alpha\beta}$$

ovvero le equazioni del moto. Analogamente possiamo definire l'hamiltoniana:

$$H = U^\alpha P_\alpha + \mathcal{L} = - \left[U^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\alpha} - \mathcal{L} \right] = \left(U^\alpha P_\alpha - \frac{1}{2} m U_\alpha U^\alpha - \frac{q}{c} U_\alpha A^\alpha \right)$$

ovvero⁸

$$H = \left[U_\alpha \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) - \frac{m}{2m^2} \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) \right]$$

e in conclusione

$$H = \frac{1}{2m} \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) \quad (5.17)$$

Verifichiamo che da una hamiltoniana del genere discendono le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P^\alpha} &= \frac{1}{m} \left(P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) = U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \\ -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2m} \cdot 2 \frac{q}{c} \left(P_\beta - \frac{q}{c} A_\beta \right) \partial^\alpha A^\beta = U_\beta \cdot \frac{q}{c} \partial^\alpha A^\beta \end{aligned}$$

mentre

$$\frac{d}{d\tau} P^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(m U^\alpha + \frac{q}{c} A^\alpha \right) = \frac{d}{d\tau} (m U^\alpha) + \frac{q}{c} U_\beta \partial^\beta A^\alpha$$

imponendo la condizione $\frac{dP^\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$ otteniamo:

$$\frac{d}{d\tau} (m U^\alpha) + \frac{q}{c} U_\beta \partial^\beta A^\alpha = U_\beta \cdot \frac{q}{c} \partial^\alpha A^\beta$$

da cui

$$\frac{d}{d\tau} (m U^\alpha) = \frac{q}{c} U_\beta (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \frac{q}{c} U_\beta F^{\alpha\beta}$$

⁷il segno meno è a causa della metrica particolare del quadrispazio

⁸ricordando che $U^\alpha = \frac{p^\alpha}{m} = \frac{P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha}{m}$

5.2 Descrizione Lagrangiana dei campi

Abbiamo affrontato or ora una descrizione lagrangiana del moto di una particella relativistica. Possiamo adottare una descrizione simile per quanto riguarda i campi elettromagnetici. Possiamo quindi trovare una lagrangiana che attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange descriva il comportamento dei campi in presenza o meno di sorgenti. Occorre però operare delle sostituzioni nei confronti dell'approccio classico:

$$q_i(t) \rightarrow \phi_k(x^\alpha)$$

$$\dot{q}_i(t) \rightarrow \partial^\beta \phi_k(x^\alpha)$$

dove $\phi_k(x^\alpha)$ rappresenta il valore del k -esimo campo nel punto x^α , e $\partial^\beta \phi_k(x^\alpha)$ la sua derivata. Queste variabili prenderanno il posto delle posizioni e delle velocità generalizzate. Se supponiamo, nel caso classico, di avere un sistema di n particelle, la lagrangiana del sistema sarà:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i(q_i, \dot{q}_i)$$

per i campi l'analogo sarà:

$$\mathcal{L} = \int \ell(\phi_k, \partial^\beta \phi_k) d\mathbf{x}$$

dove ℓ è la *Densità di Lagrangiana*. L'integrale d'azione assume quindi la forma:

$$A = \iint \ell d\mathbf{x} dt = \int \ell d^4x \quad (5.18)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \rightarrow \quad \partial^\beta \frac{\partial \ell}{\partial (\partial^\beta \phi_k)} = \frac{\partial \ell}{\partial \phi_k} \quad (5.19)$$

Nel caso elettromagnetico i campi ϕ_k si identificano con gli A^α ($k \rightarrow \alpha$) e le velocità generalizzate sono le varie $\partial^\beta A^\alpha$.

Osserviamo che essendo d^4x un invariante, affinché A sia invariante, deve esserlo anche ℓ . Per analogia al caso classico ci aspettiamo che ℓ dipenda in qualche modo solo dalle $\partial^\beta A^\alpha$ oppure, meglio ancora, da qualche loro particolare combinazione, ad esempio $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$. In questo caso quali invarianti possiamo costruire utilizzando $F^{\alpha\beta}$?

- $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ è un invariante.
- $F^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ è uno pseudo-scalare⁹, quindi non è adatto ai nostri scopi.
- $\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ è un invariante¹⁰.

Andando a rivedere la forma dei tensori $F^{\alpha\beta}$ (4.11) e $F_{\alpha\beta}$ (4.12) svolgiamo il calcolo:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= -E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 - E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 - E_y^2 + B_z^2 + B_x^2 - E_z^2 + B_y^2 + B_x^2 = \\ &= 2(B^2 - E^2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

mentre

$$F^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

per quanto riguarda $\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ invece:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\epsilon\xi} F^{\epsilon\xi}$$

occorre prima esaminare attentamente il prodotto $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\epsilon\xi}$. Prendendo bene in esame i casi possibili (che a conti fatti sono solo 6)¹¹ otteniamo:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\epsilon\xi} = -2(\delta^\gamma_\epsilon \delta^\delta_\xi - \delta^\gamma_\xi \delta^\delta_\epsilon) \quad (5.21)$$

⁹a causa della presenza di $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$

¹⁰ $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è presente in entrambi i fattori, quindi quando effettuiamo un'inversione degli assi il segno di $\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$ non cambia

¹¹sarebbero in realtà 12, ma se ci restringiamo al caso $\gamma < \epsilon$ e $\delta < \xi$ sono solo 6 e gli altri 6 sono perfettamente uguali

quindi, utilizzando la (5.21) possiamo ottenere

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(-2)(\delta^\gamma_\epsilon\delta^\delta_\xi - \delta^\gamma_\xi\delta^\delta_\epsilon)F_{\gamma\delta}F^{\epsilon\xi}$$

che, sommando su ϵ e ξ , riduciamo a

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} - F_{\gamma\delta}F^{\delta\gamma}) \stackrel{F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}}{=} -F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} \quad (5.22)$$

Quindi non abbiamo molta scelta, la lagrangiana di campo libero dovrà necessariamente dipendere da $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

Per quanto riguarda la parte della lagrangiana relativa alle interazioni dovrà dipendere necessariamente¹² da $J^\alpha A_\alpha$ (che svolge lo stesso ruolo che aveva $A^\alpha U_\alpha$ nella lagrangiana di una particella). Per una particella carica puntiforme situata in $\mathbf{x}_0$ abbiamo che:

$$J^\alpha = \frac{q}{\gamma}U^\alpha\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.23)$$

dove $\delta(\mathbf{x})$ è la *delta di Dirac*¹³

Possiamo quindi sommare le due parti di lagrangiana (moltiplicate per opportuni coefficienti) per ottenere:

$$\ell = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J^\alpha A_\alpha \quad (5.24)$$

dove i coefficienti inseriti hanno lo scopo di dare accordo tra la lagrangiana (5.24) e le equazioni di Maxwell. Possiamo inoltre esplicitare i campi nella (5.24) ottenendo:

$$\ell = -\frac{1}{16\pi}g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}(\partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma A^\mu)(\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - \frac{1}{c}J^\alpha A_\alpha \quad (5.25)$$

Per questa lagrangiana le equazioni di Eulero-Lagrange sono¹⁴:

$$\frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi}g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}(\delta^\mu_\beta\delta^\sigma_\alpha F^{\lambda\nu} - \delta^\sigma_\beta\delta^\mu_\alpha F^{\lambda\nu} + \delta^\lambda_\beta\delta^\nu_\alpha F^{\mu\sigma} - \delta^\nu_\beta\delta^\lambda_\alpha F^{\mu\sigma})$$

sommiamo su μ , σ , λ e ν per ottenere¹⁵:

$$\frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi}(g_{\lambda\beta}g_{\nu\alpha}F^{\lambda\nu} - g_{\nu\beta}g_{\lambda\alpha}F^{\lambda\nu} + g_{\beta\mu}g_{\alpha\sigma}F^{\mu\sigma} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}F^{\mu\sigma})$$

ovvero, sommando ulteriormente sui suddetti indici:

$$\frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi}(F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{4\pi}F_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta}$$

mentre

$$\frac{\partial\ell}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c}J_\alpha$$

quindi otteniamo:

$$\partial^\beta \frac{\partial\ell}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = \frac{\partial\ell}{\partial A^\alpha} \Rightarrow \frac{1}{4\pi}\partial^\beta F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}J_\alpha$$

ovvero le equazioni di Maxwell non omogenee.

Sorge spontaneo chiedersi come mai le equazioni di Eulero-Lagrange forniscano unicamente le equazioni di Maxwell non omogenee, ma non quelle omogenee. La risposta a questa domanda è che in questa formulazione le equazioni di Maxwell omogenee sono già automaticamente soddisfatte! Infatti

$$\partial^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\partial^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial^\gamma A^\delta - \partial^\delta A^\gamma)$$

¹²per gli stessi motivi di cui sopra ℓ non può dipendere dalla posizione

¹³vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_delta_di_Dirac

¹⁴ricordando che $\frac{\partial(\partial^\gamma A^\delta)}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = \delta^\gamma_\beta\delta^\delta_\alpha$

¹⁵notare che l'effetto sulla somma delle varie δ è quello di sostituire gli indici

ora soffermiamoci a considerare cosa succede durante la somma sugli indici γ e δ . Rispetto a questi due indici sia $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ che $F^{\gamma\delta}$ sono antisimmetrici, quindi quando durante la somma i due indici si scambiano i valori otteniamo un termine che è equivalente a quella di partenza, per cui possiamo scrivere

$$\partial^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} 2\partial^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial^\gamma A^\delta)$$

ma grazie alla non-dipendenza di $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dalle coordinate otteniamo:

$$\partial^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\alpha \partial^\gamma A^\delta = 0$$

Spiegherò in breve l'ultimo passaggio. Per definizione il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è antisimmetrico rispetto ad ogni coppia dei suoi indici, in particolare rispetto ad α e γ . D'altra parte la quantità $\partial^\alpha \partial^\gamma A^\delta$ è simmetrica rispetto ad α e γ come conseguenza del Teorema di Schwartz¹⁶. Il risultato è la contrazione di un tensore antisimmetrico con uno simmetrico. Durante questa somma quando i due indici coinvolti si scambiano i valori otteniamo una quantità uguale in modulo ma di segno opposto, per cui scrivendo per esteso tutta la somma troviamo coppie di termini che si annullano a vicenda, rendendo nulla *l'intera somma!*. Questa proprietà della contrazione tra un tensore simmetrico e uno antisimmetrico ci tornerà spesso utile in seguito.

Consideriamo le equazioni di Maxwell non omogenee e applichiamo ad entrambi i membri l'operatore della quadridivergenza¹⁷:

$$\frac{1}{4\pi} \partial^\alpha \partial^\beta F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} \partial^\alpha J_\alpha = 0$$

abbiamo così ottenuto l'equazione di continuità della corrente.

Come nel caso della lagrangiana di una particella anche nel caso della lagrangiana dei campi appare una dipendenza esplicita dal potenziale A^α il che non garantisce a priori una invarianza dell'azione per trasformazioni di gauge. Come prima consideriamo una trasformazione di gauge della forma

$$A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$$

per cui la variazione della densità di lagrangiana è

$$\Delta \ell = -\frac{1}{c} J_\alpha \partial^\alpha \Lambda$$

consideriamo di aggiungere a $\Delta \ell$ un termine identicamente nullo, ad esempio¹⁸ $-\frac{1}{c} \Lambda \partial^\alpha J_\alpha$. Otteniamo quindi

$$\Delta \ell = -\frac{1}{c} (J_\alpha \partial^\alpha \Lambda + \Lambda \partial^\alpha J_\alpha) = -\frac{1}{c} \partial^\alpha (\Lambda J_\alpha)$$

per cui la corrispondente variazione dell'azione A è:

$$\Delta A = \int \Delta \ell d^4x = \int \partial^\alpha (\Lambda J_\alpha) d^4x$$

Nell'ultimo membro abbiamo l'analogo della divergenza di un campo vettoriale integrata su tutto lo spazio, solo che in quattro dimensioni invece delle solite tre. Possiamo pensare di applicare il Teorema della divergenza¹⁹ per trasformare l'integrale su tutto lo spazio in un integrale su una superficie posta all'infinito ottenendo un termine del tipo:

$$\Delta A = \int_S \Lambda J_\alpha dS^\alpha$$

A questo punto entra in gioco la definizione di δA per cui essa è la variazione di A calcolata su tutti i cammini con estremi fissi. Dal momento che l'azione è un integrale su tutto il quadrispazio, gli estremi dei cammini che dobbiamo prendere in considerazione nel calcolo di δA sono situati proprio su una superficie all'infinito e sono *fissi* per quanto detto poco fa. Quindi nel calcolare $\delta A' = \delta A + \delta \Delta A$ dobbiamo calcolare le variazioni di un oggetto calcolato sugli estremi dei cammini di integrazione, che sono identicamente nulle, per cui possiamo riassumere che $\delta A' = \delta A$ e che le equazioni di Eulero-Lagrange sono invarianti per trasformazioni di gauge, proprio come dovrebbe essere.

¹⁶vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Schwartz

¹⁷e sfruttiamo di nuovo la proprietà scoperta poco fa, qui il tensore $\partial^\alpha \partial^\beta$ è simmetrico, mentre $F_{\alpha\beta}$ è antisimmetrico

¹⁸il termine è identicamente nullo a grazie all'equazione di continuità della carica

¹⁹vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_della_divergenza

5.3 La Lagrangiana di Proca e il fotone massivo

Finora abbiamo sviluppato questo tipo di formulazione sempre assumendo che il fotone abbia massa nulla, così la lagrangiana (5.24) e le tradizionali equazioni di Maxwell sono fondate su questa ipotesi. Il primo a prendere in considerazione l'ipotesi di un fotone massivo fu **Alexandru Proca** formulando la seguente *Lagrangiana di Proca*

$$\ell_P = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha + \frac{\mu^2}{8\pi}A_\alpha A^\alpha \quad (5.26)$$

con $\mu = \frac{m\gamma c}{\hbar}$

Le equazioni del moto sono:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c}J_\alpha$$

Deriviamo le equazioni del moto rispetto alle coordinate e imponiamo la condizione derivante dalla conservazione della carica²⁰ per ottenere

$$\partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 \partial^\alpha A_\alpha = \frac{4\pi}{c} \partial^\alpha J_\alpha = 0$$

ovvero²¹

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0$$

Allora le equazioni del moto assumono la forma²²

$$\square A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c}J_\alpha \quad (5.27)$$

se A_α rappresenta un'onda piana, allora è della forma $A_\alpha = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}e^{-i\omega t}$ da cui consegue che $\omega^2 = c^2k^2 + \mu^2c^2$ e l'energia sarà quindi espressa dalla formula:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = \hbar\sqrt{c^2k^2 + \mu^2c^2} = \sqrt{\hbar^2\mu^2c^2 + c^2\hbar^2k^2}$$

che somiglia molto alla relazione tra energia e impulso (2.31) dalla quale potremmo concludere che

$$m = \frac{\mu\hbar}{c}$$

Supponiamo per semplicità che il sistema non dipenda dal tempo, e che la particella sia ferma. Allora la (5.27) diventa:

$$\nabla^2 A_\alpha - \mu^2 A_\alpha = -\frac{4\pi}{c}J_\alpha \quad (5.28)$$

con $J_0 = c\rho\delta(\mathbf{x})$ e $J_i = 0$.²³ Una soluzione di questa equazione è il potenziale di *Yukawa*

$$\Phi = q\frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (5.29)$$

Il termine esponenziale nel potenziale di Yukawa imporrebbe delle deviazioni del campo magnetico terrestre da quella che è la forma prevista dal potenziale elettrostatico classico. Attraverso misure di geomagnetismo si è stabilito un limite superiore per la massa del fotone:

$$m_\gamma < 10^{-48} g$$

il quale è una prova piuttosto forte a favore dell'ipotesi di un fotone di massa nulla.

Verifichiamo ora che il potenziale (5.29) è soluzione della (5.28).

$$\nabla^2 \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla^2 (e^{-\mu r}) + e^{-\mu r} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) + 2 \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla (e^{-\mu r})$$

ricordando che:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{r} \quad \nabla (e^{-\mu r}) = -\mu e^{-\mu r} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

²⁰ovvero $\partial^\alpha J_\alpha = 0$

²¹sempre a causa delle considerazioni di simmetria-antisimmetria di $\partial^\alpha \partial^\beta F_{\alpha\beta}$

²²ricordando che $\partial^\beta F_{\alpha\beta} = \partial^\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial^\beta \partial_\alpha A_\beta = \square A_\alpha$

²³utilizzeremo sempre i per denotare gli indici spaziali 1,2,3

e quindi

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla (e^{-\mu r}) = \mu \frac{e^{-\mu r}}{r^2}$$

mentre

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2(e^{-\mu r}) &= \nabla \cdot [\nabla(e^{-\mu r})] = -\nabla \cdot \left(\mu \frac{e^{-\mu r}}{r} \mathbf{r} \right) = \\ &= (-\mu)^2 e^{-\mu r} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \mu e^{-\mu r} \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \mathbf{r} \right) - 3\mu \frac{e^{-\mu r}}{r^2} = \mu^2 e^{-\mu r} - 2\mu \frac{e^{-\mu r}}{r^2} \end{aligned}$$

riassumendo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) &= \frac{1}{r} \mu^2 e^{-\mu r} - 2\mu \frac{e^{-\mu r}}{r^2} - e^{-\mu r} \cdot 4\pi\delta(\mathbf{r}) + 2\mu \frac{e^{-\mu r}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{r} \mu^2 e^{-\mu r} - e^{-\mu r} \cdot 4\pi\delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

sostituendo nella (5.28) verifichiamo facilmente che Φ è soluzione²⁴

5.4 Descrizione Hamiltoniana dei campi

Nello stesso modo in cui abbiamo definito una densità di lagrangiana ℓ per i campi, possiamo definire una *densità di hamiltoniana* $\mathcal{H}$ tale che

$$H = \int \mathcal{H} d\mathbf{x} \quad (5.30)$$

Per quanto detto precedentemente a riguardo dell'hamiltoniana di una particella carica, anche in questo caso ci aspettiamo che H sia la componente tempo di un quadrivettore. Inoltre poichè $d^4x = dx_0 d\mathbf{x}$ è un invariante, affinché H sia la componente tempo di un quadrivettore, allora è necessario che a sua volta $\mathcal{H}$ sia la componente tempo-tempo di un tensore di rango 2.

Come prima le variabili sono le $\phi_k(x)$ e le $\partial^\beta \phi_k(x)$. Definiamo:

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\partial \ell}{\partial \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial t} \right)} \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \ell \quad (5.31)$$

è lecito allora costruire il tensore di rango 2

$$T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k - g^{\alpha\beta} \ell \quad (5.32)$$

chiamato *tensore canonico degli sforzi*.

Cerchiamo di ricavare l'energia e l'impulso del campo elettromagnetico.

$$\ell_{em} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

da questa lagrangiana il tensore degli sforzi è²⁵

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \ell_{em}}{\partial (\partial_\alpha A^\lambda)} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} \ell_{em} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\beta A^\lambda - g^{\alpha\beta} \ell_{em}$$

ricordando che $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ possiamo riscrivere ℓ_{em} come:

$$\ell_{em} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

il che ci permette di scrivere esplicitamente $T^{\alpha\beta}$. Iniziamo dalla componente T^{00} :

$$T^{00} = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{4\pi} F_{0\lambda} \partial^0 A^\lambda = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{4\pi} (E_x \partial^0 A^1 + E_y \partial^0 A^2 + E_z \partial^0 A^3)$$

²⁴ricordiamo che il termine $e^{-\mu r} \cdot 4\pi\delta(\mathbf{r})$ è sempre nullo a meno che non sia $\mathbf{r} = 0$ in tal caso otteniamo proprio ciò che cercavamo

²⁵ricordando che $\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{4\pi} F^\beta_\alpha$

ricordando che $\mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$ scriviamo:

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \left[\left(E_x + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) E_x + \left(E_y + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) E_y + \left(E_z + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) E_z \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi \end{aligned}$$

possiamo anche notare che dal momento che nel vuoto $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ allora

$$\nabla(\Phi \mathbf{E}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{E} \cdot \nabla \Phi$$

e riscrivere:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \nabla(\Phi \mathbf{E})$$

Mentre per $i = 1, 2, 3$ abbiamo²⁶

$$T^{0i} = -\frac{1}{4\pi} F_{0\lambda} \partial^i A^\lambda = -\frac{1}{4\pi} (E_x \partial^i A^1 + E_y \partial^i A^2 + E_z \partial^i A^3)$$

ricordiamo che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{i}(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2) + \hat{j}(\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3) + \hat{k}(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1)$ e quindi in particolare²⁷

$$T^{01} = \frac{1}{4\pi} [E_x \partial_1 A^1 + E_y (B_z + \partial_2 A^1) + E_z (\partial_3 A^1 - B_y)] = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \nabla A_1 + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_1]$$

allo stesso modo, e ricordando che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ nel vuoto, abbiamo

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} \left[\nabla (A^i \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \right]$$

Calcoliamo ora T^{10}

$$\begin{aligned} T^{10} &= \frac{1}{4\pi} F_{1\lambda} \partial^0 A^\lambda = \frac{1}{4\pi} (-E_x \partial^0 A^0 - B_z \partial^0 A^2 + B_y \partial^0 A^3) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[-E_x \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + B_z (E_y + \partial_2 \Phi) + B_y (-E_z - \partial_3 \Phi) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^1 - \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi E_x) + \frac{\partial E_x}{\partial x_0} \Phi + \partial_2 (B_z \Phi) - \Phi \partial_2 B_z - \partial_3 (B_y \Phi) + \Phi \partial_3 B_y \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^1 - \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi E_x) + \Phi \frac{\partial E_x}{\partial x_0} + [\nabla \times (\Phi \mathbf{B})]^1 - \Phi (\nabla \times \mathbf{B})^1 \right\} \end{aligned}$$

sfruttando il fatto che nel vuoto $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B}$ possiamo riscrivere T^{i0}

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i - \frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi E^i) + [\nabla \times (\Phi \mathbf{B})]^i \right\}$$

Supponendo che i campi tendano a 0 nel limite di $x^\alpha \rightarrow +\infty$ (il che è sempre lecito dato che i campi viaggiano ad una velocità finita, per cui ad un dato istante la regione in cui i campi sono diversi da 0 è sempre racchiusa da una sfera) possiamo esprimere l'energia del campo come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{campo} &= \int_{\mathbb{R}^3} T^{00} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \nabla(\Phi \mathbf{E}) \right] d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\Phi \mathbf{E}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Stokes possiamo riscrivere l'ultimo termine come un integrale di superficie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\Phi \mathbf{E}) d\mathbf{x} = \int_S \Phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

²⁶ricordando anche che $g^{0\alpha} \neq 0$ solo per $\alpha = 0$

²⁷ $\partial^i A^\beta = -\partial_i A^\beta$

dove la superficie S è una superficie chiusa posta all'infinito, ove i campi hanno valore nullo, per cui anche l'integrale varrà 0, riotteniamo infatti

$$\mathcal{E}_{campo} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{x}$$

possiamo quindi definire l'*impulso del campo* attraverso la seguente relazione:

$$(c\mathbf{P}_{campo})_i = \int_{\mathbb{R}^3} T^{0i} d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i d\mathbf{x}$$

(un procedimento analogo a quello di poco fa è stato utilizzato nel calcolo dell'integrale di T^{0i})

5.4.1 Il teorema di Poynting

Dall'elettromagnetismo classico conosciamo il *Teorema di Poynting*²⁸

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (5.33)$$

dove u è la densità di energia del campo elettromagnetico ed $\mathbf{S}$ il vettore di Poynting.

Cerchiamo una espressione covariante di tale teorema, che ci fornisca quindi una legge di conservazione.

Iniziamo col calcolare la quantità

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T^{\alpha 0} &= \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = \\ &= \partial_0 \left[\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right] + \partial_0 \left[\frac{1}{4\pi} \nabla(\Phi \mathbf{E}) \right] + \partial_i \left[\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \right] - \frac{1}{4\pi} \partial_i \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (\Phi E^i) \right] + \partial_i \left\{ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (B\Phi)]^i \right\} \end{aligned}$$

semplificando i vari termini²⁹ otteniamo:

$$\partial_\alpha T^{\alpha 0} = \partial_0 \left[\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right] + \partial_i \left[\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \right]$$

Per ottenere l'espressione del teorema di Poynting dovremmo quindi avere che $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Verifichiamolo:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_k \partial_\alpha \left[\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial^\beta \phi_k \right] - \partial^\beta \ell = \sum_k \left\{ \partial_\alpha \left[\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \right] \partial^\beta \phi_k + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial_\alpha \partial^\beta \phi_k - \partial^\beta \ell \right\}$$

Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange (5.19) otteniamo³⁰:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{\partial \ell}{\partial \phi_k} \partial^\beta \phi_k + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial_\alpha \partial^\beta \phi_k - \partial^\beta \ell = 0$$

Questa equazione è verificata per qualsiasi β ed in particolare per $\beta = 0$ riotteniamo il teorema di Poynting.

La condizione $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ è una legge di conservazione *locale*, per cercare di ottenerne una *globale* dovremmo quindi integrarla su tutto l'ordinario spazio euclideo:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_\alpha T^{\alpha\beta} d\mathbf{x} = \partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} T^{0\beta} d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i T^{i\beta} d\mathbf{x}$$

Utilizziamo il procedimento di sfruttare il teorema della divergenza sul secondo integrale (procedimento che ormai dovrebbe esserci ben chiaro ed immediato) per ottenere

$$\partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} T^{0\beta} d\mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{campo} = 0 \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{campo} = 0 \quad (5.34)$$

Purtroppo una legge di conservazione così espressa è corretta ma non covariante. Dobbiamo quindi costruire espressioni di $\mathcal{E}$ e $\mathbf{p}$ che risultino covarianti e che si riducano a quelle che conosciamo.

²⁸vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Poynting

²⁹possiamo invertire l'ordine di derivazione nel secondo termine, il quali poi si annulla con il quarto, mentre il quinto termine è identicamente nullo grazie alla proprietà $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$

³⁰Ricordando che ℓ viene derivato sia rispetto a ϕ_k che a $\partial_\alpha \phi_k$ si ha $\partial^\beta \ell = \frac{\partial \ell}{\partial \phi_k} \partial^\beta \phi_k + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \phi_k)} \partial_\alpha \partial^\beta \phi_k$

Nel sistema k' sappiamo che

$$\mathcal{E}'_c = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2) d\mathbf{x}' \quad \mathbf{p}'_c = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') d\mathbf{x}'$$

e possiamo ipotizzare che siano le componenti di tipo tempo ($\alpha = 0$) di un tensore $\Theta^{\alpha\beta}$ che contraiamo con un quadrivettore $d\sigma_\beta$ in modo che l'espressione $\int \Theta^{\alpha\beta} d\sigma_\beta$ si riduca in k' agli integrali di cui sopra³¹. Il quadrivettore che stiamo cercando può essere scritto come:

$$d\sigma^\beta = n^\beta d^3\sigma \quad \text{con } n^\beta = (1, 0, 0, 0)$$

dove $d^3\sigma$ è un elemento infinitesimo di ipersuperficie (o elemento di area tridimensionale) da prendersi su un iperpiano di tipo spazio.³² Possiamo invertire la definizione di $d\sigma_\beta$ moltiplicando per n_β e ottenere

$$d^3\sigma = n_\beta d\sigma^\beta = n_\beta n^\beta d^3\sigma$$

da cui ricaviamo che $d^3\sigma$ è un invariante, e vale precisamente $d\mathbf{x}'$ (per le considerazioni che abbiamo fatto poc'anzi riguardo al sistema k'). Possiamo calcolare le componenti di n^β nel sistema di riferimento k utilizzando le (1.8):

$$\begin{cases} n^0 = \gamma (n'^0 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}') \\ n^i = \gamma \beta^i n'^0 + n'^i + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}') \beta^i \end{cases}$$

ovvero, tenendo conto del fatto che $\mathbf{n}' = 0$

$$n^\beta = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$$

Quindi otterremmo

$$\int \Theta^{\alpha\beta} d\sigma_\beta = \int \Theta^{\alpha\beta} n_\beta d^3\sigma = \int \Theta^{\alpha 0} d\mathbf{x}'$$

integrale che corrisponderebbe agli integrali da noi cercati, a patto di definire opportunamente il tensore $\Theta^{\alpha\beta}$

$$cP^\alpha = \int \Theta^{\alpha 0} \gamma d\mathbf{x}' + \int \Theta^{\alpha i} \gamma \beta^i d\mathbf{x}'$$

Però così facendo abbiamo scelto un particolare sistema di riferimento k' in cui $\mathcal{E}$ e $\mathbf{p}$ hanno le espressioni da noi desiderate. Scegliamo invece il riferimento in cui l'impulso del campo è nullo $k^{(0)}$. Per definizione avremo

$$\mathbf{p}^{(0)} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{E}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(0)} d^3x^{(0)} = 0$$

$$\mathcal{E} = m^* c^2 = \int \frac{1}{8\pi} \left[\left(\mathbf{E}^{(0)} \right)^2 + \left(\mathbf{B}^{(0)} \right)^2 \right] d^3x^{(0)}$$

Le espressioni di cP^α di cui sopra contengono $d\mathbf{x}'$, dobbiamo quindi riferire tutto al sistema di riferimento corrente, quindi ricordando che d^4x è un invariante la sostituzione da effettuare è $d\mathbf{x}' = \gamma d\mathbf{x}$.

Il tensore $T^{\alpha\beta}$ ci fornisce delle leggi di conservazione sulle quali però potremmo nutrire delle riserve. Innanzi tutto le componenti $T^{0\beta}$ non rappresentano esattamente le espressioni che compaiono negli integrandi di $\mathcal{E}$ e $\mathbf{p}$, inoltre, per ragioni che vedremo poco più avanti, non siamo soddisfatti del fatto che generalmente il tensore $T^{\alpha\beta}$ non è simmetrico. Oltre a tutto ciò sorgono problemi quando cerchiamo di definire un «momento angolare» del campo attraverso l'espressione

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x$$

Ma prima di giungere a ciò poniamo per semplicità

$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$	Densità di energia
$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$	Densità di impulso
$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}$	Densità di momento angolare
$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$	Vettore di Poynting

³¹in sostanza stiamo costruendo un quadrivettore $d\sigma_\beta$ appositamente in modo che in k' gli integrali abbiamo la stessa espressione che già conosciamo, ma che in altri sistemi di riferimento trasformi la legge di conservazione in maniera covariante

³²ovvero un iperpiano i cui vettori tangenti sono tutti di tipo spazio

Una notazione del genere renderà i calcoli più semplici più avanti. Torniamo al momento angolare del campo. Vorremmo che esso fosse espresso da una definizione covariante attraverso un tensore $M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta}x^\gamma - T^{\alpha\gamma}x^\beta$ in modo che $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$ esprima la conservazione di $\mathbf{L}$.

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha (T^{\alpha\beta}x^\gamma) - \partial_\alpha (T^{\alpha\gamma}x^\beta) = (\partial_\alpha T^{\alpha\beta})x^\gamma + T^{\alpha\beta}(\partial_\alpha x^\gamma) - (\partial_\alpha T^{\alpha\gamma})x^\beta + T^{\alpha\gamma}(\partial_\alpha x^\beta)$$

Ricordando che $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ e che $\partial_\alpha x^\beta = \delta_\alpha^\beta$ otteniamo

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = T^{\alpha\beta}\delta_\alpha^\gamma - T^{\alpha\gamma}\delta_\alpha^\beta = T^{\gamma\beta} - T^{\beta\gamma}$$

E' chiaro ora che la non simmetria di $T^{\alpha\beta}$ non è cosa gradita, dal momento che impedisce una eventuale conservazione del momento angolare del campo. Cerchiamo di proseguire supponendo invece che $T^{\alpha\beta}$ sia simmetrico, allora

$$0 = \int [\partial_\alpha (T^{\alpha\beta}x^\gamma) - \partial_\alpha (T^{\alpha\gamma}x^\beta)] d\mathbf{x} = \int \partial_0 (T^{0\beta}x^\gamma - T^{0\gamma}x^\beta) d\mathbf{x} + \int \partial_i (T^{i\beta}x^\gamma - T^{i\gamma}x^\beta) d\mathbf{x}$$

Il secondo integrale ha valore nullo (sfruttando al solito modo il teorema della divergenza)

$$\frac{d}{dt} \int (T^{0\beta}x^\gamma - T^{0\gamma}x^\beta) d\mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int (T^{0i}x^j - T^{0j}x^i) d\mathbf{x} = 0$$

Se T^{0i} e T^{0j} fossero del tipo di $\mathbf{g}$ allora avremmo la conservazione di $\mathbf{L}$, ma sorge un ennesimo problema: $T^{\alpha\beta}$ non è invariante per trasformazioni di gauge!

Adesso, riprendendo la definizione di $T^{\alpha\beta}$ per il campo elettromagnetico, effettuiamo la sostituzione $\partial^\beta A^\lambda = -F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda A^\beta$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta$$

Notiamo che il primo addendo è simmetrico rispetto agli indici α e β , infatti

$$g^{\beta\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\alpha} = F^\beta{}_\lambda F^{\lambda\alpha} = F^{\beta\lambda} F_\lambda{}^\alpha = F^{\beta\lambda} F_{\lambda\mu} g^{\mu\alpha} = g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}$$

La simmetria non è consentita unicamente dalla presenza dell'ultimo termine in $T^{\alpha\beta}$, chiamiamo l'ultimo termine

$$T_D^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\lambda\mu} \partial^\lambda A^\beta = \frac{1}{4\pi} F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta$$

Consideriamo il caso in assenza di sorgenti elettromagnetiche, questo ci permette di aggiungere un termine a valore nullo, che ci permette di semplificare l'espressione:

$$T_D^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (F^{\lambda\alpha} \partial_\lambda A^\beta + A^\beta \partial_\lambda F^{\lambda\alpha}) = \frac{1}{4\pi} \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta)$$

Questo termine aggiuntivo ha due proprietà particolari. La prima è la seguente:

$$\partial_\alpha T_D^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta) = 0$$

a causa della contrazione tra un tensore simmetrico ed uno antisimmetrico. La seconda proprietà è la seguente:

$$\int_{\mathbb{R}^3} T_D^{\alpha\beta} d\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_\lambda (F^{\lambda\alpha} A^\beta) d\mathbf{x} \stackrel{(F^{00}=0)}{\stackrel{\downarrow}{=}} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_i (F^{i\alpha} A^\beta) d\mathbf{x} = 0$$

Possiamo quindi dedurre che il tensore $T_D^{\alpha\beta}$ non influisce minimamente sulle leggi di conservazione, e ciò ci fornisce un valido candidato al ruolo del tensore $\Theta^{\alpha\beta}$, ovvero

$$\Theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T_D^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

chiamato anche *Tensore simmetrico degli sforzi*. Tutte le leggi di conservazione sono rispettate anche per questo tensore, inoltre esso soddisfa un'altra interessante proprietà:

$$\Theta^\alpha{}_\alpha = \text{tr} \Theta = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\alpha + \frac{1}{4} g^\alpha{}_\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \stackrel{(g^\alpha{}_\alpha=4)}{\stackrel{\downarrow}{=}} \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} F^{\nu\mu}) = 0$$

Le componenti di $\Theta^{\alpha\beta}$ sono:

$$\begin{aligned}\Theta^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & \Theta^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \\ \Theta^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^i{}_\lambda F^{\lambda j} + \frac{1}{4} (-\delta^i{}_j) F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^i{}_j (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right]\end{aligned}$$

Dimostriamolo (solo per la componente 11)

$$\begin{aligned}\Theta^{11} &= \frac{1}{4\pi} \left[-E_x^2 + B_z^2 + B_y^2 - \frac{1}{4} \cdot 2 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[E_x^2 + B_x^2 - \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[E_x^2 + B_x^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right]\end{aligned}$$

Possiamo semplificare considerando il fatto che il tensore $\Theta^{\alpha\beta}$ può essere raffigurato a blocchi:

$$\Theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & c\mathbf{g} \\ c\mathbf{g}^t & -T_{ij}^{(M)} \end{pmatrix}$$

dove $-T_{ij}^{(M)}$ è il *Tensore degli sforzi di Maxwell*.

Se poi definiamo $M^{\alpha\beta\gamma} = \Theta^{\alpha\beta} x^\gamma - \Theta^{\alpha\gamma} x^\beta$ tutte le considerazioni precedenti sul tensore $M^{\alpha\beta\gamma}$ acquistano un senso.

Le suddette leggi di conservazione, ottenute attraverso il tensore $\Theta^{\alpha\beta}$ sono:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \Theta^{00} + \partial_i \Theta^{i0} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(c\mathbf{g}) = 0$$

e

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_0 \Theta^{0i} + \partial_j \Theta^{ji} = \frac{\partial g_i}{\partial t} - \partial_j T_{ij}^{(M)} = 0$$

quest'ultima in particolare rappresenta la conservazione dell'impulso del campo.

Altre leggi di conservazione locale derivano dal tensore $M^{\alpha\beta\gamma}$. Abbiamo già visto che una di queste leggi è $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$, che in particolare ci dà

$$\begin{aligned}\partial_\alpha M^{\alpha ij} &= \partial_0 (\Theta^{0i} x^j - \Theta^{0j} x^i) + \partial_k (\Theta^{ki} x^j - \Theta^{kj} x^i) = \\ &= \partial_0 (c g^i x^j - c g^j x^i) + \partial_k (T_{ki}^{(M)} x^j - T_{kj}^{(M)} x^i) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{g} \times \mathbf{x})_l - \partial_k \left(\vec{T} \times \mathbf{x} \right)_{kl} &= \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + \nabla \left(\vec{T} \times \mathbf{x} \right) = 0\end{aligned}$$

ovvero la conservazione del momento angolare del campo. Consideriamo ora la parte $\partial_\alpha M^{\alpha 0\gamma} = 0$ ovvero:

$$\partial_0 (\Theta^{00} x^i - \Theta^{0i} x^0) + \partial_j (\Theta^{j0} x^i - \Theta^{ji} x^0) = 0$$

Integrando su tutto $\mathbb{R}^3$ attraverso il solito procedimento rimangono solo i contributi del primo termine, ossia:

$$\partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} u x^i d\mathbf{x} - \partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} (c\mathbf{g})_i x^0 d\mathbf{x} = 0$$

portiamo a secondo membro il secondo integrale e svolgiamo la derivata:

$$\partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} u x^i d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (c\mathbf{g})_i d\mathbf{x} + x^0 \partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} (c\mathbf{g})_i d\mathbf{x}$$

Analizziamo l'ultimo termine, utilizziamo la conservazione dell'impulso per scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_0 (c\mathbf{g})_i d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial g_i}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j T_{ij}^{(M)} d\mathbf{x} = 0$$

grazie al solito procedimento implicante il teorema della divergenza. Quindi ciò che rimane è

$$\partial_0 \int_{\mathbb{R}^3} u x^i d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (c\mathbf{g})_i d\mathbf{x}$$

Possiamo ora definire un vettore $\mathbf{X}$ che abbia un ruolo analogo alle coordinate del centro di massa di un sistema di punti massivi, ovvero nel nostro caso $\mathbf{X}$ sarà tale che

$$\mathbf{X} \int_{\mathbb{R}^3} u \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} u \, d\mathbf{x}$$

Ovvero, sostituendo nella formula di cui sopra e ricordando che $\frac{d}{dt} \int u \, d\mathbf{x} = 0$:

$$\partial_0 X_i \int_{\mathbb{R}^3} u \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (c\mathbf{g})_i \, d\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} \mathcal{E}_c = c^2 \mathbf{P}_c$$

che, per analogia con il caso classico, è il *teorema del moto del centro di massa*.³³

5.5 Campi in presenza di sorgenti

Finora abbiamo considerato il comportamento dei campi in assenza di sorgenti. Qualora volessimo includere la presenza di sorgenti nelle nostre formule, occorre aggiungere un termine alla densità di lagrangiana:

$$\ell = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \quad (5.35)$$

Manteniamo invariata la definizione del tensore $\Theta^{\alpha\beta}$, e ricalcoliamo $\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta}$

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha \left(g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right)$$

sommando sull'indice α otteniamo:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\mu (F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{4} \partial^\beta (F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \right] = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} \partial^\mu F^{\lambda\beta} + F^{\lambda\beta} \partial^\mu F_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} F_{\mu\lambda} \partial^\beta F^{\mu\lambda} \right)$$

ricordando che $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$ possiamo scrivere

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\lambda F^{\lambda\beta} = \frac{1}{8\pi} [F_{\mu\lambda} (2\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda})]$$

ora sfruttiamo le equazioni di Maxwell omogenee³⁴ per poter scrivere

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\lambda F^{\lambda\beta} = \frac{1}{8\pi} [F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\mu\beta})] = 0$$

a causa della contrazione tra un tensore simmetrico e uno antisimmetrico, e quindi riassumendo:

$$\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} J_\lambda F^{\beta\lambda} \quad (5.36)$$

La (5.36) può anche essere riscritta come:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{g}) \right] = -\frac{1}{c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(M)} = - \left[\rho E^i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k \right] \end{cases} \quad (5.37)$$

Il termine al secondo membro della prima equazione di (5.37) rappresenta una *densità di lavoro* del campo elettromagnetico, mentre possiamo riscrivere il termine al secondo membro della seconda equazione di (5.37) come:

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

che rappresenta la *densità di forza elettromagnetica*. Questo dovrebbe farci pensare che in generale è possibile definire un *quadrivettore forza* come

$$f^\alpha = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} J_\beta = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}; c\rho \mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})) \quad (5.38)$$

³³ $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$

³⁴ $\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\lambda} = 0$

Riconsideriamo ora per un attimo le equazioni del moto di una particella (5.1) e pensiamo ad un insieme di particelle cariche, per cui possiamo definire:

$$\rho = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) e_i$$

$$\mathbf{j} = \sum_i \mathbf{u}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) e_i$$

poniamo P_i il quadrimpulso della particella i -esima in modo da avere

$$\int_{\mathbb{R}^3} f^\alpha d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \sum_i (P_i)^\beta = \frac{d}{dt} P_{TOT}^\beta$$

Possiamo interpretare la prima equazione di (5.37) come

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} (\partial_\alpha \Theta^{\alpha\beta} + f^\beta) = \frac{d}{dt} P_{CAMP}^\beta + \frac{d}{dt} P_{PART.}^\beta = 0$$

In realtà una trattazione più completa di questo argomento richiederebbe nella lagrangiana due termini liberi: uno riguardante i campi, e uno riguardante le particelle; oltre ad un termine di interazione.