Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze M.F.N
Università di Trento

Fisica Matematica II
(Introduzione alla teoria delle equazioni alle Derivate Parziali del secondo ordine)

Corso di *Fisica Matematica II* per la Laurea Triennale in Matematica
Facoltà di Scienze MFN, Università di Trento,
anno accademico 2007-2008

Indice

Capitolo 1

Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari.

1.1 Introduzione.

Queste dispense sono relative al corso di Fisica Matematica II, tenuto dall'autore per il corso di Laurea Triennale in Matematica presso Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Trento. Lo scopo del corso è di introdurre gli studenti ai primi rudimenti della teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali. In particolare equazioni ellittiche ed iperboliche. I prerequisiti riguardano l'analisi matematica delle funzioni di più variabili e alcune nozioni elementari di teoria delle funzioni di variabile complessa.

L'autore ringrazia tutti gli studenti e le persone che hanno segnalato errori di vario genere ed hanno contribuito a migliorare le dispense con suggerimenti vari. Vorrei ringraziare in particolare (in ordine alfabetico): F. Franceschini e G. Stecca.

1.2 Notazioni e convenzioni.

Se f è una funzione definita sullo spazio topologico X, per esempio $\mathbb{R}^n$ oppure un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^n$, ed i valori di f sono assunti in $\mathbb{R}^n$, allora il **supporto di** f è , come ben noto, l'insieme:

$$\text{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} ,$$

dove, 0 indica il vettore nullo (o semplicemente lo zero se $n = 1$) e la chiusura è riferita alla topologia di X.

Definizione 1.1. Siano $n, m = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, 1, \ldots$ fissati e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e non vuoto.

(a) Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^n$ è detta essere **di classe** C^k, e si scrive in tal caso $f \in C^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$ o $C^k(\Omega;\mathbb{C}^n)$, rispettivamente, se tutte le derivate parziali (incluse quelle miste) delle componenti di f esistono e sono continue fino all'ordine k incluso. Si pone $C^k(\Omega) := C^k(\Omega;\mathbb{R})$.
(b) $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$ è detta di **classe** C^∞ se è di classe C^k per ogni $k = 0,1,\ldots$ e si definisce:

$$C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k=0,1,\ldots} C^k(\Omega;\mathbb{R}^n)\,, \quad C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^n) := \bigcap_{k=0,1,\ldots} C^k(\Omega;\mathbb{C}^n)\,.$$

Si pone $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$.
(c) In riferimento alle definizioni già date $C^k_0(\Omega;\mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C^k_0(\Omega)$), con $k = 0,1,\ldots,\infty$, indica l'insieme delle funzioni in $C^k(\Omega;\mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $C^k(\Omega)$) il cui *supporto*, riferito a Ω, è compatto. $\diamondsuit$

Diamo separatamente un'altra importante definizione che riguarda le funzioni differenziabili su un insieme ottenuto dalla chiusura di un aperto $\overline{\Omega}$ o, più in generale, su un insieme qualsiasi F.

Definizione 1.2. Siano $n, m = 1,2,\ldots$ e $k = 0,1,\ldots$ fissati e sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme qualsiasi (non vuoto). $f : F \to \mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$ è detta essere **di classe** C^k, con $k = 0,1,\ldots,\infty$ e si scrive in tal caso $f \in C^k(F;\mathbb{R}^n)$ (oppure $f \in C^k(F)$ se $m = 1$), quando f è la restrizione di una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k, dove $\Omega \supset F$ è un aperto non vuoto. $\diamondsuit$.

Nel caso in cui $F = [a,b] \subset \mathbb{R}$, si può provare che $f \in C^k(F)$ (o $f \in C^k(F;\mathbb{C})$ se la funzione è a valori complessi), se e solo se $f \in C^k((a,b)) \cap C^0([a,b])$ (risp. $f \in C^k((a,b);\mathbb{C}) \cap C^0([a,b];\mathbb{C})$) ed esistono finiti i limiti delle derivate, fino all'ordine k, in b e in a rispettivamente, tali limiti risultano coincidere con le derivate sinistre in b e destre in a rispettivamente.

1.3 Qualche motivazione fisico matematica ed un esempio.

In fisica molto spesso le leggi che descrivono la dinamica di un certo sistema fisico, ed in particolare certe grandezze differenziabili dipendenti dal tempo e dal posto, sono date in termini di *equazioni differenziali alle derivate parziali* tra queste grandezze. Una tale equazione è una (o più) relazione tra le derivate (in generale di ordine arbitrario) nello spazio e nel tempo delle grandezze considerate. Ci si aspetta che, assegnando qualche ulteriore informazione (dati iniziali e/o al contorno), le equazioni considerate ammettano una ed una sola soluzione.
L'importanza in fisica delle equazioni differenziali alle derivate parziali è evidente studiando la storia della fisica. Tale teoria permette di dare una formalizzazione adeguata delle equazioni fondamentiali che riguardano i sistemi fisici che hanno un'estensione non puntiforme e sono dunque descritti da funzioni del posto e del tempo (densità, campi di velocità, campi di forze,...). Tali sistemi non puntifirmi sono presenti in vari rami della fisica come la meccanica dei mezzi continui, la fluidodinamica, la teoria dei campi classica, relativistica e quantistica-relativistica.
Un capitolo importante sia dal punto di vista fisico che da quello matematico è quello che riguarda la teoria classica dell'*eletromagnetismo*. Nel diciannovesimo secolo la formalizzazione teorica

completa della teoria Elettromagnetica fu data da J. C. Maxwell. Le sue quattro equazioni differenziali lineari alle derivate parziali per il campo elettrrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$:

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla \cdot \ \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \wedge \ \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\, \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \\ \nabla \wedge \ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\, \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

assieme alle legge di conservazione della carica e alla forza di Lorentz, descrivono completamente (nell'ambito della fisica classica) il sistema fisico dato dal campo elettromagnetico ed dalle sue sorgenti $\rho, \mathbf{J}$ (vedi oltre). L'esempio delle equazioni di Maxwell è interessante dal punto di vista didattico perché permette di introdurre diversi operatori differenziali ed alcuni teoremi generali che vengono adoperati in tutta la teoria classica delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Nel seguito riassumeremo alcuni aspetti matematici delle equazioni di Maxwell.

1.3.1 Equazioni di Maxwell in forma integrale.

In presenza di campi elettromagnetici $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ assegnati in un riferimento $\mathscr{I}$ con coordinate cartesiane solidali $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e coordinata temporale $t \in \mathbb{R}$, una carica q è sottoposta ad una forza detta di **forza Lorentz** descritta da, se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ sono la posizione e la velocità della carica nel riferimento $\mathscr{I}$ al tempo t:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = q\, \mathbf{E}(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{q}{c}\mathbf{v}(t) \wedge \ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}(t))\,. \tag{1.2}$$

Sopra c è la velocità della luce. In riferimento alle coordinate di $\mathscr{I}$ suddette, in ogni regione spaziotemporale aperta nella quale sono definiti i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, valgono le celeberrime **equazioni di Maxwell nel vuoto**:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\oint_{+\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = 4\pi \int_V \rho\, d^3x\,, \\ \displaystyle\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS\,, \\ \displaystyle\oint_{+\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0\,, \\ \displaystyle\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{4\pi}{c}\int_{\Sigma_C} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS\,, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

dove, V è un volume in quiete in $\mathscr{I}$ il cui bordo ∂V è una superficie chiusa regolare orientabile (cioè il vettore normale è definibile con continuità su tutta la supercie e non si annulla mai) ed il versore normale è indicato con $\mathbf{n}$. L'orientazione di $\mathbf{n}$ è uscente, come indicato dal segno + davanti a ∂V. C è una curva regolare chiusa, in quiete in $\mathscr{I}$, che è il bordo della superficie regolare Σ. Il versore normale a Σ è orientato con la legge della mano destra rispetto al vettore tangente a C. $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ sono rispettivamente la densità (volumetrica) di carica elettrica (pertanto la carica complessiva presente, all'istante t, in un fissato volume si ottiene integrando la funzione $\rho(t, \mathbf{x})$ nella variabile $\mathbf{x}$ nel volume detto) ed il vettore densità di corrente elettrica. Quest'ultimo può essere pensato come della forma $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, dove $\mathbf{V}$ è il campo di velocità delle cariche elettriche con densità di carica ρ. Se sono presenti più tipi di portatori di carica (per esempio elettroni e ioni), questa forma elementare della densità corrente deve essere modificata. La regolarità dei campi e delle densità è supposta tale da dare senso alle equazioni scritte. Le equazioni di maxwell scritte sopra sono in forma integrale. Mostreremo tra poco come trascriverle in forma di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per fare ciò dobbiamo ricordare qualche teorema di analisi elementare.

1.3.2 Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale.

Ricordiamo che una funzione misurabile $f : A \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), con $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, è detta **integrabile secondo Lebesgue**, oppure equivalentemente **assolutamente integrabile secondo Lebesgue** oppure equivalentemente **Lebesgue-integrabile**, se

$$\int_A |f| d^n x < +\infty \, ,$$

dove $d^n x$ denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$. L'insieme delle funzioni Lebesgue integrabili si denita con $\mathscr{L}^1(A)$. Supporremo nota la teoria elementare della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ e le sue relazioni con la teoria dell'integrazione secondo Riemann.
Ricordiamo ora i teoremi di Gauss (della divergenza) e di Stokes.

Teorema 1.1. **(di Gauss).** *Sia Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$, la cui chiusura $\overline{\Omega}$ è compatta*[1] *e tale che il suo bordo $\partial\Omega$ sia una superficie regolare orientabile con versore normale $\mathbf{n}$ orientato in maniera uscente. Se $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, allora vale la* **formula di Gauss***:*

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, d^n x \, , \tag{1.4}$$

dove il secondo integrale è un integrale di Lebesgue se $\nabla \cdot \mathbf{F}$ è Lebesgue-integrabile *su Ω (e ciò accade in particolare se $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$), altrimenti è da intendersi come un integrale improprio nel senso di Riemann.* $\diamondsuit$

Teorema 1.2. **(di Stokes).** *Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva regolare orientata, bordo della superficie regolare Σ_C con $\mathbf{n}$ vettore normale a Σ_C orientato con la legge della mano destra rispetto al senso di percorrenza di C. Sia $\Omega \supset \Sigma \cup C$ un insieme aperto e limitato. Se $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è un campo di classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, allora vale la* **formula di Stokes***:*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma_C} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \, . \tag{1.5}$$

[1] Questo equivale a richiedere che l'insieme aperto non vuoto Ω sia limitato.

$\diamondsuit$

Osservazioni 1.1.
(1) La procedura per provare il teorema di Gauss nelle ipotesi indebolite data sopra è la seguente [7]. Il teorema di Gauss viene inizialmente provato nel caso in cui entrambi gli integrali esistono e sono ben definiti, cioè quando $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. L'insieme Ω è misurabile secondo Lebesgue, con misura finita essendo aperto e limitato. La chiusura è anch'essa Lebesgue-misurabile ed ha la stessa misura di Ω, in quando il bordo di Ω ha misura nulla (essendo una superficie $n-1$ dimensionale regolare). La misura di Peano-Jordan-Riemann di e $\overline{\Omega}$ coincide con la misure di Lebesgue di Ω. In questo caso l'identità (1.4) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega}$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω: essendo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ continuo su $\overline{\Omega}$, i due tipi di integrali sono ben definiti e coincidono.
Quindi si passa ad indebolire l'ipotesi di regolarità di $\mathbf{F}$ sul bordo di Ω. In questa ipotesi più debole si considera una successione di aperti $\{\Omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, a chiusura compatta e bordo regolare orientabile, che soddisfino: $\overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega$ e con $\partial\Omega_m$ incluso in un intorno aperto[2] di $\partial\Omega$ di raggio ϵ_m con $\epsilon_m \to 0$ se $m \to +\infty$. Evidentemente $\cup_{m\in\mathbb{N}}\Omega_m = \Omega$.
Per ogni Ω_m, l'identità (1.4) è verificata interpretando il secondo membro come integrale di Riemann su $\overline{\Omega_m}$ oppure, equivalentemente, come integrale di Lebesgue su Ω_m dato che $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega_m}, \mathbb{R}^n)$. Quindi si considerano i limiti:

$$\lim_{m\to+\infty} \oint_{+\partial\Omega_m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \lim_{m\to+\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F}\, d^n x\,.$$

Dato che $\mathbf{F}$ è continua su $\overline{\Omega}$, si prova che il limite di sinistra esiste e coincide con

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS\,.$$

In questo l'interpretazione di (1.4) è :

$$\oint_{+\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \lim_{m\to+\infty} \int_{\Omega_m} \nabla \cdot \mathbf{F}\, d^n x\,. \tag{1.6}$$

Notare che il limite del secondo membro non dipende dalla classe degli Ω_m scelti, purché soddisfino le ipotesi dette sopra. In questo caso il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Riemann improprio.
Nel caso in cui $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sia anche (assolutamente) integrabile nel senso di Lebesgue su Ω, possiamo dire di più . Definiamo $\chi_{\Omega_m} : \Omega \to \mathbb{R}$ come: $\chi_{\Omega_m}(x) = 1$ per $x \in \chi_{\Omega_m}$ e $\chi_{\Omega_m}(x) = 0$ altrimenti. Dato che su Ω vale:

$$|\chi_{\Omega_m}(x)\nabla \cdot \mathbf{F}(x)| \leq |\nabla \cdot \mathbf{F}(x)|\,,$$

[2]Se $A \subset \mathbb{R}^n$, un intorno aperto di raggio $\epsilon > 0$ di A è l'insieme dato dall'unione di tutte le palle aperte di raggio ϵ, $B_\epsilon(x)$ centrate in $x \in A$.

il *teorema della convergenza dominata* (vedi la sezione B.2 in appendice) permette di concludere che:

$$\lim_{m\to+\infty}\int_\Omega \chi_{\Omega_m}\nabla\cdot\mathbf{F}\,d^nx = \lim_{m\to+\infty}\int_{\Omega_m}\nabla\cdot\mathbf{F}\,d^nx = \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\,d^nx\,.$$

In riferimento a (1.6), possiamo ora dire che vale la (1.4) dove il secondo membro dell'identità di Gauss è interpretato come integrale di Lebesgue.
(2) Il teorema di Stokes si potrebbe enunciare con i potesi molto più deboli, ma non ce ne occuparemo in questa sede.

Usando questi teoremi nelle equazioni di Maxwell in forma integrale, si arriva facilmente a provare che, assumendo i campi di classe C^1 nelle 4 variabili congiuntamente, essi soddisfano le *equazioni di Maxwell in forma differenziale locale*, per ogni punto ed istante:

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\cdot\ \mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = 4\pi\rho(t,\mathbf{x}) \\ \nabla\wedge\ \mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \\ \nabla\cdot\ \mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla\wedge\ \mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{J}(t,\mathbf{x}) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\,\mathbf{E}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

A titolo di esempio, usando il teorema di Gauss, la prima equazione di Maxwell in forma integrale può essere riscritta:

$$\int_V \nabla\cdot\ \mathbf{E}\,d^3x = 4\pi\int_V \rho\,d^3x\,,$$

da cui

$$\int_{V_r}(\nabla\cdot\ \mathbf{E} - 4\pi\rho)\ d^3x = 0\,, \tag{1.8}$$

per ogni palla aperta V_r di raggio finito $r > 0$ centrata in $\mathbf{x}_0$. Se valesse

$$(\nabla\cdot\ \mathbf{E}(t,\mathbf{x}_0) - 4\pi\rho(t,\mathbf{x}_0)) = I > 0\,,$$

troveremmo una contraddizione. Infatti, per continuità , scegliendo r sufficientemente piccolo, l'integrando assumerebbe in V_r valori in $(I-\epsilon, I+\epsilon)$ con $I-\epsilon>0$, e pertanto

$$\int_{V_r}(\nabla\cdot\ \mathbf{E} - 4\pi\rho)\ d^3x > (I-\epsilon)\frac{4\pi r^3}{3} > 0\,,$$

che contraddirebbe l'ipotesi (1.8). Si ottiene la stessa contraddizione assumendo $I < 0$. Concludiamo che, per ogni punto $(t,\mathbf{x})\in I\times\Omega$ in cui vale la prima equazione di Maxwell in forma integrale, deve valere anche la prima equazione di Maxwell in forma differenziale. Viceversa, se vale la prima equazione in forma differenziale, integrandola su un qualunque insieme V con frontiera ∂V sufficientemente regolare contenuto nel dominio spaziale di validità delle equazioni, ed usando il teorema di Gauss, si ottiene subito la prima equazione di Maxwell in forma integrale su tale volume V. La terza equazione di Maxwell in forma differenziale si ottiene dalla terza equazione in forma integrale con la stessa procedura. Le rimanenti due si ricavano dalle corrispondenti equazioni integrali, con una analoga procedura, ma usando il teorema di Stokes in luogo del teorema della divergenza. A titolo di esempio consideriamo la seconda equazione in forma integrale:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d^3x = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_C} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS\,.$$

se il campo $\mathbf{B}$ è C^1 (congiuntamente in tutte le variabili), tale equazione si riscrive, passando sotto il segno di integrale la derivata nel tempo:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_C} \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0\,.$$

Usando il teorema di Stokes, dopo aver assunto anche il campo $\mathbf{E}$ di calsse C^1, si arriva quindi all'identità:

$$\int_{\Sigma_C}\left(\nabla\wedge\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS = 0\,.$$

Ammettiamo per assurdo che, al fissato tempo t_0 e nel punto $\mathbf{x}_0$, valga:

$$\nabla\wedge\,\mathbf{E}|_{(t_0,\mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c}\left.\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\right|_{(t_0,\mathbf{x}_0)} = \mathbf{c}\neq 0\,.$$

Scegliamo C come una circonferenza centrata in $\mathbf{x}_0$ nel piano normale a $\mathbf{c}$, e come Σ_C il cerchio associato a tale circonferenza, in modo tale che $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n} = I > 0$. Con queste ipotesi deve essere

$$\int_{\Sigma_C}\left(\nabla\wedge\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS = 0\,, \tag{1.9}$$

malgrado, esattamente al centro del cerchio, l'integrando sia strettamente positivo per ipotesi. Lo stesso ragionamento che abbiamo usato per il teorema della divergenza, basato sulla permanenza del segno di una funzione continua, produce una contraddizione. Infatti, dato che l'integrando in (1.9) è continuo, il suo segno rimarrà costante in un intorno di $\mathbf{x}_0$, quindi scegliendo il raggio $R > 0$ del cerchio Σ_C sufficientemente piccolo, in modo che su ogni punto del cerchio:

$$\int_{\Sigma_C}\left(\nabla\wedge\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS > \pi R^2(I-\epsilon) > 0\,,$$

in contraddizione con la seconda equazione di Maxwell in forma integrale. Pertanto per ogni $(t_0, \mathbf{x}_0)$ deve valere la seconda equazione di Maxwell in forma differenziale:

$$\nabla\wedge\,\mathbf{E}|_{(t_0,\mathbf{x}_0)} + \frac{1}{c}\left.\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t}\right|_{(t_0,\mathbf{x}_0)} = 0\,.$$

Per ottenere la quarta ed ultima equazione di Maxwell in forma differenziale dalla corrispondente in forma integrale si procede nello stesso modo. È evidente che procedendo in senso inverso nei ragionamenti, lavorando in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, le equazioni in forma differenziale implicano quelle in forma integrale. Tuttavia le equazioni in forma differenziale richiedono ipotesi più forti sulla regolarità dei campi.

Osservazioni 1.2.
(1) Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un aperto, per campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ di classe $C^1(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$ e sorgenti $\rho \in C^0(I \times \Omega)$, $\mathbf{J} \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R}^3)$, le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono *conseguenza* di quelle integrali assunte valide nello stesso insieme $I \times \Omega$. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^3$ i due set di equazioni sono *equivalenti.* Nel caso locale l'equivalenza dei due set di equazioni si ha solo se Ω ha una struttura topologica opportuna (vedi osservazione 2.1 più avanti).
(2) Le equazioni di Maxwell in forma differenziale, se si assumono i campi elettrico e magnetico di classe C^2 e le sorgenti ρ e $\mathbf{J}$ di classe C^1, implicano facilmente la validità dell'equazione che vincola le sorgenti dei campi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0\,. \tag{1.10}$$

(Per ottenere tale equazione è sufficiente calcolare la divergenza dei due membri dell'ultima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenere conto del fatto che $\nabla \cdot \nabla \wedge = 0$ ed infine usare nel risultato ottenuto l'identità data dalla prima equazione di Maxwell differenziale.) Questa equazione è detta **equazione di continuità della carica elettrica** ed esprime matematicamente la legge di conservazione locale della carica elettrica. Essa ha un'equivalente forma integrale che si ottiene integrando i due membri dell'equazione su un volume $V \subset \mathbb{R}^3$ dato da un aperto a chiusura compatta dal bordo dato dalla superficie chiusa regolare ed orientabile ∂V, applicando il teorema della divergenza ed, infine, portando la derivata nel tempo fuori dal segno di integrazione spaziale:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(t,\mathbf{x})d^3x = \oint_{+\partial V} \mathbf{J}(t,\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}\, dS\,.$$

Questa equazione dice che la variazione per unità di tempo della carica totale nel volume V è pari al flusso uscente della densità di corrente attraverso la frontiera di V, all'istante considerato. Procedendo in senso contrario nelle implicazioni e tenendo conto dell'arbitarietà del volume V si verifica che l'identità di sopra equivale alla (1.10) se i campi ρ e $\mathbf{J}$ sono di classe C^1.
(3) Nelle ipotesi di campi elettrico e magnetico di classe C^2, le quattro equazioni di Maxwell in forma differenziale, nelle regioni spaziotemporali in cui le sorgenti sono nulle, implicano la validità dell'*equazione delle onde di D'Alembert* per ogni componente del campo elettromagnetico:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E^i}{\partial t^2} + \Delta E^i = 0\,, \quad \text{per } i = 1,2,3$$

e

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B^i}{\partial t^2} + \Delta B^i = 0\,, \quad \text{per } i = 1,2,3.$$

Per ottenere tali equazioni, in assenza delle sorgenti ρ e $\mathbf{J}$, è sufficiente partire, rispettivamente dalla quarta e dalla seconda equazione di Maxwell differenziale, derivarne i due membri rispetto a t e quindi usare nel primo membro le identità date, rispettivamente dalla seconda e dalla terza equazione. Si deve quindi usare l'identità operatoriale:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) ,$$

usando infine il fatto, dato dalla prima e terza equazione di Maxwell, che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Queste equazioni implicano che, in assenza di sorgenti e nel vuoto, i campi descrivano propagazioni ondose che si propagano alla velocità della luce c (la luce è un'onda elettromagnetica!).
(4) Nel ventesimo secolo la teoria di Maxwell ha avuto ulteriori sorprendenti sviluppi, infatti nel 1905 l'articolo di Einstein sulla relatività ristretta ha sottolineato la covarianza relativistica delle equazioni di Maxwell, ovvero il fatto che queste sono valide in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale pur di cambiare profondamente la struttura geometrica dello spaziotempo ed entrando nella teoria della relatività speciale. Lo sviluppo della teoria da un punto di vista quantistico inizia negli anni venti con l'equazione di Dirac e culmina qualche decennio più tardi con quella parte della teoria dei campi quantizzati nota come elettrodinamica quantistica. Non bisogna assolutamente pensare però che tutto ciò che c'era da scoprire è stato ormai compreso: l'elettodinamica quantistica è una teoria che, pur avendo ottenuto dei successi sperimentali sorprendenti, manca ancora di una formalizzazione matematica rigorosa che vada oltre la teoria perturbativa.

1.4 Classificazione delle equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari

In questo corso ci concentreremo essenzialmente su una classe di equazioni differenziali che andiamo a descrivere. Un'equazione differenziale su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, a derivate parziali (PDE) del secondo ordine ed in forma **quasi lineare**, è un'equazione della forma:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) , \tag{1.11}$$

dove $u = u(x)$, con $x := (x^1, \ldots, x^n)$, è la funzione reale incognita da determinarsi. Si suppone $u \in C^2(\Omega)$ mentre le funzioni reali *assegnate* a^{ij} e Φ sono (almeno) di classe C^0 rispettivamente su Ω su $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Infine $\nabla_x u$ denota in gradiente della funzione u.
Ovviamente è supposto che le funzioni a^{ij} non siano tutte identicamente nulle su Ω (in tal caso non avrebbe senso chiamare l'equazione di sopra "del secondo ordine"). La matrice $A(x)$ i cui coefficienti sono i numeri $a^{ij}(x)$ si dice **matrice caratteristica**, nel punto x, dell'equazione (1.11).
L'equazione (1.11) è detta **lineare** quando ha la forma specifica:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x^k} + c(x)u(x) = f(x) , \tag{1.12}$$

dove, a parità delle altre condizioni, le funzioni *assegnate* b^k, c e f sono (almeno) di classe C^0 su Ω. Nel caso in cui la funzione f è identicamente nulla su Ω, l'equazione linerare si dice **omogenea**.
Di particolare interesse è il caso in bidimensionale in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, useremo in questo caso le coordinate (x, y) in luogo di (x^1, x^2). In questa situazione l'equazione (1.11) si riscrive:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \Phi(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = 0 \,,$$

dove con u_x e u_y sono rispettivamente $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ mentre con u_{xx} abbiamo indicato la derivata seconda in x di u, con u_{xy} abbiamo indicato la derivata seconda mista (in x e y) di u e con u_{yy} abbiamo indicato la derivata seconda in y di u. Le funzioni a^{ij} che determinano la matrice caratteristica dell'equazione, si possono ora scrivere come:

$$a^{xx} = a \,, \quad a^{xy} = a^{yx} = b \,, \quad a^{yy} = c \,.$$

Osservazioni 1.3. Le equazioni di Maxwell prima descritte, non sono equazioni differenziali del secondo ordine, ma possono essere riscritte in modo che lo diventino, introducendo delle grandezze ausiliarie dette *potenziali elettromagnetici*, dei quali non ci occuperemo in questa sede se non in una versione ridotta, discutendo le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico. Tratteremo invece altre equazioni che discendono dalle equazioni di Maxewll, come quella di D'Alembert precedentemente introdotta.

Passiamo ora alla classificazione delle PDE del secondo ordine quasi lineari [7]. La classificazione è dovuta alle proprietà della forma quadratica indotta dalla matrice di coefficienti $a^{ij}(x)$ e dipende dal punto considerato. Per arrivare ad enunciare tale classificazione dobbiamo studiare come l'equazione (1.11) cambia al variare delle coordinate utilizzate. Consideriamo una trasformazione di coordinate $y = y(x)$ dove $x \in \Omega$. Assumiamo che la trasformazione sia (almeno) di classe $C^2(\Omega)$, che sia invertibile e che la sua inversa sia una funzione di classe $C^2(\Omega')$, dove $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ è , per ipotesi, un insieme aperto connesso su cui variano le coordinate y. Di conseguenza avremo che la matrice Jacobiana della trasformazione è non nulla in ogni punto $x \in \Omega$. Infatti, nelle ipotesi fatte possiamo scrivere:

$$y^i = y^i(x(y)) \,,$$

ed, applicando la regola di derivazione di funzioni di funzioni abbiamo che

$$\delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \,.$$

Equivalentemente, se J è la matrice jacobiana della trasformazione $y = y(x)$ e J' quella della trasformazione inversa $x = x(y)$, l'identità di sopra si scrive

$$I = JJ' \,.$$

In particolare quindi: $1 = \det J \det J'$ e pertanto $\det J \neq 0$. Faremo uso tra poco di questo risultato.

Osservazioni 1.4. Prima di procedere oltre, è interessante notare come invece di richiedere dall'inizio che l'inversa di $y = y(x)$ esista e sia di classe C^2 su qualche aperto Ω', avremmo potuto chiedere, con lo stesso risultato finale, che la funzione $y = y(x)$ fosse in $C^2(\Omega)$, invertibile e con matrice jacobiana J ovunque non singolare. Infatti, sotto tali ipotesi, per il teorema del Dini, (1) la funzione $y = y(x)$ è funzione aperta e pertanto l'immagine Ω' di Ω secondo $y = y(x)$ è aperto (e connesso visto che la funzione considerata è continua e Ω è connesso); (2) la funzione inversa $x = x(y)$ è in $C^2(\Omega')$.

La funzione u potrà essere espressa in funzione delle nuove coordinate $y^1, \ldots y^n$ sull'insieme Ω':

$$u'(y) := u(x(y)) \,.$$

L'equazione differenziale (1.11) può essere trascritta per la funzione u' preservando la sua forma, ma cambiando le funzioni che in essa appaiono. Vediamo come procedere. Intanto osserviamo che, nelle ipotesi fatte:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k} \,,$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^h \partial x^i} = \sum_{k,r=1}^{n} \frac{\partial y^r}{\partial x^h} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^r \partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^h \partial x^i} \frac{\partial u'}{\partial y^k} \,.$$

Inserendo queste identità nella (1.11), otteniamo che la stessa equazione differenziale può essere riscritta per la funzione u', come:

$$\sum_{p,q=1}^{n} a'^{pq}(y) \frac{\partial^2 u'}{\partial y^p \partial y^q} + \Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') = 0 \,, \tag{1.13}$$

dove, per $k, r = 1, \ldots, n$:

$$a'^{kr}(y(x)) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} a^{ij}(x) \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \,, \tag{1.14}$$

mentre:

$$\Phi'(y, u'(y), \nabla_y u') := \Phi\left(y(x), u(x(y)), J^{-1}(y)(\nabla_x u(x))_{x=x(y)}\right) + \sum_{i,j,p=1}^{n} a^{ij}(x(y)) \left.\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{x=x(y)} \frac{\partial u'}{\partial y^p}.$$

Per costruzione, l'equazione (1.11) è completamente equivalente all'equazione (1.13): $u = u(x)$ soddisfa la prima su Ω se e solo se $u'(y) := u(x(y))$ soddisfa la seconda su Ω'.
Fissando un punto $x_0 \in \Omega$, consideriamo una trasformazione lineare di coordinate

$$y^i = \sum_{k=1}^{n} J^i_k x^k \,,$$

dove, se J è la matrice di coefficienti dati dalle *costanti* J^i_k, vale $\det J \neq 0$. In tal caso J è proprio la matrice Jacobiana della trasformazione considerata e sono soddisfatte le ipotesi sopra richieste dalle trasformazioni $y = y(x)$. La (1.14) valutata nel punto x_0 si può ora trascrivere come:

$$A'(y_0) = JA(x_0)J^t \,, \tag{1.15}$$

dove $A'(y_0)$ è la matrice di coefficienti $a'^{pq}(y_0)$ mentre $A(x_0)$ è la matrice di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ ed infine $y_0 = y(x_0)$. Per il teorema di Sylvester, possiamo sempre scegliere la matrice non singolare J in modo tale che $A'(y_0)$ abbia *forma canonica di Sylvester*, cioè sia una matrice diagonale del tipo:

$$A'(y_0) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0) \,,$$

in cui i numeri 1 compaiono r volte, i numeri -1 compaiono s volte ed i numeri 0 compaiono t volte. È noto, dalla teoria delle forme quadratiche, che la terna (r, s, t), detta *segnatura*, è una proprietà della forma quadratica associata alla matrice $A(x_0)$, e quindi una proprietà dell'equazione differenziale in riferimento al punto x_0. In altre parole, se esiste un'altra scelta della matrice non singolare J che riduce la matrice $A(x_0)$ tramite la (1.15) a forma canonica di Sylvester, il numero di volte in cui appariranno i numeri $1, -1, 0$ sulla diagonale principale saranno sempre, rispettivamente, i numeri r, s, t trovati sopra. Ovviamente $r + s + t = n$.
In modo del tutto analogo alla classificazione delle coniche tramite lo studio della forma quadratica associata si ha la seguente classificazione.

Definizione 1.3. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0 \,, \tag{1.16}$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. In riferimento alla matrice caratteristica $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$, valutata nel punto $x_0 \in \Omega$, si dice che:

(a) l'equazione differenziale è di **tipo ellittico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n, 0, 0)$ oppure $(0, n, 0)$;

(b) l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(r, s, 0)$ con $r \neq 0$ e $s \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo iperbolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(1, n-1, 0)$ con $n > 1$ oppure $(n-1, 1, 0)$ con $n > 1$;

(c) l'equazione differenziale è di **tipo parabolico** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è (r, s, t) con $t \neq 0$, in particolare si dice che l'equazione differenziale è di **tipo parabolico normale** in x_0 se la segnatura di $A(x_0)$ è $(n-1, 0, 1)$ con $n > 1$ oppure $(0, n-1, 1)$ con $n > 1$. $\diamondsuit$

Osservazioni 1.5. Ai fini della classificazione di una PDE quasilineare del secondo ordine, la matrice caratteristica può essere ridefinita moltiplicandola per una costante (più in generale una funzione del punto in cui si valuta la matrice) diversa da zero (in ogni punto). Tale trasformazione non altera la classe di appartenenza dell'equazione differenziale come segue immediatamente dalle definizioni date sopra.

Esempi 1.1.
(1) L'**equazione di Tricomi** in $\mathbb{R}^2$ si scrive:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

La forma quadratica associata è data dalla matrice non costante:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Notiamo subito che, sull'asse delle ascisse, cioè $y = 0$, l'equazione differenziale è di *tipo parabolico normale*.
Consideriamo ora un punto (x_0, y_0) con $y_0 > 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su $\mathbb{R}^2$ dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{y_0}$. In queste coordinate, l'equazione prende forma:

$$\frac{y'}{y_0} u_{x'x'} + u_{y'y'} = 0\,.$$

Pertanto, esattamente in $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y > 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo ellittico*.
Consideriamo infine un punto (x_0, y_0) con $y_0 < 0$. Definiamo il nuovo sistema di coordinate cartesiane (x', y') su $\mathbb{R}^2$ dove $y' := y$ mentre $x' = x/\sqrt{-y_0}$. In queste coordinate, l'equazione prende forma:

$$-\frac{y'}{y_0} u_{x'x'} + u_{y'y'} = 0\,.$$

Pertanto, esattamente in $(x, y) = (x_0, y_0)$, la matrice associata all'equazione, nelle nuove coordinate diventa:

$$A'(x', y') = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Concludiamo che, nel semipiano $y < 0$, l'equazione di Tricomi è di *tipo iperbolico normale*.
(2) L'equazione di Poisson su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si scrive:

$$\Delta u = \rho$$

dove $\rho = \rho(x)$ è una funzione almeno C^0 assegnata e l'*operatore di Laplace*, detto anche **laplaciano**, Δ è definito in coordinate cartesiane ortonormali come:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}\,.$$

Nel caso la funzione ρ sia identicamente nulla su Ω, l'equazione suddetta si riduce all'**equazione di Laplace** su Ω:

$$\Delta u = 0\ ,$$

le cui soluzioni sono dette **funzioni armoniche** su Ω.
In entrambi i casi, la matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$ è individuata dalla matrice identità . In base alla classificazione suddetta, le equazioni di Poisson e di Laplace sono equazioni di *tipo ellittico* in ogni punto. Dal punto di vista fisico, se $n = 3$, $-u$ può essere pensato come il *potenziale elettrostatico* e, nel caso dell'equazione di Poisson, ρ corrsisponde alla densità di carica elettrica presente nel volume Ω.
(3) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione delle onde** o **equazione di D'Alembert** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0\ .$$

Sopra le coordinate su $\mathbb{R}^n$ sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità di propagazione della perturbazione ondosa descritta dalla funzione $u = u(t, \mathbf{x})$, dove t è il tempo e $\mathbf{x}$ lo spazio (almeno nel caso di $n = 3$) di un riferimento. L'equazione di D'Alembert descrive tutti i fenomeni di propagazione ondosa (armonica) conosciuti: dalla propagazione della luce a quella del suono, ma anche la propagazione di una deformazione in un mezzo continuo elastico, fino ad arrivare alla propagazione delle onde gravitazionali nella teoria della relatività generale. La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\mathrm{diag}(-1/c^2, 1, \ldots, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0, con segnatura $(n-1, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di D'Alembert è , ovunque, di *tipo iperbolico normale.*
Un caso particolare dell'equazione di D'alembert è dato, per $n = 4$, quando si lavora con il *campo elettrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e con il *campo magnetico* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ che descrivono i fenomeni elettromagnetici. L'equazione di D'alembert per questi due campi (nel vuoto) descrive la propagazione delle onde elettromagnetiche (e quindi della luce in particolare)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\mathbf{E} = 0\ , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2\Delta\mathbf{B} = 0\ ,$$

c è la velocità della luce nel vuoto. Le due equazioni di sopra, che seguono dalle più generali *equazioni di Maxwell*, si devono intepretare componente per componente e significano che *ogni componente* del campo $\mathbf{E}$ e del campo $\mathbf{B}$ soddisfa separatamente l'equazione di D'Alembert.
(4) Se $\Omega := \mathbb{R}^4$, l'**equazione di Klein-Gordon** si scrive:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta\phi - \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi = 0\ .$$

Come prima, le coordinate su $\mathbb{R}^4$ sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. La costante $c > 0$ si interpreta fisicamente come la velocità della luce nel vuoto, $\hbar = h/2\pi$ dove h è la *costante di Planck* t è il tempo e $\mathbf{x}$ lo spazio di un sistema di riferimento (Minkowskiano della teoria della Relatività Speciale). L'equazione di Klein-Gordon descrive una campo scalare ϕ a valori in $\mathbb{R}$

associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ senza spin ed eletricamente neutre (in realtà ϕ descrive sia la particella che l'anti particella). La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\mathrm{diag}(-1/c^2, 1, 1, 1)$. Passando a coordinate $y^1 := ct$, $\mathbf{y} := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, si ottiene che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0, con segnatura $(3, 1, 0)$. Pertanto l'equazione di D'Alembert è , ovunque, di *tipo iperbolico normale.*
(5) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, l'**equazione del calore** si scrive:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \Delta u = q \, .$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t, \mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su $\mathbb{R}^n$ sono ancora state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Almeno per $n = 3$, u si intepreta fisicamente come la temperatura in un mezzo continuo le cui caratteristiche termodinamiche sono riassunte dai parametri a e dalla funzione q che corrisponde ad una sorgente di calore.
La matrice $A(x_0)$, per ogni $x_0 \in \Omega$, ha la forma $\mathrm{diag}(0, a^2, \ldots, a^2)$. Passando a definire coordinate $y^1 := t$, $\mathbf{y} := a\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ottiene in tali coordinate che la matrice $A'(y_0)$ ha forma canonica di Sylvester in ogni punto y_0, con segnatura $(0, n-1, 1)$: si osservi infatti che nell'equazione del calore *non* compare la derivata seconda nella prima variabile, questo spiega l'ultimo 1 e l'$n-1$ nella segnatura. Pertanto l'equazione del calore è , ovunque, di *tipo parabolico normale.*
(6) L'**equazione di Schrödinger** per la *funzione d'onda* $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$, con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x}) \psi \, ,$$

non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori complessi e (2) il coefficiente della derivata temporale è immaginario puro. Tuttavia tale equazione ha caratteristiche simili all'equazione del calore.
(7) L'**equazione di Dirac** per il *il campo fermionico* $\Psi = \Psi(x) \in \mathbb{C}^4$, con $x \equiv (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$:

$$i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi = 0$$

che descrive il campo quantistico associato agli elettroni ed i positroni, non ricade nella classificazione suddetta in quanto: (1) $\Psi = \Psi(t, \mathbf{x})$ è una funzione a valori in $\mathbb{C}^4$ e (2) i coefficienti delle derivate sono matrici complesse. Tuttavia tale equazione, per taluni aspetti, ha caratteristiche simili all'equazione di Klein-Gordon. Le 4 matrici complesse γ^μ, per $\mu = 0, 1, 2, 3$ sono dette *matrici di Dirac* e soddisfano le relazioni di Dirac (o Clifford)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu} \, ,$$

dove la matrice dei coefficienti $g_{\mu\nu}$ è quella della metrica di Lorentz $diag(-1, 1, 1, 1)$.

1.5 Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

1.5.1 Superfici regolari in $\mathbb{R}^n$.

Una superficie regolare Σ di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente detta sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ e classe di differenziabilità C^k con $k \geq 1$) è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ tale che nell'intorno A_p di di ogni suo punto $p \in \Sigma$ può essere espressa come luogo dei punti che annullano una funzione S di classe C^k, con $k \geq 1$, con $dS \neq 0$. In altre parole, per ogni $p \in \Sigma$, esiste un suo intorno aperto $A_p \in \Omega$ ed una funzione $S : A_p \to \mathbb{R}$, $S \in C^1(A_p)$, tale che:

$$\Sigma \cap A_p = \{x \in A_p \mid S(x) = 0\} ,$$

unitamente a:

$$dS(x) \neq 0 , \quad \text{per } S(x) = 0.$$

Con le definizioni poste, dS si identifica con ∇S (ne ha le stesse componenti lavorando in basi ortonormali) ∇S (cioè dS) è un vettore normale a Σ, nel senso che, se $\mathbf{e}_i$ è il versore i-esimo della base canonica di $\mathbb{R}^n$, il vettore mai nullo per $x \in \Sigma \cap A_p$:

$$\nabla S(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x^i}|_x \, \mathbf{e}_i$$

è normale a $\Sigma \cap A_p$ in ogni punto.
Esistono diverse definizioni equivalenti di superfici regolari $n-1$ dimensionali in $\mathbb{R}^n$. Si osservi che ogni funzione di classe C^k $(k \geq 1)$, $x^1 = f(x^2, \ldots, x^n)$ individua una superficie regolare. In tal caso la funzione S può essere scelta come:

$$S(x^1, x^2, \ldots, x^n) := x^1 - f(x^2, \ldots, x^n) .$$

1.5.2 Il problema di Cauchy e la "ben posizione" del problema nel senso di Hadamard.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso non vuoto e $\Sigma \subset \Omega$ è una superficie regolare (con qualche ordine di differenziabilità $k \geq 1$) di dimensione $n-1$ che divide Ω in due parti connesse[3], il **problema di Cauchy** del secondo ordine riferito a Σ consiste nel sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) = 0 , \\ u \restriction_\Sigma = u_0 , \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \restriction_\Sigma = u_1 , \end{array} \right. \tag{1.17}$$

in cui u_0 e u_1 sono funzioni assegnate su Σ di qualche ordine di differenziabilità da definirsi, $u \in C^2(\Omega)$ è la funzione incognita da determinare, F è una funzione nota che determina l'equazione

[3] Questa richiesta è in realtà inessenziale a questo punto della teoria.

differenziale ed abbiamo usato la notazione standard:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^{n} n^i \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

dove $\mathbf{n} = (n^1, \ldots, n^n)$ è il *versore* normale a Σ.

Secondo l'impostazione data da Hadamard, un problema di Cauchy (1.17) è **ben posto** se sono verificate le seguenti tre richieste.
(a) Una soluzione del problema, in una fissata classe di funzioni esiste.
(b) La soluzione in (a) è l'unica soluzione nella classe di funzioni suddetta.
(c) La soluzione dipende *con continuità* dai dati di Cauchy in qualche topologia di spazi di funzioni definita negli spazi di funzioni considerate.

La condizione (c) deriva dal fatto che, nella pratica, i dati di Cauchy sono sempre noti con una certa approssimazione e si richiede che, pertanto, le soluzioni varino di poco se le condizioni di Cauchy variano di poco.
Nel caso una delle tre condizioni di sopra sia violata, si dice che il problema di Cauchy è *mal posto nel senso di Hadamard.* Mostriamo che il problema di Cauchy ellittico può essere mal posto perché viola la condizione (c), mettendo nello spazio dei dati di Cauchy limitati la topologia naturale dell'estremo superiore indotta dalla norma $||\cdot||_\infty$.
Cosideriamo in $\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y), il problema di Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{1}{k}\sin(kx)\,, \end{array} \right. ,$$

dove $k > 0$ è fissata e si cercano soluzioni $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Si dimostra che l'unica soluzione del problema posto è:

$$u^{(k)}(x,0) := \frac{1}{k^2}\sin(kx)\,\sinh(ky)\,.$$

Si noti che, nel limite $k \to +\infty$ il dato di Cauchy:

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$$

soddisfa $||u_1^{(k)}||_\infty \to 0$ per $k \to +\infty$, mentre l'altro dato è nullo per ipotesi e pertanto $||u_0^{(k)}||_\infty = 0$. Tuttavia la soluzione $u^{(k)}(x, y)$ non tende, puntualmente, ad alcun limite se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.
Si può mostrare che, le patologie del problema di Cauchy per equazioni ellittiche riguardano anche l'esistenza e l'unicità della soluzione, in particolare quando il problema di Cauchy è imposto in regioni limitate. Vedremo ciò nel prossimo capitolo. In realtà per problemi di Cauchy di carattere ellittico, si ha anche la perdita di validità della richiesta (a) almeno quando la superficie Σ

è una superficie chiusa che contorna Ω. In tal caso, lavorando per esempio con l'equazione di Laplace ed assegnando dati di Cauchy analitici su Σ, per ogni punto di Σ c'è un intorno in cui esiste una soluzione[4] del problema. La parte dell'intorno che interseca Ω produce localmente una soluzione del problema di Cauchy. Quello che però accade è che le diverse soluzioni ottenute localmente in questo modo non si "saldano" tra di loro per determinare un'unica soluzione su Ω: su un punto interno a Ω coperto da due intorni suddetti si trovano generalmente valori distinti per u a seconda dell'intorno scelto.

1.5.3 Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja.

Ci occuperemo ora di studiare il problema della risolubilità del problema di Cauchy sopra scritto nel caso in cui l'equazione differenziale che compare in esso sia del tipo (1.11), introducendo il *teorema di Cauchy-Kovalevskaja.* A tal fine consideriamo il caso più semplice nel quale $\Omega = \mathbb{R}^n$ e Σ è il piano $x^1 = 0$.
Un equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, nella funzione incognita $u = u(x)$, si dice che è scritta **in forma normale rispetto alla variabile** t, se $x = (t, \mathbf{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (con $\mathbf{x} = (x^2, \ldots, x^n)$) se è rappresentata nella forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, \mathbf{x}, u(t,\mathbf{x}), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) . \tag{1.18}$$

Si noti che il secondo membro è funzione delle derivate al più del secondo ordine in cui la derivata in t appare al più al primo ordine. Si può dare un'analoga definizione di equazione in forma normale rispetto ad una coordinata, anche per equazioni di ordine superiore al secondo.
Consideriamo il **Problema di Cauchy** per la funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ con dati di Cauchy sulla superficie Σ individuata da $t = 0$ e con equazione in forma normale nella variabile t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & F\left(t, \mathbf{x}, u(t,\mathbf{x}), \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x^n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \cdots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) , \\ u(0, \mathbf{x}) = & u_0(\mathbf{x}) , \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = & u_1(\mathbf{x}) , \end{cases}$$

in cui $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ e $u_1 \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$ sono funzioni assegnate su Σ.
Esistono vari teoremi che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione. Il primo di tutti questi teoremi è quello dovuto a Cauchy e Kovalevskaja. Tale teorema non ha grande utilità nelle applicazioni moderne, in quanto richiede ipotesi estremamente forti per funzionare, ma è comunque di grande utilità teorica, in quanto serve come lemma intermedio per provare teoremi più moderni basati su ipotesi molto deboli. Enunciamo il teorema per equazioni del secondo ordine, anche se l'ordine dell'equazione non è essenziale.
Ricordiamo che una funzione a valori reali $f = f(x)$ è detta **analitica (reale) nell'insieme**

[4] Questa è l'unica soluzione in tale intorno per il teorema di Cauchy-Kovalevskaja, visto che le funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace sono analitiche come proveremo più avanti.

aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se per ogni $x_0 \in \Omega$, in un intorno aperto di x_0 incluso in Ω, la funzione f si può scrivere come serie di Taylor centrata in x_0:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1}\cdots\partial x^{n\alpha_n}}\right|_{x_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1}\cdots(x^n - x_0^n)^{\alpha_n} .$$

Teorema 1.3. **(Cauchy-Kovalevskaja).** *Si consideri il problema di Cauchy del secondo ordine nella funzione incognita $u = u(t, \mathbf{x})$ con $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, con dati di Cauchy assegnati sulla superficie determinata da $t = 0$ e con equazione differenziale scritta in forma normale nella variabile t:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & F\left(t, \mathbf{x}, u(t,\mathbf{x}), \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x^n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}, \cdots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^n \partial x^n}\right) , \\ u(0,\mathbf{x}) = & u_0(\mathbf{x}) , \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\mathbf{x}) = & u_1(\mathbf{x}) . \end{cases} \tag{1.19}$$

Se, per un punto $(0, \mathbf{x})$, le funzioni u_0 e u_1 sono analitiche nell'intorno di $\mathbf{x}_0$ e la funzione F è analitica nell'intorno del punto:

$$\left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(x_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \cdots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0) \ldots, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right)$$

allora in un intorno di $(0, \mathbf{x}_0)$ esiste una soluzione del sistema (1.19). Tale soluzione è l'unica soluzione analitica nell'intorno considerato. $\diamondsuit$

Idea della dimostrazione. Se esiste una soluzione u deve valere:

$$u(0, \mathbf{x}_0) = u_0(\mathbf{x}_0) ,$$

inoltre, se $i = 2, \ldots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(0, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial u_0}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}_0) = u_1(\mathbf{x}_0) .$$

Consideriamo poi l'equazione differenziale con entrambi i membri valutati in $(t, \mathbf{x}_0)$. In tale situazione, il secondo membro dell'equazione differenziale è funzione dei dati di Cauchy unicamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{(0,\mathbf{x}_0)} =$$

$$F\left(0, \mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0), u_1(\mathbf{x}_0), \frac{\partial u_0}{\partial x^2}(x_0), \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial x^n}(x_0), \frac{\partial u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0), \cdots, \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^n \partial x^n}(\mathbf{x}_0)\right) .$$

In questo modo abbiamo ottenuto la derivata seconda nel tempo della soluzione, ammesso che esista, nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Le rimanenti derivate seconde della soluzione sono invece note direttamente dai dati di Cauchy ($i, k = 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^i}|_{(0,\mathbf{x}_0)} = \frac{\partial u_1}{\partial x^i}|_{\mathbf{x}_0} , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i}|_{(0,\mathbf{x}_0)} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^k \partial x^i}|_{\mathbf{x}_0}$$

In definitiva abbiamo ottenuto tutte le derivate fino all'ordine 2 incluso, della eventuale soluzione, valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Nell'ipotesi di F analitica, e quindi infinitamente differenziabile, possiamo ottenere *tutte* le derivate di ogni ordine della eventuale soluzione, valutate in $(0, \mathbf{x}_0)$, in funzione dei dati di Cauchy. Per fare ciò è sufficiente derivare entrambi i membri dell'equazione differenziale e iterare la procedura seguita sopra per l'identità che si è ottenuta. Si osservi che in tutta la procedura, il fatto che l'equazione sia scritta in forma normale è di centrale importanza. In questo modo si può scrivere una serie di Taylor formale della eventuale soluzione, sviluppata nel punto $(0, \mathbf{x}_0)$. Si vede che, nelle ipotesi fatte (in particolare, tenendo conto dell'analiticità di F) tale serie converge effettivamente e, per costruzione, converge ad una soluzione del problema di Cauchy considerato. L'unicità è conseguenza di teoremi di unicità validi per funzioni analitiche. $\Box$

Torniamo ora al problema di Cauchy (1.17) specializzato al caso di un'equazione del secondo ordine in forma quasi lineare (1.11) e riferito ad una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n-1$ che divide $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in due parti connesse:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0 \, , \\ u \restriction_\Sigma = u_0 \, , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \restriction_\Sigma = u_1 \, , \end{array} \right. \tag{1.20}$$

$\mathbf{n}$ come già detto, è il versore normale a Σ.
Vogliamo ridurci alla situazione in cui Σ appare come il piano $t = 0$, per poter cercare di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja, almeno nell'intorno di $p \in \Sigma$. Per far ciò usiamo un opportuno sistema di coordinate dette *coordinate normali Riemanniane*. Sia $\xi^2, \ldots, \xi^n$ un qualsiasi sistema di coordinate su Σ (di classe C^k come S) definito nell'intorno di $p \in \Sigma$. Per ogni punto $q \in \Sigma$ nell'intorno considerato, tracciamo la retta normale a Σ e passante per q. Sia $t \in \mathbb{R}$ la lunghezza d'arco su tale retta ponendo come origine di essa il punto q in cui la retta interseca Σ. Si dimostra che viene a definirsi in questo modo un sistema di coordinate $(t, \xi^1, \ldots, \xi^n)$, di classe C^k, in un intorno aperto $B_p \subset \Omega$ di p. Un punto $r \in B_p$ è individuato in questo modo: si considera l'unica retta γ_r perpendicolare a Σ che passa per r, la lunghezza del segmento tra r e l'intersezione $q_r = \gamma_r \cap \Sigma$ è la coordinata t_r di r, le rimanenti coordinate $\xi^2_r, \ldots, \xi^n_r$ non sono altro che le coordinate di q_r su Σ. Questo sistema di coordinate ha la particolarità che, data la natura di t, vale:

$$\Sigma \cap B_p = \{(t, \xi^2, \ldots, \xi^n) \mid t = 0\} \, .$$

Ulteriormente, se $(\xi^2, \dots \xi^n)$ sono fissate, la curva $t \mapsto x^i(t, \xi^2, \dots \xi^n)$ risulta essere normale a Σ per costruzione ed il suo vettore tangente

$$\mathbf{n} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial t}|_{t=0}\, \mathbf{e}_i$$

non è altro che il *versore* normale a Σ nel punto di coordinate normali riemanniane $(0, \xi^2, \dots \xi^n)$. Di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^{n} n^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial t}|_{t=0} \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} \,, \tag{1.21}$$

dove $u = u(t, \xi^2, \dots, \xi^n)$ è una funzione arbitraria definita nell'intorno di p espressa in coordinate normali riemanniane. Lavorando nell'intorno di p in coordinate normali riemanniane, il problema di Cauchy (1.20) diventa della forma:

$$\begin{cases} a'^{tt}(t,\boldsymbol{\xi})\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\displaystyle\sum_{i=2}^{n} 2a'^{it}(t,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \xi^i} - \sum_{i,j=2}^{n} a'^{ij}(t,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \\ +\Phi'\left(t, \boldsymbol{\xi}, u(t,\boldsymbol{\xi}), \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial \xi^2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial \xi^n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial \xi^2}, \cdots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^n \partial \xi^n}\right) \,, \\ u(0,\boldsymbol{\xi}) = u_0(\boldsymbol{\xi}) \,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \restriction_\Sigma = u_1(0,\boldsymbol{\xi}) \,, \end{cases} \tag{1.22}$$

Notiamo che se $a'^{tt}(t,\boldsymbol{\xi}) \neq 0$ in un intorno di p, allora possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione differenziale per $a'^{tt}(t,\boldsymbol{\xi})$ ottenendo un'equazione differenziale in forma normale nella variabile t. Il problema di Cauchy risultante in questa situazione è un caso particolare del problema che appare nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Kovalevskaja. Per poter applicare il teorema detto sono comunque ancora necessarie ipotesi di analiticità della quali non ci occuperemo. Tornando in coordinate cartesiane e facendo uso della (1.14), la condizione $a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi}) \neq 0$, tenendo conto che è :

$$a'^{tt}(t,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1} a^{ij}(x)\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j} \,,$$

può essere riscritta, per $x \in \Sigma$:

$$\sum_{i,j=1} a^{ij}(x)\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j} \neq 0 \,, \tag{1.23}$$

Concludiamo che, se in un punto $x \in \Sigma$ vale la (1.23), allora possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja nell'intorno di quel punto riducendosi a lavorare in coordinate normali riemanniane purché siano soddisfatte le necessariie ipotesi di analiticità .

1.5.4 Superfici caratteristiche.

Ci interessa ora approfondire la situazione in cui, in riferimento al problema di Cauchy problema di Cauchy (1.20), valga

$$\sum_{i,j=1} a^{ij}(x)\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j} = 0\,. \tag{1.24}$$

ovunque sulla superficie Σ. Questo significa che, passando in coordinate normali riemanniane, $a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi}) = 0$. In tal caso il teorema di Cauchy-Kovalevskaja non può essere applicato e non ci sono garanzie, per tale via, sull'esistenza e l'unicità di una soluzione nell'intorno del punto singolare detto. Si osservi che la funzione $t = t(x)$ individua la superficie regolare Σ su cui diamo le condizioni di Cauchy, tramite la richiesta $t(x) = 0$, di cui $dt = \sum_i \frac{\partial t}{\partial x^i}\mathbf{e}_i$ è vettore normale mai nullo. Nel caso in cui valga (1.24), non possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja per dati di Cauchy assegnati la superficie individuata da $t = 0$. Ora focalizzeremo l'attenziaone su questa classe di superfici. Tuttavia, per definirire tale classe di superfici, l'uso delle coordinate Riemanniane e della coordinata t è scomodo per vari motivi e pertanto vogliamo individuare tali superfici senza fare esplicito riferimento a tali coordinate. Diamo a tal fine la seguente definizione in cui rimpiazziamo la coordinata riemanniana t con una generica funzione S.

Definizione 1.4. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto non vuoto e connesso, si consideri l'equazione quasi lineare del secondo ordine nella funzione a valori reali u:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \Phi(x, u(x), \nabla_x u) = 0\,, \tag{1.25}$$

dove $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij} \in C^0(\Omega)$ e $\Phi \in C^0(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ sono funzioni a valori reali assegnate. Una superficie regolare $\Sigma \subset \Omega$ di dimensione $n-1$ è detta **superficie caratteristica** per l'equazione differenziale (1.25), se nell'intorno di ogni $p \in \Sigma$ può essere espressa come il luogo dei punti x in cui $S(x) = 0$ dove S è una funzione almeno C^1 definita nell'intorno di p, soddisfacente $dS \neq 0$ su Σ e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = 0\,, \quad \text{per } x \in \Sigma\,. \tag{1.26}$$

$\diamondsuit$

Mostriamo ora che, effettivamente, le superfici caratteristiche non permettono di applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja quando i dati di Cauchy sono assegnati su di esse. Successivamente, nelle osservazioni, mostreremo che il problema di Cauchy con dati iniziali su una superficie caratteristica è , in generale, affetto da varie patologie.
Se Σ è una superficie caratteristica individuata dal luogo degli zeri della funzione S, possiamo usare su Σ le coordinate normali Riemanniane $t, \xi^1, \ldots, \xi^n$. In questo caso abbiamo che $S(0, \xi^1, \ldots, \xi^n) = 0$ per ogni scelta delle ξ^k, dato che il luogo dei punti a $S = 0$ coincide con il

luogo dei punti a $t=0$ e coincide con Σ per costruzione. Di conseguenza

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \xi^k}\right|_{t=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{t=0} \neq 0\,.$$

La seconda condizione deriva dal fatto che, se non fosse vera, avremmo che tutte le derivate di S sono nulle su Σ e questo è impossibile per la richiesta $dS \neq 0$ su Σ. Di conseguenza abbiamo in particolare che, esattamente su Σ,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left.\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\right|_{\Sigma} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^i} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial S}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^j} + \sum_{h=2}^{n} \frac{\partial S}{\partial \xi^h}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^i} + 0\right)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^j} + 0\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left.\frac{\partial t}{\partial x^i}\frac{\partial t}{\partial x^j}\right|_{\Sigma} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 a'^{tt}\,,$$

dove $\frac{\partial S}{\partial t} \neq 0$ nelle nostre ipotesi, e quindi:

$$a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}$$

dove il coefficiente davanti alla somma a secondo membro è ben definito. Concludiamo che, come preannunciato, la richiesta che Σ sia una superficie caratteristica (ed in particolare la (1.26)) implica che, lavorando in coordinate riemanniane normali attorno a Σ, il coefficiente a'^{tt} in (1.22) si annulli su Σ (cioè per $t=0$) e quindi non si possa applicare il teorema di Cauchy-Kovalevskaja. Si deve notare che noi abbiamo assunto che $a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi}) = 0$ su tutta Σ. In realtà , perché si annulli $a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi})$ in un punto $p = (0,\boldsymbol{\xi}) \in \Sigma$, è sufficiente che Σ che compare in (1.20) sia *tangente* in p ad una superficie caratteristica.

Osservazioni 1.6.
(1) Indipendentemente dal teorema di Cauchy-Kovalevskaja, possiamo concludere, che il problema di Cauchy (1.20) *non ha alcuna soluzione* quando i dati di Cauchy sono assegnati su una superficie caratteristica Σ (determinata localmente da $t=0$), se essi non soddisfano una certa equazione supplettiva. Infatti, passando a coordinate Riemanniane in modo che l'equazione differenziale si possa scrivere come in (1.22), il fatto che Σ sia caratteristica e che quindi $a'^{tt}(0,\boldsymbol{\xi}) = 0$, implica che l'equazione in (1.22) si riduca, per $t=0$, a:

$$-\sum_{i=2}^{n} 2a'^{it}(0,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial u_1}{\partial \xi^i} - \sum_{i,j=2}^{n} a'^{ij}(0,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$$

$$+\Phi'\left(0,\boldsymbol{\xi},u_0(\boldsymbol{\xi}),u_1(\boldsymbol{\xi}),\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2},\cdots,\frac{\partial u_1}{\partial \xi^n},\cdots,\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2 \partial \xi^2},\cdots\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^n \partial \xi^n}\right) = 0\,.$$

Si osservi che questa condizione coinvolge unicamente quantità assegnate e non la soluzione, incognita, dell'equazione. Se questa equazione non è soddisfatta dalle condizioni di Cauchy non

può , evidentemente, esserci alcuna soluzione del problema di Cauchy.
(2) Mostriamo ora, con un esempio elementare, che viceversa vi sono casi in cui assegnare dati di Cauchy su superfici caratteristiche per un'equazione iperbolica comporta che esistano *infinite soluzioni* al problema posto. Consideriamo il problema di Cauchy per $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ dove $\mathbb{R}^2$ ha coordinate standard (x, y):

$$\begin{cases} u_{xy} = 0 \,, \\ u(x,0) = u_0(x) \,, \\ u_y(x,0) = u_1(x) \,, \end{cases} \tag{1.27}$$

dove $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono assegnate.
La matrice caratteristica A dell'equazione considerata è simmetrica, costante e vale a meno di un fattore moltiplicativo inessenziale:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Gli autovalori di A sono ± 1. Questo significa che esiste una matrice ortogonale R, 2×2, reale tale che:

$$RAR^t = \mathrm{diag}(1, -1) .$$

Di conseguenza l'equazione è ovunque di tipo iperbolico normale. Le superfici caratteristiche sono ora *curve caratteristiche*. Determiniamole. Consideriamo la solita funzione $S = S(x, y)$ i cui zeri determinano le curve caratteristiche. L'equazione (1.26) si riduce ora a:

$$\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} = 0 .$$

La soluzione $S =$ *costante* non determina alcuna caratteristica in quanto l'insieme $S(x, y) = 0$ è vuoto se la costante è non nulla, oppure è tutto $\mathbb{R}^2$ se la costante è nulla, ma in tale caso $dS = 0$ ovunque. Pertanto deve essere $S = S_1(x)$ con $dS_1/dx \neq 0$ sull'insieme:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | S_1(x) = 0 \ \} ,$$

oppure $S = S_2(y)$ con $dS_2/dy \neq 0$ sull'insieme:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | S_2(y) = 0 \ \} .$$

In particolare, per ogni coppia di costanti $c, d \in \mathbb{R}$, le funzioni $S_1(x) = x - c$ e $S_2(x) = y - d$ soddisfano le condizioni poste. In definitiva le rette $x =$ costante e $y =$ costante sono curve caratteristiche.
In particolare la retta $y = 0$ è una curva caratteristica e pertanto le condizioni di Cauchy del problema (1.27) sono assegnate su una superficie caratteristica.
La soluzione generale dell'equazione $u_{xy} = 0$ in $\mathbb{R}^2$ con $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ è (provarlo per esercizio):

$$u(x,y) = f(x) + g(y) ,$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sono funzioni arbitrarie. Pertanto ogni eventuale soluzione di (1.27) si deve ricondurre a questa forma. In particolare dovrà essere:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) + g(0) = u_0(x) \,, && (1.28)\\ u_y(x,0) &= g'(0) = u_1(x) \,. && (1.29) \end{aligned}$$

Concludiamo immediatamente da (1.29) che: *se u_1 non è una funzione costante, allora il problema di Cauchy (1.27) non ha soluzioni.*
Tuttavia, nel caso in cui u_1 sia una funzione costante, il problema (1.27) ha *infinite* soluzioni. Infatti ogni funzione della forma:

$$u(x,y) = u_1 y + h(y) + u_0(x) \,,$$

per $h \in C^2(\mathbb{R})$ *arbitrariamente* scelta purché $h(0) = 0$ e $h'(0) = 0$, risolve il problema di Cauchy (1.27).

Esempi 1.2.
(1) Consideriamo l'equazione delle onde su $\mathbb{R}^n$, con velocità di propagazione delle onde data dalla costante $c > 0$:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \,.$$

Le coordinate su $\mathbb{R}^n$ sono state decomposte come: $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. L'equazione è scritta in forma normale rispetto alla variabile t nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \,.$$

Ci si aspetta pertanto, che assegnando come dati di Cauchy $u(0, \mathbf{x})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x})$ esista una soluzione (ed una sola) del problema. Questo accade effettivamente, quando i dati di Cauchy sono in una determinata classe di funzioni. Passiamo a studiare le superfici caratteristiche sulle quali il problema di Cauchy è , in generale, mal posto. Per $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ fissato, si consideri la superficie conica di vertice $(t_0, \mathbf{x}_0)$:

$$\Gamma_{(t_0,\mathbf{x}_0)} := \left\{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \mid c^2(t - t_0)^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2\right\} \,.$$

Posto $S(t,x) = c^2(t-t_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2$, abbiamo che il luogo dei punti $(t, \mathbf{x})$ per cui $S(t, \mathbf{x}) = 0$ coincide con $\Gamma_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$, inoltre

$$dS = 2c^2(t - t_0)dt + 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}$$

non si annulla su $\Gamma_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0, \mathbf{x}_0)\}$. Infine, se a^{ij} definiscono la matrice caratteristica dell'equazione delle onde, si ha che:

$$\sum_{ij=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)^2 = -2c^2(t-t_0)^2 + 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \,,$$

si annulla esattamente su $\Gamma_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$. Concludiamo che $\Gamma_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \setminus \{(t_0,\mathbf{x}_0)\}$ è una superficie caratteristica dell'equazione delle onde. Tale superficie è detta *cono di luce* di vertice $(t_0,\mathbf{x}_0)$.
È importante precisare che i coni di luce non sono le sole superfici caratteristiche dell'equazione delle onde. Altre semplici superficie caratteristiche sono date dai piani di equazione

$$ct + \mathbf{x}\cdot\mathbf{b} = d\,,$$

dove il vettore costante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ soddisfa $||\mathbf{b}|| = 1$ e $d \in \mathbb{R}$ è arbitrario. La funzione S in questo caso è banalmente:

$$S(t,\mathbf{x}) := ct + \mathbf{x}\cdot\mathbf{b} - d\,.$$

(2) Le equazioni ovunque di tipo ellittico in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed in particolare l'equazione di Poisson e quella di Laplace *non ammettono superfici caratteristiche.* Infatti, essendo la matrice dei coefficienti a^{ij} definita positiva, l'equazione (1.26) ammette come unica soluzione:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0\,, \quad \text{per } i = 1,2,\ldots,n,$$

per cui, di conseguenza $dS = 0$ ovunque sul dominio di S. La non esistenza di superfici caratteristiche non significa, come già sottolineato, che i problemi di Cauchy siano sempre ben posti.
(3) Se $\Omega := \mathbb{R}^n$, consideriamo infine l'equazione del calore:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\Delta u = q\,.$$

dove $a > 0$ è una costante e $q = q(t,\mathbf{x})$ una funzione assegnata. Sopra le coordinate su $\mathbb{R}^n$ sono ancora state decomposte come: $x = (t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. In questo caso, la (1.26) si riduce a:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)^2 = 0\,,$$

che ammette come soluzione ogni funzione regolare $S = S(t)$. In particolare, per ogni fissata costante $c \in \mathbb{R}$, la funzione $S(t,\mathbf{x}) = t - c$ soddisfa tutti i requisiti per definire superfici caratteristiche. Concludiamo che i piani $t =$ costante sono superficie caratteristiche dell'equazione del calore.

Capitolo 2

Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$: risultati elementari.

In questo capitolo affronteremo il problema della ricerca delle soluzioni di una certa classe di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche e dello studio di alcune delle loro proprietà.

2.0.5 Il problema fisico dell'elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace.

Noi ci occuperemo dell'analisi matematica del problema fondamentale dell'elettrostatica. Il *regime elettrostatico* si ottiene studiando il campo $\mathbf{E}$ unicamente tramite le prime due equazioni di Maxwell. In tale ambito si assume che $\mathbf{E}$ unitamente a ρ, pensata come funzione assegnata, ed al campo $\mathbf{B}$ (che in tal modo sparisce dalle equazioni suddette) siano funzioni *indipendenti dal tempo*.
Consideriamo un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ non vuoto e connesso (anche se alcuni teoremi che dimostreremo in seguito sono validi anche se Ω non è connesso). La seconda equazione di Maxwell in forma integrale, se si assume $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ di classe $C^0(\Omega)$, assicura che $\mathbf{E}$ sia conservativo. Pertanto, in queste ipotesi esisterà una funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, determinata a meno di costanti additive, tale che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi\,. \tag{2.1}$$

Osservazioni 2.1. La seconda equazione in forma differenziale porta allo stesso risultato se si assume che $\mathbf{E}$ sia $C^1(\Omega)$ e che Ω sia *semplicemente connesso* (per esempio $\Omega = \mathbb{R}$). Questo fatto mostra che le equazioni di Maxwell differenziali implicano la validità di quelle integrali solo sotto opportune ipotesi topologiche sul dominio spaziale Ω.

La funzione φ è detta **potenziale elettrostatico**. Determinare φ significa determinare $\mathbf{E}$, pertanto passiamo a studiare φ che, essendo un campo scalare, è più facile da maneggiare di un campo vettoriale quale è $\mathbf{E}$. Supponiamo di conoscere la densità di carica elettrica in Ω, descritta da una funzione $\rho \in C^0(\Omega)$. Se assuminamo che φ sia di classe $C^2(\Omega)$ (cioè $\mathbf{E}$ di classe $C^1(\Omega)$), la prima equazione di Maxwell in forma differenziale, tenuto conto della (2.1) ed del fatto che

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta \,,$$

implica immediatamente che φ soddisfi su Ω l'**equazione di Poisson**

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{ossia} \quad \sum_{i,j=1}^{3} \delta^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i \partial x^j} = -4\pi\rho \,. \tag{2.2}$$

Tale equazione è un tipico esempio di equazione ellittica, infatti la forma quadratica associata al termine del secondo ordine è costantemente definita positiva.
In particolare se la densità di carica è nulla in tutti i punti della regine Ω, cioè $\rho = 0$, allora l'equazione (2.2) diviene l'**equazione di Laplace**:

$$\Delta\varphi = 0 \,. \tag{2.3}$$

Come già detto, la conoscenza del potenziale φ comporta anche la conoscenza del campo elettrico e quindi la soluzione del nostro problema. Le tre domande fondamentali alle quali un fisico vorrebbe avere risposta (dai matematici) sono: data una generica densità di carica $\rho \in C^0(\Omega)$, esiste la soluzione dell'equazione (2.2)? È unica? Come possiamo calcolarla?
Per dare una risposta positiva alle prime due domande (esistenza e unicità) è necessario fare delle ipotesi sulla struttura della regione Ω e imporre delle condizioni aggiuntive che il potenziale φ dovrà soddisfare: le *condizioni al contorno*. Sappiamo che non possiamo dare condizioni di Cauchy complete perché il problema risulta, in generale essere malposto. Dobbiamo pertanto "indebolire" le condizioni assegnate nel problema di Cauchy. Ci sono diversi modi di far ciò . Vediamo i due esempi più importanti.

Problema di Dirichlet. Risolvere il problema di Dirichlet significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω, insieme aperto a chiusura compatta imponendo i valori che il potenziale φ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \quad \text{su } \Omega \,, \\ \varphi \restriction_{\partial\Omega} = \varphi_0 \;\; \text{(assegnato)} \,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Osservazioni 2.2.
(1) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Dirichlet è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice, sulla quale il potenziale elettrico ha un valore costante che può essere assegnato arbitrariamente dall'esterno collegando la superficie ad una batteria e in Ω è anche presente una densità di carica $\rho = f/4\pi$ assegnata. Vedremo che in questo caso la soluzione φ del problema è unica, e quindi il campo $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ è unicamente determinato.
(2) C'è anche un altro caso fisicamente importante in cui rientra l'equazione di Laplace. Si tratta del caso in cui si vuole determinare la temperatura T in un mezzo omogeneo di volume Ω limitato (pensato come un aperto a chiusura compatta di $\mathbb{R}^3$), quando è tenuta fissa tramite termostati,

ed è nota, la temperatura al contorno del mezzo $\partial\Omega$ e il sistema fisico si trova in situazione di regime (non ci sono più variazioni di temperatura nel tempo). In tal caso, all'interno di Ω, la temperatura T soddisfa l'equazione di Laplace e pertanto il problema fisico si riduce ad un problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \quad \text{su } \Omega\,, \\ T \restriction_{\partial\Omega} = T_0 \ \text{(funzione assegnata)}\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Problema di Neumann. Risolvere il problema di Neumann significa risolvere l'equazione di Poisson su una regione Ω, con Ω aperto a chiusura compatta e bordo $\partial\Omega$ regolare, imponendo i valori che la derivata normale alla superficie potenziale $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ deve assumere sul bordo $\partial\Omega$ di Ω:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \quad \text{su } \Omega\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} \restriction_{\partial\Omega} = \varphi_1 \ \text{(assegnato)}\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Osservazioni 2.3.
(1) Notiamo che nei problemi di elettrostatica $-\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ è la componente del campo elettrico ortogonale alla superficie $\partial\Omega$.
(2) Una tipica situazione fisica il cui è necessario risolvere un problema di Neumann è quella in cui $\partial\Omega$ è una superficie conduttrice ed è anche presente in Ω una densità di carica $\rho = -f/4\pi$ assegnata. (In tal caso si dimostra che il campo elettrico è sempre ortogonale a $\partial\Omega$ ed è proporzionale alla densità di carica superficiale su $\partial\Omega$). Vedremo che in questo caso la soluzione φ del problema è unica a meno di una costante additiva, e quindi il campo $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ è *comunque* unicamente determinato.

2.1 Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato.

2.1.1 Funzione armoniche e sub armoniche in $\mathbb{R}^n$.

Le funzioni reali di classe C^2 che soddisfano l'equazione di Laplace, anche in dimensione maggiore di 3, sono di grandissima rilevanza in matematica, per le loro molteplici proprietà analoghe a quelle delle funzioni analitiche (*olomorfe*) complesse di variabile complessa [6, 3]. Queste funzioni sono dette *funzioni armoniche*.

Definizione 2.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. φ è detta **armonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$, e soddisfa $\Delta\varphi = 0$ in Ω. $\diamondsuit$

Le funzioni *subarmoniche* hanno minor rilevanza ma sono un utile strumento tecnico in alcune dimostrazioni.

Definizione 2.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. φ è detta **subarmonica** se $\varphi \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta\varphi \geq 0$ in Ω. $\diamondsuit$

Osservazioni 2.4. A volte si richiede che l'insieme aperto non vuoto Ω sul quale sono definite le funzioni armoniche e sub armoniche sia anche connesso. Noi non faremo questa assunzione dato che non è strettamente necessaria. Quando essa risulterà necessaria ci ridurremo a lavorare in una componente connessa di Ω.

Esempi 2.1.
1. In dimensione $n = 1$ le funzioni armoniche sono tutte e sole le funzioni che si restringono a funzioni lineari (non necessariamente omogenee) su ogni componente connessa del dominio. Infatti gli aperti sono unioni di aperti connessi e gli aperti connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli aperti (a, b), inoltre, se su (a, b) vale, per $\varphi \in C^2((a, b))$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = 0$$

allora, integrando,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = m \quad \text{costante,}$$

per cui, per qualche costante $q \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = mx + q\,, \quad \text{per ogni } x \in (a, b).$$

Viceversa ogni funzione lineare su (a, b) è sicuramente di classe $C^2((a, b))$ ed ha derivata seconda nulla. Su ogni componente connessa di un aperto non vuoto $\Omega \subset \mathbb{R}$, ogni funzione armonica su Ω è una funzione lineare non omogenea. Si osservi che le costanti m, q possono essere diverse a seconda della componente connessa di Ω considerata.
Per $n = 1$, le funzioni subarmoniche sono invece le funzioni di classe C^2 definite in aperti non vuoti e ivi *convesse*.
2. Sia $n = 2$. Esiste un legame interessante tra funzioni analitiche complesse e funzioni reali armoniche. Si consideri $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, f è detta **analitica** oppure, indifferentemente, **olomorfa**[1] su Ω, se per ogni $z_0 \in \Omega$ la funzione f ammette sviluppo di Taylor centrato in z_0 e convergente a f in un intorno aperto di z_0. L'esistenza della serie di Taylor necessita in particolare dell'esistenza della derivata:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}\,, \tag{2.7}$$

per ogni $z_0 \in \Omega$. Il limite è definito nella topologia di $\mathbb{R}^2$: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|z - z_0| < \delta$ allora:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon\,,$$

[1] Il fatto che esistano due nomi per la stessa classe di funzioni è dovuto al particolare percorso storico che la teoria delle funzioni di variabile complessa ha seguito. Inizialmente si davano due differenti definizioni per le funzioni olomorfe e per quelle analitiche, più tardi è stato dimostrato che si tratta della stessa classe di funzioni.

e quindi è uniforme in tutte le direzioni. In particolare quindi, se $f'(z_0)$ esiste nel senso scritto sopra, può essere calcolata derivando lungo una fissata direzione. Decomponendo (2.7) in parte reale ed immaginaria, si può scrivere:

$$z = x + iy \in \Omega, \quad f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono la parte reale e immaginaria della funzione f. Tenendo conto dell'indipendenza direzionale del limite per calcolare $f'(z_0)$, abbiamo:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih} ,$$

Sostituendo la decomposizione di f in parte reale ed immaginaria, abbiamo dunque l'identità :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + iv(x, y)) ,$$

dove le derivate sono calcolate nel generico punto $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tenendo conto che u e v sono reali, raccogliendo separatamente parte reale ed immaginaria nell'identità trovata, abbiamo immediatamente che devono valere le **condizioni di Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \quad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega . \tag{2.8}$$

Notiamo che u e v sono sicuramente $C^2(\Omega)$, in realtà sono sempre $C^\infty(\Omega)$, dato che f è analitica e quindi infinitamente differenziabile. Abbiamo infine direttamente dalle condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\Delta u = 0 , \qquad \Delta v = 0.$$

Concludiamo che la parte reale ed immaginaria di ogni funzione olomorfa è una funzione armonica.

3. In dimensione $n > 1$ le funzioni armoniche sono moltissime. Alcuni polinomi di grado n sono armonici in dimensione $n > 1$: $P(x^1, \cdots, x^n) = x^1 \cdots x^n$. Vi sono anche funzioni non polinomiali, come per esempio, se $n > 1$:

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \sin\left(\sqrt{n-1}x^1\right) \sinh(x^2 + \cdots + x^n) .$$

Osservazioni 2.5.

(1) Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente – e la sufficienza è uno dei risultati più notevoli della teoria delle funzioni analitiche complesse – affinché $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, sia olomorfa su Ω è che, per ogni $z_0 \in \Omega$, esista la derivata $f'(z_0)$, definita in (2.7).

(2) Si può provare [6], in riferimento a $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto non vuoto, che f è olomorfa in Ω se e solo se la sua parte reale ed immaginaria u e v soddisfano: (i) $u, v \in C^1(\Omega)$ (pensando Ω come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) unitamente a (ii) le condizioni di Cauchy-Riemann (2.8) su Ω.

(3) Le funzioni olomorfe sono molto comuni: tutti i polinomi della variabile $z \in \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, i rapporti tra polinomi sono funzioni olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ escludendo gli zeri del polinomio a denominatore. Vi sono poi funzioni olomorfe definite sommando serie che estendono nel piano complesso funzioni reali di variabile reale. Per esempio:

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

estende a valori complessi la funzione esponenziale $\mathbb{R} \ni \mapsto e^x$ definendo una funzione olomorfa su tutto il piano complesso. Nello stesso modo, cioè usando la stessa serie di Taylor che le definisce nei reali, ma valutandola per valori complessi della variabile, si defniscono le funzioni olomorfe $sinz$ e $cosz$ su tutto il piano complesso e si verifica la relazione di Eulero valida per tutti i complessi $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) .$$

Sono infine olomorfe le composizioni di funzioni olomorfe. Quindi, per esempio:

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \sin\left(e^{\frac{z^2}{z-1}}\right) ,$$

è una funzione olomorfa sul dominio indicato.

2.1.2 Principio del massimo (in forma debole).

Nel caso $n = 1$, le funzioni armoniche sono, come visto sopra, della forma $\varphi : (a, b) \ni x \mapsto mx+q$. Notiamo che, nel caso considerato, se estendiamo φ all'intervallo chiuso $[a, b]$, supposto a, b finiti, accade che il massimo ed il minimo di φ sono assunti sul bordo di tale intervallo. Questa è una notevole proprietà delle funzioni armoniche che vale nel caso generale e cade sotto il nome di *principio del massimo* (anche se è un teorema). Si osservi che, sempre nel caso $n = 1$, ogni funzione subarmonica $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ (che è convessa come prima precisato), se è estendibile per continuità ai valori estremi dell'intervallo (a, b) supposto finito, assume valore massimo in uno dei due estremi. Anche questa è una proprietà generale delle funzioni subarmoniche che useremo per provare il principio del massimo per funzioni armoniche e che enunciamo in un unico teorema.

Teorema 2.1. **(Principio del massimo)**. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\overline{\Omega}$ compatto. Sia $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe $C^0(\overline{\Omega})$. Allora vale quanto segue.*
(a) *Se φ è subarmonica in Ω allora:*

$$\max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi .$$

(b) *Se φ è armonica in Ω allora:*

$$\max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi , \qquad \min_{\overline{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \qquad e \qquad \max_{\overline{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi| .$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che l'ipotesi di compattezza di $\overline{\Omega}$ (e quindi del sottoinsieme chiuso $\partial\Omega$) assicura l'esistenza dei massimi e minimi di cui si parla nella tesi essendo essi relativi a funzioni continue. Supponiamo inizialmente che $\Delta\varphi > 0$ su Ω. Sia $x_0 \in \bar{\Omega}$ un punto di massimo assoluto. Proviamo che $x_0 \in \partial\Omega$ e quindi la validità della tesi (a) nel caso $\Delta\varphi > 0$.
Se per assurdo fosse $x_0 \in \Omega$, allora la matrice hessiana di coefficienti $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$ sarebbe semidefinita negativa e quindi la sua traccia sarebbe non positiva: $\Delta\varphi|_{x_0} \leq 0$, che contraddice $\Delta\varphi|_{x_0} > 0$, quindi $x_0 \in \partial\Omega$.
Consideriamo ora il caso $\Delta\varphi \geq 0$ e definiamo la funzione $\tilde{\varphi} = \varphi + \epsilon|x|^2$, dove $\epsilon > 0$. Allora $\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi + 2n\epsilon > 0$, quindi applicando il risultato appena dimostrato, si ha per ogni fissato $x \in \overline{\Omega}$:

$$\tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2,$$

dove $R^2 = \max_{x\in\partial\Omega} |x|^2$. Quindi $\forall x \in \overline{\Omega}$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x) + \epsilon|x|^2 \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2,$$

da cui:

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2 \,.$$

Dato che, per ogni fissato $x \in \overline{\Omega}$, ciò vale per ogni $\epsilon > 0$, dovrà anche essere, per quel valore di x:

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi$$

da cui segue la tesi in (a). Se φ è armonica allora φ e $-\varphi$ sono subarmoniche, da cui:

$$\max_{\partial\Omega} \varphi = \max_{\overline{\Omega}} \varphi,$$

$$\min_{\partial\Omega} \varphi = -\max_{\partial\Omega}(-\varphi) = -\max_{\overline{\Omega}}(-\varphi) = \min_{\overline{\Omega}} \varphi.$$

Inoltre, dato che $\max|\varphi| = \max(|\max\varphi|, |\min\varphi|)$ vale anche:

$$\max_{\partial\Omega} |\varphi| = \max_{\overline{\Omega}} |\varphi|.$$

□

2.1.3 Principio del massimo generalizzato.

Mostriamo ora che il teorema precedente si generalizza a funzioni che non sono necessariamente armoniche, ma che sono soluzioni di una particolare classe di equazioni del secondo ordine lineari ed ellittiche.

Teorema 2.2. **(Principio del massimo generalizzato)**. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\overline{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

un operatore differenziale del secondo ordine tale che:

(i) la matrice caratteristica di coefficienti $a^{ij}(x)$ è ovunque definita positiva su Ω;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} x^k b^k(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ (in particolare può essere $b^k(x) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ ed ogni $x \in \Omega$).

Si consideri una funzione $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ di classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Allora valgono i fatti seguenti.

(a) *Se $L\varphi \geq 0$ su Ω allora:*

$$\max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\partial\Omega} \varphi$$

(b) *Se $L\varphi = 0$ su Ω allora vale, in aggiunta alla precedente, anche*:

$$\min_{\overline{\Omega}} \varphi = \min_{\partial\Omega} \varphi \qquad e \qquad \max_{\overline{\Omega}} |\varphi| = \max_{\partial\Omega} |\varphi| \,.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente. Se vale $L\varphi > 0$ su Ω e $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo assoluto della funzione φ su $\overline{\Omega}$, allora $\nabla\varphi|_{x_0} = 0$ e la matrice di coefficienti $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$ è semidefinita negativa. Dato che la matrice $A(x_0)$ di coefficienti $a^{ij}(x_0)$ è definita positiva, per il teorema di Sylvester, si potrà scrivere come $A(x_0) = DID^t = DD^t$ dove D è una matrice quadrata non singolare. Inoltre, se $H(x_0)$ è la matrice quadrata simmetrica di coefficienti $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0}$, si ha (tenendo conto che la parte del prim'ordine di L non fornisce contributo in quanto tutte le derivate prime di φ si annullano in x_0):

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} = \mathrm{tr}\,(A(x_0)H(x_0)) \ ,$$

per cui:

$$L\varphi|_{x_0} = \mathrm{tr}\left(DD^t H(x_0)\right) = \mathrm{tr}\left(D^t H(x_0) D\right) \ .$$

Dato che D è non singolare e $H(x_0)$ è semidefinita negativa, $D^t H(x_0) D$ sarà ancora semidefinita negativa[2] e quindi avrà autovalori non positivi. La traccia di tale matrice sarà dunque non positiva. In definitiva:

$$L\varphi|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}|_{x_0} \leq 0,$$

[2] Per ipotesi $u^t H(x_0) u \leq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, ma dato che $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è biettiva, dovrà anche valere: $v^t D^t H(x_0) D v = (Dv)^t H(x_0) Dv \leq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

che è assurdo perché per ipotesi $L\varphi|_{x_0} > 0$.
Supponiamo ora che $L\varphi \geq 0$ su Ω e definiamo $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \epsilon|x|^2$. Per ogni $\epsilon > 0$ vale:

$$L\tilde{\varphi}(x) = L\varphi(x) + 2\epsilon\, \mathrm{tr}A(x) + 2\epsilon \sum_{k=1}^{n} x^k b^k(x) > 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che la traccia della matrice $A(x)$ di coefficienti $a^{ij}(x)$ è strettamente positiva in quanto, per ipotesi, tale matrice è definita positiva ed inoltre $\sum_{k=1}^{n} x^k b^k(x) \geq 0$ sempre per ipotesi. Per la prima parte della dimostrazione, abbiamo quindi che:

$$\max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} = \max_{\partial\Omega} \tilde{\varphi}\,,$$

e allora, per ogni fissato $x \in \overline{\Omega}$:

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} \leq \max_{\partial\Omega} \varphi + \epsilon R^2,$$

con $R^2 = \max_{\partial\Omega} |x|^2$. La dimostrazione si conclude come quella del teorema precedente. $\Box$

Osservazioni 2.6. Si noti che non è stata fatta alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni $\Omega \ni x \mapsto a^{ij}(x)$ e $\Omega \ni x \mapsto b^k(x)$ usate nella definizione di L.

2.1.4 Due teoremi di unicità per il probelma di Dirichlet dal principio del massimo.

In questa sezione applichiamo il principio del massimo per dimostrare l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Poisson (2.2) nel caso del problema di Dirichlet.

Teorema 2.3. **(Unicità per il problema di Dirichlet 1)**. *Si consideri il seguente problema di Dirichlet per la funzione $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, riferita all'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto a chiusura compatta:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \quad su\ \Omega\,, \\ \varphi \restriction_{\partial\Omega} = \psi\,, \end{cases} \qquad \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)\,, \tag{2.9}$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate. Se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $\phi_1 - \phi_2$ è identicamente nulla: $\phi_1 - \phi_2 = 0$.
$\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω, infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω; inoltre $(\phi_1 - \phi_2)|_{\partial\Omega} = 0$.
Per il principio del massimo

$$\max_{\overline{\Omega}} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial\Omega} |\phi_1 - \phi_2| = 0,$$

da cui $\phi_1 = \phi_2$ su $\overline{\Omega}$. $\diamondsuit$

Osservazioni 2.7.
(1) Notare che nel teorema precedente non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla regolarità di $\partial\Omega$, in particolare non è necessario che $\partial\Omega$ sia una superficie regolare. Non è necessario inoltre supporre che Ω sia connesso.
(2) Si supponga di essere riusciti a provare, e questo è possibile sotto opportune ipotesi di regolarità di $\partial\Omega$, che Ω ed f del teorema precedente sono tali che, per ogni $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ esista una soluzione (e dunque una *sola* soluzione) φ del problema di Dirichlet considerato. In questo caso, la dimostrazione data del teorema dimostra anche che il problema di Dirichlet è ben posto nel senso di Hadamard (considerando ovviamente la sola condizione al bordo di Dirichlet), se si dota lo spazio delle condizioni iniziali e lo spazio delle soluzioni della topologia metrica indotta dalla norma $||\cdot||_\infty$. In realtà questa topologia non è appropriata nello spazio delle soluzioni dato che non considera le derivate delle funzioni φ (in linea di principio, si potrebbe avere una successione di dati al bordo che tende a zero uniformemente, mentre le derivate delle soluzioni associate non tendono ad alcun limite). Pertanto il problema della dipendenza continua dai dati iniziali non può essere affrontato con il solo principio del massimo.
(3) Con la stessa dimostrazione, ma usando il principio del massimo generalizzato si dimostra il seguente teorema più generale:

Teorema 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto con $\overline{\Omega}$ compatto. Sia:*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

un operatore differenziale del secondo ordine su Ω tale che:
(i) la matrice caratteristica di coefficienti $a^{ij}(x)$ è ovunque definita positiva su Ω;
(ii) $\sum_{k=1}^{n} x^k b^k(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ (in particolare $b^k(x) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ ed ogni $x \in \Omega$).
Si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} L\varphi = f & su\ \Omega\,, \\ \varphi \restriction_{\partial\Omega} = \psi\,, \end{cases} \qquad \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)\,, \tag{2.10}$$

con $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate. Se esiste una soluzione al problema posto, questa è unica. $\diamondsuit$

Passiamo a provare un teorema di unicità della soluzione del problema di Dirichlet su una regione non limitata (problema di Dirichlet *esterno*) nell'ipotesi che la soluzione φ tenda a 0 quando $x \to \infty$ *uniformemente* (nelle possibili direzioni), in altre parole, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R_\epsilon > 0$ tale che $|\varphi(x)| < \epsilon$ se $||x|| > R_\epsilon$.

Teorema 2.5. **(Unicità per il problema di Dirichlet 2)**. *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ a chiusura compatta, si consideri il problema di Dirichlet per $\varphi : \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$, dove vale*

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0\left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}\right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = f \quad \textit{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ \varphi \restriction_{\partial\Omega} = \psi\,, \quad \varphi \to 0 \textit{ uniformemente quando } x \to \infty. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

dove $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ sono funzioni assegnate.
Se esiste una soluzione essa è unica. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Sia B_R una palla di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e contenente $\overline{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema 2.11 tendenti uniformemente a 0 quando $x \to \infty$. Allora $\phi_1 - \phi_2 = 0$ su $\partial\Omega$ e $|\phi_1 - \phi_2|_{|\partial B_R} \to 0$ quando $R \to \infty$ uniformemente. $\phi_1 - \phi_2$ inoltre è armonica in $B_R \setminus \bar{\Omega}$, per cui, fissato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$,

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \max_{\partial\Omega \cup \partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| = \max_{\partial B_R} |\phi_1 - \phi_2| \to 0 \quad \text{se} \quad R \to \infty\,.$$

Ciò prova che $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.$\Box$

Osservazioni 2.8. Anche in questo caso, nello stesso modo, ma usando il principio del massimo generalizzato possiamo provare il seguente teorema più generale.

Teorema 2.6. *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ a chiusura compatta e si consideri il problema di Dirichlet per per $\varphi : \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$, dove vale $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C^0\left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}\right)$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} L\varphi = f \quad \textit{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}\,, \\ \varphi \restriction_{\partial\Omega} = \psi\,, \quad \varphi \to 0 \textit{ uniformemente quando } x \to \infty. \end{array} \right. \tag{2.12}$$

dove $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ è assegnata e

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

è un operatore differenziale del secondo ordine tale che:
(i) la matrice caratteristica di coefficienti $a^{ij}(x)$ è ovunque definita positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$;
(ii) $\sum_{k=1}^n x^k b^k(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ (in particolare $b^k(x) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$).
Se esiste una soluzione essa è unica. $\diamondsuit$

2.2 Le identità di Green le loro conseguenze elementari.

In questa sezione introduciamo delle formule utili dette di *identità di Green*, che hanno alcune importanti conseguenze sulle funzioni armoniche e sulle soluzioni dell'equazione di Poisson.

2.2.1 Identità di Green.

Diamo la forma delle identità di Green. Le ipotesi non sono il caso più generale possibile.

Teorema 2.7. *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ aperto, la cui chiusura $\overline{V}$ sia compatta e tale che il suo bordo ∂V sia una superficie regolare (di dimensione $n-1$) orientabile. Siano $\phi, \psi : \overline{V} \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1(\overline{V})$. Allora valgono le due* **identità di Green**, *dove* $\mathbf{n}$ *è il versore normale a ∂V orientato in modo uscente:*

$$\int_V \phi \Delta \psi d^n x + \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi d^n x = \oint_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{2.13}$$

se $\psi \in C^2(V)$,

$$\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, d^n x = \oint_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{2.14}$$

se $\psi, \phi \in C^2(V)$.
Gli integrali $\int_V \phi \Delta \psi d^n x$ e $\int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, d^n x$ sono da intendersi nel caso generale come integrali impropri di Riemann, oppure come integrali nel senso di Lebesgue, qualora le funzioni integrande siano (assolutamente) integrabili nel senso di Lebesgue. $\diamondsuit$

Dimostrazione. La prima identità di Green (2.13) si ottiene applicando la formula di Gauss alla funzione $\mathbf{E} : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ (che soddisfa le ipotesi per applicare il teorma di Gauss su Ω). La tesi segue subito dall'identità:

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \Delta \psi \, .$$

La seconda identità di Green (2.14) si ottiene dalla (2.13), scritta due volte invertendo, la seconda volta, il ruolo di ψ e ϕ e sottraendo membro a membro i risultati. $\square$

2.2.2 Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann.

Vediamo ora altre proprietà delle funzioni armoniche e delle soluzioni dell'equazione di Poisson che derivano dal teorema di Gauss e dalle identità di Green.

Teorema 2.8. *Sia φ armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto aperto.*
Allora, per ogni superficie regolare $S \subset \Omega$ che sia il bordo orientabile di un aperto $V \subset \Omega$ con $\overline{V} \subset \Omega$ compatto, vale:

$$\oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

dove $\mathbf{n}$ *è il versore normale uscente alla superficie S. Il risultato vale considerando anche il caso limite $S = \partial \Omega$ se $\overline{\Omega}$ è compatto, S regolare e $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Dato che $\varphi \in C^2(\Omega)$, possiamo applicare la formula di Gauss al volume $V \subset \Omega$ con $\partial V = S \subset \Omega$:

$$\oint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \nabla\varphi d^n x = \int_V \Delta\varphi\, d^n x = 0\,.$$

Il caso limite segue nello stesso modo sempre dal teorema di Gauss. □

Conseguenza delle identità di Green è anche il seguente teorema di unicità della soluzione del problema di Neumann. Ricordiamo preventivamente un lemma.

Lemma 2.1. *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni punto di Ω vale $\nabla f = 0$ su Ω allora f è costante su ogni componente connessa di Ω.* ◊

Dimostrazione. Ogni componente connessa di un aperto è un insieme aperto connesso. Ogni insieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi differenziabili. Sia Ω_0 una componente connessa di Ω e $p, q \in \Omega_0$. Sia infine $\gamma : [a, b] \to \Omega_0$ una curva differenziabile tale che $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e $\gamma([a, b]) \subset \Omega_0$. La funzione $g(t) := f(\gamma(t))$ per $t \in [a, b]$ è differenziabile e, nelle nostre ipotesi:

$$g'(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0\,, \quad \text{per ogni } t \in [a, b]\,.$$

Ne consegue (dal teorema di Lagrange) che g è costante ed in particolare $f(p) = g(\gamma(a)) = g(\gamma(b)) = f(q)$. L'arbitrarietà dei punti $p, q \in \Omega_0$ implica che f è costante su Ω_0. □

Teorema 2.9. **(Unicità per il problema di Neumann 1)**. *Si consideri il seguente problema di Neumann per la funzione $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = f \quad su\ \Omega\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \restriction_{\partial\Omega} = \psi \end{array} \right. \qquad \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \tag{2.15}$$

con $f \in C^0(\Omega)$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate, per $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, con chiusura $\overline{\Omega}$ compatta e $\partial\Omega$ superficie $n-1$ dimensionale regolare e orientabile e $\mathbf{n}$ è il versore normale uscente. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti addittive. □

Dimostrazione. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema, dimostriamo che la funzione $u = \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò , notiamo inizialmente che $\phi_1 - \phi_2$ è armonica su Ω, infatti $\phi_1 - \phi_2 \in C^2(\Omega)$ e $\Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0$ su Ω. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_\Omega u \Delta u d^n x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\, dS\,.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_\Omega ||\nabla u||^2 d^n x = 0\,,$$

e dunque, essendo ∇u continua, $\nabla u = 0$ su Ω. Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω, u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. $\Box$

Osservazioni 2.9. Si consideri il problema di Neumann (2.15). Notiamo che dalla formula di Gauss applicata al campo vettoriale $\nabla\varphi$ segue

$$\int_\Omega \Delta\varphi d^n x = \int_\Omega \nabla \cdot \nabla\varphi \, d^n x = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS$$

dal fatto che φ deve essere soluzione del problema di Neumann abbiamo che

$$\int_\Omega \Delta\varphi d^n x = \int_\Omega f d^n x \qquad \text{e} \qquad \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} dS = \oint_{\partial\Omega} \psi dS \,.$$

Combinando i due risultati otteniamo la proposizione seguente.

Proposizione 2.1. *Condizione necessaria affinchè il problema di Neumann (2.15) ammetta soluzione è che:*

$$\int_\Omega f d^n x = \oint_{\partial\Omega} \psi dS \,.$$

$\diamondsuit$

Questo esempio ci porta a concludere che non tutti i problemi contenenti l'equazione di Poisson ammettono soluzione.
Concludiamo con due teorema di unicità per il problema di Neumann *esterno*.

Teorema 2.10. **(Unicità per il problema di Neumann 2)**. *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n-1$ dimensionale regolare ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \restriction_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq K\,, \quad ||\nabla\varphi(x)|| \leq \dfrac{K}{(1+||x||)^{n-1+\alpha}} \quad \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases} \qquad \varphi \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}\right) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})\,, \tag{2.16}$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove $\mathbf{n}$ è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica a meno di costanti additive. $\Box$

Dimostrazione. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e contenente $\overline{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò , notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u\Delta u d^n x = -\int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u \, d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \, .$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial \phi_1 - \phi_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} ||\nabla u||^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \, .$$

D'altra parte

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \right| \leq \oint_{\partial B_R} |u \mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u| \, dS \leq \frac{C}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS \, ,$$

per qualche $C, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u\mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u| \, |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u| \, ||\nabla u|| = ||u \nabla u||$$

e quindi

$$||u\nabla u|| \leq |\phi_1| \, ||\nabla \phi_1|| + |\phi_2| \, ||\nabla \phi_2|| + |\phi_1| \, ||\nabla \phi_2|| + |\phi_2| \, ||\nabla \phi_1|| \, ,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $||x|| = R$,

$$|\phi_1| \, ||\nabla \phi_1|| + |\phi_2| \, ||\nabla \phi_2|| + |\phi_1| \, ||\nabla \phi_2|| + |\phi_2| \, ||\nabla \phi_1|| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \, ,$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi (per esempio β è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Torniamo alla disuguaglianza:

$$\left| \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS \, .$$

L'ultimo membro tende a 0 per $R \to +\infty$ in quanto l'ultimo integrale vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Omega_R} ||\nabla u||^2 d^n x = 0 \, .$$

Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto ||\nabla u||^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} = \Omega_\infty$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto ||\nabla u||$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω, u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi. $\square$

Ecco il secondo teorema che fornisce l'unicità senza l'ambiguità della costante additiva arbitraria.

Teorema 2.11. **(Unicità per il problema di Neumann 3)**. *Se $\Omega \neq \emptyset$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ a chiusura compatta con bordo $\partial\Omega$ dato da una superficie $n-1$ dimensionale regolare ed infine $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ è connesso, si consideri il problema di Neumann per $\varphi : \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} \to \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \quad su\ \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \restriction_{\partial\Omega} = \psi \\ |\varphi(x)| \leq \dfrac{K}{(1+||x||)^\alpha}\,, \quad ||\nabla\varphi(x)|| \leq \dfrac{K}{(1+||x||)^{n-1}} \quad su\ \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases} \quad \varphi \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}\right) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}), \tag{2.17}$$

con $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$, $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ assegnate e dove $\mathbf{n}$ è il versore normale uscente e $K > 0$, $\alpha > 0$ sono costanti reali dipendenti da φ in generale. Allora, se esiste una soluzione φ al problema posto, questa è unica. $\Box$

Dimostrazione. La dimostrazione procede analogamente a prima. Sia B_R una palla aperta di raggio $R > 0$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e contenente $\overline{\Omega}$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due soluzioni del problema considerato dimostriamo che la funzione $u := \phi_1 - \phi_2$ è costante. Per dimostrare ciò , notiamo inizialmente che, per costruzione u è armonica su $\Omega_R := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap B_R$. Applicando la prima identità di Green:

$$0 = \int_{\Omega_R} u\Delta u d^n x = -\int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla u\, d^n x + \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\, dS + \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\, dS\,.$$

Dato che, nelle nostre ipotesi $\frac{\partial\phi_1 - \phi_2}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ ossia $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, l'identità di sopra implica:

$$\int_{\Omega_R} ||\nabla u||^2 d^n x = \oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\, dS\,.$$

D'altra parte

$$\left|\oint_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\, dS\right| \leq \oint_{\partial B_R} |u\mathbf{n}_{\partial B_R} \cdot \nabla u|\ dS \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS\,,$$

per costanti $H, \beta > 0$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$|u\mathbf{n} \cdot \nabla u| = |u|\, |\mathbf{n} \cdot \nabla u| \leq |u|\, ||\nabla u|| = ||u\nabla u||$$

e quindi

$$||u\nabla u|| \leq |\phi_1|\, ||\nabla\phi_1|| + |\phi_2|\, ||\nabla\phi_2|| + |\phi_1|\, ||\nabla\phi_2|| + |\phi_2|\, ||\nabla\phi_1||\,,$$

e, dato che tutte le funzioni sono valutate per $||x|| = R$,

$$|\phi_1|\, ||\nabla\phi_1|| + |\phi_2|\, ||\nabla\phi_2|| + |\phi_1|\, ||\nabla\phi_2|| + |\phi_2|\, ||\nabla\phi_1|| \leq \frac{H}{(1+R)^\beta} \frac{1}{(1+R)^{n-1}}\,,$$

dove $H > 0$ e $\beta > 0$ esistono per ipotesi (β è la più piccola tra le costanti α di ϕ_1 e ϕ_2 e H è 4 volte il quadrato della più grande delle costanti K di ϕ_1 e ϕ_2). Torniamo alla disuguaglianza:

$$\left|\oint_{\partial B_R} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS\right| \leq \frac{H}{(1+R)^{n-1+\beta}} \oint_{\partial B_R} dS \, .$$

L'ultimo membro tende a 0 per $R \to +\infty$ in quanto l'ultimo integrale vale CR^{n-1} per qualche costante $C > 0$. Per cui:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Omega_R} ||\nabla u||^2 d^n x = 0 \, .$$

Il teorema della convergenza monotona, assicura che la funzione $x \mapsto ||\nabla u||^2$ sia integrabile su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} = \Omega_\infty$ con integrale nullo. Pertanto la funzione deve essere quasi ovunque nulla. Essendo $u \mapsto ||\nabla u||$ continua, deve essere $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Concludiamo che, su ogni componente connessa di Ω, u deve essere costante. Questo implica immediatamente la tesi dato che $u(x) \to 0$ per $||x|| \to +\infty$ nelle nostre ipotesi, e quindi l'eventuale costante che differenzia ϕ_1 da ϕ_2 è nulla.
□

Capitolo 3

Soluzioni fondamentali per l'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$ e risultati ad esse legati.

Ci occuperemo ora di definire, e studiarne le proprietà , delle cosiddette *soluzioni fondamentali*, dell'equazione di Poisson. Tali strumenti matematici sono utili per vari motivi come vedremo. Esse permettono di ottenere altre importanti proprietà delle funzioni armoniche, ma fondamentalmente sono usate in una delle procedure classiche per determinare le soluzioni del problema di Dirichlet e Neumann.

3.1 Soluzioni fondamentali.

In questa sezione, una volta definite le soluzioni fondamentali, mostreremo come da esse si ricavino nuovi risultati sulle funzioni armoniche: i teoremi della media, un rafforzamento dell'enunciato del principio del massimo, la prova del fatto che le funzioni armoniche sono C^∞ ed addirittura analitiche, ed il risultato che stabilisce che se due funzioni armoniche coincidono su un aperto non vuoto A allora coincidono in ogni aperto connesso che contiene A sul quale sono entrambe definite (in particolare ogni funzione armonica nulla su un aperto non vuoto è nulla).

Definizione 3.1. Per $n = 2, 3, \ldots$ fissato, si definiscono **soluzioni fondamentali** su $\mathbb{R}^n$ dell'equazione di Poisson rispetto al punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le funzioni:

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto G_n(x, x_0) := \mathscr{G}_n(||x - x_0||) \, ,$$

dove, per $r > 0$,

$$\mathscr{G}_n(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n} & \text{se } n > 2 \, , \\ \dfrac{1}{(2\pi)} \log r & \text{se } n = 2 \, , \end{cases} \tag{3.1}$$

in cui ω_n è la misura della superficie della sfera di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$ pari a:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} .$$

$\diamondsuit$

Osservazioni 3.1.
(1) Γ è la nota *funzione gamma* di Eulero:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt , \quad \text{per } z > 0,$$

che si prolunga analiticamente univocamente in una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ con l'esclusione di singolarità (poli) nei punti $z = 0, -1, -2, \ldots$. Γ soddisfa, in particolare:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{e} \quad \Gamma(n+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots.$$

(2) Se $B_R \subset \mathbb{R}^n$ è una palla aperta di raggio R, $Vol(\partial B_R)$ e $Vol(B_R)$ denotano rispettivamente la misura della superficie di ∂B_R e del volume di B_R. Tali valori sono rispettivamente:

$$Vol(\partial B_R) = \omega_n R^{n-1} \quad \text{e} \quad Vol(B_R) = \frac{\omega_n R^n}{n} .$$

3.1.1 Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali.

Vediamo ora le proprietà principali delle soluzioni fondamentali appena definite. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è detta **di classe** $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ovvero, equivalentemente, **localmente integrabile**, se è misurabile e soddisfa:

$$\int_B |\tilde{f}\,| d^n x < +\infty , \quad \text{per ogni aperto limitato } B \text{ di } \mathbb{R}^n,$$

dove l'integrale è quello di Lebesgue.
Nel seguito, riferendoci ad una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con $A \subset \mathbb{R}^n$, diremo che essa è **di classe** $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ovvero equivalentemente **localmente integrabile**, se, estendendo tale funzione alla funzione nulla fuori da A, la funzione $\tilde{f}$ ottenuta in tal modo è localmente integrabile.

Teorema 3.1. *Per $n = 2, 3, \ldots$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissati, le soluzioni fondamentali $G_n(x, x_0)$ soddisfano le seguenti proprietà .*

(a) *Le funzioni $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x, x_0)$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto G_n(x_0, x)$ sono di classe $\mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$, anche se G_0 diverge per $x \to x_0$. Se $f \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$ è pertanto ben definito:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) f(y) d^n y .$$

(b) *Se* $x \neq x_0$ *allora:*

$$\Delta_x G_n(x, x_0) = 0 \,.$$

(c) *Se* $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x) \,.$$

(d) *Se* $\rho \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *allora:*

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x, y) \rho(y) d^n y = \rho(x) \,.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare (b). Dato che $G_n(x, x_0) := \mathscr{G}_n(||x - x_0||)$, è conveniente traslare l'origine delle cooordinate in x_0, che è tenuto fisso, introdurre un sistema di coordinate polari sferiche centrato in $x_0 = O$ e sfruttare il fatto che $\mathscr{G}_n$ dipende esplicitamente solo dalla variabile:

$$r := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = ||x - x_0|| \,. \tag{3.2}$$

Per computo diretto, calcolando il laplaciano in coordinate cartesiane ortonormali, si verifica subito che se $f = f(r)$ allora:

$$\Delta f(r) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(r) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{x^j}{r} \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{x^j x^i}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\delta^{ij} r - \frac{x^i x^j}{r}}{r^2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \,,$$

da cui, notando che

$$\sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \delta^{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta^{ii} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \,,$$

si trova alla fine a:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

Ora, tramite il conto esplicito usando (3.1), si verifica la proprietà (b):

$$\Delta\mathscr{G}_n(r) = \frac{\partial^2\mathscr{G}_n(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial\mathscr{G}_n(r)}{\partial r} = 0.$$

Da (3.1) risulta ovvio che $\mathscr{G}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, cioè, rispristinando le coordinate cartesiane iniziali $\mathscr{G}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$ In particolare $\mathscr{G}_n$ è dunque misurabile. Osserviamo inoltre che, essendo l'elemento di volume in coordinare sferiche

$$d^n x = \sqrt{r^{2n-2}} dr d\Omega_n = r^{n-1} dr d\Omega_n \ ,$$

dove $d\Omega_n$ è l'elemento di volume sulla sfera unitaria $n-1$ dimensionale, si ha che la funzione $\mathscr{G}_n$ è assolutamente integrabile in ogni aperto limitato B la cui chiusura include l'origine, dato che la divergenza per $r \to 0$ di $\mathscr{G}_n$ è controbilanciata da un fattore infinitesimo per $r \to 0^+$ dovuto alla misura usata: si ha in totale un termine $r^{2-n}r^{n-1}$, ovvero $r \ln r$ se $n = 2$, da integrare rispetto alla misura dr. L'integrazione di $d\Omega_n$ produce invece ω_n finito. Su aperti limitati la cui chiusura non include l'origine, essendo $\mathscr{G}_n$ continua, la sua integrabilità è ovvia. In definitiva $\mathscr{G}_n \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. L'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue assicura infine l'indipendenza da punto x_0 e che quindi $G_n(\cdot, x_0) \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Per simmetria nello scambio di x_0 e x in $G_n(x, x_0) = \mathscr{G}_n(||x - x_0||)$ si ha anche che $G_n(x_0, \cdot) \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$. In particolare sono ben definiti intgrali del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y) f(y) d^n y \ ,$$

per $f \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$ valendo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_n(x,y)f(y)| d^n y \leq \max_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\text{supp} f} |G_n(x,y)| d^n y < +\infty \ .$$

Abbiamo quindi provato anche la proprietà (a).
Dimostriamo ora che $(c) \Rightarrow (d)$.
Sia $\rho \in C^2_0(\mathbb{R}^n)$, se vale la (c), sfruttando l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue:

$$\begin{aligned}
\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{G}_n(||x-y||)\Delta_y \rho(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{G}_n(||u||)\Delta_u \rho(x-u) d^n u \\
= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{G}_n(||u||)\Delta_x \rho(x-u) d^n u = \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{G}_n(||u||)\rho(x-u) d^n u \\
= \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\rho(y) d^n y \ .
\end{aligned}$$

La penultima uguaglianza segue dalla formula di derivazione sotto il segno di integrale nella variabile x basata sul teorema della convergenza dominata di Lebesgue (vedi la sezione B.2 in appendice). Ipostesi sufficienti per applicarla per le derivate nel punto x_0 sono che, per una palla aperta $B_\epsilon(x_0)$ centrata nel punto x_0, la funzione $f(x,u) = \mathscr{G}_n(||u||)\rho(x-u)$ sia una funzione Lebesgue integrabile nella variabile $u \in \mathbb{R}^n$ per ogni $x \in B_\epsilon(x_0)$ e le derivate di tale funzione nella variabile x, fino all'ordine voluto (quello dell'operatore differenziale che si vuole scambiare con l'integrale), siano ciascuna rispettivamente maggiorata in valore assoluto, uniformemente in $x \in B_\epsilon(x_0)$, da una corrispondente funzione assolutamente integrabile dipendente dalla sola variabile d'integrazione $u \in \mathbb{R}^n$. Queste condizioni sono effettivamente verificate. Infatti al variare di $x \in B_\epsilon(x_0)$, i supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x-u)$ sono tutti contenuti in un compatto comune[1] K. Di conseguenza lo stesso accade, su K, per le derivate in x delle funzioni $u \mapsto \rho(x-u)$ (fino al secondo ordine). Definiamo una funzione C^∞ a supporto compatto $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u)$, che valga:

$$\max\left\{ \left|\frac{\partial \rho}{\partial x^k}\right| , \left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^i \partial x^j}\right| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n\ ,\ i,j,k = 0,1,2 \right\}$$

su K e si annulli rapidamente fuori da tale insieme. Per costruzione la funzione

$$\mathbb{R}^n \ni u \mapsto g(u)\mathscr{G}_n(||u||)$$

è Lebesgue integrabile e soddisfa, per $i,j = 0,1,2$:

$$\left|\frac{\partial f(u,x)}{\partial x^k}\right| , \left|\frac{\partial^2 f(u,x)}{\partial x^i \partial x^j}\right| \leq |g(u)\mathscr{G}_n(||u||)|\ , \quad (x,u) \in B_\epsilon(x_0) \times \mathbb{R}^n\ .$$

Questo giustifica lo scambio del simbolo di integrale con il laplaciano Δ_x (e con le derivate di ordine 1) eseguito sopra.
Dimostriamo infine la proprietà (c).
Ricordiamo che per ipotesi ρ ha supporto compatto, quindi ha supporto chiuso e limitato. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ consideriamo dunque una palla aperta $B_R(x)$, di raggio finito R e centrata in x, che include il supporto di ρ:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n y = \int_{B_R(x)} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n(y).$$

Gli integrali sono ben definiti visto che $\rho \in C^2(\overline{B_R(x)})$ è quindi limitata e pertanto, $y \mapsto G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)$ è Lebesgue integrabile essendo G_n localmente integrabile. Siano $B_\epsilon(x)$ palle aperte di centro x con raggio $\epsilon > 0$ e $\epsilon < R$. Consideriamo la classe di funzioni, parametrizzate in $\epsilon > 0$, ottenute restringendo $y \mapsto G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)$ agli insiemi $B_R(x)\setminus B_\epsilon(x)$ e definendole nulle fuori da tali insiemi. Per $\epsilon \to 0^+$, tali funzioni tendono puntualmente a $y \mapsto G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)$ definita su tutta $B_R(x)$, inoltre sono maggiorate in valore assoluto dal valore assoluto di tale funzione che è integrabile per ipotesi. Applicando il teorema della convergenza dominata abbiamo

[1] Sia $B_R(0)$ una palla di raggio $R > 0$ centrata nell'origine e sufficientemente grande da includere il supporto, compatto per ipotesi, di $u \mapsto \rho(x_0 - u)$. Sia $B_S(0)$ una seconda palla, centrata nell'origine, di raggio $S > 0$ che includa $B_\epsilon(x_0)$. I supporti delle funzioni $u \mapsto \rho(x-u)$, per $x \in B_\epsilon(x_0) \subset B_S(0)$, sono sicuramente inclusi in $\cup_{u \in B_R(0)} B_S(u)$. Tale insieme è sicuramente contenuto nella palla compatta $K := \overline{B_{R+S}(0)}$ che, a maggior ragione, contiene tutti i supporti delle funzioni dette.

allora che:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n(y) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B_R(x)\setminus B_\epsilon(x)} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n(y)\,.$$

Quindi, applicando la seconda identità di Green al risultato, troviamo:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n y = \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[\int_{B_R(x)\setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x,y)\rho(y)d^n(y)+$$

$$+\oint_{+\partial(B_R(x)\setminus B_\epsilon(x))} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot\mathbf{n}dS - \oint_{+\partial(B_R(x)\setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x,y)\rho(y)\cdot\mathbf{n}dS\Big]$$

Ora $\Delta_y G_n(x,y) = \Delta_y\mathscr{G}_n(||x-y|) = \Delta_x G_n(x,y)$ e, dato che il dominio di integrazione in y è esterno a $B_\epsilon(x)$, varrà :

$$\Delta_x G_n(x,y) = 0 \quad \forall y\in B_R(x)\setminus B_\epsilon(x)\,.$$

Inoltre:

$$\rho\restriction_{\partial B_R(x)} = 0\,, \quad \nabla_y\rho\restriction_{\partial B_R(x)} = 0$$

in quanto $(\text{supp}\rho)\cap\partial B_R(x) = \emptyset$.
Dunque:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n y =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x,y)\rho(y)\cdot\mathbf{n}'dS - \lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot\mathbf{n}'dS$$

Il cambiamento di segno rispetto all'integrale precedente è dovuto al fatto che abbiamo cambiato il verso del versore normale a $\partial B_\epsilon(x)$: $\mathbf{n}$ indica il versore entrante, nell'ultimo integrale invece $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ indica il versore uscente.
L'ultimo integrale soddisfa la seguente diseguaglianza:

$$\left|\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot\mathbf{n}'dS\right| \le \sup_{\partial B_\epsilon(x)} ||\nabla_y\rho||\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} |G_n(x,y)|\,dS\,,$$

e quindi, tenendo conto che $G(x,y)$ è costante in y su $\partial B_\epsilon(x)$, mentre $\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} dS = cost.\,\epsilon^{n-1}$,

$$\left|\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot\mathbf{n}'dS\right| \le \sup_{\partial B_\epsilon(x)} ||\nabla_y\rho|| cost.\epsilon^{n-1}\begin{cases}\frac{1}{\epsilon^{n-2}} & n>2\\ |\ln\epsilon| & n=2\end{cases}$$

che tende a 0 per $\epsilon\to 0^+$. Rimane quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^n y = \lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{+\partial B_\epsilon(x)} \nabla_y G_n(x,y)\rho(y)\cdot\mathbf{n}'dS\,.$$

Con il solito sistema di coordinate polari sferiche centrato in x, si ha:

$$\mathbf{n}' \cdot \nabla_y G_n(x,y)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \frac{\partial}{\partial r}\mathscr{G}_n(r)|_{\partial B_\epsilon(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\epsilon} & n=2 \\ \frac{1}{\omega_n \epsilon^{n-1}} & n>2 \end{cases} = \frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))}\,, \tag{3.3}$$

dove abbiamo usato il fatto che, riferendosi alle coordinate polari centrate in x, vale $\mathbf{n}' = \mathbf{e}_r$ e, per funzioni della sola coordinata radiale, $\mathbf{e}_r \cdot \nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial r} f(r)$. Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\Delta_y \rho(y) d^n y = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS$$

L'ultimo integrale può essere facilmente calcolato:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} \rho(y) dS(y)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y)-\rho(x)) dS(y) \;+\; \rho(x) \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y)$$

$$= 0 + \rho(x)\,.$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\left|\frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y)-\rho(x)) dS(y)\right| \leq \frac{\max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y)-\rho(x)|}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} dS(y) \leq \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y)-\rho(x)|$$

In definitiva

$$\left|\frac{1}{Vol(\partial B_\epsilon(x))} \oint_{\partial B_\epsilon(x)} (\rho(y)-\rho(x)) dS(y)\right| \leq \max_{\partial B_\epsilon(x)} |\rho(y)-\rho(x)| \leq \max_{\overline{B_\epsilon(x)}} |\rho(y)-\rho(x)|$$

e l'ultimo termine tende a zero per $\epsilon \to 0^+$, dato che ρ è continua. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)\Delta_y \rho(y) d^n y = \rho(x)\,.$$

□

3.2 Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$.

Nella dimostrazione del teorema 3.1, nell'espressione:

$$\int_{B_R(x)} G_n(x,y)\Delta_y \rho(y) d^n(y) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{B_R(x)\setminus B_\epsilon(x)} \Delta_y G_n(x,y)\rho(y) d^n(y) + \right.$$

$$+ \oint_{+\partial(B_R(x)\setminus B_\epsilon(x))} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot \mathbf{n}dS - \oint_{+\partial(B_R(x)\setminus B_\epsilon(x))} \nabla_y G_n(x,y)\rho(y)\cdot \mathbf{n}dS\Bigg]$$

abbiamo trascurato gli integrali di superficie relativi a $\partial B_R(x)$, dato che la funzione ρ si annulla prima di arrivare a $\partial B_R(x)$. Tuttavia avremmo potuto considerare una palla $B_R(x)$ e più in generale un dominio Ω a chiusura compatta e con bordo regolare, sul quale ρ e le sue derivate non si annullano. Usando *essenzialmente la stessa dimostrazione* con Ω al posto di $B_R(x)$, ma senza trascurare gli integali di bordo su $\partial\Omega$, si arriva al seguente importante teorema:

Teorema 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $\overline{\Omega}$ compatto e $\partial\Omega$ una superficie regolare ed orientabile. Sia $\rho : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\overline{\Omega})$. Per ogni $x \in \Omega$, vale l'identità :*

$$\rho(x) = \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x,y))\rho(y)\cdot \mathbf{n}dS(y) - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x,y)\nabla_y\rho(y)\cdot \mathbf{n}dS(y) + \int_\Omega G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)d^ny\,. \quad (3.4)$$

A parità di ipotesi su Ω la stessa formula vale se, più debolmente, $\rho \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\Delta\rho$ limitato su Ω. $\diamondsuit$

Dimostrazione. La prima affermazione si prova come per (c) del teorema 3.1 semplicemente rimpiazzando $B_R(x)$ con Ω e tenendo conto che il supporto di ρ ora può intersecare $\partial\Omega$ per cui rimangono dei contributi dovuti agli integrali di superficie trascurati nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Se la funzione continua $\Delta\rho$ è limitata su Ω allora $\Omega \ni y \mapsto G_n(x,y)\Delta_y\rho(y)$ è comunque integrabile su Ω essendo G_n localmente integrabile e pertanto la dimostrazione si può ripetere similmente alla precedente dato che siamo nelle ipotesi di validità delle identità di Green. $\Box$

Studiamo ora le conseguenze di questo risultato fondamentale.

3.2.1 Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto.

La prima conseguenza del teorema 3.2, è la seguente proposizione che stabilisce che non esistono funzioni armoniche a supporto compatto.

Proposizione 3.1. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto non esistono funzioni armoniche a supporto compatto in A.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Supponiamo che $g : A \to \mathbb{R}$ sia armonica a supporto (rispetto a Ω) compatto K. Dato che la proprietà di compattezza non dipende dalla topologia indotta, K è compatto anche rispetto alla topologia di $\mathbb{R}^n$ ed è pertanto chiuso in $\mathbb{R}^n$ (e limitato). Di conseguenza K è strettamente incluso in A. Possiamo allora prolungare g su tutto $\mathbb{R}^n$ definendola come la funzione nulla fuori da A ed ottenendo una funzione $C^2(\mathbb{R}^n)$ ed armonica su tutto $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta g(y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Applicando l'identità stabilita nel teorema 3.2 per Ω dato da una palla di raggio sufficientemente grande da includere strettamente K e x, in modo tale che g e ∇g si annullino su $\partial\Omega$, si ha:

$$g(x) = -\oint_{+\partial\Omega} G_n(x,y)\nabla_y g(y)\cdot \mathbf{n}dS(y) + \oint_{+\partial\Omega} (\nabla_y G_n(x,y))g(y)\cdot \mathbf{n}dS(y)$$

$$+\int_{\Omega} G_n(x,y)\Delta_y g(y) d^n y = 0\,,$$

per ogni $x \in \Omega$ (fuori da Ω la funzione è nulla per costruzione) ed in particolare $x \in A$. $\Box$

3.2.2 Analiticità delle funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$.

Per eneunciare e dimostrare (parzialmente) il prossimo teorema, ricordiamo che una funzione di più variabili complesse $f : \Omega_{\mathbb{C}} \ni z \mapsto \mathbb{C}$, con $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ aperto non vuoto, è detta **funzione analitica di più variabili complesse** (equivalentemente **funzione olomorfa di più variabili complesse**) [6] se f è analitica (ossia olomorfa) in ciscuna variabile z^k di $z = (z^1, \ldots, z^n)$ separatamente, quando le altre sono fissate arbitrariamente. Risulta che se $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ è analitica, allora, per ogni $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 in un intorno aperto di z_0 incluso in $\Omega_{\mathbb{C}}$. Ovviamente ci stiamo riferendo allo sviluppo di Taylor in più variabili:

$$f(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial z^{1\alpha_1}\cdots\partial z^{n\alpha_n}}\right|_{z_0} (z^1 - z_0^1)^{\alpha_1}\cdots(z^n - z_0^n)^{\alpha_n}\,. \tag{3.5}$$

Si osservi che, posto $z = x + iy$, *se $f(x)$ assume valori reali per ogni $x \in \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$*, lo sviluppo sopra scritto sviluppato attorno a $z_0 = x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e calcolato per $x \in \mathbb{R}$ si riduce al solito sviluppo di Taylor reale:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1}\cdots\partial x^{n\alpha_n}}\right|_{z_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1}\cdots(x^n - x_0^n)^{\alpha_n}\,, \tag{3.6}$$

dove abbiamo calcolato tutte le derivate parziali eseguendo i limiti sull'asse reale. In questo caso, dato che $\Omega := \mathbb{R}^n \cap \Omega_{\mathbb{C}}$ è aperto, la restrizione di f a tale dominio definisce una funzione analitica reale.

Teorema 3.3. **(Analiticità delle funzioni armoniche).** *Se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, è armonica su Ω, allora $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e più fortemente φ è analitica reale su Ω.*$\diamondsuit$

Traccia della dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$, consideriamo una palla B aperta di raggio finito e con $\overline{B} \subset \Omega$ centrata in x_0 e applichiamo la formula (3.4) su B, tenendo conto che $\Delta\varphi = 0$:

$$\varphi(x) = -\oint_{+\partial B} G_n(x,s)\nabla_s\varphi(s)\cdot \mathbf{n}dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x,s))\varphi(s)\cdot \mathbf{n}dS(s)\,,$$

dove, in particolare, $x \in B'$, con B' palla aperta centrata in x_0 di raggio strettamente inferiore a quello di B. I due integrandi sono funzioni continue nelle variabili (x, s) e quindi limitate su $(x, s) \in \overline{B'} \times \partial B$ (che è un insieme compatto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). La stessa cosa accade alle derivate in x, di ogni ordine, degli integrandi. Notare le divergenze di $G_n(x, s)$ (e delle sue derivate) appaiono solamente quando $x = s$, cosa impossibile se $(x, s) \in \overline{B'} \times \partial B$. Per ogni derivata di ogni fissato ordine α (incluse derivate miste) nelle componenti di x, $D_x^{(\alpha)}$ esiste una costante M_α per cui $|D_x^{(\alpha)} G_n(x, s)\mathbf{n} \cdot \nabla_s \varphi(s)| \leq M_\alpha$ per ogni $s \in \partial B$ ed uniformemente in $x \in B'$. Dato che, per ogni α, ogni funzione costante $\partial B \ni s \mapsto M_\alpha \geq 0$ è sicuramente assolutamente integrabile su ∂B (che ha misura finita!), concludiamo (vedi la sezione B.2 in appendice) che possiamo passare la derivata $D_x^{(\alpha)}$ fuori dal segno di integrale in

$$-\oint_{+\partial B} D_x^{(\alpha)} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s)$$

derivando per $x = x_0$. Lo stesso ragionamento si può fare per il secondo integrale nella decomposizione integrale di φ:

$$\varphi(x) = -\oint_{+\partial B} G_n(x, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(x, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) \,.$$

In altre parole, possiamo dunque derivare φ ad ogni ordine x, scaricando le derivate sulle funzioni $G_n(x, s)$ e $\mathbf{n} \cdot \nabla_s G_n(x, s)$, sotto il segno di integrale. In tal modo abbiamo verificato che φ è infinitamente differenziabile in x_0 e quindi, dato che ciò vale per ogni punto $x_0 \in \Omega$, abbiamo provato che $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Diamo ora una dimostrazione del fatto che φ può essere estesa ad una funzione analitica di più variabile complesse $z \mapsto \varphi'(z)$ con $z \in \Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ un aperto che include $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Per prima cosa notiamo che, dalla loro definizione, le funzioni $B' \ni x \mapsto G_n(x, s) = \mathscr{G}_n(||x - s||)$, con $s \in \partial B$ fissato, si estendono a funzioni analitiche complesse di più variabili (non daremo una dimostrazione rigorosa di tale fatto): $z \mapsto G'_n(z, s)$ con $z = x + iy$, dove $y \in B'$ e $x \in B'$ e possiamo anche prendere $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$, restringendo il raggio originale di B'. Definiamo pertanto per $(x, y) \in \overline{B'} \times \overline{B'}$:

$$\varphi'(z) := -\oint_{+\partial B} G_n(z, s) \nabla_s \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) + \oint_{+\partial B} (\nabla_s G_n(z, s)) \varphi(s) \cdot \mathbf{n} dS(s) \,.$$

Il secondo membro è ben definito e può essere derivato in x e y passando le derivate sotto il segno di integrale, dato che la funzione G_n è infinitamente differenziabile sul compatto $\overline{B'} \times \overline{B'} \times \partial B$. Dato che per ogni fissato s, la funzione $z \mapsto G'_n(z, s)$ soddisfa in ogni variabile z^k le condizioni di Cauchy-Riemann, soddisferà le stesse condizioni la funzione φ': è sufficiente passare le derivate sotto il segno di integrale. In definitva, la funzione di variabile complessa $B' + iB' \ni z \mapsto \varphi'(z)$ è definita su un aperto, ammette derivate continue (essendo di classe C^∞) nelle variabilei x^k e y^k (dove $z = (z^1, \cdots, z^n) = (x^1 + iy^1, \cdots, x^n + iy^n)$) e soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in ogni variabile z^k. Tenuto conto di quanto detto in (2) in osservazioni 2.5, φ' è una funzione olomorfa in più variabili complesse e nell'intorno di ogni punto nel suo dominio varrà lo sviluppo (3.5) con φ' al posto di f. Dato che per valori reali $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$, φ' si riduce alla funzione a *valori reali* φ, concludiamo che nell'intorno di ogni $x_0 \in \Omega$ vale lo sviluppo (3.6) con φ al posto di f. In altre parole φ è una funzione analitica reale sul dominio aperto Ω. $\Box$

Osservazioni 3.2.
(1) Il teorema appena dimostrato ci dice quindi che una funzione armonica può essere estesa ad una funzione analitica complessa su un opportuno dominio in $\mathbb{C}^n$.
(2) Le funzioni analitiche reale godono della proprietà dell'unicità della continuazione analitica:
Proposizione 3.2. *Se due funzioni analitiche reali φ e ψ sono entranbe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidino sull'aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora coincidono su tutto Ω.* $\diamondsuit$
Dimostrazione. Sia $U \subset \Omega$ l'insieme dato dall'unione di tutti gli aperti inclusi in Ω su cui $\varphi \equiv \psi$. Ovviamente U è non vuoto (dato che $A \subset \Omega$ è aperto e su di esso le funzioni coincidono), aperto e $U \subset \Omega$. Supponiamo per assurdo che $U \neq \Omega$. Sia allora $q \in \Omega \setminus U$ e $p \in U$. Ci sarà un cammino continuo $\gamma : [0,1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Se $s = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in U\}$, sarà $p' := \gamma(s) \in \partial U \cap \Omega$ per costruzione. Dimostrimolo. Se $p' = \gamma(s) \in Int(U)$, c'è una palla aperta B centrata in $\gamma(s)$ tutta contenuta in U. La contro immagine di B secondo la funzione continua γ individua un aperto $I \ni s$ con la proprietà che $\gamma(I) \subset U$, ma allora ci sarebbe un intorno destro di s la cui immagine secondo γ è inclusa in U e questo è impossibile per definizione di s. Si ottiene un analogo assurdo assumendo che $p' = \gamma(s) \in Ext(U)$: si trova un intorno sinistro di s la cui immagine secondo γ è esterna a U e questo è impossibile per definizione di s. L'unica possibilità è quindi $p' \in \partial U$, ma anche $p' = \gamma(s) \in \Omega$ per definizione di γ. In particolare ha dunque senso valutare φ e ψ in p' ed in un intorno di tale punto. Dato che φ e ψ sono continue con tutte le loro derivate di ogni ordine e che, essendo $p' \in \partial U$, esiste una successione di punti $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ che converge a p', tutte le derivate di φ e ψ in p' possono essere calcolate prendendo i limiti di tali derivate verso $p' \in \Omega$, ma calcolandole sulla successione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, prima di fare i limiti. Dato che $\varphi\restriction_U \equiv \psi\restriction_U$, le derivate di φ e ψ in U coincidono ad ogni ordine (si osservi che se A, e quindi U, non fosse aperto, $\varphi\restriction_U \equiv \psi\restriction_U$ non implicherebbe necessariamente che le derivate delle due funzioni coincidono su tale insieme). In particolare tutte le derivate ad ogni ordine di φ e ψ coincideranno quando valutate in p' con la procedura di limite indicata sopra. Dato che in p' le funzioni sono analitiche, gli sviluppi di Taylor centrati in p' delle due funzioni coicidono ed abbiamo pertanto che $\varphi \equiv \psi$ in un intorno aperto $J_{p'} \subset \Omega$ di p'. Per costruzione l'insieme aperto $U \cup J_{p'} \subset \Omega$ include A, su $U \cup J_{p'}$ le due funzioni coincidono e $U \cup J_{p'}$ è più grande di U contenendo p' che non appartiene a U, dato che U è aperto e $p' \in \partial U$. Questo è impossibile per definizione di U ed abbiamo in questo modo raggiunto un assurdo. Concludiamo che deve essere $U = \Omega$. $\Box$

L'osservazione (2) ha la seguente implicazione immediata in virtù del teorema 3.3.

Proposizione 3.3. *Se due funzioni armoniche reali φ e ψ sono entrambe definite sull'aperto non vuoto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e coincidono su un aperto non vuoto $A \subset \Omega$, allora esse coincidono su tutto Ω.* $\diamondsuit$

3.2.3 Teorema della media e principio del massimo in forma forte.

Un'altra importante conseguenza del teorema 3.2 è il cosiddetto *teorema della media.*

Teorema 3.4. **(Teorema della media)**. *Sia $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, una funzione armonica. Allora, per ogni $x \in \Omega$ vale l'identità , detta* **formula della media superficiale***:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{Vol(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y), \tag{3.7}$$

dove $B_R(x)$ è una palla aperta centrata in x di raggio finito $R > 0$ con $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, arbitrariamente scelta. Similmente vale anche la **formula della media volumetrica***:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{Vol(B_R(x))} \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y) \,. \tag{3.8}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Sia R il raggio della palla $B_R(x)$. Utilizziamo un sistema di coordinate polari sferiche centrate in x. Dalla (3.4) e tenendo conto del fatto, già notato, che $\nabla_y G_n(x,y) = \frac{\partial \mathscr{G}_n(r)}{\partial r}$, abbiamo:

$$\varphi(x) = \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathscr{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \oint_{+\partial B_R(x)} \mathscr{G}_n(r) \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n}\, dS(y)$$

$$= \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{\partial \mathscr{G}_n(r)}{\partial r} dS(y) - \mathscr{G}_n(R) \oint_{+\partial B_R(x)} \nabla \varphi(y) \cdot \mathbf{n}\, dS(y) \,.$$

L'ultimo integrale è nullo perchè φ è armonica (teorema 2.8), mentre il primo, usando (3.3) si può scrivere:

$$\oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) \frac{1}{Vol(\partial B_R(x))} dS(y) = \frac{1}{Vol(\partial B_R(x))} \oint_{\partial B_R(x)} \varphi(y) dS(y) \,.$$

Passiamo alla seconda formula della media. Applichiamo la prima formula della media alla classe di palle $B_r(x)$ di raggio r, con $0 < r \leq R$, ed usiamo un sistema di coordinate polari sferiche di centro x, coordinata radiale r e coordinate angolari ω. Avremo allora che, da (3.7) vale:

$$Vol(\partial B_r(x)) \varphi(x) = \oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega)$$

e quindi, integrando in dr da $r = 0$ a $r = R$:

$$\left(\int_0^R Vol(\partial B_r(x)) dr \right) \varphi(x) = \int_0^R \left(\oint_{\partial B_r(x)} \varphi(r, \omega) dS(r, \omega) \right) dr \,.$$

Il primo integrale produce proprio il volume della palla $B_R(x)$ moltiplicato per la costante $\varphi(x)$, mentre il secondo produce l'integrale di volume su tale palla della funzione φ, decomposto in due integrazioni in coordinate polari. In definitiva otteniamo la (3.8):

$$Vol(B_R(x))\varphi(x) = \int_{B_R(x)} \varphi(y) d^n x(y) \, .$$

$\Box$

Una conseguenza diretta del teorema della media è un rafforzamento del principio del massimo che dimostriamo in due parti.

Lemma 3.1. **(Principio del massimo forte su una palla.)** *Sia $B_R(x_0)$ una palla aperta in $\mathbb{R}^n$, di raggio $R > 0$ finito centrata in x_0 e $\varphi : \overline{B_R(x_0)} \to \Omega$ una funzione armonica in $B_R(x_0)$ e continua in $\overline{B_R(x_0)}$. Se vale uno dei seguenti fatti:*

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi \, ,$$

oppure

$$\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi \, ,$$

oppure

$$|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi| \, ,$$

allora la funzione φ è costante su $\overline{B_R(x_0)}$. $\diamondsuit$

Dimostrazione: È sufficiente dimostrare la tesi per il caso $\varphi(x_0) = \max_{x\in B_R(x_0)} \varphi$, in quanto se vale la seconda ipotesi, cambiando segno alla funzione φ, si ricade nella prima situazione. Se vale la terza ipotesi allora deve valer la prima oppure la seconda (Dato che non è del tutto evidente dimostriamo quest'ultimo fatto. Ci sono tre casi da considerare. (i) $\varphi \geq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = \varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (ii) $\varphi \leq 0$ in $\overline{B_R(x_0)}$; in questo caso $|\varphi(x)| = -\varphi(x)$ e dunque, $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. (iii) φ assume sia valori positivi che valori negativi in $\overline{B_R(x_0)}$, in questo caso il valore massimo raggiunto da φ è positivo e quello minimo è negativo. Nella situazione considerata, il valore massimo raggiunto da $|\varphi|$ deve necessariamente corrispondere al massimo valore di φ oppure al minimo valore di φ cambiato di segno, se non corrispondesse a nessuno dei due non potrebbe essere il massimo per $|\varphi|$. Allora abbiamo due sottocasi. (a) Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è il massimo di φ; in questo caso, dato che tale valore di φ è positivo, la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più piccoli di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi. (b)

Il valore massimo che la funzione $|\varphi|$ assume è, cambiato di segno, il minimo di φ; in questo caso la condizione $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{B_R(x_0)}} |\varphi|$ equivale a dire $\varphi(x_0) = \pm \min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$. Se risultasse $\varphi(x_0) = -\min_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, significherebbe $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$ altrimenti ci sarebbero valori più grandi di $\varphi(x_0)$ raggiunti da φ e quindi ci sarebbero valori più grandi di $|\varphi(x_0)|$ raggiunti da $|\varphi|$, cosa impossibile per ipotesi.)
Sia dunque $\varphi(x_0) = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi$, dimostriamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$, per continuità ciò varrà anche per $x \in \partial B_R(x_0)$.
Supponiamo *per assurdo* che esista $x_1 \in B_R(x_0)$ con $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_0)$, allora, per le ipotesi fatte, deve essere $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$. Per la continuità di φ, scegliendo $0 < \epsilon < |\varphi(x_0) - \varphi(x_1)|$, esisterà una palla aperta $B_\delta(x_1) \subset B_R(x_0)$ centrata in x_1 e di raggio $\delta > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \epsilon$ se $x \in B_\delta(x_1)$. Di conseguenza, se $x \in B_\delta(x_1)$, vale anche: $\varphi(x) < \varphi(x_0)$. In particolare varrà $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, se $x \in K := \overline{B_{\delta/2}(x_1)}$ dato che $\overline{B_{\delta/2}(x_1)} \subset B_\delta(x_1)$. Applichiamo il teorema della media volumetrica:

$$Vol(B_R(x_0))\, \varphi(x_0) = \int_{B_R(x_0)} \varphi d^n x = \int_{B_R(x_0)\setminus K} \varphi d^n x + \int_K \varphi d^n x \,. \tag{3.9}$$

K è compatto per costruzione e quindi esiste $\max_K \varphi$, con $\max_K \varphi < \varphi(x_0)$ per costruzione di K. Quindi

$$\int_K \varphi d^n x \leq \left(\max_K \varphi \right) \int_K d^n x < \varphi(x_0) \int_K d^n x \,.$$

Dato che vale anche, essendo $\varphi(x_0)$ il valore massimo di φ,

$$\int_{B_R(x_0)\setminus K} \varphi d^n x \leq \varphi(x_0) \int_{B_R(x_0)\setminus K} d^n x \,,$$

da (3.9) segue subito che:

$$Vol(B_R(x_0))\, \varphi(x_0) < \varphi(x_0) \int_{B_R(x_0)\setminus K} d^n x + \varphi(x_0) \int_K d^n x = \varphi(x_0) \left(\int_{B_R(x_0)\setminus K} d^n x + \int_K d^n x \right) \,,$$

ossia

$$Vol(B_R(x_0))\, \varphi(x_0) < Vol(B_R(x_0))\, \varphi(x_0) \,,$$

che è assurdo e, pertanto, il punto x_1 con $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$ non può esistere in $B_R(x_0)$. $\Box$

Il risultato appena dimostrato ci consente di estendere il principio del massimo, nel senso forte appena visto, a funzioni armoniche su regioni Ω diverse da un palla.

Teorema 3.5. **(Principio del massimo forte.)** *Sia Ω aperto, connesso a chiusura compatta in $\mathbb{R}^n$ e sia $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica su Ω. Se vale una delle seguenti condizioni per qualche $x_0 \in \Omega$:*

(i) $\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi$, *oppure*

(ii) $\varphi(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} \varphi$, *oppure*

(iii) $|\varphi(x_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |\varphi|$,

allora φ *è costante e vale ovunque* $\varphi(x_0)$ *su* $\overline{\Omega}$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi nel caso in cui sia verificata la prima ipotesi. Se vale l'ipotesi (ii), allora possiamo ricadere in (i) cambiando segno a φ, mentre se vale (ii), allora si ricade in (i) o in (ii) con lo stesso ragionamento del lemma precedente. Notiamo infine che è sufficiente mostrare la validità della tesi in Ω, perché da questa segue, per la continuità di φ, la tesi in $\overline{\Omega}$.
Dato che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora è connesso per archi continui. Sia dunque $x_1 \in \Omega$ e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ continua con $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = x_1$. Mostriamo che $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$. Ciò prova la tesi per l'arbitrarietà di $x_1 \in \Omega$. Assumendo la validità di (i), per ogni palla di raggio finito $B_R(x_0)$ centrata in x_0 e con $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ deve anche evidentemente essere:

$$\varphi(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\overline{B_R(x_0)}} \varphi\,.$$

Applicando il teorema precedente concludiamo che $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x \in B_R(x_0)$. La controimmagine dell'aperto $B_R(x_0)$ secondo la funzione continua γ deve essere un aperto (relativiamente alla topologia di $[a,b]$ indotta da $\mathbb{R}$) che include il punto $\gamma(a) = x_0$. Di conseguenza, ci sarà un intervallo $[a,\epsilon)$, con $a < \epsilon \leq b$ e con $\gamma(t) \in B_R(x_0)$ se $t \in [a,\epsilon)$, per cui $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a,\epsilon)$. L'insieme

$$S = \{s \in (a,b] \mid \varphi(\gamma(u)) = \varphi(x_0) \text{ per } u \in [a,s)\}$$

è non vuoto (per quanto appena dimostrato $\epsilon \in S$) ed è limitato superiormente da $b < \infty$, quindi esiste $L = \sup S \leq b$.
Supponiamo per assurdo che $L < b$, in tal caso $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ per $t \in [a,L)$ e per continiutà $\varphi(\gamma(L)) = \varphi(x_0)$. Esisterà dunque una palla centrata in $\gamma(L)$ e di raggio $\rho > 0$, che indichiamo con $B_\rho(\gamma(L)) \subset \Omega$, tale che $\overline{B_\rho(\gamma(L))} \subset \Omega$. Come prima:

$$\varphi(\gamma(L)) = \max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\overline{B_\rho(\gamma(L))}} \varphi\,.$$

e quindi $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ costantemente su $B_\rho(\gamma(L))$. Come prima, la controimmagine della palla aperta $B_\rho(\gamma(L))$ secondo la funzione continua γ è un aperto che continene L per costruzione. Su tale aperto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$. In particolare dovrà dunque valere $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ in un intorno *destro* di L, per cui L non può essere il sup di S e siamo quindi giunti ad un assurdo. Dovrà dunque essere $L = b$ e pertanto $\varphi(\gamma(t)) = \varphi(x_0)$ se $t \in [a,b)$. Per continuità: $\varphi(x_1) = \varphi(\gamma(b)) = \varphi(x_0)$. $\Box$

Osservazioni 3.3. Abbiamo dato una dimostrazione del principio del massimo forte senza usare il fatto che le funzioni armoniche sono analitiche reali (risultato che non abbiamo dimostrato completamente) e quindi soddisfano la proposizione 3.3. La dimostrazione del pricipio del massimo forte segue infatti facilmente dalla proposizione 3.3 osservando che, nelle ipotesi del teorema 3.5, la funzione φ è sicuramente costante in una palla aperta $B_R(x_0) \subset \Omega$ come provato nella parte iniziale della dimostrazione data sopra. In virtù del fatto che Ω è aperto e connesso con $B_R(x_0) \subset \Omega$, dalla proposizione 3.3 segue allora che, su tutto Ω, φ deve coincidere con la funzione ψ che vale costantemente $\varphi(x_0)$ (ed è quindi armonica) dato che $\varphi \restriction_{B_R(x_0)} \equiv \psi \restriction_{B_R(x_0)}$.

3.2.4 Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$.

Come ultimo risultato, che segue dal teorema della media e dal fatto che le funzioni armoniche sono di classe C^∞ (per la dimostrazione è sufficiente C^3), si ha il seguente teorema.

Teorema 3.6. **(Teorema di Liouville per funzioni armoniche.)** *Ogni funzione armonica su tutto $\mathbb{R}^n$ limitata superiormente oppure inferiormente su $\mathbb{R}^n$ è costante.* $\Diamond$

Dimostrazione. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è armonica e limitata inferiormente, sia $\phi(x) := \varphi(x) - \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi$ per $x \in \mathbb{R}^n$. ϕ è armonica e non negativa. Se deriviamo ϕ rispetto a x^k avremo ancora una funzione armonica per costruzione (si tenga conto del fatto che $\phi \in C^\infty$ essendo essa armonica). Possiamo usare la formula della media volumetrica su una palla $B_r(x_0)$ centrata in x_0 di raggio finito $r > 0$ arbitrario:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = \frac{1}{VolB_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} d^n x = \frac{1}{VolB_r(x_0)} \int_{B_r(x_0)} \nabla \cdot (\phi \mathbf{e}_k) d^n x = \frac{1}{VolB_r(x_0)} \oint_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS,$$

dove abbiamo usato il teorema di Gauss, $\mathbf{e}_i$ è l'i-esimo versore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e n^k è la k-esima componente di $\mathbf{n}$ uscente da ∂B. Quindi:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \left| \frac{1}{VolB_r(x_0)} \oint_{+\partial B_r(x_0)} \phi n^k dS \right| \leq \frac{1}{VolB_r(x_0)} \oint_{+\partial B_r(x_0)} \left| \phi n^k \right| dS\,.$$

Dato che $\phi \geq 0$ e $|n^k| \leq 1$, abbiamo infine la stima:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{1}{VolB_r(x_0)} \oint_{+\partial B_r(x_0)} \phi dS\,.$$

Applicando al secondo membro il teorema della media superficiale abbiamo anche che:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{Vol \partial B_r(x_0)}{VolB_r(x_0)} \phi(x_0)\,.$$

Ossia, dato che il rapporto a secondo membro vale n/r:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{r} \phi(x_0)\,.$$

Dato che $r > 0$ può essere scelto arbitrariamente grande (il dominio di φ è tutto $\mathbb{R}^n$) otteniamo che deve necessariamente essere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x_0) = 0 \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R}^n \, .$$

Dato che $\mathbb{R}^n$ è connesso e che quanto scritto sopra vale per ogni derivata, concludiamo che ϕ, e dunque φ, deve essere costante su $\mathbb{R}^n$. Se φ è limitata superiormente, si può ripetere la stessa dimostrazione usando $-\varphi$. $\square$

La dimostrazione contiene un risultato che è utile menzionare separatamente in un lemma.

Lemma 3.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Se $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset \Omega$ è una palla aperta centrata in x di raggio $r > 0$ tale che $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, allora vale per la derivata k-esima, $k = 1, 2, \ldots, n$:*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r}(\varphi(x) - \min_{B_r(x)} \varphi) \, ,$$

e

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(x) \right| \leq \frac{n}{r}(\max_{B_r(x)} \varphi - \varphi(x)) \, .$$

$\diamondsuit$

Capitolo 4

Funzioni di Green e costruzione di soluzioni del problema di Dirichlet.

In questo capitolo mostreremo come costruire soluzioni del problema di Dirichlet per domini Ω specifici, usando soluzioni opportune, simili alle soluzioni fondamentali (ma che tengono conto del dominio Ω) dette *funzioni di Green* e *nuclei di Poisson*. Questo approccio è sicuramente interessante, in particolare per il significato fisico (carica immagine) e per gli sviluppi che ha avuto nella fisica matematica in riferimento a problemi di natura completamente diversa. Tuttavia, da un punto di vista puramente matematico, si tratta di un metodo che non si riesce a generalizzare nel caso di domini abbastanza arbitrari e equazioni differenziali di tipo ellittico, ma non a coefficienti costanti. Le tecniche moderne di costruzione della soluzione di problemi con dati al contorno per equazioni ellittiche, sono basate su altri approcci in cui la soluzione viene cercata e costruita in spazi funzionali *deboli* (soluzioni nel senso delle *distribuzioni* in *spazi di Sobolev*) e poi viene provata la regolarità di tali soluzioni (sfruttando proprietà di regolarità specifiche degli operatori ellittici [2] in Appendice A abbiamo dato qualche ulteriore dettaglio.

4.1 Ancora sul problema di Dirichlet.

Consideriamo il problema di Dirichlet in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto a chiusura $\overline{\Omega}$ compatta per $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f, & f \in C^0(\Omega) \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi & \psi \in C^0(\partial\Omega) \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Se $\partial\Omega$ è una superficie chiusa regolare orientabile allora abbiamo a disposizione un'identità , la (3.4), che ci permette di esprimere la soluzione φ, *se esiste*, in funzione del valori che φ e il suo gradiente $\nabla\varphi$ assumono su $\partial\Omega$. Infatti vale:

$$\varphi(x) = \int_\Omega G_n(x,y)\Delta_y\varphi d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x,y)\nabla_y\varphi(y)\cdot \mathbf{n} dS(y) +$$

$$+\oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x,y)\cdot \mathbf{n}\varphi(y)dS(y), \tag{4.2}$$

da cui:

$$\varphi(x) = \int_\Omega G_n(x,y)f(y)d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x,y)\nabla_y\varphi(y)\cdot \mathbf{n}dS(y)+$$

$$+\oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x,y)\cdot \mathbf{n}\psi(y)dS(y).$$

Questa formula non può tuttavia essere utilizzata per *determinare* la soluzione al problema assegnato perchè per utilizzarla per conoscere φ in ogni punto di Ω è necessario conoscere *anche* $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$, che non è noto dalle condizioni al contorno. Per un problema con condizioni al contorno di Neumann si avrebbe lo stesso problema in quanto non sarebbero noti i valori che φ assume su $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.1. Se, oltre ai valori di φ su $\partial\Omega$, fossero assegnati anche valori di $\nabla\varphi$ su $\partial\Omega$ (ad esempio $\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1$), e tentassimo di usare l'espressione (4.2) per scrivere una possibile soluzione,

$$\varphi(x) = \int_\Omega G_n(x,y)f(y)d^n y - \oint_{+\partial\Omega} G_n(x,y)\psi_1(y)dS(y)$$

$$+\oint_{+\partial\Omega} \nabla_y G_n(x,y)\cdot \mathbf{n}\psi(y)dS(y) \tag{4.3}$$

in generale avremmo che la funzione φ così calcolata *non* risolverebbe il problema:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \text{ funzione assegnata,} \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi \text{ funzione assegnata,} \\ \nabla\varphi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \psi_1 \text{ funzione assegnata.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Infatti, dai teoremi di unicità per il problema di Dirichlet e Neumann, sappiamo che in generale questo problema *non può ammettere soluzione* assegnando $\varphi|_{\partial\Omega}$ e $\nabla\varphi|_{\partial\Omega}\cdot\mathbf{n}$ contemporaneamente e arbitrariamente.

4.1.1 Funzioni di Green e nuclei di Poisson.

Per usare (4.2) al fine di scrivere la soluzione del problema di Dirichlet in funzione dei dati al bordo, possiamo cercare di modificare G_n in modo da far sparire in (4.2) il termine contenente il gradiente di φ e cercare di usare i soli dati di Dirichlet. In questo modo potremmo riuscire a produrre un candidato della soluzione del problema. Con un problema di Neumann si può procedere similmente. Abbiamo la seguente proposizione che ci porta verso la direzione voluta.

Proposizione 4.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto non vuoto a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia $\{v_\Omega(x,\cdot)\}_{x\in\Omega} \subset C^2(\overline{\Omega})$ una classe di soluzioni dell'equazione:*

$$\Delta_y v_\Omega(x,y) = 0\,, \quad (x,y) \in \Omega\times\Omega$$

per le quali valga anche:

$$v_\Omega(x,y) + G_n(x,y) = 0, \quad \text{se } x \in \Omega \text{ e } y \in \partial\Omega\,.$$

Allora valgono i fatti seguenti.
(a) *Per ogni funzione $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ con $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ limitate su Ω, vale:*

$$\varphi(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\Delta\varphi(y)d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\varphi(y)dS(y)\,, \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \tag{4.5}$$

dove $G_\Omega(x,y) := G_n(x,y) + v_\Omega(x,y)$ e $N_\Omega(x,y) := \nabla_y G_\Omega(x,y) \cdot \mathbf{n}|_{y\in\partial\Omega}$ (con $\mathbf{n}$ versore uscente da $\partial\Omega$) sono detti rispettivamente la **funzione di Green** *ed il* **nucleo di Poisson** *per il problema di Dirichlet del laplaciano su Ω.*
(b) *Per ogni fissato $x \in \Omega$, $\Omega \ni y \mapsto G_\Omega(x,y)$ si estende ad una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica su $\overline{\Omega} \setminus \{x\}$ e nulla su $\partial\Omega$.*
(c) *Se $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, allora*

$$v_\Omega(x,y) = v_\Omega(y,x) \quad \text{e, se } x \neq y, \quad G_\Omega(y,x) = G_\Omega(x,y)\,.$$

In particolare, quindi per ogni fissato $y \in \Omega$, $\Omega \ni x \mapsto G_\Omega(x,y)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica su $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$ e nulla su $\partial\Omega$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. (a) Fissiamo $x \in \Omega$ e quindi scgliamo un nuovo dominio Ω_ϵ, con le stesse caratteristiche di Ω, ma tale che $\overline{\Omega_\epsilon}$ è strettamente contenuto in Ω. Assumiamo che, per $\epsilon \to 0$, Ω_ϵ invada Ω. Dato che, se $x \in \Omega$ è fissato, vale $\Delta_y v_\Omega(x,y) = 0$ quando $y \in \overline{\Omega}$, pertanto:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \varphi(y)\Delta_y v_\Omega(x,y)d^n y = 0$$

per ogni funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Se ammettiamo che $\varphi \in C^2(\Omega)$, dalla seconda identità di Green abbiamo come conseguenza:

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} v_\Omega(x,y)\Delta_y\varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} \varphi(y)\nabla_y v_\Omega(x,y) \cdot \mathbf{n} dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} v_\Omega(x,y)\nabla_y\varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y)\,.$$

Sommando membro a membro con (4.2) calcolata su Ω' e definendo $G_\Omega(x,y) = G_n(x,y) + v_\Omega(x,y)$, si ha:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_\epsilon} G_\Omega(x,y)\Delta_y\varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} N_\Omega(x,y)\varphi(y)dS(y) - \oint_{+\partial\Omega_\epsilon} G_\Omega(x,y)\nabla_y\varphi(y) \cdot \mathbf{n} dS(y)$$

dove $N_\Omega(x,y) := \nabla_y G_\Omega(x,y) \cdot \mathbf{n}|_{y\in\partial\Omega}$. Se ora assumiamo che $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e che $\nabla\varphi$ e $\Delta\varphi$ siano limitati su Ω, possiamo calcolare il limite per $\epsilon \to 0$ usando il teorema della convergenza dominata, ottenendo

$$\varphi(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\Delta_y\varphi(y)d^n y + \oint_{+\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\varphi(y)dS(y)\,,$$

dove abbiamo trascurato il cotributo dovuto all'ultimo integrale di bordo che vale zero nelle nostre ipotesi in quanto $G_\Omega(x, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$.
(b) La dimostrazione è ovvia per definizione di G_Ω, dalle proprietà note di v_Ω e G_n.
(c) Fissiamo $x_1, x_2 \in \Omega$ con $x_1 \neq x_2$ e consideriamo il volume, con ovvie notazioni, $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$. Su tale volume le funzioni: $y \mapsto G_\Omega(x_1, y)$ e $y \mapsto G_\Omega(x_2, y)$ sono regolari, armoniche e si annullano sul bordo esterno di Ω_ϵ, dato da $\partial\Omega$. In conseguenza dell'armonicità :

$$0 = \int_{\Omega_\epsilon} (G_\Omega(x_1, y)\Delta_y G_\Omega(x_2, y) - G_\Omega(x_2, y)\Delta_y G_\Omega(x_1, y))\, d^n y\, .$$

Applicando la seconda identità di Green al secondo membro scritto sopra e tenendo conto che il contributo dovuto all'integrale di superficie su $\partial\Omega$ si annulla dato che $G_\Omega(x_1, y) = G_\Omega(x_1, y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$, otteniamo che:

$$\oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_1, y)\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y)\, dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_1)} G_\Omega(x_2, y)\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y)\, dS(y)$$

$$+ \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_1, y)\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_2, y)\, dS(y) - \oint_{+\partial B_\epsilon(x_2)} G_\Omega(x_2, y)\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_\Omega(x_1, y))\, dS(y) = 0\, .$$

Si osservi che la divergenza che si ha nel primo integrale per $\epsilon \to 0^+$ è unicamente dovuta alla divergenza di $G_n(x_1, y)$ per $y \to x_1$. Fissando coordinate polati centrate in x_1, tale divergenza è di ordine ϵ^{2-n} se $n > 2$ oppure $\ln \epsilon$ se $n = 2$. Tuttavia l'area della superficie $\partial B_\epsilon(x_1)$ tende a zero con rapidità ϵ^{n-1} oppure ϵ rispettivamente. Da ciò si conclude che il primo integrale tende a 0 per $\epsilon \to 0^+$. Lo stesso discorso vale per il quarto integrale. Nel secondo integrale, la divergenza è invece dovuta a $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y)$, $y \to x_1$. Usando un sistema di coordinate polari centrate in x_1 si vede che $\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x_1, y) = 1/vol(\partial B_\epsilon(x_1))$ come già osservato nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1. Tale divergenza si compensa esattamente con il limite a 0 dell'area della superficie $\partial_\epsilon(x_1)$ quando $\epsilon \to 0^+$, lo stesso discorso vale per il secondo integrale. (Si osservi che il contributo dovuto ai termini $v_\Omega(x, y)$ è sempre nullo nel limite per $\epsilon \to 0^+$ dato che tali funzioni sono regolari nel dominio considerato e vengono integrate su domini di misura che tende a zero.) Ragionando nella dimostrazione di (c) del teorema 3.1 si verifica facilmente che, prendendo il limite per $\epsilon \to 0^+$ si ottiene un valore finale dato dai seguenti contributi :

$$0 - G_\Omega(x_2, x_1) + G_\Omega(x_1, x_2) + 0 = 0\, .$$

Da cui: $G_\Omega(x_2, x_1) = G_\Omega(x_1, x_2)$. Dato che vale anche $G_n(x_2, x_1) = G_n(x_1, x_2)$ per definizione, concludiamo che $v_\Omega(x_2, x_1) = v_\Omega(x_1, x_2)$ quando $x_1 \neq x_2$. Questa identità per v_Ω vale banalmente anche nel caso $x_1 = x_2$, dato che $v_\Omega(x, x)$ è definita per ogni $x \in \Omega$.
Si osservi infine che, per definizione, per ogni $x \in \Omega$, $y \mapsto G_\Omega(x, y)$ è una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. Pertanto per ogni $y \in \Omega$, $\Omega \ni x \mapsto G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ si estende univocamente per continuità ad una funzione $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{y\})$, armonica e nulla su $\partial\Omega$. $\Box$

L'espressione (4.5) fornisce φ in termini delle sole quantità assegnate in un problema di Dirichlet su Ω. Tale formula può essere usata per determinare la soluzione del problema di Dirichlet.

Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema 4.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto, non vuoto, a chiusura compatta e con bordo dato da una superficie regolare orientabile. Sia G_Ω una funzione di Green per il laplaciano su Ω con nucleo di Poisson N_Ω. Se valgono i seguenti fatti:*

(i) la funzione $v_\Omega := G_\Omega - G_n$ è di classe $C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta)$, dove abbiamo definito $\Delta := \{(x,x) \mid x \in \partial\Omega\}$, e

(ii) vale l'identità :

$$\lim_{x \to x_0} \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y) = \psi(x_0) \,, \quad \textit{per ogni } \psi \in C^0(\partial\Omega) \textit{ e ogni } x_0 \in \partial\Omega, \tag{4.6}$$

allora valgono i due seguenti fatti.

(a) *la funzione:*

$$\varphi(x) := \int_\Omega G_\Omega(x,y)f(y)d^ny + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y) \,, \quad \textit{per } x \in \Omega \tag{4.7}$$

estesa per continuità su $\overline{\Omega}$ è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = f \,, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = \psi \,, \end{cases} \tag{4.8}$$

per ogni scelta delle funzioni assegnate $f \in C^2_0(\Omega)$ e $\psi \in C^0(\partial\Omega)$.

(b) *La funzione di Green G_Ω per il laplaciano su Ω è l'unica soddisfacente (i) e (ii), ed è quindi unico il nucleo di Poisson, a meno di ridefinizione nei punti dell'insieme Δ.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. (a) Fissato un qualsiasi $x' \in \Omega$ si consideri una palla aperta $B(x') \subset \Omega$ con $\overline{B(x')} \subset \Omega$. La funzione $\overline{B(x')} \times \text{supp} f \ni (x,y) \mapsto v(x,y)f(y)$ è limitata e lo sono tutte le sue derivate in x di ogni ordine (essendo tale funzione con le sue derivate continue su un compatto), dunque esisterà una funzione costante $g \geq$ definita sull'insieme, di misura finita per ipotesi, Ω, e tale funzione maggiora i valori assoluti delle derivate in x fino al secondo ordine di $u(x,y)f(y)$ per tutti i valori di $y \in \Omega$ uniformemente in $x \in B(x')$. Possiamo allora derivare sotto il segno di integrale in $x \in B(x')$ due volte ottenendo, da (b) del lemma 4.1

$$\Delta_x \int_\Omega v(x,y)f(y)d^ny = \int_\Omega \Delta_x v(x,y)f(y)d^ny = 0 \,.$$

Similmente, dato che f ha supporto compatto e pertanto

$$\int_\Omega G_n(x,y)f(y)d^ny = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(x,y)f(y)d^ny$$

Per (d) del teorema 3.1 abbiamo che:

$$\Delta_x \int_\Omega G_n(x,y)f(y)d^ny = f(x) \,.$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto che:

$$\Delta_x \int_\Omega G_\Omega(x,y)f(y)d^n y = f(x)\,.$$

La funzione $\overline{B(x')} \times \partial\Omega \ni (x,y) \mapsto N_\Omega(x,y)f(y)$ è derivabile in x e le sue derivate sono limitate, essendo funzioni continue su un compatto: per costruzione $x \neq y$ lavorando nell'insieme detto. Come prima possiamo derivare due volte sotto il segno di integrale ottenendo

$$\Delta_x \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \Delta_x N_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y) = 0\,,$$

dato che possiamo applicare il teorema di Schwartz, essendo v di classe C^3 e G_n di classe C^∞ (per argomenti non coincidenti):

$$\Delta_x \mathbf{n}\cdot\nabla G_\Omega(x,y) = \mathbf{n}\cdot\nabla\Delta_x G_\Omega(x,y) = 0$$

in quanto $G_\Omega(x,y)$ è , per costruzione, armonica in x se $x \neq y$. In definitiva

$$\Delta_x\left(\int_\Omega G_\Omega(x,y)f(y)d^n y + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y)\right) = f(x)\,.$$

La funzione φ è quindi in $C^2(\Omega)$ per costruzione (anzi è in $C^4(\Omega)$).
Se $B(x_0)$ è una palla aperta centrata in $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\partial B(x_0) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, la funzione $(x,y) \mapsto G_\Omega(x,y)f(y)$ per $(x,y) \in (\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \Omega$ è continua con supporto compatto incluso in $(\overline{B(x_0)} \cap \overline{\Omega}) \times \operatorname{supp} f$ (le singolarità di G_Ω per $x = y$ non hanno effetto visto che tali punti sono fuori dal supporto). Sia $K \geq 0$ una costante che maggiora $(x,y) \mapsto G_\Omega(x,y)f(y)$ sul dominio detto. La funzione $\Omega \ni y \mapsto K$ è integrabile dato che Ω ha chiusura compatta. Possiamo allora applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{x\mapsto x_0} \int_\Omega G_\Omega(x,y)f(y)d^n y = \int_\Omega \lim_{x\mapsto x_0} G_\Omega(x,y)f(y)d^n y = 0\,,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\lim_{x\mapsto x_0} G_\Omega(x,y) = G_\Omega(x_0,y) = G_\Omega(y,x_0) = 0$ quando $x_0 \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$. Se infine vale anche la condizione 4.6, allora φ definita in (4.7) ed estesa su $\partial\Omega$ come $\varphi(x) := \psi(x)$ è continua su $\overline{\Omega}$ e, banalmente, soddisfa le condizioni al bordo. Mostriamone la continuità in ogni punto $x_0 \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Se $x_0 \in \Omega$ la funzione φ è continua in x_0 per costruzione, essendo di classe C^2, e non c'è nulla da provare. Se invece $x_0 \in \partial\Omega$ si procede come segue. Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A_ϵ di x_0 tale che, se $x \in A_\epsilon \cap \Omega$ allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$ come conseguenza di (4.6). Dato che ψ è a sua volta continua in x_0, per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno aperto A'_ϵ di x_0 tale che, se $x \in A'_\epsilon \cap \partial\Omega$ allora $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \epsilon$. In definitiva, tenendo conto del fatto che $\varphi = \psi$ su $\partial\Omega$, se $\epsilon > 0$, esiste un intorno di $x_0 \in \partial\Omega$, $B_\epsilon := A_\epsilon \cap A'_\epsilon$, tale che se $x \in B_\epsilon \cap \overline{\Omega} =\in B_\epsilon \cap (\Omega \cup \partial\Omega)$, allora $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$.
(b) Ovviamente è sufficiente dimostrare l'unicità della funzione di Green quando è valutata per

$x, y \in \Omega$ (con $x \neq y$), i rimanenti punti del bordo vengono inclusi nella dimostrazione per continuità . Sia G'_Ω un'altra funzione di Green soddisfacente (4.6). Per ogni problema di Dirichlet (4.8), l'unica (per il teorema 2.3) soluzione φ si potrà anche scrivere come:

$$\varphi(x) := \int_\Omega G'_\Omega(x,y)f(y)d^n y + \oint_{\partial\Omega} N'_\Omega(x,y)\psi(y)dS(y) \, .$$

Se scegliamo ψ identicamente nulla su $\partial\Omega$, per differenza con (4.7) avremmo che, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $f \in C_0^2(\Omega)$:

$$0 = \int_\Omega [G'_\Omega(x,y) - G_\Omega(x,y)]f(y)d^n y \, .$$

Supponiamo per assurdo che per fissati $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, $G'_\Omega(x,y) - G_\Omega(x,y) = l \neq 0$. Assumiamo senza perdere generalità $l > 0$. In una palla aperta di raggio finito B centrata in y e con x fissato, $G'_\Omega(x,y) - G_\Omega(x,y)$ si manterrebbe in $[l-\epsilon, l+\epsilon]$ con $l - \epsilon > 0$. Potremmo allora trovare una funzione $f \in C_0^2(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in B che abbia integrale strettamente positivo pari a k. In modo tale che $\int_\Omega [G'_\Omega(x,y) - G_\Omega(x,y)]f(y)d^n y \geq k(l-\epsilon) > 0$ che è impossibile. Quindi $G'_\Omega(x,y) = G_\Omega(x,y)$ su $\Omega \times \Omega$ per $x \neq y$. $\Box$

Osservazioni 4.2.
(1) Nelle ipotesi di validità del teorema precedente sappiamo rispovere su Ω dato *ogni* problema di Dirichlet con dati $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ e $f \in C_0^2(\Omega)$. La conoscenza della funzione di Green non permette di risolvere un problema di Dirichlet, ma *ogni* problema di Dirichlet (se valgono tutte le ipotesi richieste).
(2) La validità della condizione (4.6) è abbastanza generale. Daremo una condizione sufficiente affincé essa valga nella prossima proposizione.
(3) Cambiamenti della definizione della funzione G_Ω sull'insieme Δ non alterano, evidentemente, i risultati in (a). Si osservi che anche la relazione (4.6) è indipendendte dal valore assunto da G_Ω su Δ.

Proposizione 4.2. *Nelle ipotesi del teorema 4.1, la condizione (4.6) è verificata se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, esiste una successione di palle aperte $\{B_{r_n}(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, centrate in x_0 e di raggio $r_n > 0$ e con $r_n \to 0$ per $n \to +\infty$, tali che valga:*

$$\sup_{x \in B_{r_n}(x_0)\cap\Omega} \oint_{\partial\Omega \setminus B_{r_n}(x_0)} N_\Omega(x,y)dS(y) \to 0 \, , \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. La dimostrazione usa il seguente lemma:
Lemma 4.1. *Il nucleo di Poisson $N_\Omega(x,y)$ soddisfa $N_\Omega(x,y) \geq 0$.* $\diamondsuit$

Dimostrazione del lemma. Infatti, se $x \in \Omega$ è fissato e $B_r(x)$ è una palla aperta di raggio r centrata in x con $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, la funzione $\Omega \setminus \overline{B_r(x)} \ni y \mapsto G_\Omega(x,y) = G_n(x,y) + v(x,y)$

è sicuramente negativa su $\partial B_r(x)$ scegliendo r sufficientemente piccolo, visto che $G_n(x,y)$ diverge a $-\infty$ quando $y \to x$, mentre $v(x,y)$ rimane limitata nell'intorno di x. Per costruzione $G_\Omega(x,y) = 0$ se $y \in \partial\Omega$. Dato che il massimo di $\overline{\Omega \setminus \overline{B_r(x)}} \ni y \mapsto G_\Omega(x,y)$ è assunto sul bordo del dominio (essendo la funzione armonica nell'interno del dominio e continua sulla chiusura), concludiamo che tale massimo è sicuramente 0 e che $G_n(x,y) < 0$ nell'interno del dominio per il principio del massimo forte. Segue facilmente che $-\mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x,y) \leq 0$ quando $y \in \partial\Omega$, dove $-\mathbf{n}$ punta verso l'interno: se ciò non fosse, dato che $G_n(x,y) = 0$ su $y \in \partial\Omega$, troveremmo una curva C^1, $y = y(t)$, che entra in Ω partendo da $y(0) \in \partial\Omega$, lungo la quale $t \mapsto G_n(x, y(t))$ cresce raggiungendo valori positivi. $\Box$

Proseguiamo la dimostrazione della proposizione. Per prima cosa notiamo che, se $x \in \Omega$:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\, dS(y) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y G_n(x,y)\, dS(y) + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla_y v(x,y)\, dS(y)\,.$$

Consideriamo i due integrali a secondo membro. Il secondo integrale vale 0, dato che $y \mapsto v(x,y)$ è armonica su $\overline{\Omega}$ e vale il teorema 2.8. Il primo integrale vale invece 1, applicando la formula (3.4) alla funzione g che vale costantemente 1 su $\mathbb{R}^n$. In definitiva:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\, dS(y) = 1\,, \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Di conseguenza:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y) dS(y) = \psi(x_0) \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y) dS(y) + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)(\psi(y) - \psi(0)) dS(y)\,.$$

In altre parole:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)\psi(y) dS(y) = \psi(x_0) + \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)(\psi(y) - \psi(0)) dS(y)\,.$$

Per concludere dimostriamo che l'integrale a secondo membro tende a 0 se $\Omega \ni x \to x_0 \in \partial\Omega$. Infatti:

$$\oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)(\psi(y) - \psi(0)) dS(y) = \oint_{\partial\Omega \setminus B_{r_n}(x_0)} N_\Omega(x,y)(\psi(y) - \psi(0)) dS(y)$$

$$+ \oint_{\partial\Omega \cap B_{r_n}(x_0)} N_\Omega(x,y)(\psi(y) - \psi(0)) dS(y)\,.$$

Il valore assoluto del primo integrale a secondo membro, scegliendo $x \in B_{r_n}$, è sicuramente maggiorato da:

$$\max_{y \in \partial\Omega} |\psi(y) - \psi(0)| \sup_{x \in B_{r_n}(x_0) \cap \Omega} \oint_{\partial\Omega \setminus B_{r_n}(x_0)} |N_\Omega(x,y)| dS(y)\,.$$

Pertanto, nelle nostre ipotesi,

$$\oint_{\partial\Omega\setminus B_{r_n}(x_0)} N_\Omega(x,y)(\psi(y)-\psi(0))dS(y) \to 0\,, \quad \text{se } x \to x_0.$$

Il valore assoluto del secondo integrale, scegliendo $x \in B_{r_n}$, è invece maggiorato da:

$$\oint_{\partial\Omega\cap B_{r_n}(x_0)} |N_\Omega(x,y)|dS(y) \max_{y\in B_{r_n}(x_0)} |\psi(y)-\psi(0)| \le \oint_{\partial\Omega} |N_\Omega(x,y)|dS(y) \max_{y\in B_{r_n}(x_0)} |\psi(y)-\psi(0)|$$

$$= \oint_{\partial\Omega} N_\Omega(x,y)dS(y) \max_{y\in B_{r_n}(x_0)} |\psi(y)-\psi(0)| = 1 \max_{y\in B_{r_n}(x_0)} |\psi(y)-\psi(0)| \to 0\,, \quad \text{se } x \to x_0,$$

dove abbiamo usato il fatto che $N_\Omega(x,y) \ge 0$ per il lemma 4.1 e la continuità di ψ in x_0. $\Box$

4.2 Funzioni di Green per domini particolari.

Non ci occuperemo della questione generale, mentre ci occuperemo solamente di determinare le funzioni di Green ed il nucleo di Poisson per domini Ω particolari.

4.2.1 Il metodo delle cosiddette *cariche immagine*.

Al fine di ottenere una funzione di Green per un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si deve trovare una classe di funzioni $\{v_\Omega(x,\cdot)\}_{x\in\Omega} \subset C^2(\overline{\Omega})$ (come visto nel teorema 4.1, si rinforza la richiesta di regolarità richiedendo $v_\Omega(\cdot,\cdot) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\setminus\Delta)$) tale che siano soddisfatte le condizioni:

$$\Delta_y v_\Omega(x,y) = 0 \qquad x \in \Omega, y \in \Omega$$

e

$$G_3(x,y) + v_\Omega(x,y) = 0 \qquad x \in \Omega, y \in \partial\Omega\,.$$

Quest'ultima condizione si scrive esplicitamente:

$$-\frac{1}{4\pi||x-y||} + v_\Omega(x,y) = 0 \qquad x \in \Omega, y \in \partial\Omega\,.$$

L'intuizione fisica ci può aiutare nella ricerca della funzione $v_\Omega(x,y)$. Partiamo dal fatto che, come ben noto dai corsi di elettromagnetismo elementare, la funzione

$$\mathbb{R}^3 \ni y \mapsto \varphi(y) := \frac{e}{4\pi||x-y||}$$

è il *potenziale elettrostatico generato nel punto y da una carica elettrica e, puntiforme, posta nel punto x*. Il gradiente di tale campo, cambiato di segno,

$$\mathbf{E}(y) = \frac{e(y-x)}{4\pi||x-y||^3}\,,$$

coincide con il campo elettrostatico generato in y dalla carica detta. Infine, seguendo la formula della forza di Lorentz (1.2) il prodotto di tale campo per la carica e' di prova posta nel punto y riproduce la **legge di Coulomb**:

$$\mathbf{F}(y) = \frac{ee'(y-x)}{4\pi||x-y||^3} ,$$

che esprime la forza elettrostatiche che la carica e in x esercita sulla carica e' in y.
La condizione:

$$G_3(x,y) + v_\Omega(x,y) = 0 \qquad x \in \Omega, y \in \partial\Omega ,$$

dice che il potenziale elettrostatico in y totale dovuto sia ad una carica puntiforme negativa unitaria situata in x (che genera il potenziale $G_3(x,y)$ in y) unitamente ad un ulteriore potenziale incognito $v_\Omega(x,y)$, è sempre nullo sulla superficie $\partial\Omega$. Il fatto che $y \mapsto v_\Omega(x,y)$ si possa sempre pensare come un potenziale elettrostatico è dovuto alla richiesta $\Delta_y v_\Omega(x,y) = 0$ che è soddisfatta dai potenziali elettrostatici, come spiegato nella sezione 2.0.5, quando le sorgenti del campo non cadono nel punto y. *Quindi la determinazione della funzione $v_\Omega(x,\cdot)$ è legata alla determinazione di una configurazione di cariche, che non cada su $\partial\Omega$, in aggiunta a quella posta in x che annulli su $\partial\Omega$ il potenziale prodotto dalla carica unitaria posta in x.* Queste cariche, da aggiungersi a quella unitaria già presente in x, vengono chiamate *cariche immagine*. La dipendenza parametrica di v_Ω da x è dovuta al fatto che possiamo muovere a piacimento la carica in x e ci aspettiamo che ciò cambi la distribuzione di cariche immagine.

4.2.2 La funzione di Green nella palla in $\mathbb{R}^3$.

Sia Ω la palla aperta di raggio R in $\mathbb{R}^3$ centrata nell'origine. Vogliamo trovare la funzione di Green per il problema interno alla sfera. Nel caso della palla, il problema di determinare le cariche immagine è molto semplice: si verifica che è sufficiente una sola altra carica da aggiungersi a quella in x al fine di annullare il potenziale in $\partial\Omega$. Se $x'(x)$ è la posizione della carica immagine di valore q_x (può dipendere da x), deve essere:

$$-\frac{1}{4\pi||x-y||} + \frac{q_x}{4\pi||x'(x)-y||} = 0 \qquad y \in \partial\Omega.$$

Per la simmetria del problema ci aspettiamo che

$$x' = \lambda(x)x , \quad \text{con } |\lambda(x)|\,||x|| \geq R ,$$

la seconda condizione è dovuta al fatto che x' deve essere fuori da $\overline{\Omega}$ altrimenti avremmo una singolarità in più per G_Ω, mentre sappiamo che essa è singolare solo per $y = x$). In questo modo, se $x \in \Omega$ allora $x'(x) \notin \overline{\Omega}$. Si osservi ancora che, per ogni $x \in \Omega$ fissato, cioè x' fissato, la funzione

$$v_\Omega(x,y) := \frac{q_x}{4\pi||x'(x)-y||}$$

è C^∞ ed armonica nella variabile $y \in \Omega$ proprio come richiesto, dato che non è altro che la funzione $y \mapsto q_x G_3(x'(x), y)$. Questa funzione, al variare di $y \in \mathbb{R}^3$ è di classe C^∞ se $y \neq x'$ ed è anche armonica in tale insieme.
Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi(R-||x||)} + \dfrac{q_x}{4\pi(||x'(x)||-R)} = 0 \\ -\dfrac{1}{4\pi(||x||+R)} + \dfrac{q_x}{4\pi(||x'(x)||+R)} = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

In questo modo si ottiene, se $||x|| < R$:

$$\begin{cases} ||x'(x)||\,||x|| = R^2\,, \\ q_x = \dfrac{R}{||x||}\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che

$$|\lambda(x)| = \frac{R^2}{||x||^2}\,,$$

in modo tale che, come richiesto, $||x|||\lambda| = R^2/||x|| \geq R$ se $||x|| \leq R$. Assumendo $\lambda > 0$, ci aspettiamo che la funzione di Green cercata sia:

$$G_\Omega(x,y) = -\frac{1}{4\pi||x-y||} + \frac{R||x||}{4\pi||R^2x - ||x||^2y||} \tag{4.11}$$

La funzione $v_\Omega(x,y) = G_\Omega(x,y) - G_n(x,y)$ soddisfa $\Delta_y v_\Omega(x,y) = 0$ dove non è singolare, essendo per costruzione, una soluzione fondamentale nelle variabili x' e y:

$$v_\Omega(x,y) := \frac{q_x}{4\pi||x'(x)-y||}$$

Ciò accade in particolare per $x \in \Omega$ e $y \in \overline{\Omega}$ come richiesto nella definizione di funzione di Green. Infatti, più fortemente si può provare che *v_Ω è di classe C^∞ su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ se si escludono i punti (x,y) con $x = y \in \partial\Omega$*. Questo risultato si ottiene facilmente se si nota che, esplicitando i calcoli, e dove $\alpha(x,y)$ è l'angolo tra x e y:

$$v_\Omega(x,y) = \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4 + ||x||^2||y||^2 - 2R^2||x||||y||\cos\alpha(x,y)}}\,. \tag{4.12}$$

Ma, dato che $-1 \leq \cos\alpha(x,y) \leq 1$, abbiamo anche che:

$$(R^2 - ||x||||y||)^2 = R^4 + ||x||^2||y||^2 - 2R^2||x||||y|| \leq R^4 + ||x||^2||y||^2 - 2R^2||x||||y||\cos\alpha(x,y), \tag{4.13}$$

Possiamo osservare che, perchè si annulli il denominatore nel secondo membro di (4.12) con $x, y \in \overline{\Omega}$ (e quindi $||x||, ||y|| \leq R$), deve necessariamente accadere che $(R^2 - ||x||||y||)^2 = 0$ e dunque $||x|| = ||y|| = R$, cioè $x, y \in \partial\Omega$. In questa situazione, la condizione di annullamento del denominatore del secondo membro della (4.12) fornisce:

$$R^4 + R^2R^2 - 2R^4 \cos\alpha(x, y) = 0$$

che è possibile solo se $\cos\alpha(x, y) = 1$ e quindi $x = y \in \partial\Omega$ come detto sopra. Pertanto le singolarità di $v_\Omega(x, y)$ su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ si hanno solo quando $x = y \in \partial\Omega$. Possiamo riscrivere l'espressione trovata come:

$$v_\Omega(x, y) = \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4 + ||x||^2||y||^2 - 2R^2 x \cdot y}} .$$

Questa funzione, per $x, y \in \Omega$, è C^∞ dove non si annulla il denominatore, cioè ovunque su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ escludendo i punti (x, y) con $x = y \in \partial\Omega$.
Infine, si controlla facilmente che anche la seconda condizione richiesta per avere una funzione di Green è soddisfatta: se $y \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$, allora $G_\Omega(x, y) = 0$. Infatti, in questo caso se $\mathbf{n}_x$ e $\mathbf{n}_y$ sono rispettivamente il versore di x e quello di y e tenendo conto che $||y|| = R$ equivale a $y \in \partial\Omega$, si trova da (4.11):

$$G_\Omega(x, y)|_{y\in\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi|| \, ||x||\mathbf{n}_x - R\mathbf{n}_y||} + \frac{1}{4\pi||R\mathbf{n}_x - ||x||\mathbf{n}_y||}$$

$$= -\frac{1}{4\pi|| \, ||x||\mathbf{n}_x - ||y||\mathbf{n}_y||} + \frac{1}{4\pi|| \, ||y||\mathbf{n}_x - ||x||\mathbf{n}_y||}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||||y||\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{||y||^2 + ||x||^2 - 2||y||||x||\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y}} = 0 .$$

Tutte le condizioni richieste sono dunque soddisfatte: *la (4.11) è una funzione di Green per la palla di raggio R centrata nell'origine in $\mathbb{R}^3$.*
Valutiamo il nucleo di Poisson associato $N_\Omega(x, y)$. Utilizziamo coordinate polari sferiche con l'asse z diretto lungo il vettore uscente dall'origine e diretto verso il punto x, partendo da

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi||x - y||} + \frac{1}{4\pi||R\mathbf{n}_x - ||x||y/R||}$$

si trova in coordinate polari, dove $||y||$ è la coordinata radiale:

$$G_\Omega(x, y) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||||y||\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{R^2 + ||x||^2||y||^2/R^2 - 2||x||||y||\cos\theta}} . \tag{4.14}$$

Quindi dobbiamo valutare:

$$N_\Omega(x, y) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y G_\Omega(x, y)|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial}{\partial||y||} G_\Omega(x, y)\right|_{||y||=R}$$

Nel calcolo si tenga conto di due fatti: (i) dopo aver calcolato le derivate, si può porre $||y|| = R$ (ii) i denominatori dei due addendi a secondo membro in (4.14) coincidono per $||y|| = R$ come notato sopra, coincideranno, per $||y|| = R$ anche i denominatore delle *derivate* di tali espressioni, dato che che altro non sono che i precedenti denominatori elevati alla terza potenza.
Il calcolo produce immediatamente:

$$N_\Omega(x,y) = \left. \frac{R^2 - ||x||^2}{4\pi R ||x-y||^3} \right|_{y\in\partial\Omega} \qquad ||x|| < R \tag{4.15}$$

(Per il problema di Dirichlet esterno alla sfera si può ragionare analogamente scambiando il ruolo di x e y e si ottiene, si tenga conto che ora il versore uscente da $\partial\Omega$ punta verso l'origine:

$$N_\Omega(x,y) = \left. \frac{||x||^2 - R^2}{4\pi R ||x-y||^3} \right|_{y\in\partial\Omega} \qquad ||x|| > R\,.$$

Non diremo altro sul problema esterno.)
Le ipotesi del teorema 4.1 sono soddisfatte, la condizione (i) è vera dato che $v_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\setminus\Delta)$ come provato precedentemente, la condizione (ii) (cioè la (4.6)) è anch'essa valida anche se non ne daremo la dimostrazione qui. Pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C^2_0(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è la palla aperta in $\mathbb{R}^3$ di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2 - ||x||^2}{4\pi R} \oint_{||y||=R} \frac{\psi(y)}{||x-y||^3}\, dS(y)\,.$$

4.2.3 La funzione di Green nel cerchio in $\mathbb{R}^2$.

Ora Ω è il cerchio in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine e di raggio $\mathbb{R}$. Vogliamo determinare una funzione di Green $G_\Omega(x,y)$ per tale insieme. In questo caso siamo nel piano, ma il ragionamente è molto simile a quello precedente sviluppato nello spazio, cambiano solo i calcoli. Cerchiamo una distribuzione di cariche all'esterno di $\bar{\Omega}$ che annulli il potenziale sulla circonferenza $\partial\Omega$.

Osservazioni 4.3. Dal punto di vista fisico non possiamo pensare tali cariche come carieche elettriche, visto che siamo in due dimensioni e che il potenziale dovuto ad una carica si deve pensare come logaritmico. A parte questo dettaglio, fondamentale dal punto di vista fisico, ma inessenzaile dal punto di vista matematico, la procedura è la stessa che nel caso tridimensionale.

Dalla definizione 3.1, ci aspettiamo una funzione di Green della forma della funzione armonica in $y \in \Omega\setminus\{x\}$ data da, per ogni x fissato in Ω:

$$G_\Omega(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log||x-y|| - \frac{1}{2\pi}\log(q_x||x'(x) - y||)\,,$$

in modo tale che:

$$G_\Omega(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log||x-y|| - \frac{1}{2\pi}\log(q_x||x'(x)-y||) = 0 \qquad \forall y \in \partial\Omega.$$

Dobbiamo determinare la carica immagine q_x e la posizione di essa x' in funzione di x.
Esattamente come nel caso precedente, per la simmetria del problema ci aspettiamo che $x' = \lambda(x)x$, con $|\lambda|\,||x|| \geq R$ dato che x' deve essere fuori da $\bar{\Omega}$. Se il metodo funziona si deve avere l'annullamento del potenziale totale su $\partial\Omega$, in particolare nei due punti y_1 e y_2 intersezione della retta congiungente x e x' con $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log(R-||x||) - \frac{1}{2\pi}\log(q_x(||x'(x)||-R)) = 0 \\ \frac{1}{2\pi}\log(R+||x||) - \frac{1}{2\pi}\log(q_x(||x'(x)||+R)) = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

La soluzione è di nuovo:

$$\begin{cases} ||x||||x'|| = R^2 \\ q_x = ||x||/R \end{cases} \tag{4.17}$$

In particolare $|\lambda| = R^2/||x||^2$. Scegliendo $\lambda > 0$ si trova:

$$G_\Omega(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{||x-y||}{||Rx/||x|| - ||x||y/R||}\,.$$

Questa funzione è di classe C^∞ su $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ se si escludono i punti (x,y) con $x = y$. Inoltre la funzione $v_\Omega(x,y) = G_\Omega(x,y) - G_n(x,y)$ è di classe C^∞ su $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ se si escludono i punti (x,y) con $x = y \in \partial\Omega$. Si controlla facilmente che per $||y|| = R$, $G_\Omega(x,y)$ si annulla.
Ragionando come nel problema precedente si può calcolare $N_\Omega(x,y)$, ottenendo:

$$N_\Omega(x,y) = \left.\frac{R^2-x^2}{2\pi R||x-y||^2}\right|_{y\in\partial\Omega} \qquad ||x|| < R$$

(Per il problema esterno si ottiene analogamente un nucleo di Poisson:

$$N_\Omega(x,y) = \left.\frac{x^2-R^2}{2\pi R||x-y||^2}\right|_{y\in\partial\Omega} \qquad ||x|| > R\,,$$

non ci occuperemo oltre del problema esterno.)
Si può verificare che la condizione (4.6) è effettivamente verificata per il nucleo di Poisson trovato, pertanto siamo in grado di determinare tutte le soluzioni del problema di Dirichlet in Ω con funzione sorgente di classe $C^2_0(\Omega)$ e dato di Dirichlet $\psi \in C^0(\partial\Omega)$, quando Ω è il disco aperto in $\mathbb{R}^2$ di raggio $R > 0$ centrato nell'origine. In particolare, se $\varphi \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ è armonica in Ω (cioè non c'è la sorgente f) e si riduce alla funzione continua ψ su $\partial\Omega$, vale:

$$\varphi(x) = \frac{R^2-||x||^2}{2\pi R}\oint_{||y||=R}\frac{\psi(y)}{||x-y||^2}\,dS(y)\,.$$

4.2.4 La funzione di Green in un semispazio di $\mathbb{R}^3$.

Consideriamo la seguente regione

$$\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \, | x^3 > 0\} \qquad \text{con, quindi:} \quad \partial\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \, | x^3 = 0\}$$

Vogliamo determinare una funzione di Green per questa regione illimitata. Possiamo vedere questa regione come il limite per $n \to +\infty$ delle regioni Ω_n date dall'intersezione di Ω e delle palle di raggio n centrate nell'origine. Non ci occuperemo della questione in dettaglio, diremo solo che i precedenti teoremi si generalizzano a questo caso quando si lavora con soluzioni dell'equazione di Poisson che decadono rapidamente a zero (con le lor derivate prime) all'infinito.
Dalla definizione 3.1, sappiamo che in $\mathbb{R}^3$:

$$G_3(x, y) = \frac{-1}{4\pi||x - y||} \, .$$

Dobbiamo allora cercare una distribuzione di cariche (nel semispazio $\{x^3 < 0\}$) tale da annullare il potenziale G_3 su $\partial\Omega$. È sufficiente porre una carica unitaria in $x' = (x^1, x^2, -x^3)$, dove $x = (x^1, x^2, x^3)$. Otteniamo dunque:

$$G_\Omega(x, y) = \frac{-1}{4\pi}\Big(\frac{1}{||x - y||} - \frac{1}{||x' - y||}\Big)$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}}\Big)$$

Il nucleo di Poisson $N_\Omega(x, y)$ risulta essere, tenendo conto che $\mathbf{n} = -\,\mathbf{e}_3$:

$$N_\Omega(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y^3} G_\Omega(x, y)\Big|_{y^3=0}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y^3}\Big(\frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2}}\Big)\Big|_{y^3=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{2x^3}{||x - y||^3}\Big|_{y^3=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{x \cdot \mathbf{e}_3}{||x - y||^3}\Big|_{y^3=0} \, .$$

Consideriamo ora una funzione *continua e limitata* $\psi = \psi(y^1, y^2)$ definita sul piano $y^3 = 0$. Per tale funzione ha senso l'integrale, valutato per $x \in \Omega$ (cioè $x^3 > 0$):

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{2\pi}\oint_{y^3=0}\frac{\psi(y)}{||x - y||^3}\, dS(y) \, . \tag{4.18}$$

Esplicitamente, passando in coordinate polari piane sul piano $x^3 = 0$ e scegliendo l'origine nel punto (x^1, x^2):

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \frac{x^3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr \frac{r\psi(r, \theta)}{(r^2 + (x^3)^2)^{3/2}} \, .$$

È evidente che la limitatezza di ψ assicura l'assoluta convergenza dell'integrale. Il calcolo diretto del laplaciano del primo membro, passando le derivate sotto il segno di integrale (si provi per esercizio che è possibile), provano che la funzione φ è effettivamente $C^2(\Omega)$ ed armonica in tale insieme. Inoltre si prova, essenzialmente verificando la proposizione 4.2, che vale la condizione:

$$\lim_{x \to x_0 \in \partial\Omega} \frac{x^3}{2\pi} \int_{y^3=0} \frac{\psi(y)}{||x-y||^3} \, dS(y) = \psi(x_0)$$

e pertanto (4.18) produce una soluzione del problema di Dirichlet in Ω, senza sorgente f e con dato al bordo ψ. Lasciamo per esercizio la formulazione di un corrispondente teorema di unicità delle soluzioni, tenendo conto del decadimento all'infinito delle funzioni φ individuate in (4.18).

4.3 *Calcolo del nucleo di Poisson per il problema del cerchio in $\mathbb{R}^2$ tramite l'analisi di Fourier

In quest'ultima sezione presentiamo un metodo alternativo a quello delle cariche immagine che permette, sotto opportune ipotesi sul dato al bordo f, di ricavare la soluzione del problema di Dirichlet per il cerchio in $\mathbb{R}^2$. Gli elementi della teoria delle serie di Fourier che usiamo qui saranno discussi nel capitolo 6. Si pù posticipare la lettura di questa sezione a quella della sezione rilevante nel capitolo 6.
Consideriamo dunque il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \phi|_{\partial\Omega} = f & f \in C^0(\partial\Omega) \text{ assegnata,} \end{cases} \tag{4.19}$$

dove Ω è il cerchio in $\mathbb{R}^2$ di raggio R: $\Omega = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 < R^2\}$. Per la simmetria del problema è conveniente introdurre un sistema di coordinate polari ρ, θ in $\mathbb{R}^2$, con $x^1 = \rho\cos\theta, x^2 = \rho\sin\theta$. L'equazione di Laplace assume la seguente forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\phi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\phi = 0\,. \tag{4.20}$$

Per risolverla cominciamo a cercare delle soluzioni particolari della forma:

$$\phi(\rho,\theta) = \psi(\rho)\chi(\theta),$$

con ψ e χ differenziabili due volte con continuità nel loro dominio. Restringendo le possibili soluzioni a tale classe di funzioni, l'equazione (4.20) diviene:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\psi\Big)\chi + \frac{\psi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\chi = 0\,,$$

ovvero, nei punti in cui le due funzioni ψ e χ non si annullano:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\psi\Big)\frac{\rho^2}{\psi} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\chi\,.$$

Al primo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile ρ, mentre al secondo membro troviamo una funzione dipendente solo dalla variabile θ. L'uguaglianza può dunque essere verificata se e solo se entrambi i membri sono uguali ad una costante λ (indipendente da ρ, θ). Per continuità ci aspettiamo che valga ovunque:

$$\begin{cases} \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\psi = \lambda\psi \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\chi = -\lambda\chi\,. \end{cases} \tag{4.21}$$

Sicuramente, per ogni fissata costante λ, le soluzioni di questo sistema risolvono l'equazione iniziale. Studiamo pertanto le soluzioni di tale sistema. Iniziamo a considerare la seconda equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\chi(\theta) + \lambda\chi(\theta) = 0, \tag{4.22}$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine a coefficienti costanti di cui ben nota la soluzione generale. Dato che vogliamo, ovviamente che la soluzione soddisfi la condizione di monodromia $\chi(0) = \chi(2\pi)$, è necessario che $\mathbb{R} \ni \lambda \geq 0$, in modo tale che le soluzioni di (4.22) siano funzioni periodiche. In tal caso la soluzione generale è data da

$$\chi(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)\,.$$

Inoltre $\sqrt{\lambda}$ deve essere un numero intero, ovvero $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ per fornire la giusta periodicità che assicuri $\chi(0) = \chi(2\pi)$. Il caso $n = 0$ corrisponde a soluzioni costanti.
Consideriamo ora la seconda equazione, che un'equazione lineare:

$$\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\psi = n^2\psi, \tag{4.23}$$

Una classe di soluzioni linearmente indipendenti è data da:

$$\psi_n(\rho) = \begin{cases} 1, \log\rho, & \\ \rho^n, \rho^{-n} & n \geq 1 \end{cases}$$

Dobbiamo scartare la funzione $\log\rho$ per $n = 0$ e la funzione ρ^{-n} per $n \geq 1$ in quanto sono singolari in 0, mentre noi stiamo cercando delle soluzioni dell'equazione di Laplace che siano regolari in tutto il cerchio interno. Per linearità , una soluzione ovunque regolare dell'equazione (4.20) può avere la forma

$$\psi(\rho,\theta) = \sum_n \rho^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)), \tag{4.24}$$

dove A_n, B_n sono coefficienti arbitrari e n varia in qualche sottoinsieme finito (ma arbitrariamente grande) dell'insieme degli interi positivi o nulli. I coefficienti A_n e B_n, in linea di principio si determinano imponendo la condizione al bordo $\psi(R,\theta) = f$:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \\ A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta \\ B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta \end{cases}$$

È chiaro che affinché si possa sempre risolvere il problema ci aspettiamo che l'insieme di variabilità di n sia tutto $\mathbb{N}$ e non solo un sottoinsieme finito. Questo fatto però pone il problema della convergenza della serie (4.24). Ulteriormente bisogna anche dimostrare che la serie (4.24) converge ad una soluzione del problema: questo fatto non è ovvio, mentre è ovvio, per linearità quando n varia su un insieme finito.
Formalmente dunque la soluzione del problema di Dirichlet interno è data dalla *serie*

$$\phi(\rho,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\rho/R)^n(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)),$$

dove α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier della funzione f:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$$

Dobbiamo ora dimostrare che la funzione cosıcostruita è effettivamente soluzione del problema di Dirichlet, ovvero che è di classe $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, che è armonica in Ω e che coincide con f su $\partial\Omega$. Prima di tutto dimostriamo l'armonicità di ϕ in Ω. Dobbiamo in particolare mostrare che è giustificato derivare sotto il segno di serie. Di fatto, nell'ipotesi che la funzione f sia limitata, i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n sono limitati, sia ha cioè che

$$|\alpha_n| < M,\ |\beta_n| < M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue quindi la seguente diseguaglinza per i termini della serie di Fourier di ϕ:

$$|(\rho/R)^n(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta))| < |\rho/R|^n 2M$$

e dunque nei punti interni al cerchio, ovvero per $\rho > R$, sia ha $|\rho/R| < 1$ e dunque la serie è assolutamente convergente.
Possiamo ripetere lo stesso ragionamento anche per dimostrare la convergenza della serie delle derivate. Derivando k volte ogni termine della serie rispetto alla variabile θ otteniamo

$$\sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n(\alpha_n n^k\cos(n\theta + k\frac{\pi}{2}) + \beta_n n^k\sin(n\theta + k\frac{\pi}{2})).$$

Tale serie è maggiorata dalla serie convergente $2M\sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n n^k$ (se $\rho < R$), è giustificato dunque derivare sotto il segno di serie infinite volte rispetto a θ. Per quanto riguarda la derivazione rispetto alla variabile ρ abbiamo:

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\phi(\rho,\theta) = \sum_{n\geq k} R^{-k}\frac{n!}{n-k!}(\rho/R)^{n-k}(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)).$$

É immediato verificare che la serie delle derivare è assolutamente convergente, in quanto maggiorata da $2M\sum_{n\geq k} R^{-k}\frac{n!}{n-k!}(\rho/R)^{n-k}$, dunque è possibile derivare sotto il segno di serie infinite volte rispetto a ρ.
Resta da verificare la continuità della soluzione cosıcostruita sul bordo Ω. Per dimostrare questa proprietà dobbiamo imporre delle ipotesi aggiuntive su f. Sappiamo infatti dalla teoria delle serie di Fourier che se f è continua e di classe C^1 a tratti su $\partial\Omega$, allora i suoi coefficienti di Fourier α_n, β_n soddisfano le seguenti diseguaglianze:

$$\sum_n |\alpha_n| < \infty, \qquad \sum_n |\beta_n| < \infty.$$

La funzione ϕ è , per costruzione, il limite di una successione di funzioni continue, infatti:

$$\phi(\rho,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\phi_n(\rho,\theta), \quad \phi_n(\rho,\theta) = (\rho/R)^n(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)).$$

Inoltre, $\forall\rho\in[0,R], \theta\in[0,2\pi]$, abbiamo $|\phi_n(\rho,\theta)| < |\alpha_n|+|\beta_n|$, quindi, utilizzando il teorema che assicura che il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua, abbiamo che $\phi(\rho,\theta)$ è una funzione continua in $\overline{\Omega}$. In particolare sul bordo di Ω:

$$\phi(R,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)) = f(\theta) \ ,$$

dato che α_n, β_n sono i coefficienti di Fourier della funzione f.
Calcoliamo infine il nucleo di Poisson.

$$\begin{aligned}
\phi(\rho,\theta) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta + \sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\cos(n\theta')\cos(n\theta)d\theta' + \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\sin(n\theta')\sin(n\theta)d\theta'\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n\int_0^{2\pi} f(\theta')\cos n(\theta-\theta')d\theta' \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\Big(\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n\cos n(\theta-\theta')\Big)d\theta' \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\Big(\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 1}(\rho/R)^n\frac{e^{in(\theta-\theta')}+e^{-in(\theta-\theta')}}{2}\Big)d\theta' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\Big(1+\sum_{n\geq 1}\big(\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\theta')}\big)^n+\sum_{n\geq 1}\big(\frac{\rho}{R}e^{-i(\theta-\theta')}\big)^n\Big)d\theta' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\Big(1+\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\theta')}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\theta')}}+\frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(\theta-\theta')}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\theta-\theta')}}\Big)d\theta' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')\frac{1-(\rho/R)^2}{1-2(\rho/R)\cos(\theta-\theta')+(\rho/R)^2}d\theta' \\
&= \int_0^{2\pi} f(\theta')N_\Omega(\rho,\theta,R,\theta')Rd\theta'
\end{aligned}$$

Dove $N_\Omega(\rho,\theta,R,\theta') = \frac{1}{2\pi R}\frac{1-(\rho/R)^2}{1-2(\rho/R)\cos(\theta-\theta')+(\rho/R)^2}$ è il nucleo di Poisson, già calcolato in precedenza tramite il metodo della cariche immagine.

Capitolo 5

Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni fatti generali riguardanti due equazioni del secondo ordine di tipo iperbolico: l'equazione di D'Alembert e quella di Klein-Gordon. La prima:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}}\varphi = 0 \tag{5.1}$$

con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ è ben nota dalla fisica classica e descrive nello spaziotempo $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, in una certa approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione ondosa/elastica in mezzi estesi in $\mathbb{R}^n$ (tipicamente $n = 1, 2, 3$). La costante c è la velocità di propagazione delle perturbazioni descritte dal campo φ, che dipende dal tipo di mezzo e di perturbazione. La seconda:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}}\varphi - \mu^2\varphi = 0, \tag{5.2}$$

dove $\mu = \frac{mc^2}{\hbar}$ con $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un'equazione che nasce nella fisica moderna e descrive (se $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^4$ pensato come spaziotempo della relatività speciale e c è la velocità della luce) l'equazione di evoluzione relativistica per campo associato a particelle quantistiche di massa $m > 0$ e prive di spin e carica. Nel caso $m = 0$, ovviamente la forma della seconda equazione si riduce alla forma della prima. Le due equazioni sopra scritte possono essere leggermente modificate introducendo un *termine di sorgente* dato da una funzione nota $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}}\varphi = \rho \tag{5.3}$$

e

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \Delta_{\mathbf{x}}\varphi - \mu^2\varphi = \rho. \tag{5.4}$$

Nota importante. Nel seguito del capitolo Δ indicherà sempre e solo il laplaciano rispetto alle coordinate spaziali $\mathbf{x}$. Sopra abbiamo indicato tale operatore con $\Delta_{\mathbf{x}}$, ma d'ora in poi ometteremo l'indice $\mathbf{x}$.

5.1 L'equazione di D'Alembert come equazione della corda vibrante.

L'equazione di D'Alembert descrive, in prima approssimazione, tutti i fenomeni di propagazione odulatoria classici in mezzi estesi. A titolo di esempio, vogliamo mostrare come l'equazione di D'Alembert descriva le onde trasversali che si propagano lungo una corda elastica tesa. Consideriamo una corda orizzontale, a riposo descritta da $y = 0$ in un sistema di coordinate x, y solidale con un sistema di riferimento inerziale, con y verticale. Sia $\lambda > 0$, costante (nel tempo e nel punto della corda) la densità lineare di massa della corda lungo x e sia $T > 0$ il valore costante (nel tempo e nel punto della corda) della tensione della corda. Supponiamo che la corda, al tempo $t = 0$, venga deformata in una funzione $y = y(x)$ con $|y(x)|$ molto piccolo, e che poi venga lasciata libera (sempre con estremi fissati). A causa dell'elasticità del mezzo, accade che la configurazione della corda varierà nel tempo e sarà descritta da una funzione $y = y(t, x)$. Vogliamo ricavare, dalle leggi della dinamica, l'equazione a cui deve soddisfare questa funzione assumendo che la tensione T e la densità λ rimangano costanti e che le deformazioni trasversali siano piccole. Consideriamo un punto x_0 e quindi un pezzo di corda relativo all'intervallo $[x_0-h, x_0+h]$. Su tale porzione di corda agisce la tensione ai due estremi: $\mathbf{T}(x_0+h)$ e $\mathbf{T}(x_0-h)$. Entrambi i vettori saranno uscenti dalla porzione di corda e saranno in ogni punto tangenti alla corda. Si osservi che quindi le componenti lungo l'asse x di tali vettori hanno segno opposto. In prima approssimazione l'accelerazione nella direzione $\mathbf{e}_y$ della porzione di corda è $\frac{\partial^2 y}{\partial t}$, mentre la massa della porzione di corda è $2h\lambda$. La seconda equazione della dinamica afferma allora che deve valere, in prima approssimazione:

$$2h\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y \,, \tag{5.5}$$

Il secondo membro si può riscrivere come:

$$(\mathbf{T}(x_0 + h) + \mathbf{T}(x_0 - h)) \cdot \mathbf{e}_y = T(\sin\alpha(x_0 + h) - \sin\alpha(x_0 - h)) \,,$$

dove $\alpha(x_0+h)$ e $\alpha(x_0-h)$ sono gli angoli che $\mathbf{T}(x_0+h)$ e $-\mathbf{T}(x_0-h)$ individuano rispetto a $\mathbf{e}_x$ e quindi, approssimando $\sin\alpha$ con $\tan\alpha$ tenendo conto che lavoriamo con piccoli $|y|$ e tenendo conto che: $\tan\alpha(x_0+h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h}$ e $\tan\alpha(x_0-h) = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}$, (5.5) può essere riscritta come:

$$\frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0+h} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{x_0-h}}{2h} \,.$$

In realtà l'identità trovata è solo approssimata. Tuttavia, nel limite per $h \to 0$, ci si aspetta che diventi rigorosamente valida. In tal caso, si trova l'equazione:

$$\frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \,.$$

Questa è l'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R}^2$ per le perturbazioni ondose trasversali della corda:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\,,$$

in cui la *velocità di propagazione delle perturbazioni* v (vedremo più avanti il significato di tale nome) è data da:

$$v=\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\,.$$

Osservazioni 5.1. Nel caso in cui sulla corda agisca anche la forza di gravità , sulla porzione di corda usata per ottenere l'equazione di D'Alembert agisce anche la forza verticale $-\lambda 2hg\mathbf{e}_y$. In questo caso, ripetendo il ragionamento fatto sopra, l'equazione finale che si ottiene è quella di D'Alembert con sorgente:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\lambda}{T}g\,.$$

In generale, se sulla corda agisce qualche densità di forza per unità di massa individuata dalla funzione $f=f(t,x)$ nella direzione verticale, l'equazione che si ottiene alla fine è :

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\lambda}{T}f(t,x)\,.$$

5.2 Condizioni iniziali ed al contorno.

I problemi tipici che si incontrano lavorando con equazioni iperboliche come (5.3) e (5.4) sono generalmente del seguente tipo.
Si cerca $\varphi\in C^2((\alpha,\beta)\times\overline{D})$ che soddisfi (5.3) oppure (5.4) in $(\alpha,\beta)\times\overline{D}$ per qualche $\rho\in C^0((\alpha,\beta)\times\overline{D})$ assegnata, dove:

(a) $(\alpha,\beta)\ni 0$

(b) $D\subset\mathbb{R}^n$ è un aperto, non vuoto, (non necessariamente connesso) con $\overline{D}$ compatto e ∂D regolare orientabile.

Vengono quindi assegnate *condizioni iniziali* e *condizioni al bordo* sulla funzione φ.
Le **condizioni iniziali** corrispondono alla coppia di richieste:

$$\varphi(0,\mathbf{x})=\varphi_0(\mathbf{x})\,,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{(0,\mathbf{x})}=\varphi_1(\mathbf{x})\,,\quad \forall\mathbf{x}\in\overline{D},\text{ con }\varphi_0\in C^2(\overline{D})\text{ e }\varphi_1\in C^1(\overline{D})\text{ assegnate.}\tag{5.6}$$

Le **condizioni al bordo**, riferite all'insieme $S:=(\alpha,\beta)\times\partial D$ con vettore normale uscente $\mathbf{n}$, possono essere di tre tipi distinti:

(i) $\varphi\restriction_S = \psi$ con $\psi \in C^2(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0,\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})$;

(ii) $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi\restriction_S = \psi$ con $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0,\mathbf{x}) = \mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_0\restriction_S(\mathbf{x})$;

(iii) $a\varphi\restriction_S + b\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi\restriction_S = \psi$ con $a,b \in \mathbb{R}$ costanti assegnate tali che $ab \neq 0$ e $\psi \in C^1(S)$ funzione assegnata tale che $\psi(0,\mathbf{x}) = a\varphi_0\restriction_S + b\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi_0\restriction_S$.

Osservazioni 5.2.
(1) Le condizioni dette si possono notevolmente indebolire per esempio assumendo più debolmente che $\varphi \in C^2((0,\beta)\times D) \cap C^1((0,\beta)\times\overline{D})$ (e che soddisfi in tale insieme (5.3) oppure (5.4) per qualche $\rho \in C^0((\alpha,\beta)\times D)$), con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questo caso bisogna assumere più precise ipotesi di regolarità sul dominio D al fine di avere teoremi di esistenza ed unicità .
(2) Si possono considerare casi in cui D non è limitato e sono assegnate condizioni iniziali. In questo caso le condizioni al contorno, che sono importanti per i teoremi di esistenza ed unicità sono, in generale, rimpiazzate da condizioni sull'andamento all'infinito spaziale (cioè per $|\mathbf{x}| \to +\infty$ a t fissato) per il campo φ incognito. Nel caso in cui $D = \mathbb{R}$ e $(\alpha,\beta) = \mathbb{R}$, per l'equazione di D'Alembert non è necessario fissare alcun dato al contorno, come vedremo più avanti, per avere un teorema di esistenza ed unicità .
(**3**) Esaminaimo il significato delle condizioni al contorno nel caso di una corda orizzontale, di lunghezza fissata, vibrante trasversalmente. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) la funzione ψ definita sul bordo S si riduce ad una coppia di funzioni $u = u(t)$ e $v = v(t)$, definite sui due estremi della corda, che stabiliscono come oscilla la corda ai suoi estremi al variare del tempo. Le condizioni al contorno di tipo (ii), per la corda vibrante corrispondono a fissare l'andamento temporale della componente verticale della forza che agisce sulla corda agli estremi. Le condizioni al contorno di tipo (iii) corrispondono a fissare una relazione (che dipende dal tempo) tra ciascuna forza che agisce ad ogni estremo e la deformazione della corda nello stesso estremo.

5.3 Bilancio energetico e teoremi di unicità.

5.3.1 Densità di energia ed equazione di continuità.

Consideriamo una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. Definiamo su Ω la funzione $E \in C^1(\Omega)$:

$$E(t,\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi(t,\mathbf{x})}{\partial t}\right)^2 + \nabla\varphi(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\varphi(t,\mathbf{x}) + \mu^2\varphi(t,\mathbf{x})^2\right]. \tag{5.7}$$

Chiameremo la funzione E **densità di energia** di φ. Questa funzione è di fondamentale importanza in matematica oltre che in fisica in quanto consente di provare dei teoremi di unicità per le soluzioni delle equazioni considerate.

Osservazioni 5.3.
(1) In realtà E descrive effettivamente la densità di energia associata a campo φ nel caso in cui esso sia il campo quantistico di Klein-Gordon. Negli altri casi, la grandezza E non ha sempre il significato di densità di energia anche se lo ha in certi casi importanti, per esempio quando φ descrive le deformazioni longitudinali di una sbarra elastica e l'equazione considerata è quella di D'Alembert piuttosto che quella di Klein-Gordon. In tal caso E è davvero la densità di energia elastica del mezzo continuo.
(2) Si osservi che $E(t, \mathbf{x}) \geq 0$ ovunque è definita e questo fatto sarà di cruciale importanza tra poco.

Proposizione 5.1. *Si consideri una funzione φ di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale la funzione soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (5.4) e quindi in particolare l'equazione di D'Alembert (5.3) nel caso $\mu = 0$. La densità di energia E di φ soddisfa:*

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) \,, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Omega \,. \tag{5.8}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Per computo diretto, dalla definizione di E:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nabla \varphi \cdot \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,.$$

Dato che, dall'equazione di Klein-Gordon con sorgente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho \,,$$

sostituendo nell'espressione trovata sopra per la derivata temporale di E, abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\Delta \varphi - \mu^2 \varphi - \rho) + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \,,$$

dove abbiamo anche scambiato l'ordine di due derivate essendo la funzione φ di classe C^2. Il risultato ottenuto si può riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho \,,$$

e cioè :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) \,.$$

$\square$

Osservazioni 5.4. In riferimento al teorema precedente, in assenza della sorgente ρ, l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t,\mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi\right)$$

può essere riscritta in termini di un'*equazione di continuità*:

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t,\mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_E = 0\,,$$

dove $\mathbf{J}_E := -\frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi$. Vediamo il significato fisico di tale equazione. Fissiamo un insieme $[t_1, t_2] \times \overline{V} \subset \Omega$, dove $V \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto a chiusura compatta il cui bordo è una superficie regolare orientabile e $t_1 < t_2$. Un tale insieme esiste nell'inotno di ogni punto di Ω, dato che questo è aperto e che i cilindri aperti $(t_1, t_2) \times V$ sono una base della topologia di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, prendendo, per esempio, gli insiemi V come palle aperte di $\mathbb{R}^n$. *Consideriamo il caso in cui non ci sia la sorgente* ρ. Se integriamo l'equazione (5.8) sul volume V otteniamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}E(t,\mathbf{x})\,d^n x = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi\right)\,d^n x\,.$$

La derivata parziale nel tempo può essere portata fuori dall'integrale, dato che $\frac{\partial}{\partial t}E$ e continua e quindi è limitata sul compatto $[t_1, t_2] \times \overline{V}$ e V ha misura finita (pari a quella di $\overline{V}$)[1]. In questo modo, l'equazione trovata può essere riscritta:

$$\frac{d}{dt}\int_V E(t,\mathbf{x})\,d^n x = \oint_{+\partial V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi\right) \cdot \mathbf{n}\,dS(x)\,.$$

Questa è , a tutti gli effetti, un'equazione di conservazione (o bilancio) della grandezza che si ottiene integrando E su un volume. L'identità trovata dice che la variazione per unità di tempo dell'energia totale presente nel volume V è pari al flusso di energia entrante che passa attraverso la superficie che circonda V stesso. In questo senso $\mathbf{J}_E = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi$ si intepreta come la densità di corrente di energia o altrimenti detta il campo di flusso di energia.

5.3.2 Teoremi di unicità.

Possiamo ora eneunciare e provare un teorema di unicità per l'equazione di Klein-Gordon con sorgente (5.4) che include, come caso particolare l'equazione di D'Alembert con sorgente (5.3).

---

[1]Infatti, dato che E è continua e quindi limitata su $\overline{V}$ per ogni fissato t, è sicuramente (assolutamente) integrabile secondo Lebesgue su tale insieme per ogni valore del parametro t, inoltre $\frac{\partial}{\partial t}E$ una funzione continua congiuntamente nelle due variabili ed è dunque limitata, uniformemente in t, da qualche costante $M \geq 0$ sul compatto $[t_1, t_2] \times \overline{V}$. Dato che la funzione costante $V \ni \mathbf{x} \mapsto M$ (pensata come funzione della sola $\mathbf{x}$) è non negativa ed integrabile su V, avendo quest'ultimo misura finita, siamo nelle ipotesi di poter calcolare la derivata di $t \mapsto \int_V \frac{\partial}{\partial t}E(t,\mathbf{x})\,d^n x$, per ogni $t \in (t_1, t_2)$ passando la derivata in t sotto il segno di integrale (vedi la sezione B.2 in appendice).

Teorema 5.1. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, non vuoto, con $\overline{D}$ compatto e ∂D regolare orientabile. Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon con sorgente:*

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta\varphi - \mu^2\varphi = \rho \,,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ e la funzione $\rho \in C^0((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ sono assegnate. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) \,, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(0,\mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x}) \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}, \textit{ con } \varphi_0 \in C^2(\overline{D}) \textit{ e } \varphi_1 \in C^1(\overline{D}) \textit{ assegnate,}$$

e condizioni al contorno di tipo (i) oppure (ii) oppure (iii), con la funzione ψ assgnata come in 5.2. Infine, se si assegnano condizioni al contorno di tipo (iii), le costanti a e b sono supposte soddisfare $ab > 0$ (e non solo $ab \neq 0$).
Se esiste una soluzione questa è unica. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni dello stesso problema di sopra. La funzione $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \overline{D})$ risolve allora l'equazione senza sorgente

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta\varphi - \mu^2\phi = 0 \,,$$

con condizioni iniziali:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = 0 \,, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{(0,\mathbf{x})} = 0 \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D},$$

e condizioni al contorno rispettivamente:(i) $\phi \restriction_S = 0$, oppure (ii) $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi \restriction_S = 0$, oppure (iii) $a\phi\restriction_S + b\mathbf{n} \cdot \nabla\phi\restriction_S = 0$ con $ab > 0$, dove $S := (\alpha, \beta) \times \partial D$.
Ragionando esattamente come nelle osservazioni 5.4 arriviamo a concludere che:

$$\frac{d}{dt}\int_D E(t, \mathbf{x})\, d^n x = \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\nabla\phi\right) \cdot \mathbf{n}\, dS(x) \,.$$

Si osservi che il secondo membro è una funzione continua di t come si prova subito dal teorema della convergenza dominata notando che ∂D ha misura finita e che la funzione integranda è congiuntamente continua in tutte le variabili (vedi la sezione B.2 in appendice). Concludiamo che, per ogni $T \in (\alpha, \beta)$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\nabla\phi\right) \cdot \mathbf{n}\, dS(x) \,. \tag{5.9}$$

Dove abbiamo tenuto conto del fatto che, nelle nostre ipotesi E per il campo ϕ si annulla a $t = 0$ e quindi $\int_D E(0, \mathbf{x}) d^n x = 0$. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (i) e (ii) il secondo membro di (5.9) è evidentemente nullo. Nel caso di condizioni al contorno di tipo (iii) si ottiene lo stesso risultato con un pò più di fatica come proveremo alla fine. Concludiamo che, nelle nostre ipotesi, per ogni tipo di condizione al contorno e per ogni $T \in (\alpha, \beta)$, vale $\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = 0$ e quindi la funzione $E \geq 0$ deve essere quasi ovunque nulla. Essendo continua deve essere ovunque nulla. In definiva abbiamo ottenuto che, per ogni $(t, \mathbf{x}) \in (\alpha, \beta) \times \overline{D}$:

$$E(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t}\right)^2 + \nabla \phi(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(t, \mathbf{x}) + \mu^2 \phi(t, \mathbf{x})^2\right] = 0\,.$$

Dato che si tratta di una somma di addendi non negativi ogni addendo deve essere nullo separatamente. Se $\mu > 0$ concludiamo che $\phi = 0$ ovunque e quindi $\varphi_1 = \varphi_2$ su $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$. Lo stesso risultato si ottiene se $\mu = 0$ osservando che, in virtù di quanto ottenuto sopra, le derivate temporali di ϕ devono annullarsi. Concludiamo (applicando il teorema di Lagrange) che per ogni fissato $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(0, \mathbf{x})$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Ma $\phi(0, \mathbf{x}) = 0$ nelle nostre ipotesi. In definitiva $\varphi_1 = \varphi_2$ vale su $(\alpha, \beta) \times \overline{D}$ e quindi il teorema di unicità è provato.
Per concludere la dimostrazione proviamo che il secondo membro di (5.9) è nullo anche per condizioni al bordo di tipo (iii). Dato che $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{a}{b}\phi$, il secondo membro può ancora essere scritto,

$$-\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{a}{b}\frac{\partial \phi}{\partial t}\phi\, dS(x) = -\frac{a}{2b}\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \frac{\partial \phi^2}{\partial t}\, dS(x) = -\frac{a}{2b}\int_0^T dt \frac{d}{dt}\oint_{+\partial D} \phi^2\, dS(x)\,.$$

Dove abbiamo usato note conseguenze del teorema della convergenza dominata (vedi la sezione B.2 in appendice). In definitiva, dato che $\phi^2(0, \mathbf{x}) = 0$ su $\overline{D}$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = -\frac{a}{2b}\int_0^T dt \frac{d}{dt}\oint_{+\partial D} \phi^2\, dS(x) = -\frac{a}{2b}\oint_{+\partial D} \phi^2(T, x)\, dS(x)\,.$$

Si osservi che se $ab > 0$ significa che a e b hanno lo stesso segno e pertanto:

$$-\frac{a}{2b}\oint_{+\partial D} \phi^2(T, x)\, dS(x) \leq 0\,.$$

D'altra parte, dato che $E \geq 0$ abbiamo anche che $\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x \geq 0$. Di conseguenza l'identità ottenuta:

$$\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = -\frac{a}{2b}\oint_{+\partial D} \varphi^2(T, x)\, dS(x)\,,$$

implica che: $\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = 0$. $\Box$

Osservazioni 5.5.
(1) Con una procedura di limite ed eseguendo in ordine diverso alcune delle integrazioni fatte nella dimostrazione di sopra, il risultato presentato nel teorema si può estendere al caso in cui si richiede più debolmente $\varphi \in C^2((0, \beta) \times D) \cap C^1((0, \beta) \times \overline{D})$, con $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$ e $\varphi_1 \in C^0(\overline{D})$, e $\psi \in C^1(S)$ in (ii) e $C^0(S)$ in (i) e (iii). In questa situazione però è necessario assumere che

il volume D sia più regolare e che sia ottenibile (in un preciso senso che non chiariremo qui) come limite di una successione di domini $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \cdots \subset D$ in modo tale che $Vol(\partial D_n) \leq Vol(\partial D)$.
(2) Lavorando su tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, si può dimostrare, e noi lo faremo per l'equazione di D'Alembert sulla retta reale, che se al tempo $t = 0$ i dati iniziali sono a supporto compatto, allora la soluzione $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$, dell'equazione di Klein-Gordon/D'Alembert senza sorgente su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$, ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Questo risultato non è per nulla ovvio, per esempio non vale per equazioni paraboliche oppure per l'equazione di Schrödinger. In base a tale risultato il seguente teorema di unicità non risulta essere inutile.

Teorema 5.2. *Sia $(\alpha, \beta) \ni 0$ Si consideri il problema di determinare $\varphi \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$ che soddisfi l'equazione differenziale di Klein-Gordon con sorgente:*

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0\,,$$

(incluso il caso di D'Alembert $\mu = 0$) dove la costante $\mu \geq 0$ è assegnata. Supponendo ulteriormente che siano state imposte condizioni iniziali:

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})\,, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(0,\mathbf{x})} = \varphi_1(\mathbf{x})\,, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D},\ \textit{con}\ \varphi_0 \in C^2_0(\overline{D})\ \textit{e}\ \varphi_1 \in C^1_0(\overline{D})\ \textit{assegnate.}$$

Se esiste una soluzione φ tale che ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, tale soluzione è unica. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Siano φ_1 e φ_2 due soluzioni del problema. Consideriamo $\phi := \varphi_1 - \varphi_2 \in C^2((\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n)$. Questa è ancora una soluzione del problema, con dati iniziali nulli ed ha supporto compatto quando ristretta ad ogni insieme $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}^n$, con $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$. Fissato $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$, dato che il supporto di ϕ ristretta a tale insieme è compatto e quindi limitato, consideriamo una palla chiusa di raggio finito e centrata nell'origine, $B \subset \mathbb{R}^n$ in modo tale che $[\alpha', \beta'] \times B$ includa il supporto di ϕ. Consideriamo poi una seconda palla aperta di raggio finito e centrata nell'origine, $D \subset \mathbb{R}^n$ che includa la palla chiusa B. Per costruzione, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$, la funzione $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \phi(T, \mathbf{x})$ si annulla su $D \cup \partial D$, ma anche nella corona sferica aperta $D \setminus B$. Di conseguenza, si annulla con tutte le sue derivate (spaziali e temporali) fino a secondo ordine su ∂D. Lavorando come nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo che, per ogni $T \in [\alpha', \beta']$:

$$\int_D E(T, \mathbf{x})\, d^n x = \int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi\right) \cdot \mathbf{n}\, dS(x) = 0\,,$$

dato che su $[0, T] \times \partial D$ la funzione ϕ e le sue derivate sono nulle. Ragionando come nel caso del teorema precedente si ha $\phi(T, \mathbf{x}) = 0$ per ogni $T \in (\alpha, \beta)$ e $\mathbf{x} \in \overline{D}$, ma qundi anche fuori da

$\overline{D}$ dato che fuori da tale insieme ϕ si annulla per ipotesi. Di conseguenza: $\varphi_1(t, \mathbf{x}) = \varphi_2(t, \mathbf{x})$ ovunque su $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$. $\Box$

Osservazioni 5.6. È interessante notare che, nelle ipotesi del teorema, scegliendo cioè D abbastanza grande in modo tale che ∂D non intersechi mai il supporto di $\varphi(t, \mathbf{x})$ per $t \in (\alpha', \beta')$, abbiamo che $\mathcal{E} := \int_D E(t, \mathbf{x})\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} E(t, \mathbf{x})\, d^n x$. In questo modo abbiamo una nozione di *energia totale* associata al campo φ e tale energia è conservata nel tempo essendo, come è provato nel teorema $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Il valore di $\mathcal{E}$ dipende ovviamente dalla soluzione φ considerata.

Capitolo 6

Equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

In questo capitolo studieremo il problema dell'equazione di D'Alembert sul dominio spaziale dato da tutto $\mathbb{R}$ in assenza di condizioni al contorno. Successivamente discuteremo alcuni semplici risultati per l'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon con un dominio spaziale dato da un segmento con l'aggiunta di condizioni al contorno, facendo uso di elementari teoremi della teoria della serie di Fourier.

6.1 Equazione di D'Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno.

Consideriamo l'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R}^2$ e quindi con x che varia su tutta la retta reale. Benché si tratti di un caso molto particolare, è possibile in questo caso, scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di D'Alembert. Inoltre molte delle proprietà di queste soluzioni hanno validità molto generale anche in dimensione maggiore ed in varietà ambiente (spazitempo) curve.

6.1.1 Assenza di sorgenti, formula di D'Alembert, domini di dipendenza.

Per prima cosa ci occupiamo del problema con soli dati iniziali ed in assenza di sorgenti (non ci sono dati al bordo in questo caso):

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0\,, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)\,, \\ \varphi(0,x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{6.1}$$

dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$ sono funzioni assegnate. Dimostreremo un teorema di esistenza ed unicità per il problema (6.1), dando esplicitamente l'espressione della soluzione in funzione

dei dati iniziali. Successivamente, in un'osservazione, mostreremo anche che il problema è ben posto nel senso di Hadamard.
Per risolvere l'equazione differenziale di D'Alembert:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\,, \tag{6.2}$$

facciamo il cambiamento di coordinate $v := (x-ct)/2$ e $w = (x+ct)/2$ che si inverte in $x = v+w$ e $t = (w-v)/c$ e pertanto definisce una funzione biettiva C^∞ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ con inversa C^∞. Con questa scelta risulta:

$$\frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\quad \frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

e quindi si ha, per ogni funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t(v,w),x(v,w))=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(t,x)=\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(t,x)\,.$$

Concludiamo che: $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve (6.2) se e solo se la funzione $C^2(\mathbb{R}^2)$, definita come $\psi(v,w) := \varphi(t(v,w),x(v,w))$, risolve

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial w}=0\,. \tag{6.3}$$

Abbiamo allora il seguenti due lemmi.

Lemma 6.1. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per segmenti paralleli all'asse x (cioè , per ogni coppia di punti in Ω il segmento parallelo all'asse x che li congiunge è tutti incluso in Ω). Se $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ è ovunque derivabile nella variabile x e soddisfa $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω, allora, su tutto Ω, $\psi(x,y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Si considerino due punti $(x,y),(x',y) \in \Omega$, con y fissato arbitrariamente. Il teorema di Lagrange per la funzione $s \mapsto \phi(s,y)$ può essere applicato sul segmento chiuso parallelo all'asse x che connette (x,y) e (x',y), dato che tale segmento è tutti incluso nel dominio della funzione ϕ e che la funzione $s \mapsto \phi(s,y)$ è derivabile su tale segmento per ipotesi. Si ottiene allora $\phi(x,y) - \phi(x',y) = (x-x')\frac{\partial\phi}{\partial x}|_{(\xi,y)} = 0$, cioè $\phi(x,y) = \phi(x',y)$. Indichiamo allora con $F(y)$ il valore comune che ψ assume sui punti in Ω appartenenti alla retta parallela all'asse x e tracciata alla generica quota y. Per costruzione, vale $\psi(x,y) = F(y)$ per ogni $(x,y) \in \Omega$. $\square$

Osservazioni 6.1. Il risultato è meno banale di quello che si potrebbe credere a prima vista, ed è per questo che lo abbiamo dimostrato esplicitamente. Infatti, se Ω non è connesso per segmenti paralleli all'asse x, la condizione $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω *non* assicura che si possa scrivere $\psi(x,y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y! Si consideri infatti l'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\,,\quad y \geq 0\}$ e su di esso la funzione $\phi = \phi(x,y)$ definita come segue.

(i) $\phi(x,y) = 0$ se $y < 0$,

(ii) $\phi(x,y) = 0$ se $x > 0$ e $y \geq 0$,

(iii) $\phi(x,y) = h(y)$ se $y \geq 0$ e $x < 0$, dove h è una qualsiasi (ma fissata) funzione $C^1([0,+\infty))$ che vale 0 per $y \in [0,1/3]$ e 1 per $y \in [2/3,+\infty)$.
La funzione ϕ costruita in questo modo è in $C^1(\Omega)$ e soddisfa $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ ovunque su Ω, ma non è possibile scrivere $\phi(x,y) = F(y)$ per qualche funzione F della sola variabile y: se ciò fosse possibile avremmo $1 = \phi(-1,1) = F(1) = \phi(1,1) = 0$.

Lemma 6.2. *La funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ risolve l'equazione (6.2) se e solo se è della forma*

$$\varphi(v,w) = f(x-ct) + g(x+ct)\,, \quad \textit{per ogni } (u,v) \in \mathbb{R}^2, \tag{6.4}$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Per quanto detto prima dell'enunciato del lemma 6.1, definita la funzione in $C^2(\mathbb{R}^2)$ data da $\psi(v,w) := \varphi(t(v,w), x(v,w))$, è sufficiente dimostrare che le soluzioni di (6.3) sono tutte e sole della forma $\psi(v,w) = k(v) + h(w)$ dove $k, h \in C^2(\mathbb{R})$ e quindi definire $f(x-ct) := k((x-ct)/2)$ e $g(x+ct) := h((x+ct)/2)$. Dimostriamo quanto detto. Se $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ soddisfa la (6.3), poniamo $G(u,w) := \frac{\partial \psi}{\partial w}$. Valendo $\frac{\partial G(v,w)}{\partial v} = 0$, per $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ che è sicuramente connesso per segmenti paralleli all'asse v, per il lemma 6.1 concludiamo che $\frac{\partial \psi}{\partial w} = F(w)$ per una certa funzione F. Tale funzione deve essere C^1, e quindi integrabile, dato che $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dato che $\mathbb{R}^2$ è anche connesso per segmenti paralleli all'asse w, possiamo allora scrivere, per v, w_0 fissati:

$$\int_{w_0}^{w} \frac{\partial \psi}{\partial w}(v,w')dw' = \int_{w_0}^{w} F(w')dw'\,.$$

Da cui:

$$\psi(v,w) = \psi(v,w_0) + \int_{w_0}^{w} F(w')dw'\,,$$

che possiamo riscrivere:

$$\psi(v,w) = k(v) + h(w)\,,$$

dove $k(v) := \psi(v,w_0)$ e $h(w) := \int_{w_0}^{w} F(w')dw'$. Le funzioni k e h risultano essere funzioni $C^2(\mathbb{R})$ per costruzione. Viceversa, se $\psi(v,w) = k(v) + h(w)$ per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ con $k, h \in C^2(\mathbb{R})$, allora $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e risolve (6.3), come si verifica immediatamente. $\Box$

Dato che ora abbiamo la classe completa delle soluzioni dell'equazione (6.2), non ci resta che verificare se esistano, in tale classe, delle soluzioni che soddisfino anche le condizioni inziali del problema (6.1). Arriviamo in tal modo al seguente teorema di esistenza ed unicità di D'Alembert.

Teorema 6.1. *Esiste ed è unica la soluzione φ del problema (6.1) per ogni scelta delle condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Tale soluzione si esprime tramite la* **formula di D'Alembert***:*

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\left[\phi_0(x-ct) + \phi_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi)\, d\xi\,. \tag{6.5}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 6.2 che, se esiste, la soluzione deve avere forma $\varphi(t,x) = f(x-ct)+g(x+ct)$, dove $f,g \in C^2(\mathbb{R})$. Vogliamo determinare f e g in funzione delle condizioni iniziali. Per $t=0$ deve allora risultare $\phi_0(x) = f(x)+g(x)$ e quindi $\phi_0'(x) = f'(x)+g'(x)$. Dato che vale anche $\phi_1(x) = -cf'(x)+cg'(x)$, ricaviamo subito: $f'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x)-\phi_1(x))$ e $g'(x) = \frac{1}{2c}(c\phi_0'(x)+\phi_1(x))$. Possiamo integrare queste espressioni ottenendo, se a,b sono costati reali,

$$f(x) = a + \frac{1}{2}\phi_0(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \phi_1(\xi)d\xi\ , \quad g(x) = b + \frac{1}{2}\phi_0(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \phi_1(\xi)d\xi\ .$$

Di conseguenza, se esiste una soluzione al problema è nella classe di funzioni, parametrizzata dalle costanti $A \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t,x) = A + \frac{1}{2}\phi_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \phi_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \phi_1(\xi)d\xi\ .$$

Si osservi ogni funzione di tale classe è C^2 per costruzione e soddisfa necessariamente (6.2) per ogni scelta di $A \in \mathbb{R}$, dato che è proprio della forma richiesta nel lemma 6.2. La prima condizione iniziale è soddisfatta solo se $A=0$, valendo $\varphi(0,x) = A+\phi_0(x)$, e la seconda condizione iniziale è sempre soddisfatta, valendo: $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x) = \phi_1(x)$. In definitiva l'unica soluzione al problema (6.1) è la funzione della classe di sopra con $A=0$. Possiamo riscrivere la soluzione come:

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\phi_0(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} \phi_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\phi_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \phi_1(\xi)d\xi\ ,$$

e quindi:

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\left[\phi_0(x-ct)+\phi_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi_1(\xi)\, d\xi\ .$$

$\square$

Osservazioni 6.2.
(1) La forma generale della soluzione dell'equazione di D'Alembert ha comunque una struttura della forma:

$$\varphi(t,x) = f(x-ct)+g(x+ct)\ .$$

Il primo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da sinistra verso destra traslando senza deformarsi, alla velocità c (infatti, in un intervallo di tempo Δt, il profilo trasla di un intervallo di spazio $\Delta x = c\Delta t$). Questo tipo di onda è detta **onda progressiva**. Il primo addendo a secondo membro rappresenta un profilo d'onda che procede da destra verso sinistra traslando senza deformarsi, alla velocità c. Questo tipo di onda è detta **onda regressiva**. In questo senso la costante c che appare nell'equazione di D'Alembert rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni soluzioni dell'equazione. In dimensione spaziale maggiore di 1, la situazione è analoga, ma si assiste anche ad una deformazione del profilo della perturbazione;

in nogni caso si riesce a provare che la costante c ha ancora lo stesso significato fisico, dopo avere introdotto la nozione di *velocità di fase*, della quale qui non ci occuperemo.
(2) Consideriamo il problema (6.1) e la sua soluzione espressa dalla formula di D'alembert (6.5). Se $(a,b) \subset \mathbb{R}$ è limitato, si definisce in $\mathbb{R}^2$ il **dominio di dipendenza futuro** $D_+(a,b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a,b]$ sull'asse $t=0$ e vertice nel semipiano $t>0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $1/c$ e $-1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_+ = (a+b)/2$ e $t_+ = (b-a)/(2c)$. Si definisce analogamente il **dominio di dipendenza passato** $D_-(a,b)$ come l'insieme chiuso dato dal triangolo di base $[a,b]$ sull'asse $t=0$ e vertice nel semipiano $t<0$ individuato dall'intersezione delle due rette che partono da a e b rispettivamente ed hanno inclinazione $-1/c$ e $1/c$ rispettivamente. Tale vertice ha coordinate $x_- = (a+b)/2$ e $t_- = -(b-a)/(2c)$. Il **dominio di dipendenza** $D(a,b)$ è , per definizione l'unione di $D_+(a,b)$ e $D_-(a,b)$. Si osservi che le rette di inclinazione $\pm 1/c$, che individuano il bordo di $D(a,b)$, sono *rette caratteristiche* per l'equazione di D'Alembert.
Se si considera un punto $(t_0,x_0) \in D_+(a,b)$, la formula di D'alembert per in campo φ valutato in (t_0,x_0), mostra che il valore $\varphi(t_0,x_0)$ dipende solo dal valore di ϕ_0 e ϕ_1 in $[a,b]$. Più precisamente, i valori rilevanti di ϕ_0 e ϕ_1 sono quelli che cadono nel sottointervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] \subset [a,b]$. Tale sottointervallo si ottiene intersecando con l'asse $t=0$ le due rette caratteristiche emanate, verso il passato, da (t_0,x_0). Un discorso analogo si può fare per i punto in $D_-(a,b)$.
La formula di D'Alembert implica quindi che, all'interno di $D(a,b)$, la funzione φ sia completamente determinata dalle due condizioni iniziali ristrette ad $[a,b]$, nel senso che, se alteriamo tali condizioni iniziali *fuori* da $[a,b]$, la soluzione φ non risulta essere alterata dentro $D(a,b)$.
L'esistenza di domini di dipendenza con le proprietà dette è comune alla teoria di tutte le equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico su varietà differenziabili Lorentziane, cioè su spazitempo (generalmente curvi), quando la forma quadratica dell'equazione è data dalla stessa metrica dello spaziotempo. Si tratta di uno dei punti di partenza per sviluppare la *teoria della causalità* in teoria dei campi in ambiente relativistico generale.
(3) La formula di D'Alembert implica che il problema iperbolico (6.1) sia ben posto nel senso di Hadamard. Sappiamo già che la soluzione esiste ed è unica, dobbiamo quindi studiare la dipendenza continua dai dati iniziali. L'ambiente naturale in cui studiare questo problema è un dominio di dipendenza. Consideriamo due set di condizioni iniziali ϕ_0, ϕ_1 e $\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1$, indichiamo con φ e $\widetilde{\varphi}$ le corrispondenti soluzioni dell'equazione di D'Alembert, fissiamo un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e l'associato dominio di dipendenza $D(a,b)$. Dalla formula di D'Alembert segue immediatamente che, se $(t,x) \in D(a,b)$

$$|\varphi(t,x) - \widetilde{\varphi(t,x)}| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a,b]} |\phi_0(\xi) - \widetilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2} \sup_{\xi \in [a,b]} |\phi_0(\xi) - \widetilde{\phi}_0(\xi)| + \frac{1}{2c} \sup_{\xi \in [a,b]} |\phi_1(\xi) - \widetilde{\phi}_1(\xi)| \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi .$$

L'ultimo integrale vale t e quindi è maggiorato da $T_{[a,b]}$ pari all'altezza del triangolo $D_+(a,b)$. In definitva abbiamo trovato che, se $||\cdot||_{\infty\, A}$ indica la norma dell'estremo superiore calcolata restringendo il dominio delle funzioni all'insieme A,

$$||\varphi - \widetilde{\varphi}||_{\infty\, D(a,b)} \leq ||\phi_0 - \widetilde{\phi}_0||_{\infty\, [a,b]} + T_{[a,b]} ||\phi_1 - \widetilde{\phi}_1||_{\infty\, [a,b]} \,. \tag{6.6}$$

Se deriviamo entrambi i membri della formula di D'Alembert nella variabile t otteniamo che

$$\partial_t\varphi(t,x) = \frac{c}{2}\left[-\phi_0'(x-ct)+\phi_0'(x+ct)\right] + \frac{1}{2}(\phi_1(x+ct)+\phi_1(x-ct)) \, .$$

In conseguenza di quanto trovato abbiamo che:

$$\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}\right|\right|_{\infty\, D(a,b)} \leq c||\phi_0' - \widetilde{\phi}_0'||_{\infty\,[a,b]} + ||\phi_1 - \widetilde{\phi}_1||_{\infty\,[a,b]} \, .$$

In modo analogo abbiamo anche che:

$$\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x}\right|\right|_{\infty\, D(a,b)} \leq ||\phi_0' - \widetilde{\phi}_0'||_{\infty\,[a,b]} + \frac{1}{c}||\phi_1 - \widetilde{\phi}_1||_{\infty\,[a,b]} \, .$$

Valgono, e si ottengono con la stessa procedura, delle disuguaglianze per le derivate seconde:

$$\left|\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial x^2}\right|\right|_{\infty\, D(a,b)} \leq ||\phi_0'' - \widetilde{\phi}_0''||_{\infty\,[a,b]} + \frac{1}{c^2}||\phi_1' - \widetilde{\phi}_1'||_{\infty\,[a,b]} \, ,$$

$$\left|\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t^2}\right|\right|_{\infty\, D(a,b)} \leq c^2||\phi_0'' - \widetilde{\phi}_0''||_{\infty\,[a,b]} + c||\phi_1' - \widetilde{\phi}_1'||_{\infty\,[a,b]} \, ,$$

$$\left|\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} - \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial t\partial x}\right|\right|_{\infty\, D(a,b)} \leq c||\phi_0'' - \widetilde{\phi}_0''||_{\infty\,[a,b]} + ||\phi_1' - \widetilde{\phi}_1'||_{\infty\,[a,b]} \, .$$

Queste relazioni mostrano come, prendendo condizioni iniziali vicine fino ad un certo ordine di differenziabilità , si ottengono soluzioni vicine fino all'ordine di differenziabilità considerato. Questo è proprio il senso della dipendenza continua dai dati iniziali proposta da Hadamard. Questa proprietà si generalizza a equazioni differenziali di tipo imperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali.
(4) La formula di D'Alembert definisce una funzione φ su $\mathbb{R}^2$ anche se le due funzioni ϕ_0 e ϕ_1 non sono C^2 in qualche punto isolato di $\mathbb{R}$ attorno al quale ϕ_1 sia comunque integrabile. Perché esista φ definita dal secondo membro della formula di D'Alembert è , a rigore, sufficiente che ϕ_1 sia integrabile. Si vede facilmente che se x_0 è uno dei punti isolati di singolarità di ϕ_0 o ϕ_1, il secondo membro della formula di D'Alembert è una funzione ovunque C^2 che soddisfa l'equazione di D'alembert e le condizioni iniziale, eccetto che sulle rette caratteristiche che escono dal punto $(0, x_0)$ (e sulle rette analoghe che escono dagli altri punti isolati di singolarità). In questo senso *le singolarità delle condizioni iniziali si propagano lungo le curve caratteristiche.* Questo fatto è piuttosto generale e vale per equazioni differanziali di tipo iperbolico in dimensione ed ambienti molto più generali.

L'osservazione (3) di sopra ha un'importante conseguenza precedentemente preannunciata.
Dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pensato come retta a $t = 0$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, definiamo lo **sviluppo causale** di $[a, b]$, indicato con $J(a, b) \subset \mathbb{R}$, come l'insieme dei punti di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che possono essere raggiunti da una

retta di pendenza $\leq -1/c$ oppure $\geq 1/c$ emanata da $[a, b]$.
$J(a, b)$ risulta essere l'unione dei due coni infiniti, uno di vertice con coordinate $x_+ = (a+b)/2$ (cioè il punto medio di (a, b)) e $t_+ = (b-a)/(2c)$, emanato verso il passato, e l'altro di vertice di coordinate $x_- = x_+$ e $t_- = -t_+$ emanato verso il futuro. Si osservi ancora che $\mathbb{R}^2 \setminus J(a, b)$ è l'unione di tutti i domini di dipendenza $D(c, d)$ con $c > b$ oppure $d < a$.

Teorema 6.2. *Se nel problema (6.1) le condizioni iniziali sono scelte a supporto compatto: $\phi_0 \in C^2_0(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1_0(\mathbb{R})$, e $[a, b] \supset supp\phi_0 \cup supp\phi_1$, allora la soluzione φ del problema è nulla fuori da $J(a, b)$. Di conseguenza, per ogni fissato $[\alpha, \beta]$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$:*
(a) *il supporto della soluzione φ ristretta a $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ è compatto;*
(b) *per ogni fissato $t \in [\alpha, \beta]$, il supporto di $\mathbb{R} \ni \mathbf{x} \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$ è compatto in $\mathbb{R}$.* □

Dimostrazione. Dalla (6.6), scegliendo $\widetilde{\varphi}$ come la funzione ovunque nulla (che quindi risolve il problema con dati iniziali ovunque nulli), troviamo:

$$||\varphi||_{\infty\, D(a',b')} \leq ||\phi_0||_{\infty\, [a',b']} + T_{[a',b']}||\phi_1||_{\infty\, [a',b']}\, .$$

Fissiamo ora un qualsiasi punto (t_0, x_0) fuori da $J(a, b)$ con $t_0 \geq 0$. Per definizione di $J(a, b)$, se $a' = x_0 - ct_0$ e $b' = x_0 + ct_0$, allora $[a', b']$ non interseca mai $[a, b]$. Dato che $[a, b]$ contiene i supporti di ϕ_0 e ϕ_1, tali funzioni sono nulle in $[a', b']$. Concludiamo che

$$0 \leq ||\varphi||_{\infty\, D(a',b')} \leq ||\phi_0||_{\infty\, [a',b']} + T_{[a',b']}||\phi_1||_{\infty\, [a',b']} = 0 + 0 = 0$$

e quindi, in particolare, dato che $(t_0, x_0) \in D(a', b')$, $\varphi(t_0, x_0) = 0$. Fissiamo infine il compatto $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ con $[\alpha, \beta] \ni 0$. Tenendo conto della forma di $J(a, b)$ che è dato dall'unione di due coni come precisato sopra, segue subito che il supporto di φ ristretta alla regione chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, è contenuto nell'unione dei due trapezi chiusi di base minore in comune data da $[a, b]$ e basi maggiori individuate dalla porzione delle rette $t = \alpha$ e $t = \beta$ che cadono in $J(a, b)$. Tale insieme è evidentemente limitato, pertanto il supporto di φ ristretta alla regione chiusa tra le due rette $t = \alpha$ e $t = \beta$, che è un insieme chiuso per definizione, è anch'esso compatto. Il supporto di $\mathbb{R} \ni \mathbf{x} \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$, con $t \in [\alpha, \beta]$, è un chiuso sottoinsieme di un compatto ed è pertanto anch'esso compatto. □

Osservazioni 6.3. Come già osservato precedentemente, ma ora possiamo essere più chiari, le due proprietà (a) e (b) sono valide anche in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ per le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e d'Alembert quando i dati iniziali hanno supporto compatto (e tale fatto vale in maniera molto generale per soluzioni di equazioni iperboliche su uno spaziotempo curvo con la proprietà della "globale iperbolicità"). Nel caso generale però, la dimostrazione di (a) e (b) è molto più complicata.

6.1.2 Equazione di D'Alembert con sorgente.

Consideriamo ora il problema con sorgente, data dalla funzione f:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=f(t,x)\,, \quad \varphi\in C^2(\mathbb{R}^2)\,, \\ \varphi(0,x)=\phi_0(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x)=\phi_1(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{6.7}$$

dove $\phi_0\in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1\in C^1(\mathbb{R})$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate.

Abbiamo un primo risultato, abbastanza semplice, che riguarda l'unicità della soluzione.

Teorema 6.3. *Se esiste una soluzione al problema (6.7) con fissati dati $\phi_0\in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1\in C^1(\mathbb{R})$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$, allora è unica.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Se φ_1 e φ_2 risolvono il problema (6.7) con gli stessi dati $\phi_0\in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1\in C^1(\mathbb{R})$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$ allora $\varphi:=\varphi_1-\varphi_2$ risolve il problema (6.1) con condizioni iniziali nulle. In base al teorema 6.1 deve essere $\varphi(t,x)=0$ ovunque, dato che la soluzione ovunque nulla risolve il problema posto ed è l'unica a farlo. Pertanto $\varphi_1(t,x)=\varphi_2(t,x)$ per ogni $(t,x)\in\mathbb{R}^2$. $\Box$

Passiamo a dimostrare un teorema di esistenza nel caso in cui $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Possiamo decomporre la funzione φ in due parti $\varphi=\phi+\Phi$, in cui ϕ soddisfa il problema omogeneo

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0\,, \quad \varphi\in C^2(\mathbb{R}^2)\,, \\ \varphi(0,x)=\phi_0(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(0,x)=\phi_1(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{6.8}$$

mentre Φ soddisfa il problema con sorgente, ma con dati iniziali nulli

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=f(t,x)\,, \quad \varphi\in C^2(\mathbb{R}^2)\,, \\ \Phi(0,x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

Dovrebbe essere ovvio che $\varphi=\phi+\Phi$ soddisfa (6.7) se le due funzioni hanno le proprietà richieste. La funzione ϕ esiste sicuramente in base al teorema 6.1. Mostriamo ora che esiste anche una funzione Φ che risolve (6.9). Consideriamo infatti:

$$\Phi(t,x):=-\frac{c}{2}\int_0^t dt\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi\, f(\tau,\xi)\,. \tag{6.10}$$

Si osservi che l'integrale può essere riscritto (anche se $t \leq 0$) come l'integrale doppio di Riemann (o Lebesgue)

$$\Phi(t,x) := -\frac{c}{2}\int_{A(t,x)} f(\tau,\xi)\, d\tau d\xi \;,$$

dove il dominio d'integrazione $A(t,x)$ nel piano (τ,ξ) è un compatto essendo dato dal triangolo di base $[x-ct, x+ct]$ sull'asse $\tau = 0$ e vertice (x,t), e quindi la funzione continua f è dunque integrabile su tale dominio. Si noti che quindi $A(t,x) = D_+(x-ct, x+ct)$ se $t \geq 0$, oppure $A(t,x) = D_-(x-ct, x+ct)$ se $t \leq 0$.
Vale, applicando i soliti teoremi di passaggio della derivata sotto il segno di integrale ove necessario,

$$-\partial_t\left(-\frac{c}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau,\xi)\right) = \frac{c}{2}\int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} d\xi f(\tau,\xi) + \frac{c}{2}\int_0^t dt\partial_t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau,\xi)\;,$$

e quindi

$$-\partial_t\Phi(t,x) = 0 + \frac{c^2}{2}\int_0^t d\tau\,[f(\tau, x+c(t-\tau)) + f(\tau, x-c(t-\tau))]\;. \tag{6.11}$$

Passando alla derivata seconda, ed usando esplicitamente il fatto che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$-\frac{2}{c^2}\partial_t^2\Phi(t,x) = \partial_t \int_0^t d\tau\,[f(\tau, x+c(t-\tau)) + f(\tau, x-c(t-\tau))]$$

$$= [f(t, x+c(t-t)) + f(t, x-c(t-t))] + c\int_0^t d\tau\,[\partial_x f(\tau, x+c(t-\tau)) - \partial_x f(\tau, x-c(t-\tau))]\;.$$

Abbiamo ottenuto:

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Phi(t,x) = f(t,x) + \frac{c}{2}\int_0^t d\tau\,[\partial_x f(\tau, x+c(t-\tau)) - \partial_x f(\tau, x-c(t-\tau))]\;. \tag{6.12}$$

Similmente:

$$\partial_x\Phi(t,x) = -\partial_x\frac{c}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau,\xi) = -\frac{c}{2}\int_0^t d\tau\,[f(\tau, x+c(t-\tau)) - f(\tau, x-c(t-\tau))]\,,$$

e quindi:

$$\partial_x^2\Phi(t,x) = -\frac{c}{2}\int_0^t d\tau\,[\partial_x f(\tau, x+c(t-\tau)) - \partial_x f(\tau, x-c(t-\tau))]\;. \tag{6.13}$$

Sommando membro a membro (6.12) e (6.13) otteniamo:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = f\;.$$

Da (6.10) e (6.11) abbiamo immediatamente che Φ soddisfa anche le condizioni iniziali nulle del problema (6.9) come volevamo. Si osservi che la funzione Φ risulta essere $C^2(\mathbb{R}^2)$, le derivate seconde in x e t sono state calcolate sopra e si prova facilmente che sono continue, le derivate miste si calcolano analogamente e forniscono:

$$\partial_x\partial_t\Phi(t,x) = \partial_t\partial_x\Phi(t,x) = -\frac{c^2}{2}\int_0^t d\tau\,[\partial_x f(\tau, x + c(t-\tau)) + \partial_x f(\tau, x - c(t-\tau))]\ ,$$

che è una funzione continua se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Abbiamo provato il seguente teorema.

Teorema 6.4. *Si consideri il problema (6.7) dove $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $\phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sono funzioni assegnate. Esiste ed è unica la soluzione φ di tale problema e si esprime come:*

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\,[\phi_0(x-ct) + \phi_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi_1(\xi)\,d\xi - \frac{c}{2}\int_0^t dt\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau,\xi)\ .$$

$\Box$

Osservazioni 6.4. La formula (6.10), come già osservato può essere scritta come

$$\Phi(t,x) := -\frac{c}{2}\int_{A(t,x)} f(\tau,\xi)\,d\tau d\xi\ ,$$

dove $A(t,x)$ è un dominio compatto dato da $D_+(x-ct, x+ct)$ se $t \geq 0$, oppure $D_-(x-ct, x+ct)$ se $t \leq 0$. Possiamo riscrivere la formula che determina Φ come

$$\Phi(t,x) := \int_{\mathbb{R}^2} G(t,x|\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\tau d\xi\ ,$$

dove $G(t,x|\tau,\xi)$ non è altro che la funzione caratteristica, nel piano (τ,ξ), di $D_+(x-ct, x+ct)$ se $t \geq 0$, oppure $D_-(x-ct, x+ct)$ se $t \leq 0$, moltiplicata per il fattore $-(c/2)sign(t)$. Tale funzione (in realtà è più propriamente pensabile come una funzione generalizzata o distribuzione) si chiama **funzione di Green** (con condizioni di annullamento sulla superficie $t = 0$) dell'operatore di D'Alembert su $\mathbb{R}^2$:

$$\Box := -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \partial_x^2\ .$$

Le funzioni di Green per le equazioni iperboliche possono essere definite (con vari dati iniziali) anche in dimensione maggiore ed in ambienti più generali. Esse giocano un ruolo importante negli sviluppi della teoria specie nelle teorie relativistiche (come dimostrato da Riesz, Hadamard e Leray, Hörmander).

6.2 Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier.

Consideriamo ora il problema di dover risolvere l'equazione di D'Alembert senza sorgente per la funzione $\varphi = \varphi(t,x)$ quando il dominio spaziale è un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ e $t \in (\alpha,\beta) \ni 0$, nella situazione in cui, oltre a condizioni iniziali a $t = 0$, sono imposte *condizioni al contorno di periodicità*:

$$\varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, L/2), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, -L/2) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, L/2) \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \tag{6.14}$$

La terza condizione segue dalla prima e dall'equazione differenziale stessa. Dato che l'equazione è:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} ,$$

possiamo tentare di risolverla, con la procedura detta di *separazione delle variabili*, assumendo una forma particolare delle soluzioni del tipo

$$\varphi(t, x) = f(t)g(x) .$$

Inserendo nell'equazione di sopra si arriva subito all'identità , che vale quando le funzioni f e g non si annullano,

$$\frac{1}{c^2 f(t)}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} .$$

Dato che i due membri dell'identità ottenuta sono funzione di due variabili diverse, i due membri devono essere funzioni costanti separatamente. Otteniamo in tal modo le due equazioni, per qualche costante $E \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = c^2 E f(t) , \quad \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = E g(x) .$$

La seconda equazione fornisce la classe di soluzioni

$$g_E(x) := C_+(E)e^{\sqrt{E}x} + C_-(E)e^{-\sqrt{E}x} . \tag{6.15}$$

Tuttavia dobbiamo ancora imporre la condizione di periodicità su $\varphi(t, x) = f(t)g(x)$ che, nel caso in esame è equivalente alla richiesta che la funzione g_E soddisfi

$$g_E(-L/2) = g_E(L/2) .$$

Se $E > 0$ in (6.15), la condizione scritta sopra non è mai soddisfatta. Nel caso in cui $E \leq 0$, gli esponenti diventano complessi:

$$\pm i\sqrt{-E}x , \quad x \in [-L/2, L/2] ,$$

e pertanto le funzioni g_E sono periodiche. Affinché risultino essere periodiche sul segmento di lunghezza L (non importa quali siano i suoi estremi, ciò vale per $[-L/2, L/2]$ come per $[0, L]$ o altro), è necessario e sufficiente che $\sqrt{-E}L/(2\pi)$ sia un numero naturale. Quindi deve essere $E = -(2\pi n/L)^2$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. In questo modo si trova subito che, etichettando le funzioni g_E con l'indice $n \in \mathbb{N}$ invece che E, esse possono solo essere del tipo:

$$g_0(x) := C_0 , \quad g_n(x) := C_+(n)e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + C_-(n)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} .$$

Per tenere conto dei due segni degli esponenti è conveniente usare un unico esponenziale e fare variare n in $\mathbb{Z}$ invece che in $\mathbb{N}$. Abbiamo allora che le funzioni g_n ammissibili, hanno tutte la forma:

$$g_0(x) := C_0 \;, \quad g_n(x) := C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \;, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \;. \tag{6.16}$$

L'equazione per la funzione f_E, che ora indicheremo con f_n, è ora:

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} = -c^2 \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 f_n(t) \;,$$

che ha come risultato la classe di soluzioni:

$$f_0(t) := D_0' t + D_0 \;, \quad f_n(t) := D_n e^{i\frac{2\pi n}{L}ct} \;, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \;. \tag{6.17}$$

Ognuna delle funzioni, con $A_0, A_0', A_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_0(t) = A_0 t + A_0 \;, \quad \varphi_n(t,x)_\pm := A_n^{(\pm)} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} e^{\pm i\frac{2\pi n}{L}ct} \;, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \;, \tag{6.18}$$

è una possibile soluzione del'equazione di D'alembert in $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al contorno periodiche sul segmento $[-L/2, L/2]$. Anche se queste soluzioni sono complesse, possiamo sempre ridurci al caso reale prendendo delle combinazioni lineari di esse con coefficienti opportuni, ricordando che $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ e $-i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2\sin\theta$. Dato che stiamo lavorando con un'equazione differenziale lineare omogenea, combinazioni lineari di soluzioni saranno ancora soluzioni. Quest'ultima osservazione potrebbe essere utile anche per cercare di soddisfare le condizioni iniziali, cioè la forma che φ e la sua derivata temporale devono assumere all'istante $t = 0$. Tuttavia, è intuitivo pensare che se le condizioni iniziali sono assegnate in termini di funzioni arbitrarie, non sarà possibile trovare una combinazione linare *finita* di soluzioni della forma (6.18) che soddisfi anche tali condizioni iniziali. Si può pensare che ciò sia invece possibile considerando anche combinazioni linari *infinite*. Questa idea è quella che ha condotto Fourier ad inventare la teoria della serie omonima (lavorando però con un'equazione differente – ma con analoghe caratteristiche per quanto riguarda l'applicazione della teoria della serie di Fourier – l'equazione del calore). L'idea fondamentale è quella di sviluppare le funzioni periodiche f definite su un intervallo $[-L/2, L/2] \subset \mathbb{R}$ (ma l'approccio si generalizza su varietà toroidali compatte k-dimensionali) con una serie di funzioni i cui termini siano funzioni esponenziali $e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$ con opportuni coefficienti complessi e con $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \;.$$

Nel caso della nostra funzione φ soluzione periodica dell'equazione di D'Alembert, ci si aspetta che essa abbia una forma, che assicura automaticamente la periodicità in x di φ:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \;.$$

La dipendenza temporale di φ (e quindi il fatto che φ soddisfi l'equazione di D'Alembert) si scarica tutta nei coefficienti complessi $C_n(t)$. Ci aspettiamo, da quanto visto sopra, che la forma di tali coefficienti sia proprio una combinazione lineare finita di funzioni di t del tipo di quelle in (6.17). Le infinite costanti arbitrare che appaiono in tutte queste combinazioni lineari dovranno anche essere fissate in modo tale da soddisfare le condizioni iniziali. Dopo aver enunciato alcuni risultati ben noti della teroria torneremo all'equazione di D'Alembert e di Klein-Gordon per vedere come si conclude il discorso cominciato sopra. proptrick

6.3 Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier.

Richiamiamo qui alcuni semplici risultati della teoria della serie di Fourier. Tutti questi argomenti saranno approfonditi in corsi avanzati di analisi.
Supponiamo che una funzione $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ si possa sviluppare in serie di Fourier, per il momento lavorando del tutto formalmente senza farci domande sul tipo di convergenza:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \,. \tag{6.19}$$

Abbiamo introdotto il fattore $1/\sqrt{L}$ per pura convenienza. Vogliamo determinare la forma dei coefficinti $f_n \in \mathbb{C}$. Moltiplicando membro a membro per $\frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}}$ abbiamo:

$$f(x)\frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} \,. \tag{6.20}$$

Tenendo infine conto delle relazioni

$$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\frac{2\pi(n-m)}{L}x} dx = \delta_{nm} \,,$$

ed integrando i due membri di (6.20), ammettendo di poter scambiare il simbolo di integrale con quello di somma in (6.20) (questo è sicuramente possibile f è una combinazione lineare finita di esponenziali oppure se la serie converge uniformemente), giungiamo alla conclusione che:

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \frac{e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta_{nm} = f_m \,.$$

Cambiando nome all'indice:

$$f_n = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} f(x) dx \,. \tag{6.21}$$

I numeri complessi f_n, con $n \in \mathbb{Z}$, individuati da (6.21) quando esistono, sono detti **coefficienti di Fourier della funzione** f. Ora che abbiamo un candidato per i coefficienti di Fourier f_n, ci si può chiedere in quale senso la serie (6.19) converga.

6.3.1 La serie di Fourier nello spazio di Hilbert $L^2([-L/2, L/2], dx)$.

La teoria della serie di Fourier, a livello più astratto, viene sviluppata nell'insieme di funzioni $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ misurabili che siano **a quadrato sommabile**, cioè soddisfino:

$$\int_{[-L/2,L/2]} |f(x)|^2 dx < +\infty \,, \tag{6.22}$$

rispetto alla misura dx di Lebesgue. L'insieme di funzioni determinato in tal modo si indica con $\mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$. $\mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ risulta essere uno spazio vettoriale complesso dotato della forma quadratica hermitiana:

$$(f|g) := \int_{[-L/2,L/2]} \overline{g(x)} f(x)\, dx \,, \quad \text{se } f, g \in \mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx).$$

Questo non è un prodotto scalare hermitiano unicamente per il fatto che $(f|f) = 0$ implica che $f(x) = 0$ quasi ovunque, ma non necessariamente ovunque. Si rimedia al problema identificando funzioni che differiscono tra di loro solo quando valutate su un (arbitrario) insieme di misura nulla in $[-L/2, L/2]$, e lavorando con classi (di equivalenza) di funzioni piuttosto che con funzioni. Lo spazio vettoriale con prodotto scalare hermitiano che si ottiene da $\mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ quozientando rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due funzioni se differiscono su un (qualsiasi) insieme di misura nulla, si indica con $L^2([-L/2, L/2], dx)$. Tale spazio vettoriale complesso risulta anche essere *completo* [3] nella topologia normata indotta dalla norma associata al prodotto scalare suddetto (dove ora, più propriamente f indica una classe di equivalenza di funzioni):

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{[-L/2,L/2]} |f(x)|^2 dx} \,.$$

La competezza rende, per definizione, lo spazio vettoriale complesso $L^2([-L/2, L/2], dx)$ dotato del prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$ uno **spazio di Hilbert** complesso.
Si osservi che la definizione di $\mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $L^2([-L/2, L/2], dx)$ le loro proprietà generali sono indipendenti dalla teoria della serie di Fourier. In riferimento alla serie di Fourier, risulta [3] che vale il seguente teorema fondamentale.

Teorema 6.5. *In riferimento alla definizione (6.21) dei coefficienti di Fourier di una funzione a valori complessi* $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ *valgono i fatti seguenti.*
(a) $f \in \mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ *se e solo se:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 < +\infty \,, \tag{6.23}$$

ed in tal caso vale:

$$\int_{[-L/2,L/2]} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 \,. \tag{6.24}$$

(b) *$f \in \mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ se e solo se:*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{[-L/2,L/2]} \left| f(x) - \sum_{|n|\leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|^2 dx \to 0\,. \tag{6.25}$$

(c) *Se $f, g \in \mathscr{L}^2([-L/2, L/2], dx)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sono i rispettivi coefficienti di Fourier, allora:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g}_n f_n = \int_{[-L/2,L/2]} \overline{g(x)} f(x)\, dx \tag{6.26}$$

dove la serie a primo membro converge assolutamente. $\diamondsuit$

Osservazioni 6.5.
(1) Dato che le serie numeriche considerate sopra siono assolutamente convergenti, non importa l'ordine con cui si esegue la somma della serie. Per esempio, in riferimento alla serie (6.26), è sufficiente numerare $\mathbb{Z}$ con un'arbitraria funzione biettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e sommare la serie su $m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \overline{g}_{h(n)} f_{h(n)}\,,$$

che si ottiene in tal modo. Il valore comune delle somme di tali serie che si ottengono comunque fissiamo la funzione biettiva h è , per definzione, il numero

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g}_n f_n\,.$$

(2) A meno di non interpretare la serie di Fourier come serie di distribuzioni, il senso più generale con il quale si intende la convergenza della serie (6.19) è quello in (6.25). Questo tipo di convergenza, detta *convergenza (della serie) in* $L^2([-L/2, L/2], dx)$, è quello nella topologia normata indotta dalla norma $||\cdot||_2$ sopra definita. Si osservi che, come spiegato sopra, in questo caso la funzione f deve pensarsi come una classe di equivalenza di funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla. La (6.25) si può dunque trascrivere come, se definiamo $e_n(x) := \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$ quasi ovunque $x \in [-L/2, L/2]$:

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\left| f - \sum_{|n|\leq N} f_n e_n \right|\right|_2 = 0\,,$$

che si trova scritta frequentemente come, semplicemente:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e_n\,. \tag{6.27}$$

È importante notare che, in generale, la convergenza in L^2 *non implica la convergenza puntuale della serie.* Per questo motivo non abbiamo scritto l'argomento di f ed e_n in (6.27), le quali

funzioni, tra l'altro, sono individuate a meno di insiemi di misura nulla.
Tenuto conto della (6.27), la (6.26) si interpreta come una versione infinita dell'ordinario prodotto scalare di $\mathbb{C}^n$, se $f, g \in L^2([-L/2, L/2], dx)$:

$$(f|g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g}_n f_n \ ,$$

dove gli infiniti elementi di base ortonormale dello spazio vettoriale $L^2([-L/2, L/2], dx)$ sono dati dagli infiniti elementi e_n. In particolare si ha, se $f \in L^2([-L/2, L/2], dx)$:

$$||f||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 \ .$$

6.3.2 Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie.

Dato che vogliamo sviluppare in serie di Fourier le soluzione dell'equazione di D'Alembert e Klein-Gordon, siamo più che altro interssati alla convergenza *puntuale* della serie di Fourier ed alla possibilità di *derivare sotto il segno di serie.* Mostriamo come si possano ottenere serie di Fourier con queste proprietà rafforzando le ipotesi di regolarità delle funzioni sviluppate in serie di Fourier. Ricordiamo che una funzione definita su $[a, b]$ si dice C^k **a tratti** su $[a, b]$ se si può decomporre $[a, b]$ come $[c_0, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup \cdots \cup [c_m, b]$ con un numero finito di punti $a := c_0 < c_1 < \cdots < c_{m+1} =: b$, in modo tale che $f \restriction_{[c_l, c_{l+1}]} \in C^k([c_l, c_{l+1}])$ per $l = 0, \ldots, m$ (quindi, in particolare, esistono le derivate sinistre e destre fino all'ordine k anche sui bordi di $[c_l, c_{l+1}]$). Si osservi che la derivata k-esima di f (pensata come derivata destra o sinistra agli estremi di ogni sottointervallo $[c_k, c_{k+1}]$) può non essere continua su $[a, b]$ ma i valori che essa assume formano un insieme limitato.
Il primo risultato è stabilito nella seguente proposizione.

Proposizione 6.1. *Sia $N = 0, 1, \ldots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*
(i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,
(ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,
(iii) f sia periodica con tutte le sue derivate fino alla derivata N-esima inclusa.
Se f_n sono i coefficienti di Fourier di f dati da (6.21) e $f_n^{(k)}$ indica l'analogo coefficiente di Fourier della funzione $\frac{d^k f}{dx^k}$, allora vale qunato segue.
(a) *Per $k = 0, 1, \ldots, N + 1$, vale:*

$$f_n^{(k)} = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{6.28}$$

(b) *La serie di Fourier di f e delle sue derivate fino all'ordine $k = N + 1$ può essere derivata sotto il simbolo di serie (interpretando la convergenza delle serie nel senso di L^2), dato che* *risulta, per* $k = 0, 1, \ldots, N+1$*:*

$$f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \frac{d^k}{dx^k}\left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\right) .$$

(c) *Per* $k = 0, 1, \ldots, N$ *vale:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |f_n| < +\infty . \tag{6.29}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. (a) Fissiamo $k = 1, \ldots, N+1$. Dalla (6.21) abbiamo che:

$$f_n^{(k)} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\right) dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Il primo integrale a secondo membro risulta essere nullo dato che

$$[-L/2, L/2] \ni x \mapsto \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$$

è una funzione periodica su $[-L/2, L/2]$ per ipotesi. Abbiamo trovato che:

$$f_n^{(k)} = -\int_{-L/2}^{L/2} \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Possiamo iterare $k-1$ volte la procedura, con lo stesso risultato, fino ad ottenere, alla fine

$$f_n^{(k)} = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{d^k}{dx^k} \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = (-1)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \left(-i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx .$$

Abbiamo quindi trovato che

$$f_n^{(k)} = \left(i\frac{2\pi n}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi n i}{L}\right)^k \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} dx = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_k ,$$

che è la (6.28).
(b) Il calcolo diretto mostra che

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\right) = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^k n^k f_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} .$$

Da (a) abbiamo allora che, come enunciato nella tesi:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\right) = f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} .$$

Questo risultato implica che si possa derivare sotto il segno di serie, interpretando però la convergenza nel senso di L^2, dato che lo sviluppo di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ si scrive:

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \sum_n f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = \sum_n \frac{d^k}{dx^k}\left(f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\right) .$$

(c) Da (6.28) abbiamo anche che, se $k = 1\ldots, N+1$,

$$2\left|n^{k-1}f_n\right| = 2\left|n^k f_n\right|\frac{1}{n} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k 2\frac{\left|f_n^{(k)}\right|}{n} \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^k \left(\left|f_n^{(k)}\right|^2 + \frac{1}{n^2}\right) ,$$

dove abbiamo banalmente usato la disuguaglianza

$$0 \leq \left(\left|f_n^{(k)}\right| - \frac{1}{n}\right)^2 = \left|f_n^{(k)}\right|^2 + \frac{1}{n^2} - 2\frac{\left|f_n^{(k)}\right|}{n} .$$

Concludiamo che, se $k-1 = 1, 2, \ldots N$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|n^{k-1}f_n\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^k \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|f_n^{(k)}\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2}\right) < +\infty ,$$

ossia cambiando il nome di $k-1$ in k ed assumendo ora $k = 1, 2, \ldots N$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|n^k f_n\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{k+1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|f_n^{(k+1)}\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2}\right) < +\infty .$$

A commento del $< +\infty$, si osservi che la seconda serie a secondo membro converege come ben noto, mentre la prima serie a secondo membro converge per (a) del teorema (6.5), dato che ogni funzione $\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}$, per $k = 0, \ldots, N$ è limitata in valore assoluto da qualche numero $M < +\infty$ per ipotesi e quindi è in $L^2([-L/2, L/2], dx)$, avendo $[-L/2, L/2]$ misura finita:

$$\int_{[-L/2,L/2]}\left|\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}\right|^2 dx \leq \int_{[-L/2,L/2]} M^2 dx = M^2 L < +\infty .$$

□

Abbiamo poi il seguente utile risultato che discende dalla precedente proposizione.

Proposizione 6.2. *Sia $N = 0, 1, \ldots$ fissato e $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*
(i) $f \in C^N([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$,
(ii) f sia C^{N+1} a tratti su $[-L/2, L/2]$,

(iii) f sia periodica con tutte le sue derivate fino alla derivata N-esima inclusa.
Allora gli sviluppi di Fourier, per $k = 0, 1, \ldots, N$:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{(k)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$$

convergono puntualmente, assolutamente ed uniformemente su $[-L/2, L/2]$ (dove $f_n^{(k)}$ è l'n-esimo coefficiente di Fourier di $\frac{d^k f}{dx^k}$ (con $f_k^{(0)} := f_k$)). $\diamondsuit$

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte, prendendo $k = 0$ in (6.29), abbiamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < +\infty\,,$$

pertanto la serie di funzioni per $x \in [-L/2, L/2]$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}$$

è termine a termine dominata dalla serie di costanti convergente

$$\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < +\infty\,,$$

dove abbiamo usato il fatto che $|e^{i\frac{2\pi n}{L}x}| = 1$. Come conseguenza di un ben noto teorema di Weierstrass, esisterà una funzione $g : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ con

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\,,$$

in cui la convergenza della serie è assoluta ed uniforme. Di conseguenza la convergenza vale anche nel senso di L^2, dato che:

$$\left|\left| g - \sum_{|n|\leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|\right|_2^2 \leq \int_{-L/2}^{L/2} \left| g - \sum_{|n|\leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|^2 dx$$

ed il secondo membro è superiormente limitato da:

$$\sup_{x\in[-L/2,L/2]} \left| g - \sum_{|n|\leq N} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \right|^2 \int_{-L/2}^{L/2} dx \to 0 \quad \text{se } N \to +\infty$$

a causa della convergenza uniforme della serie. Dato che la serie converge anche a f nel senso di L^2, deve essere

$$\sqrt{\int_{[-L/2,L/2]} |f(x)-g(x)|^2\, dx} = ||f-g||_2 = \left|\left| f - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot}}{\sqrt{L}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot}}{\sqrt{L}} - g \right|\right|_2 .$$

e quindi

$$\sqrt{\int_{[-L/2,L/2]} |f(x)-g(x)|^2\, dx} \leq \left|\left| f \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot}}{\sqrt{L}} \right|\right|_2 + \left|\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}\cdot}}{\sqrt{L}} - g \right|\right|_2 = 0\,.$$

Concludiamo che $f(x) = g(x)$ quasi ovunqunque. Data la continuità di f e g, dovrà essere $f(x) = g(x)$ ovunque su $[-L/2, L/2]$. Abbiamo ottenuto che, nel senso della convergenza uniforme, vale su $[-L/2, L/2]$:

$$f(x) = (g(x) =) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\,.$$

Se $N \geq 1$, possiamo fare lo stesso ragionamento anche per la serie:

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{(1)} \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}}\,,$$

tenendo conto che, essendo per (6.28),

$$f_n^{(1)} = \frac{2\pi i}{L} n f_n\,,$$

deve valere:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n^{(1)}| = \frac{2\pi}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n f_n| < +\infty\,,$$

dove abbiamo applicato (6.29) ristretta al caso $k = 1$. In questo modo, seguendo la stessa strada seguita per la serie della funzione f, si prova che la serie di Fourier di $\frac{df}{dx}$ converge assolutamente ed uniformemente a $\frac{df}{dx}$. Si procede nello stesso modo, usando (6.28) e (6.29) per ogni ordine di derivazione k fino a $k = N$ (e non oltre dato che non è assicurato che valga (6.29) per $k = N+1$). $\square$

Osservazioni 6.6. In realtà si può provare che la serie di Fourier converge puntualmente sotto ipotesi molto più deboli di quelle che abbiamo usato sopra (anche se questo non garantisce la convergenza uniforme). Si ha a tal proposito il seguente classico teorema di Dirichlet che citiamo senza dimostrazione.

Teorema 6.6. **(Teorema di Dirichlet)** *Sia $f : [-L/2, L/2] \to \mathbb{C}$ una funzione con i seguenti requisiti:*

(i) sia limitata,
(ii) sia continua eccetto un numero finito di punti $x_k \in (-L/2, L/2)$, $k = 1, \ldots, p$ in cui esistono finiti il limite destro $f(x_k^+)$ ed il limite sinistro $f(x_k^-)$,
(iii) ammetta in ogni punto derivata destra e sinistra, usando nei punti di discontinuità il limite destro e sinistro per il calcolo del rapporto incrementale da destra e da sinistra.
Sotto queste ipotesi la serie di Fourier di f (6.19), con coefficienti di Fourier dati da (6.21), soddisfa,
(a) *per ogni $x \in (L/2, L/2) \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} = f(x) \,, \tag{6.30}$$

(b) *per ogni $k = 1, \ldots, p$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x_k}}{\sqrt{L}} = \frac{f(x_k^-) + f(x_k^+)}{2} \,, \tag{6.31}$$

(c) *per $x = \pm L/2$ la serie converge a $\frac{f(-L/2)+f(L/2)}{2}$.* $\diamondsuit$

6.4 Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo periodiche.

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di periodicità ai bordi del compatto $[-L/2, L/2]$. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente in particolare la proposizione 6.1 ed il la proposizione 6.2.

6.4.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità.

Teorema 6.7. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu^2\varphi = 0 \,, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C}) \,, \\ \varphi(t, -L/2) = \varphi(t, L/2) \,, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -L/2) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t, L/2) \quad \forall t \in \mathbb{R} \,, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2] \,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2] \,, \end{cases} \tag{6.32}$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di periodicità[1]*:*

$$\phi_0(-L/2) = \phi_0(L/2)\,, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}(L/2)\,, \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(L/2) \tag{6.33}$$

e

$$\phi_1(-L/2) = \phi_1(-L/2)\,, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(-L/2) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(L/2)\,. \tag{6.34}$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ è a valori reali. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t,x) = Re\varphi(t,x) + iIm\varphi(t,x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $Re\varphi$ e quella immaginaria $Im\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ, soddisfano la stessa equazione di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di periodicità e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [-L/2, L/2]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right) \cdot \mathbf{n}\, dS(x) = 0$$

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata:

$$\int_0^T dt \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{L/2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{-L/2} \right) = 0\,,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di periodicità imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ.
Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. $\Box$

[1] La terza delle condizioni in (6.33) deve essere imposta a causa delle condizioni di periodicità per φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

6.4.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ad un teorema di esistenza per il problema (6.32) con i vincoli (6.33) e (6.34). In realtà dovremo rinforzare le condizioni di regolarità sui dati iniziali per poter usare i risultati presentati prima relativi alla serie di Fourier. In riferimento al problema (6.32) con i vincoli (6.33) e (6.34), supponiamo che una soluzione φ esista e che sia sviluppabile in serie di Fourier per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$. In tal caso avremo uno sviluppo del tipo:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(t) \frac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}{\sqrt{L}} \,. \tag{6.35}$$

Vogliamo trovare la forma delle funzioni del tempo C_n e poi le vogliamo fissare in modo tale da rispettare i dati iniziali. Si osservi che, ammesso che la serie converga puntualmente, le condizioni di periodicità in $\pm L/2$ sono già automaticamente rispettate, data la periodicità di ogni funzione: $x \mapsto e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$. Assumendo che si possa derivare fino al secondo ordine sotto il segno di somma, risulta subito che:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu^2\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi}{L}x}}{\sqrt{L}} \left\{ -\frac{1}{c^2}\frac{d^2C_n}{dt^2} - \left[\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2\right] C_n \right\} = 0 \,.$$

Consideriamo allora il set infinito di equazioni:

$$\frac{d^2C_n}{dt^2} = -c^2 \left[\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2\right] C_n \,, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \,. \tag{6.36}$$

Se i C_n le soddisfano, se il secondo membro di (6.35) converge puntualmente e se si possono passare sotto il segno di integrale le derivate di φ fino al secondo ordine dando luogo a funzioni continue (è richiesto che $\varphi \in C^2(\mathbb{R}\times[-L/2, L/2], \mathbb{C})$), allora il secondo membro di (6.35) definisce una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon con le richieste condizioni di periodicità. (Queste ultime valgono in quanto le funzioni $e^{i2\pi nx/L}$ sono evidentemente periodiche con tutte le loro derivate di ogni ordine, pertanto, somme di tali funzioni saranno ancora periodiche. Nel caso di somme infinite, cioè serie, la perodicità varrà se le serie convergono puntualmente. Nel caso in esame, se la serie a secondo membro di (6.35) converge puntualmente e convergono le serie fino alle delle derivate prime in x (e si può scambiare l'operatore di derivata con il simbolo di serie), allora simao sicuri che, fino alla derivate prime in x è soddisfatto il vincolo di periodocità ai bordi di $[-L/2, L/2]$ per la soluzione.)
In generale il candidato per la soluzione φ data dalla serie a secondo membro di (6.35) sarà a valori complessi. Tuttavia se le condizioni iniziali sono rappresentate da funzioni reali e se la soluzione rispetta tali condizioni iniziali, il secondo membro di (6.35) definisce una funzione reale come garatito dal teorema di unicità sopra dimostrato.
Le soluzioni di (6.36) sono tutte e sole della forma

$$C_n(t) = C_n^{(+)} e^{-iE_nt} + C_{-n}^{(-)} e^{iE_nt} \,, \quad E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2} \,, \forall n \in \mathbb{Z} \,, \tag{6.37}$$

se $\mu > 0$, dove $C_n^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. Se $\mu = 0$, abbiamo le soluzioni di sopra quando $n \neq 0$, con la differenza che ora:

$$C_0(t) = At + \sqrt{L}C_0 \,. \tag{6.38}$$

dove $A, C_0 \in \mathbb{C}$ sono costanti arbitrarie. In definitiva, un candidato soluzione per $\mu > 0$ è dato dalla popolare formula:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right) \tag{6.39}$$

dove, nel secondo esponenziale abbiamo scambiato n con $-n$, dato che la somma opera su tutto $\mathbb{Z}$ e $E_n = E_{-n}$, ciò non altera il risultato, purché le due serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \quad \text{e} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \tag{6.40}$$

convergano separatamente, cosa che proveremo tra poco. Nel caso $\mu = 0$, il candidato soluzione si deve modificare in:

$$\varphi(t,x) = At + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right) \,, \tag{6.41}$$

dove come prima, le due serie che si ottengono separando i due addendi nel termine generico della serie convergono separatamente, e $\sqrt{L}C_0 = C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$. Si osservi che abbiamo trovato, nel caso $\mu = 0$, una forma di soluzione che è combinazione lineare di funzioni del tipo (6.18), come già discusso nella sezione 6.2. Sempre ammettendo che le due serie (6.40) convergano e che si possano derivare sotto il segno di somma nella variabile t, andiamo a valutare i coefficienti $C_n^{(\pm)}$ in modo da soddisfare le condizioni iniziali. Da (6.39) e ricordando che $\varphi(0,x) = \phi_0(x)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x) = \phi_1(x)$ abbiamo che deve essere, dove scambiamo nuovamente n con $-n$ nel secondo esponenziale e teniamo conto che se le due serie in (6.40) convergono separatamente allora la somma di esse coincide con la somma della serie che ha come elementi la somma dei corrispondenti elementi delle due serie (e la stessa cosa accade per le serie delle derivate in t),

$$\phi_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \,, \quad \phi_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} iE_n \frac{-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \,. \tag{6.42}$$

La seconda formula ha un ulteriore addento A a secondo membro se $\mu = 0$. Per ottenere la seconda identità abbiamo derivato in t sotto il segno di somma le due serie in (6.40) assumendo che ciò fosse possibile, e poi abbiamo posto $t = 0$ nel risultato. Si osservi che le due espressioni trovate non sono altro che gli sviluppi di Fourier di ϕ_0 e ϕ_1, i cui coefficienti di Fourier, rispettivamente, $\phi_{(0)\,n}$ e $\phi_{(1)\,n}$ sono stati scritti in funzione dei $C_{n\pm}$. Più precisamente

$$\phi_{(0)\,n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)} \,, \quad \phi_{(1)\,n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \,, \quad \text{se } \mu > 0 \,,$$

oppure

$\phi_{(0)\,n} = C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \phi_{(1)\,n} = iE_n(-C_n^{(+)} + C_{-n}^{(-)}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \phi_{(1)\,0} = A. \quad$ se $\mu > 0$,

Queste relazioni si invertono in:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)\,n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)\,n}\,, \quad C_n^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)\,-n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)\,-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,, \tag{6.43}$$

se $\mu > 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale anche:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)\,0}\,, \quad A = \phi_{(1)\,0}\,. \tag{6.44}$$

Se $\mu = 0$, non è necessario conoscere $C_0^{(+)}$ e $C_0^{(-)}$ separatamente ai fini della costruzione della soluzione φ, dato che nel secondo membro di (6.39) *compare solo la loro somma $C_0^{(+)} + C_0^{(-)}$.*

Nota. Possiamo riassumere tutto come segue. Supponiamo che i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 (assunti soddisfare (6.33) e (6.34)) siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1. Consideriamo ancora la funzione φ definita dal secondo membro di (6.39) (o (6.41) se $\mu = 0$) dove i coefficienti $C_n^{(\pm)}$ soddisfano (6.43) (e (6.44) se $\mu = 0$). Se le due serie (6.40) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.39) (o (6.41) se $\mu = 0$) convergono puntualmente e definiscono funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma, allora φ definito in (6.39) (o (6.41) se $\mu = 0$) è una soluzione del problema (6.32). Tutte queste richieste sono soddisfatte pur di assumere che i dati iniziali siano sufficientemente regolari come chiarito nel seguente teorema.

Teorema 6.8. *Si consideri il problema con condizioni al contorno periodiche (6.32) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*
Se si assume che i dati iniziali soddisfano $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e che valgano le condizioni di periodicità sui dati iniziali (6.33) e (6.34), allora esiste (ed è unica) una soluzione φ al problema. φ è data dalla serie convergente puntualmente:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right)\,,$$

se $\mu > 0$, oppure:

$$\varphi(t,x) = At + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right)\,,$$

se $\mu = 0$. A secondo membro di entrambe le equazioni, $E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$ e i coefficienti $C_{n\pm}$ sono definiti da:

$$C_n^{(+)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)\,n} + \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)\,n}\,, \quad C_n^{(-)} = \frac{1}{2}\phi_{(0)\,-n} - \frac{i}{2E_n}\phi_{(1)\,-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

se $\mu \neq 0$. Se $\mu = 0$ le identità di sopra valgono solo per $n \neq 0$, e vale:

$$C_0^{(+)} + C_0^{(-)} = \phi_{(0)\,0}\,, \quad A := \phi_{(0)\,1}\,,$$

infine, $\phi_{(0)\,n}$ e $\phi_{(1)\,n}$ sono, rispettivamente i coefficienti di Fourier dei dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1. $\diamondsuit$

Dimostrazione. È sufficiente verificare che tutte le richieste formulate nella **Nota** scritta prima dell'eneunciato di questo teorema siano soddisfatte. Bisogna quindi verificare i due seguenti fatti:

(a) che ϕ_0 e ϕ_1 siano sviluppabili in serie di Fourier convergenti puntualmente alle stesse ϕ_0 e ϕ_1;

(b) che due serie (6.40) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.39) (o (6.41) se $\mu = 0$) convergano puntualmente e definiscano funzioni $C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ le cui derivate fino al secondo ordine possono essere calcolate derivando sotto il simbolo di somma.

Ci restringeremo a lavorare per $\mu > 0$, dato che la dimostrazione per l'altro caso è banalmente simile.

Prima di tutto notiamo che (a) è vero dato che i dati iniziali sono $C^1([-L/2, L/2]; \mathbb{C})$ e quindi vale la proposizione 6.2. Non resta ora che provare (b). Nelle ipotesi fatte sulla regolarità di ϕ_0 e ϕ_1, abbiamo dalla proposizione 6.1 che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^h |\phi_{(0)\,n}| < \infty \quad \text{se } h = 0, 1, 2, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^k |\phi_{(1)\,n}| < \infty \quad \text{se } k = 0, 1\,. \tag{6.45}$$

D'altra parte, usando la definizione (6.43), essendo $E_n := c\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + \mu^2}$, risulta che, per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M > 0$, $E_n > 1$ e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{L}} \left| C_n^{(\pm)} e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right| \leq |\phi_{(0)\,\pm n}| + \frac{1}{E_n} |\phi_{(1)\,\pm n}| \leq |\phi_{(0)\,\pm n}| + |\phi_{(1)\,\pm n}|\,.$$

Di conseguenza le serie di funzioni che appiono in (6.39) sono dominate dalle serie di costanti positive convergenti, per (6.45), $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\phi_{(0)\,\pm n}| + |\phi_{(1)\,\pm n}|$. In base al teorema di Weistrass le due serie (6.40) in cui spezziamo la serie a secondo membro di (6.39) e quindi la serie stessa a secondo membro di (6.39), converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Consideriamo ora la funzione definita in tal modo:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)}\,.$$

Consideriamo separatamente ognuna delle due serie a secondo membro. Possiamo derivare sotto il segno di serie rispetto alla variabile x (o t) se la serie delle derivate rispetto a x (o t) dei termini generici della serie iniziale converge uniformemente. Si osservi le derivate in x e t dei termini generici della serie definente φ sono funzioni continue. Se riusciamo a dominare la serie delle derivate in x e quella in t con serie di costanti convergenti, ragionando esattamente come prima usando il teorema di Weistrass, abbiamo non solo che φ è derivabile in x e t (e le

derivate si calcolano scambiando la serie con il simbolo di derivata corrispondente), ma anche che $\varphi \in C^1(\mathbb{R}\times[-L/2,L/2];\mathbb{C})$. Infatti, in tal caso, le derivate di φ in x e t risulterebbero essere limiti di serie di funzioni continue convergenti uniformemente.
Le due serie delle derivate in x forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{nC_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{nC_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} .$$

D'altra parte, usando la definizione (6.43), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $M' > 0$ vale anche $E_n \geq c|n|$, e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{L}} \left| nC_n^{(\pm)} e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right| \leq |n\phi_{(0)\,\pm n}| + \frac{|n|}{E_n}|\phi_{(1)\,\pm n}| \leq |n\phi_{(0)\,\pm n}| + \frac{1}{c}|\phi_{(1)\,\pm n}| .$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in x (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.45), date da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\phi_{(0)\,\pm n}| + \frac{1}{c}|\phi_{(1)\,\pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in x converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_x\varphi(t,x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ.
Le serie delle derivate in t forniscono, a parte costanti moltiplicative comuni inessenziali,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{E_nC_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{E_nC_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} .$$

D'altra parte, usando la definizione (6.43), per $|n|$ più grande di qualche fissato intero $N > 0$ vale anche $E_n \leq c\sqrt{n^2 + 3n^2} = 2c|n|$, e quindi:

$$\frac{2}{\sqrt{L}} \left| E_nC_n^{(\pm)} e^{\pm i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right| \leq |E_n\phi_{(0)\,\pm n}| + |\phi_{(1)\,\pm n}| \leq 2c|n\phi_{(0)\,\pm n}| + |\phi_{(1)\,\pm n}| .$$

Di conseguenza le due serie delle derivate in t (quella dei coefficienti $C_n^{(+)}$ e quella dei coefficienti $C_n^{(-)}$) sono dominate dalle due serie di costanti positive convergenti, per (6.45), date da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2c|n\phi_{(0)\,\pm n}| + |\phi_{(1)\,\pm n}|$. In base al teorema di Weistrass la serie delle derivate in t converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua φ su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$. Inoltre tale funzione deve coincidere con $\partial_t\varphi(t,x)$ dato che siamo nelle ipotesi di poter scambiare la derivata con il simbolo di somma nella serie che definisce φ. La procedura può essere ripetuta per le derivate seconde, incluse quelle miste, si vede subito, in tal caso che le serie delle derivate seconde (di tipo fissato) sono comunque dominate da serie di costanti del tipo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} A|n^2\phi_{(0)\,\pm n}| + B|n\phi_{(1)\,\pm n}| ,$$

con $A, B > 0$ dipendenti dal tipo di derivate. Queste serie di costanti convergono per (6.45). Si conclude, con lo stesso ragionamento di sopra, che $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ e che la serie (6.39) che definisce φ si può derivare termine a termine fino alle derivate seconde. Questo è quanto volevamo e conclude la dimostrazione provando che

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right)$$

è una soluzione del problema considerato. $\square$

Osservazioni 6.7. Cosideriamo la forma generale della soluzione per il problema con condizioni al bordo periodiche nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[-L/2, L/2]$ per $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert:

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C_n^{(+)}}{\sqrt{L}} e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} + \frac{C_n^{(-)}}{\sqrt{L}} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x - E_n t\right)} \right) ,$$

Trascuriamo pure il termine At che non ci interessa qui e teniamo conto del fatto che ora $E_n = c\frac{2\pi|n|}{L}$. Si subito vede che φ è una sovrapposizione di onde del tipo:

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - iE_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x-ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x-ct)\right) \quad \text{con } n > 0,$$

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L}x - iE_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x+ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x+ct)\right) \quad \text{con } n < 0.$$

Queste soluzioni hanno la stessa forma delle soluzioni dell'equazione di D'Alembert in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè di soluzioni del tipo $f(x-ct)$ (onde progressive) oppure $g(x+ct)$ (onde regressive). Tuttavia ora, a parte la scelta di n, la loro forma funzionale è fissata: vedendole come funzioni reali, possono solo essere seni oppure coseni. Come nel caso della teoria in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c rappresenta la velocità di propagazione di tali profili, in questo caso si dice **velocità di fase** dell'onda φ_n. Consideriamo la soluzione $\varphi_n := \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x-ct)\right)$, per le altre analoghe soluzioni si possono fare discorsi analoghi. Se *fissiamo un punto* $x \in [-L/2, L/2]$ ed osserviamo, in quel punto, come oscilla φ_n, essa avrà un periodo di oscillazione $T_n = L/(nc)$. La **frequenza dell'onda** φ_n è , per definizione, l'inverso di tale periodo $\nu_n := nc/L$. Se invece, *a tempo fissato*, fotografiamo l'onda φ_n, essa sarà descritta da un sinusoide di periodo spaziale $\lambda_n = L/n$. Questo numero è detto **lunghezza d'onda** dell'onda φ_n. La lunghezza d'onda e la frequenza soddisfano la relazione, rispetto alla velocità di fase: $\lambda_n \nu_n = c$.

6.5 Il problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con condizioni al bordo di annullamento

Consideriamo ora il problema di determinare le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon o D'Alembert nell'insieme $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$, una volta imposte condizioni iniziali e condizioni di annullamento ai bordi del compatto $[-L/2, L/2]$. Questo caso è fisicamente più interessante del precedente, dato che sistemi fisici comuni descritti dall'equazione di D'Alembert (es. le corde della chitarra), obbediscono a tali condizioni al contorno. L'esistenza di soluzioni sarà provata facendo uso della teoria della serie di Fourier sviluppata precedentemente.

6.5.1 Teorema di unicità.

Abbiamo un primo teorema di unicità.

Teorema 6.9. *Si consideri il seguente problema su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$ con $\mu \geq 0$ costante fissata,*

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu^2\varphi = 0\,, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})\,, \\ \varphi(t, L/2) = \varphi(t, -L/2) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \\ \varphi(0, x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2]\,, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2]\,, \end{cases} \tag{6.46}$$

dove $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ sono funzioni assegnate che soddisfano le condizioni di annullamento al bordo[2]*:*

$$\phi_0(-L/2) = \phi_0(L/2) = 0\,, \quad \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}(-L/2) = \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}(L/2) = 0 \tag{6.47}$$

e

$$\phi_1(-L/2) = \phi_1(-L/2) = 0\,. \tag{6.48}$$

Se esiste una soluzione al problema posto, essa è unica. In particolare, se i dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1 sono funzioni a valori reali, la soluzione φ è a valori reali. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Se una soluzione φ del problema, ammesso che esista, è complessa, possiamo sempre decomporla in parte reale ed immaginaria: $\varphi(t, x) = Re\varphi(t, x) + iIm\varphi(t, x)$. Data la natura reale dell'equazione di Klein-Gordon, avremo anche che la parte reale $Re\varphi$ e quella immaginaria $Im\varphi$, che sono funzioni *reali* con la stessa regolarità di φ, soddisfano la stessa equazione di Klein-Gordon separatamente. Inoltre soddisfano le condizioni al contorno di annullamento e si raccordano, separatamente, alle parti reali ed immaginarie dei dati iniziali per costruzione. In base a ciò è sufficiente provare il teorema di unicità nel caso di φ reale (cioè per la parte reale ed immaginaria di φ separatamente, quando φ è complessa). Assumiamo

[2]La seconda delle condizioni in (6.47) deve essere imposta a causa delle condizioni di annullamento al bordo di φ scritte sopra e della forma dell'equazione differenziale stessa valutata a $t = 0$.

dunque di lavorare con funzioni reali soluzioni del problema considerato con dati iniziali reali. La dimostrazione della proprietà di unicità, è, escluso un punto, uguale a quella del teorema 5.1 ponendo $(\alpha, \beta) := \mathbb{R}$, $D := [-L/2, L/2]$. L'unica differenza è che ora, se ϕ è la differenza di due soluzioni del problema posto, l'identità

$$\int_0^T dt \oint_{+\partial D} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi\right) \cdot \mathbf{n} \, dS(x) = 0$$

nella dimostrazione del teorema 5.1 si scrive ora nella forma semplificata:

$$\int_0^T dt \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{L/2} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{-L/2} \right) = 0 \,,$$

e questa identità vale banalmente in virtù delle condizioni di annullamento al bordo imposte sulle soluzioni del problema e quindi su ϕ.
Se la parte immaginaria dei dati iniziali è nulla, una soluzione del problema per la parte immaginaria di φ è la soluzione ovunque nulla. In base alla proprietà di unicità della soluzione, concludiamo che questa è l'unica soluzione e che quindi la parte immaginaria della soluzione (complessa a priori) φ è identicamente nulla. $\Box$

6.5.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari.

Passiamo ora ad un teorema di esistenza la cui dimostrazione sfrutta il teorema 6.8 di esistenza nel caso di condizioni al contorno periodiche ed un trucco piuttosto ingegnoso. Cominciamo con un lemma.

Lemma 6.3. *Nelle stesse ipotesi del teorema 6.7, se le condizioni iniziali ϕ_0 e ϕ_1, oltre a soddisfare le ipotesi del teorema, sono funzioni dispari, allora la soluzione φ, se esiste, è anch'essa una funzione dispari nella variabile x, cioè:*

$$\varphi(t, x) = -\varphi(t, -x) \,, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [-L/2, L/2] \,. \tag{6.49}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Sia φ la soluzione, ammesso che esista, del problema (6.32), con condizioni iniziali $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ date da funzioni dispari che soddisfano i vincoli al contorno (6.33) e (6.34). Consideriamo la funzione, definita su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$:

$$\Phi(t, x) := \varphi(t, x) + \varphi(t, -x) \,.$$

La soluzione φ è una funzione dispari nella variabile x se e solo se Φ è identicamente nulla. Dimostriamo che Φ è la funzione nulla se valgono le ipotesi del lemma. Si osservi che, per costruzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2], \mathbb{C})$. Inoltre, dato che nell'equazione di Klein-Gordon appaiono le derivate seconde nello spazio unicamente, la funzione $(t, x) \mapsto \varphi(t, -x)$ soddisferà l'equazione di Klein Gordon (dato che è soddisfatta da φ). Sommando membro a membro le due equazioni di Klein-Gordon per $\varphi(t, x)$ e $\varphi(t, -x)$, otteniamo che

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu^2 \Phi = 0 \, .$$

Per costruzione la funzione Φ soddisfa anche

$$\Phi(0, x) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = 0 \, , \quad \forall x \in [-L/2, L/2] \, ,$$

dato che le condizioni iniziali per φ sono per ipotesi delle funzioni dispari e quindi:

$$\Phi(0, x) = \varphi(0, x) + \varphi(0, -x) = \phi_0(x) + \phi_0(-x) = 0 \, ,$$

e anche

$$(\partial_t \Phi)(0, x) = (\partial_t \varphi)(0, x) + (\partial_t \varphi)(0, -x) = \phi_0(x) + \phi_0(-x) = 0 \, .$$

Infine Φ, sempre per costruzione, soddisfa le condizioni al contorno periodiche:

$$\Phi(t, L/2) = \varphi(t, L/2) + \varphi(t, -L/2) = \varphi(t, -L/2) + \varphi(t, L/2) = \Phi(t, -L/2) \, ,$$

e

$$\partial_t \Phi(t, L/2) = \partial_t \varphi(t, L/2) + \partial_t \varphi(t, -L/2) = \partial_t \varphi(t, -L/2) + \partial_t \varphi(t, L/2) = \partial_t \Phi(t, -L/2) \, .$$

In definitiva $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, con dati iniziali nulli e condizioni periodiche al bordo. Usando il teorema 6.9 concludiamo che questa deve essere l'unica soluzione del problema detto, ma allora deve coincidere con la soluzione banale data dalla funzione ovunque nulla, notando che la soluzione nulla risolve lo stesso problema (con le stesse condizioni iniziali ed al bordo). $\Box$

Possiamo ora enunciare e provare il teorema di esistenza. L'idea della dimostrazione è trasformare il problema con condizioni al bordo di annullamento in un problema con condizioni al bordo periodiche, ma definito su un dominio spaziale più grande. La soluzione determinata nel dominio più grande, che sappiamo esistere per il teorema 6.8, ristretta al dominio iniziale, sarà la soluzione del problema.

Teorema 6.10. *Si consideri il problema con condizioni al contorno periodiche (6.46) per la funzione $\varphi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L/2, L/2])$ con $\mu \geq 0$ costante fissata.*
Se si assume che i dati iniziali soddisfano $\phi_0 \in C^2([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^3 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e $\phi_1 \in C^1([-L/2, L/2], \mathbb{C})$ di classe C^2 a tratti su $[-L/2, L/2]$ e che valgano le condizioni di annullamento al bordo sui dati iniziali (6.47) e (6.48), allora esiste (ed è unica)

una soluzione φ al problema. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che tutti i risultati che abbiamo provato fino ad ora su $\mathbb{R} \times [-L/2, L/2]$, inclusi i teoremi di esistenza ed unicità in presenza di condizioni al bordo periodiche, valgono se si sostituisce $[-L/2, L/2]$ con un qualsiaso intervallo $[a, b]$, dove $a < b$. Anche le formule risolutive sono identiche con l'eccezione che il dominio d'integrazione $[-L/2, L/2]$ (per esempio nel calcolo dei coefficienti di Fourier) deve essere ovviamente rimpiazzato da $[a, b]$, ed il parametro L che appare, per esempio, negli esponenti deve essere sostituito con $b - a$. Con una traslazione di assi spaziali, portiamo il segmento $[-L/2, L/2]$ nel segmento $[0, L]$. Dimostreremo il teorema di esistenza in questo intervallo e poi torneremo sull'intervallo iniziale. La soluzione per l'intervallo $[-L/2, L/2]$ si otterrà banalmente con una traslazione di assi di $-L/2$.
Lavoriamo allora sul segmento $[0, L]$ sul quale definiamo le funzioni: $\tilde{\phi_0}(x) := \phi_0(x - L/2)$ e $\tilde{\phi_1}(x) := \phi_1(x - L/2)$ per ogni $x \in [0, L]$. Consideriamo poi il segmento di lunghezza doppia $[-L, L]$, estendiamo le funzioni $\tilde{\phi_0}$ e $\tilde{\phi_1}$ dal segmento $[0, L]$ a tutto il segmento $[-L, L]$ in modo tale che risultino funzioni dispari. Indichiamo le funzioni estese in questo modo con Φ_0 e Φ_1. Ora passeremo dal problema con condizioni al bordo di annullamento su $[0, L]$ ad un nuovo problema sul segmento allargato $[-L, L]$ con condizioni al bordo *periodiche* del quale conosciamo già un teorema di esistenza. La soluzione che otterremo in quel caso, ristretta al dominio originale, sarà la soluzione del nostro problema.
Date le proprietà delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1, si ha facilemente che $\Phi_0 \in C^2([-L, L], \mathbb{C})$ (si noti che, riguardo alle derivate seconde, per il punto $x = 0$ vale la (6.47) che assicura che la derivata seconda in $x = 0$ esista e sia continua) ed è di classe C^3 a tratti su $[-L, L]$, $\Phi_1 \in C^1([-L, L], \mathbb{C})$ ed è di classe C^2 a tratti su $[-L, L]$. Infine sono soddisfatte le condizioni di periodicità al bordo di $[-L, L]$:

$$\Phi_0(-L) = \Phi_0(L) \ (= 0) \, , \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(L) \, , \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(-L) = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(L) \ (= 0)$$

e

$$\Phi_1(-L) = \Phi_1(L) \ (= 0) \, , \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(-L) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(L) \, .$$

Si noti che le condizioni scritte sulle derivate prime sono conseguenza del fatto che le funzioni Φ_0 e Φ_1 sono funzioni dispari e quindi le loro derivate prime (in x) sono funzioni pari, le rimaneti condizioni sono anche conseguenza delle condizioni di annullamento al bordo delle funzioni ϕ_0 e ϕ_1. Possiamo allora invocare il teorema 6.8 che assicura l'esistenza di una funzione $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times [-L, L]; \mathbb{C})$ che soddisfi l'equazione di Klein-Gordon in tale insieme, che si raccordi con i dati iniziali Φ_0 e Φ_1 al tempo $t = 0$ e che soddisfi condizioni di periodicità

$$\Phi(t, -L) = \Phi(t, L) \, , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, -L) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, L) \quad \forall t \in \mathbb{R} \, .$$

La soluzione Φ è una funzione dispari in x per il lemma 6.3, dato che i dati iniziali sono funzioni dispari. Quindi, in particolare $\Phi(t, 0) = -\Phi(t, -0) = -\Phi(t, 0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ per il fatto che Φ è dispari. Inoltre essendo Φ dispari ma anche periodica su $[-L, L]$, deve vale

contemporaneamente $\Phi(t,L) = -\Phi(t,-L)$ e $\Phi(t,L) = \Phi(t,-L)$ e quindi $\Phi(t,L) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Se allora definiamo $\phi(t,x) := \Phi\restriction_{\mathbb{R}\times[0,L]}(t,x)$, questa funzione soddisfa per costruzione:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \mu^2\phi = 0\,, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}\times[0,L],\mathbb{C})\,, \\ \phi(t,0) = \varphi(t,L) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \\ \phi(0,x) = \tilde{\phi}_0(x) \quad \forall x \in [0,L]\,, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(0,x) = \tilde{\phi}_1(x) \quad \forall x \in [0,L]\,. \end{cases}$$

Di conseguenza, la funzione definita da $\varphi(t,x) := \phi(t, x+L/2)$ per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}\times[-L/2, L/2]$ soddisfa

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \mu^2\varphi = 0\,, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}\times[-L/2,L/2],\mathbb{C})\,, \\ \varphi(t,L/2) = \varphi(t,-L/2) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \\ \varphi(0,x) = \phi_0(x) \quad \forall x \in [-L/2,L/2]\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(0,x) = \phi_1(x) \quad \forall x \in [-L/2,L/2]\,, \end{cases}$$

ed è quindi una soluzione del problema con condizioni al contorno periodiche (6.46) con dati iniziali ϕ_0 e ϕ_1. $\Box$

Osservazioni 6.8.
(1) Studiamo la forma particolare dello sviluppo di Fourier della soluzione del problema considerato, *nel caso in cui il campo φ sia reale*, dato che si presta a qualche osservazione interessante dal punto di vista fisico, specialmente nel caso in cui $\mu = 0$, cioè per l'equazione di D'Alembert. Sotto opportune ipotesi di regolarità delle condizioni iniziali, la generica soluzione Φ del problema periodico su $\mathbb{R}\times[-L,L]$, come sappiamo dal teorema 6.8 è data dallo sviluppo di Fourier:

$$\Phi(t,x) = At + \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^{(+)}\frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{-iE_nt} + C_n^{(-)}\frac{e^{-i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{iE_nt}\,,$$

dove il termine At può apparire solo se $\mu = 0$. Tuttavia, nel caso in esame, dato che richiederemo che Φ sia una funzione dispari di x, l'unica possibilità è $A = 0$ anche nel caso $\mu = 0$. Pertanto partiamo con la generica soluzione:

$$\Phi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^{(+)}\frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{-iE_nt} + C_n^{(-)}\frac{e^{-i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{iE_nt}\,, \tag{6.50}$$

dove $E_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \mu}$. Dalla dimostrazione del teorema 6.10, sappiamo che la soluzione generica del problema con condizioni di annullamento al bordo su $[0,L]$ si ottiene restringendo la funzione Φ a $[0,L]$ sotto l'ipotesi che Φ sia *dispari*. Ma allora deve valere:

$$\Phi(t,x) = -\Phi(t,-x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -C_n^{(+)}\frac{e^{-i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{-iE_nt} - C_n^{(-)}\frac{e^{i\frac{\pi n}{L}x}}{\sqrt{2L}}e^{iE_nt}\,. \tag{6.51}$$

Sommando membro a membro con (6.50) e dividendo il risultato a metà si ottiene allora che:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} iC_n^{(+)} e^{-iE_nt} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) - iC_n^{(-)} e^{iE_nt} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) . \tag{6.52}$$

Ora, tenendo conto del fatto che Φ è reale, possiamo ancora scrivere che:

$$\Phi(t,x) = \overline{\Phi(t,x)} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{iC_n^{(+)}} e^{iE_nt} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) - \overline{iC_n^{(-)}} e^{-iE_nt} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , \tag{6.53}$$

che, sommata membro a membro con (6.52), fornisce:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} -Im\left(C_n^{(+)} e^{-iE_nt}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + Im\left(C_n^{(-)} e^{iE_nt}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) .$$

Se infine definiamo $C_n^{(\pm)} = \alpha_n^{(\pm)} + i\beta_n^{(\pm)}$, e decomponiamo gli esponenziali complessi $e^{\pm iE_nt} = \cos(E_nt) + i\sin(E_nt)$, con un semplice calcolo, l'identità trovata si riduce a:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\alpha_n^{(-)} - \alpha_n^{(+)}\right) \sin(E_nt) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + \left(\beta_n^{(-)} - \beta_n^{(+)}\right) \cos(E_nt) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) .$$

Possiamo concludere che, per un' opportuna scelta delle costanti *reali* A_n e B_n etichettate su $\mathbb{N}$, la soluzione del problema con condizioni di annullamento al bordo di $[0,L]$ ha la struttura, se $(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,L]$:

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [A_n \sin(E_nt) + B_n \cos(E_nt)] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) . \tag{6.54}$$

Sopra abbiamo omesso i termini con $n = 0$ dato che non forniscono alcun contributo essendo $\sin 0 = 0$, inoltre abbiamo tenuto conto del fatto che $E_n = E_{-n}$, $\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi nx}{L}\right)$ e questo consente di sommare sui naturali invece che sugli interi raccogliendo i coefficienti opportunamente.
Mostriamo ora come individuare i coefficienti A_n e B_n in funzione dei dati iniziali. Con la stessa procedura che abbiamo usato nella dimostrazione del teorema 6.8 si riesce facilmente a dimostrare che la serie di sopra converge uniformemente, si può derivare sotto il segno di somma nella vartiabile t ottenendo una serie che converge ancora uniformemente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} [A_n \cos(E_nt) - B_n \sin(E_nt)]\, E_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) .$$

Specializzando le due serie per $t = 0$ si ha allora il legame con i dati iniziali:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} E_n A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) .$$

Moltiplicando entrambe le espressioni per $\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)$ ed integrando su $[0, L]$, passando il simbolo di integrale sotto quello di serie, dato che ciò è concesso per via della uniforme convergenza della serie, si trova infine:

$$B_n = \sqrt{\frac{8}{L}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \phi_0(x) dx \,, \quad A_n = \sqrt{\frac{8}{L E_n^2}} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \phi_1(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,, \quad (6.55)$$

dove abbiamo tenuto conto dell'identità

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \, dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \,, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,.$$

(2) Consideriamo esplicitamente il caso dell'equazione di D'Alembert, $\mu = 0$, per cui $E_n = c\left|\frac{\pi n}{L}\right|$. La decomposizione (6.54) di $\varphi(t, x)$ è interessante perché non è data in termini di onde regressive o progressive, come quelle che appaiono nella decomposizione della soluzione per il problema con condizioni periodiche in $[0, L]$:

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L} x - i E_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x - ct)\right) \quad \text{con } n > 0,$$

$$e^{\pm i(\frac{2\pi n}{L} x - i E_n t)} = \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi n}{L}(x + ct)\right) \quad \text{se } n < 0.$$

Invece appaiono soluzioni dette **onde stazionarie** o **armoniche** (che non si vedono "propagare" nelle due direzioni come invece accade nel caso di condizioni periodiche):

$$A_n \sin\left(\frac{c\pi n}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{c\pi n}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,.$$

A differenza delle funzioni precedenti, in queste, vi sono punti nello spazio, detti **nodi**, in cui *le onde si annullano per ogni valore del tempo.* Le posizioni $x_k^{(n)}$ dei noti sono ottenute risolvendo $\sin(\pi n x_k^{(n)}/L) = 0$ su $[0, L]$ ed ottenendo quindi, per ogni fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_k^{(n)} = \frac{k}{n} L$ per tutti i $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$.
(3) Le corde degli strumenti musicali "a corda" vibrano trasversalmente soddisfacendo l'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo. La vibrazione è trasmessa all'aria ed è percepita dal nostro orecchio in termini di suono. L'onda sonora ha una struttura simile a quella dell'onda meccanica di deformazione delle corde che l'hanno prodotto, per tale motivo ci riferiremo a tale onda meccanica pur parlando del suono. La decomposizione in onde stazionarie o armoniche, descritta sopra, del moto di oscillazione di una corda che produce suono è il punto di partenza per la teoria fisica della musica prodotta da tali strumenti. Questo genere di onde oscillano temporalmente con un periodo $T_n = 2L/(cn)$ e quindi una frequenza $\nu_n = cn/(2L)$. La lunghezza d'onda spaziale è ancora data da $\lambda_n = 2L/n$. Le oscillazioni con

n fissato, le armoniche, vengono avverite dal nostro orecchio come toni puri (note pure)[3]. la nota LA di riferimento, per accordare gli strumenti corrisponde alla frequenza di 440 oscillazioni al secondo. Tuttavia è difficilissimo, con strumenti meccanici (non elettronici) produrre toni puri. Infatti, il suono che si ottiene pizzicando una corda (clavicembalo) oppure perquotendola (pianoforte), corrisponde ad una soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di annullamento al bordo, la cui forma e decomposizione in armoniche sinusoidali dipende dalle condizioni iniziali, cioè dalla procedura con la quale è stata fatta oscillare la corda. Il suono è praticamente sempre composto da molte armoniche secondo una certa distribuzione con coefficienti A_n e B_n che dipendono dalla procedura usata per mettere la corda in oscillazione. Il numero $A_n^2+B_n^2$ è legato all'intensità (o energia) del suono, più precisamente all'intensità dell'armonica n-esima. Quando si cerca di suonare una precisa nota mettendo in oscillazione una certa corda in un certo modo, in realtà si produce un certa soluzione delle equazioni di D'Alembert tale che, decomponendola in armoniche, una certa frequenza prevale sulle altre: *cioè, l'armonica corrispondente ha coefficienti A_n e B_n più grandi di tutti gli altri analoghi coefficienti delle altre armoniche.* La frequenza dell'armonica che prevale definisce la nota suonata. Le rimanenti armoniche della decomposizione attenuate, ma sempre presenti e con intensità che dipendono fal tipo di strumento, producono il caratteristico *timbro* dello strumento, per il quale una stessa nota, suonata da un violino oppure da un pianoforte viene avvertita dal nostro orecchio come differente.

[3]In realtà il nostro orecchio sembra essere incapace di distiguere le singole frequenze (malgrado talvolta si sostenga che qualcuno sia abile a farlo e si parla, in tal caso, di "orecchio assoluto"). Il nostro orecchio è in realtà capace di distiguere solo i rapporti tra varie frequenze suonate contemporaneamente o a breve distanza temporale. Per esempio il rapporto di *un ottava* è quello di due frequenze una di valore doppio dell'altra. Nella teoria musicale ideata da Bach il rapporto tra due note consecutive e $2^{1/12}$ ed è questo il rapporto di frequenze tra le note di due tasti consecutivi in un pianoforte, includendo nell'ordine sia i tasti bianchi che quelli neri (che sono appunto, $7+5=12$ in tutto per ogni ottava).

Appendice A

Un accenno all'approccio moderno per il problema ellittico: soluzioni in senso debole e teoremi di regolarità ellittica.

In questa appendice tutti gli integrali che appaiono sono riferiti alla misura di Lebesgue.

Tutto l'approccio moderno allo studio delle soluzioni dell'equazione di Laplace e Poisson si basa sulla seguente definizione.

Definizione A.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e sia $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ assegnata. Una funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\varphi \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ è detta risolvere l'equazione di Poisson:

$$\Delta\varphi = f$$

in senso debole o, equivalentemente, **in senso distribuzionale**, se vale l'identità :

$$\int_\Omega \varphi \Delta g \, d^n x = \int_\Omega f g \, d^n x \,, \quad \text{per ogni funzione } g \in C_0^\infty(\Omega). \tag{A.1}$$

$\diamondsuit$

Chiariamo subito il significato di questa definizione. Prima di tutto vediamo perché si parla di soluzioni *in senso debole*. Supponiamo che $\varphi \in C^2(\Omega)$ risolva l'equazione di Poisson $\Delta\varphi = f$ in senso proprio. Usando l'integrazione per parti, se $g \in C_0^\infty(\Omega)$, si ha immediatamente che:

$$\int_\Omega f g \, d^n x = \int_\Omega (\Delta\varphi) g \, d^n x = \int_\Omega \nabla \cdot [(\nabla\varphi) g] \, d^n x - \int_\Omega (\nabla\varphi) \cdot \nabla g \, d^n x$$

$$= \int_\Omega \nabla \cdot [(\nabla\varphi)g]\, d^n x - \int_\Omega \nabla \cdot [\varphi \nabla g]\, d^n x + \int_\Omega \varphi \Delta g\, d^n x\,.$$

Tenendo conto che g si annulla (con tutte le derivate) prima di arrivare al bordo di Ω, i primi due integrali nell'ultima riga risultano essere nulli (per il secondo teorema fondamentale del calcolo oppure il teorema della divergenza). Pertanto rimane:

$$\int_\Omega fg\, d^n x = \int_\Omega f \Delta g\, d^n x\,.$$

Abbiamo in tal modo provato che: *le soluzioni in senso proprio sono anche soluzioni in senso debole.*

Non ci aspettiamo che valga il contrario per un motovo elementare: se φ soddisfa l'equazione di Poisson in senso proprio e pertanto vale l'identità l'identità (A.1), quest'ultima varrà anche se la funzione φ è ridefinita in modo da non essere più differenziabile su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue, per esempio l'insieme dei punti di coordinate razionali in Ω. Tuttavia, se sappiamo che la soluzione in senso debole φ di $\Delta\varphi = f$, con $f \in C^0(\Omega)$, *è una funzione di classe* $C^2(\Omega)$, allora possiamo concludere che φ è anche una soluzione in senso proprio. La dimostrazione è abbastanza semplice. Partendo dalla (A.1) e tenendo conto che $\varphi \in C^2(\Omega)$ si ha immediatamente procedendo in senso inverso a quanto fatto sopra:

$$\int_\Omega (\Delta\varphi - f)g = 0\, d^n x\,, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega) \tag{A.2}$$

Se fosse $\Delta_x \phi - f(x) \neq 0$ nel punto $x \in \Omega$, per continuità , il segno di tale funzione dovrebbe mantenersi costante in un intorno di x. Supponiamo il segno sia positivo (l'altro caso si studia analogamente) sulla palla aperta $B(x)$ a chiusura compatta con $\overline{B(x)} \subset \Omega$. Stringendo tale palla se necessario, si avrebbe $\min_{\overline{B(x)}}(\Delta\phi - f) \geq k > 0$. Se ora $g \in C_0^\infty(\Omega)$ è tale che $\operatorname{supp} g \subset \overline{B(x)}$, $g \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} g\, d^n x = 1$ (si possono costruire facilmente tali funzioni), allora:

$$\int_\Omega (\Delta\phi - f)g\, d^n x = \int_{\overline{B(x)}} (\Delta\phi - f)g\, d^n x \geq \int_{\overline{B(x)}} kg\, d^n x \geq k > 0\,.$$

La nozione di soluzione debole è legata ad una nozione più generale: quella di *derivata in senso debole.*

Definizione A.2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto, si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) **ammette derivata**

$$h = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1} \cdots \partial x^{n\alpha_1 n}}$$

in senso debole, se $h \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ e vale:

$$\int_\Omega \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} g}{\partial x^{1\alpha_1} \cdots \partial x^{n\alpha_1 n}} f\, d^n x = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \int_\Omega gh\, d^n x\,, \quad \text{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

$\diamondsuit$

Procedendo come prima si verifica che se h è la derivata in senso proprio (o *forte*) dell'ordine detto di f allora è anche derivata in senso debole di f. Viceversa se h è la derivata in senso proprio dell'ordine detto di f e vale $f \in C^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(\Omega)$ allora h è la derivata in senso proprio (o forte) dell'ordine detto di f.
Deve essere chiaro che le soluzioni in senso debole di $\Delta\varphi = f$ non sono altro che le soluzioni di tale equazione quando il laplaciano è inteso come operatore differenziale in senso debole.
La procedura moderna per risolvere l'equazione di Poisson (aggiungendo dati al bordo se assegnati) è decomposta in due passi:

(i) cercare, se esiste, una soluzione *in senso debole* dell'equazione considerata,

(ii) dimostrare, se possibile, che tale soluzione o una sua ri-definizione su insiemi di misura nulla, è soluzione anche in senso ordinario. Cioé , nella terminologia moderna, è soluzione in *senso forte*.

La tecnologia matematica per determinare le soluzioni in senso debole di una qualsiasi equazione differenziale a derivate parziali, non necessariamente quella di Poisson, è stata enormemente sviluppata e costituisce un ramo importantissimo dell'analisi funzionale moderna. Essa si basa sulla definizione e sull'uso delle proprietà di funzioni che appartengono ad opportuni spazi funzionali detti *spazi di Sobolev* [4], sui quali si rimanda a corsi più avanzati [5]. Diremo solo che vale la seguente definizione.

Definizione A.3. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto e $k = 0, 1, 2, \ldots$ è fissato, lo **spazio di Sobolev** $W^k(\Omega)$ è costituito dalle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{C}$ per le quali esistono le derivate in senso debole fino all'ordine k, sono funzioni misurabili, e soddisfano:

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x^{1\alpha_1}\cdots\partial x^{n\alpha_1 n}}\right|^2 d^n x < +\infty \quad \text{per } \alpha_1 = 0, 1, \ldots, \text{ con } i = 1, \ldots, n \text{ tali che } \textstyle\sum_i \alpha_i = k.$$

$\diamondsuit$

Nel caso specifco di equazioni lineari di tipo ellittico, esistono teoremi di regolarità che stabiliscono sotto quali ipotesi soluzioni deboli sono soluzioni in senso forte: sono i noti *teoremi di regolarità ellittica*. Tali teoremi sono stati estesi anche a casi più generali (equazioni ipoellittiche) in particolare dal matematico L. Hörmander. I teoremi fondamentali sono due: Il *Lemma di Sobolev* [4] ed il *teorema di regolarità ellittica di Friedrichs* [2]. Il primo, nella versione più elementare (la tesi vale infatti imponendo solo che le derivate *non miste*, fino all'ordine r, esistano in senso debole e siano funzioni a quadrato sommabile [4]), afferma quanto segue.

Teorema A.1. (**Lemma di Sobolev**.) *Se $f \in W^r(\Omega)$ con Ω aperto non vuoto in $\mathbb{R}^n$, allora f differisce su un insieme di misura nulla da una funzione che appartiene a $C^p(\Omega)$ con p dato dal più grande intero tale che $0 \leq p < r + \frac{n}{2}$. (In particolare quindi, se $f \in W^r(\Omega)$ è continua,* *allora $f \in C^p(\Omega)$).* $\diamondsuit$

Il secondo, nella versione più semplice (si generalizza infatti ad operatori ellittici di ordine superiore al secondo) si enuncia come segue.

Teorema A.2. (**Teorema di regolarità ellittica di Friedrichs.**) *Sia $P\varphi = f$ un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare del secondo ordine su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, a coefficienti dati da funzioni di classe $C^2(\Omega)$, dove:*

$$P\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(A^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi\right) .$$

Si supponga che la matrice caratteristica del sistema $A = A(x)$ associata all'operatore P soddisfi la condizione di **forte ellitticità** *, per qualche $C > 0$:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x)y_i y_j \geq C||y||^2 , \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \textit{ e ogni } y \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ risolve in senso debole l'equazione $P\varphi = f$, cioè :

$$\int_\Omega \varphi P g \, d^n x = \int_\Omega f g \, d^n x , \quad \textit{per ogni } g \in C_0^\infty(\Omega)$$

e $f \in W^k(\Omega)$ per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, allora $\varphi \in W^{k+2}(\Omega)$. $\diamondsuit$

A titolo di esempio, supponiamo che $f \in C^\infty(\Omega)$ e che $\varphi \in W^k(\Omega)$, per qualche $k = 0, 1, \dots$ fissato, sia soluzione in senso debole di $P\varphi = f$. Se le ipotesi del teorema di Friedrichs sono valide, allora $\varphi \in W^\infty(\Omega)$. A sua volta però il Lemma di Sobolev prova che, più fortemente, modificando φ su un insieme di misura nulla ed ottenendo φ', si ha che $\varphi' \in C^\infty(\Omega)$. Mostriamo che questa nuova funzione φ' è in realtà una *soluzione in senso forte dell'equazione $P\varphi = f$*. Infatti, per ipotesi vale:

$$\int_\Omega \varphi P g \, d^n x = \int_\Omega f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$. La ridefinizione di φ in φ' non altera l'identità scritta sopra visto che le due funzioni differiscono su un insieme di misura nulla. Possiamo allora usare la derivazione per parti ottenendo che:

$$\int_\Omega (P\varphi')g \, d^n x = \int_\Omega f g \, d^n x$$

per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$. Procedendo come mostrato sopra, l'arbitrarietà di $g \in C_0^\infty(\Omega)$ implica che $P\varphi' = f$ sia valida in senso forte su Ω. Per cui la funzione φ, ridefinita come una funzione $\varphi' \in C^\infty(\Omega)$, grazie al Lemma di Sobolev, soddisfa in senso forte l'equazione differenziale.

Appendice B

Limite e derivazione sotto il segno integrale e di serie dalla teoria della misura.

In questa appendice dimostreremo alcuni teoremi che consentono di scambiare il simbolo di integrale e di serie con quello di derivata, facendo uso essenzialmente del teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Il caso della serie sarà visto come sottocaso del caso integrale, in riferimento alla misura che conta i punti su $\mathbb{N}$. I teoremi che daremo sono quindi, nel caso dell'integrale, riferiti ad una generica misura positiva assegnata su uno spazio misurabile. Per comodità , riportiamo (senza dimostrazioni per altro elementari [1]) i tre teoremi classici di scambio del simbolo limite e derivata con quelli di serie ed integrale.

Teorema B.1. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue, tutte definite sul compatto $K \subset \mathbb{R}^m$ ed a valori in $\mathbb{R}$. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente per $n \to +\infty$, allora si ha, dove gli integrali indicano quelli valutati nel senso di Riemann,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K f_n d^m x = \int_K \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) d^m x \, .$$

♢

Teorema B.2. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni derivabili con continuità sull'intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se la serie associata alle f_n e quella associata alle derivate di tali funzioni convergono uniformemente su $[a, b]$, allora la somma della serie delle f_n è derivabile e vale:*

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n(t)}{dt} \, , \quad \textit{per ogni } t \in [a, b].$$

♢

Teorema B.3. *Si consideri una classe di funzioni a valori in* $\mathbb{R}$, $\{f_t\}_{t\in A}$, *definite sul compatto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *e dove* $A \subset \mathbb{R}$ *è un intervallo aperto. Se valgono le condizioni seguenti:*
(i) $K \ni x \mapsto f_t(x)$ *è continua sul compatto* K *per ogni* $t \in I$,
(ii) esiste

$$A \times K \ni (t,x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

ed è continua (congiuntamente nelle due variabili), allora la funzione (tutti gli integrali sono è indifferentemente intesi nel senso di Riemann o Lebesgue):

$$I \ni t \mapsto \int_K f_t(x) d^n x$$

è di classe $C^1(I)$ *e vale l'identità :*

$$\frac{d}{dt}\int_K f_t(x) d^n x = \int_K \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} d^n x \,. \tag{B.1}$$

$\diamondsuit$

Note.
(1) Nel seguito, quando ci riferiremo a serie *assolutamente convergenti* (cioè la serie dei valori assoluti converge ad un numero finito) ne indicheremo la somma con

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \,,$$

dove non è specificato l'ordine con cui si esegue la somma. Ciò non è scorretto dato che le serie assolutamente convergenti possono essere riordinate a piacimento senza alterarne la somma [1].
(2) Nel seguito la misura dell'integrale di Lebesgue sarà ancora indicata con $d^n x$, che è lo stesso simbolo usato nell'integrale di Riemann. Questa notazione non genererà confusione in quanto nelle situazioni in cui compariranno entrambi gli integrali essi coincideranno in valore.

B.1 Teoremi della convergenza monotona e dominata.

Se (X, Σ, μ) è uno spazio misurabile, dove X è l'insieme ambiente, Σ una σ-algebra su X e $\mu : \Sigma \to [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ una misura positiva su X, lo strumento fondamentale per ottenere i teoremi di scambio tra simbolo di integrale e quello di limite/derivata è il ben noto *teorema della convergenza dominata di Lebesgue* [3]. Per completezza prima citiamo anche il cosiddetto *teorema della convergenza monotona* [3] dato che lo abbiamo usato nelle dispense. Nel seguito $\mathscr{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ indicherà lo spazio delle funzioni misurabili su X integrabili rispetto a μ. Nel caso in cui $X = A \subset \mathbb{R}^n$ è Lebesgue-misurabile (cioè appartiene alla σ-algebra di lebesgue) e μ è la misura di Lebesgue $d^n x$ su $\mathbb{R}^n$, scriveremo semplicemente $\mathscr{L}(A)$.

Teorema B.4. (**Convergenza monotona**.) *In riferimento allo spazio misurabile* (X, Σ, μ), *sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni definite su* x *che siano* Σ*-misurabili ed* μ*-integrabili. Se valgono le due condizioni:*

(i) $f_n(x) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *quasi ovunque su* X *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

allora, posto $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, *vale*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \,.$$

♢

Passiamo al teorema della convergenza dominata.

Teorema B.5. (**Convergenza dominata**.) *In riferimento allo spazio misurabile* (X, Σ, μ), *sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni definite su* x *che siano* Σ*-misurabili ed* μ*-integrabili. Se valgono le due condizioni:*

(i) esiste $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$ *quasi ovunque rispetto a* μ *su* X,

(ii) esiste $g \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ *con* $g \geq 0$ *quasi ovunque su* X *e tale che:*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \,, \quad \textit{quasi ovunque su } X, \textit{ per ogni } n \in \mathbb{N} \,,$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $f \in \mathscr{L}^1(X, \Sigma, \mu)$,

(b) $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu$,

(c) $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ *per* $n \to +\infty$,

(d) $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ *per* $n \to +\infty$ *ovvero, in altre paroleunicitaperiodica*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) d\mu \,. \tag{B.2}$$

♢

Osservazioni B.1.

(1) Il controesempio classico per il teorema della convergenza dominata è quello in cui si lavora in $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ con le gaussiane di centro $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) := e^{-(x-n)^2}$. Vale, a causa dell'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \,.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \sqrt{\pi} \,.$$

D'altra parte, se $x \in \mathbb{R}$ è fissato, si ha immediatamente che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} e^{-(x-n)^2} = 0 \, .$$

Concludiamo che la (B.2) non può valere, dato che il primo membro varrebbe $\sqrt{\pi}$ nel caso in esame, mentre il secondo membro varrebbe 0.
La spiegazione del fatto che non si possa applicare il teorema della convergenza dominata è evidente. Non può esistere una funzione g che soddisfa le ipotesi: in ciascun punto dovrebbe maggiorare ogni gaussiana traslata arbitrariamente verso destra. Si può dimostrare che questo implica che g non possa essere integrabile. In realtà l'inesistenza di g segue immediatamente dal fatto che non vale (B.2) come abbiamo direttamente appurato.
(2) La non esistenza di una funzione g che soddisfi le ipotesi del teorema della convergenza dominata, *non* implica automaticamente che non valga la (B.2), visto che il teorema della convergenza dominata fornisce condizioni *sufficienti*, ma non necessarie affinché valga la (B.2).
(3) Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue include il caso in cui si esaminano delle serie. In questo caso (X, Σ, μ) è costruito in questo modo: $X = \mathbb{N}$, Σ è $\mathscr{P}(\mathbb{N})$: l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, e $\mu = \delta$, la *misura che conta i punti*: $\delta(N) =$ numero di elementi di $N \subset \mathbb{N}$. Le funzioni misurabili sono le successioni $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Infine le funzioni integrabili sono le successioni tali che

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |a(m)| < +\infty \, .$$

In altre parole le funzioni integrabili non sono altro che le successioni che producono serie assolutamente convergenti. Si osservi che in tal caso, come ben noto, la somma della serie $\sum_{m \in \mathbb{N}} a(m)$ *non* dipende dall'ordinamento con cui si esegue la somma.
In questo caso, il teorema di Lebesgue fornisce condizioni sufficienti per poter scambiare il simbolo di somma con quello di limite,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{m \in \mathbb{N}} a_n(m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\lim_{n \to +\infty} a_n(m) \right) \, ,$$

quando si ha *una classe* di successioni $\{\{a_n(m)\}_{m \in \mathbb{N}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ per cui $a_n(m) \to a(m)$ se $n \to +\infty$.

Il teorema della convergenza dominata benché molto più generale (vale con ogni tipo di misura e lavora anche su domini di misura infinita), fornisce una dimostrazione alternativa del classico teorema B.1 riferito all'integrale di Riemann:

Proposizione B.1. *Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue, tutte definite sul compatto $K \subset \mathbb{R}^m$ ed a valori in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente per $n \to +\infty$, allora si ha (dove gli integrali indicano quelli valutati nel senso di Riemann o Lebesgue indifferentemente)*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_K f_n d^m x = \int_K \left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right) d^m x \, .$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Essendo le funzioni continue su un compatto, l'integrale di esse secondo Riemann coincide con quello di Lebesgue [3]. Dato che la successione di funzioni continue converge uniformemente, il limite di tali funzioni sarà ancora una funzione continua $f : K \to \mathbb{R}$ (per cui integrabile secondo Riemann e Lebesgue e i due integrali coincideranno nuovamente). Sia $M = \max_K |f(x)|$, che esiste finito in virtù del fatto che K è compatto e f continua. In virtù della convergenza uniforme, se $\epsilon > 0$ esisterà $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > N_\epsilon$

$$\max_K |f_n - f| \leq \epsilon \,.$$

Quindi in particolare:

$$-\epsilon - M < f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon < M + \epsilon \,, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

In particolare, per $n > N_\epsilon$:

$$|f_n(x)| < M + \epsilon \,, \quad \text{per ogni } x \in K.$$

Possiamo allora applicare il teorema convergenza dominata con $g(x) := M + \epsilon$ costantemente su K, provando la (B.2) che coincide con la nostra tesi. Si noti che g è per costruzione in $\mathscr{L}^1(K)$ dato che $\int_K |g| d^m x = (M + \epsilon) Vol(K)$ dove $Vol(K)$ è la misura di Lebesgue (coincidente con quella di Peano-Jordan-Riemann) di K che esiste ed è finita essendo K un compatto. $\square$

Per studiare il problema di scambiare il simbolo di derivata con quello di integrale e di serie abbiamo bisogno di una formulazione leggermente modificata del teorema della convergenza dominata.

Teorema B.6. (**Convergenza dominata 2**.) *Se si generalizzano le ipotesi del teorema B.5 rimpiazzando la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t\in A} \subset \mathscr{L}^1(X,\mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}^m$ è un intorno aperto di $t_0 \in \mathbb{R}$, in modo tale che:*

(i) esiste $f(x) := \lim_{t\to t_0} f_t(x) \in \mathbb{C}$ quasi ovunque rispetto a μ su X,

(ii) esiste $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$|f_t(x)| \leq g(x) \,, \quad \textit{quasi ovunque su } X, \textit{ per ogni } t \in A \,,$$

gli enunciati (a), (b), (c) e (d) del teorema B.5 sono ancora validi sostituendo ovunque $\lim_{n\to+\infty}$ *con* $\lim_{t\to t_0}$.$\diamondsuit$

Dimostrazione. La tesi è immediata conseguenza del teorema della convergenza dominata e del noto risultato di analisi che afferma che: *una funzione tra due spazi metrici $f : X_1 \to X_2$ ammette limite $y \in X_2$ per $x \to x_0 \in X_1$ se e solo se ammette tale limite* per successioni, *ovvero, per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_1$ vale*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y \,.$$

Nel caso in esame $X_1 = A \subset \mathbb{R}^m$ e $X_2 = \mathbb{C}$ dotati delle distanze standard. $\Box$

Questa formulazione del teorema della convergenza dominata ha diverse conseguenze immediate sulle serie di funzioni. A titolo di esempio citiamo il seguente corollario che si dimostra subito lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \delta)$ già visto in un precedente esempio.

Proposizione B.2. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori in $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) definite sull'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $t \in A$ valga*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty \,.$$

e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$f_n = \lim_{t\to t_0} f_n(t)$$

dove t_0 è un punto di accumulazione di A (includendo valori infiniti come casi limite). Se esiste $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $g_n \geq 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n < +\infty$ tale che:

$$|f_n(t)| \leq g_n \,, \quad \textit{per ogni } t \in A \,,$$

allora, per ogni $t_0 \in A$:

$$\lim_{t\to t_0} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{t\to t_0} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,.$$

e

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| < +\infty \,.$$

$\diamondsuit$

B.2 Derivazione sotto il segno di integrale e di serie.

Possiamo allora enunciare e provare il teorema fondamentale riguardante la derivazione sotto il segno di integrale per una misura positiva generale.

Teorema B.7. (**Derivazione sotto il segno di integrale**.) *In riferimento allo spazio misurabile (X, Σ, μ), si consideri una famiglia di funzioni $\{f_t\}_{t\in A} \subset \mathscr{L}^1(X, \mu)$ dove $A \subset \mathbb{R}^m$ è un insieme aperto e $t = (t^1, \ldots, t^m)$. Se valgono le seguenti due condizioni:*

(i) per un certo valore k in $\{1, 2, \ldots, n\}$ esistono le derivate:

$$\frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} \,, \quad \textit{per ogni } x \in X \textit{ e } t \in A$$

(ii) esiste $g \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ con $g \geq 0$ quasi ovunque su X e tale che:

$$\left|\frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}\right| \leq g(x) \,, \quad \textit{quasi ovunque su } X, \textit{ per ogni } t \in A \,,$$

allora valgono i seguenti fatti.
(a) $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k} \in \mathscr{L}^1(X, \Sigma, \mu)$,
(b) *si possono scambiare i simboli di integrale con quello di derivata per ogni* $t \in A$*:*

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k} d\mu(x) \,. \tag{B.3}$$

Se infine:

(iii) per una fissata g *la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di* $k = 1, 2, \ldots, m$*, quasi ovunque in* $x \in X$ *e tutte le funzioni (per ogni* $t \in A$ *fissato):*

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}$$

sono continue, allora
(c) *la funzione:*

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

è in $C^1(A)$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Notiamo che, per ogni $t \in A$, le funzioni $X \ni x \mapsto \frac{\partial h_t}{\partial t^k}$ sono sicuramente misurabili essendo limite (usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale) di funzioni misurabili. Inoltre sono μ-integrabili dato che sono maggiorate, in valore assoluto, da una funzione integrabile per l'ipotesi (ii). Fissiamo $t_0 \in A$. Considerando il rapporto incrementale si ha, dove scriviamo, un po' impropriamente, $t_0 + \tau^k$ al posto di $(t_0^1, \ldots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \ldots, t_0^m)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t^k}\right|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x) = \lim_{\tau^k \to 0} \int_X \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) \,.$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange (restringendosi a lavorare in un intorno aperto e convesso di t_0) e tenendo conto dell'ipotesi (ii) abbiamo:

$$\left| \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} \right| = \left| \left.\frac{\partial h_t(x)}{\partial t}\right|_{t(\tau^k, x)} \right| \leq g(x) \,,$$

dove $t(\tau^k, x)$ è un punto che si trova tra t_0 e $(t_0^1, \ldots, t_0^{k-1}, t_0^k + \tau^k, t_0^{k+1}, \ldots, t_0^m)$ sul segmento che unisce tale coppia di punti. Possiamo allora applicare il teorema B.6 per:

$$f_{\tau^k}(x) := \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} \,,$$

ottendo che esiste il limite

$$\lim_{\tau^k \to 0} \int_X \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \left.\frac{\partial}{\partial t^k}\right|_{t_0} \int_X h_t(x) d\mu(x) \,,$$

e vale:

$$\int_X \lim_{\tau^k \to 0} \frac{h_{t_0+\tau^k}(x) - h_{t_0}(x)}{\tau^k} d\mu(x) =: \int_X \left.\frac{\partial h_t(x)}{\partial t^k}\right|_{t_0} d\mu(x) \,.$$

La tesi è stata provata per quanto riguarda (a) e (b). La dimostrazione di (c) è immediata: dal teorema B.6 tenendo conto dell'ipotesi (ii) si ha che ogni funzione, per $k = 1, \ldots, m$,

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial}{\partial t^k} \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

è continua, da cui la tesi. □

Osservazioni B.2. Nell'ipotesi di validità di (c) la funzione

$$A \ni t \mapsto \int_X h_t(x) d\mu(x)$$

risulta essere $C^1(A)$ e quindi differenziabile su A come funzione di più variabili.

Il teorema B.7 riproduce, come sottocaso il teorema classico B.3. È però fondamentale notare che il teorema B.7 ha validità molto più generale, in quanto lavora con l'integrale di Lebesgue o qualsiasi altra misura positiva, non richiede la continuità delle derivate nelle variabili congiuntamente: lo spazio X su cui si integra nel teorema B.7 potrebbe non essere uno spazio topologico e può anche avere misura infinita.

Proposizione B.3. *Si consideri una classe di funzioni a valori in $\mathbb{R}$, $\{f_t\}_{t\in A}$, definite sul compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e dove $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Se valgono le condizioni seguenti:*
(i) $K \ni x \mapsto f_t(x)$ è continua sul compatto K per ogni $t \in I$,
(ii) esiste

$$A \times K \ni (t, x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

ed è continua (congiuntamente nelle due variabili), allora la funzione (tutti gli integrali sono è indifferentemente intesi nel senso di Riemann o Lebesgue):

$$I \ni t \mapsto \int_K f_t(x) d^n x$$

è di classe $C^1(I)$ e vale l'identità :

$$\frac{d}{dt} \int_K f_t(x) d^n x = \int_K \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} d^n x \,. \tag{B.4}$$

♢

Dimostrazione. Dato che si integra su un compatto, la richiesta di continuità in x di f e della sua derivata assicura che gli integrali di Riemann considerati esistano e coincidano con quelli di Lebesgue. Per ogni $t_0 \in A$ e sia $A_0 \subset A$ un intervallo aperto a chiusura compatta, con $t_0 \in A_0$. La dimostrazione di (B.4) e del fatto che la funzione integrale appartenga a $C^1(I)$ è un'immediata conseguenza del fatto che la funzione

$$\overline{A_0} \times K \ni (t,x) \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}$$

essendo continua sarà limitata, in valore assoluto, da qualche costante $M > 0$. Pertanto possiamo applicare il teorema B.7 usando come funzione g quella che vale costantemente M su K. $\square$

Infine, per quanto riguarda le serie di funzioni, il teorema B.7 si specializza alla seguente proposizione lavorando sullo spazio con misura $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \delta)$.

Proposizione B.4. *Si consideri una successione di funzioni* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dove* $f_n : A \to \mathbb{C}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, con* $A \subset \mathbb{R}^m$ *insieme aperto,* $t = (t^1, \ldots, t^m)$ *e si assuma che valga la convergenza assoluta della serie associata alle* f_n*:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| < +\infty\,, \quad \textit{per ogni } t \in A\,,$$

per cui in particolare anche la serie delle f_n *(senza valore assoluto) converge per ogni valore di* t*. Se sono verificate le seguenti due condizioni:*

(i) per un certo valore k *in* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *esistono le derivate:*

$$\frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}\,, \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N} \textit{ e } t \in A$$

(ii) esiste una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $0 \le g_n$ *costante, con* $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n < +\infty$*, e tale che:*

$$\left|\frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}\right| \le g_n\,, \quad \textit{per ogni } t \in A \textit{ e } n \in \mathbb{N}\,,$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}| < +\infty$*, per cui in particolare anche la serie delle derivate* f_n *rispetto a* t^k *(senza valore assoluto) converge per ogni valore di* t*,*

(b) *si possono scambiare i simboli di integrale con quello di somma per ogni* $t \in A$*:*

$$\frac{\partial}{\partial t^k} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}\,. \tag{B.5}$$

Se infine:

(iii) per una fissata successione di costanti $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *la condizione in (ii) vale contemporaneamente per tutti i valori di* $k = 1, 2, \ldots, m$*, e tutte le funzioni (per ogni* $t \in A$ *fissato):*

$$A \ni t \mapsto \frac{\partial f_n(t)}{\partial t^k}$$

sono continue, allora
(c) *la funzione:*

$$A \ni t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$$

è in $C^1(A)$. $\diamondsuit$

Diversamente dal teorema classico B.2 di derivazione sotto il segno di serie, questo teorema non richiede (eccetto che per la validità dell'ultimo punto) che le derivate delle funzioni nella serie siano funzioni continue. Non è nemmeno richiesta la convergenza uniforme della serie delle funzioni non derivate. La condizione (ii) in ogni caso assicura tra l'altro la convergenza uniforme della serie delle derivate (per il noto teorema di Weierstrass della convergenza totale [1].)

Bibliografia

[1] E. Giusti, *Analisi Matematica*, vol 1 e 2, Bollati-Boringhieri, Torino (2003).

[2] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. II, Academic Press, New York, (1975).

[3] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Bollati-Boringhieri, Torino (1982)

[4] W. Rudin, *Functional Aanlysis*, Mc Graw Hill, Boston (1991).

[5] M.E. Taylor, *Partial Differential Equations*, vol. I, II and III, New York, Springer-Verlag (1996).

[6] A.G. Svesnokov e A.N: Tichonov, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Editori Riuniti, Roma (1984).

[7] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, Moscow (1984).