Chapter 1

ALGEBRA TENSORIALE

1.1 Richiami sugli spazi vettoriali

Definizione 1.1.1 *Uno* **spazio vettoriale** *sul corpo $\Re$ dei reali, è un gruppo additivo abeliano E, sul quale è definita un'operazione di moltiplicazione che ad ogni $\alpha \in \Re$ e $\mathbf{v} \in E$ associa un elemento $\alpha\mathbf{v} \in E$, che gode delle seguenti proprietà:*

1. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
2. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
4. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

$\forall\alpha, \beta \in \Re$ e $\forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$.

Gli elementi di E verranno chiamati **vettori**.

Definizione 1.1.2 *Si dice che n elementi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ di E sono* **linearmente indipendenti**, *quando $\lambda^i\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^i = 0$* [1].

Definizione 1.1.3 *Si dice che uno spazio vettoriale E ha dimensione $n \in \mathcal{N}$ e si indica con E_n, se ogni insieme di vettori linearmente indipendenti ha al più n elementi. Un insieme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di n vettori linearmente indipententi si chiama* **base** *di E_n.*

Proposizione 1.1.1 *Una n-upla $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n$ di vettori è una base di E_n se e solo se ogni vettore $\mathbf{v} \in E_n$ si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare dei vettori dati: $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$.*

Gli elementi della n-upla v^i univocamente individuata da $\mathbf{v}$, si chiamano **componenti** di $\mathbf{v}$.

Proposizione 1.1.2 *Assegnata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed una n-upla di vettori $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$, che per la Proposizione 1.1.1 possone essere espressi da:*

$$\mathbf{e'}_i = A^j{}_i\mathbf{e}_j \tag{1.1}$$

la seconda n-upla è una base se e solo se la matrice $A = \|A^i{}_j\|$ è regolare. Ed in questo caso l'equazione inversa della (1.1) è:

$$\mathbf{e}_i = B^j{}_i\mathbf{e'}_j \tag{1.2}$$

essendo $B = \|B^i{}_j\|$ la matrice inversa di A.

Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ sono due basi di E_n, e $\mathbf{v} \in E_n$, allora possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v'^i\mathbf{e'}_i$$

dalle quali per la (1.2) si ha:

$$v'^j\mathbf{e'}_j = v^i\mathbf{e}_i = v^iB^j{}_i\mathbf{e'}_j \tag{1.3}$$

da cui per la Proposizione 1.1.1 si ricava:

$$v'^j = B^j{}_iv^i \tag{1.4}$$

[1] Si sta usando la *convenzione di Einstein* secondo cui due indici ripetuti di cui uno in alto ed uno in basso (indici muti o legati) sottintendono una sommatoria, mentre ogni altro indice (libero) i sottindende che l'espressione in cui compare va considerata per $i = 1, 2, \ldots, n$

e analogamente

$$v^j = A^j{}_i v'^i. \qquad (1.5)$$

Confrontando la (1.1) con la (1.4) e la (1.2) con la (1.5), si deduce che le componenti di un vettore si trasformano con la matrice inversa della matrice che determina la trasformazione delle basi, per questo motivo le componenti di un vettore si chiamano anche **componenti controvarianti**.

1.2 Forme lineari

Definizione 1.2.1 *Una* **forma lineare** *o* **1-forma** ϕ *su uno spazio vettoriale* E_n *è un'applicazione da* E_n *in* $\Re$ *lineare, cioè:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \textit{ and } \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \qquad \phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) = \alpha\phi(\mathbf{v}) + \beta\phi(\mathbf{u}). \qquad (1.6)$$

Definizione 1.2.2 *Assegnato uno spazio vettoriale* E_n *si chiama* **spazio duale** *di* E_n *e si indica con il simbolo* E_n^**, l'insieme di tutte le forma lineari su* E_n*.*

Proposizione 1.2.1 E_n^* *è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in E_n^* \qquad (\phi_1 + \phi_2)(\mathbf{v}) = \phi_1(\mathbf{v}) + \phi_2(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in E_n$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall \phi \in E_n^* \qquad (\alpha\phi)(\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in E_n$$

danno come risultato elementi di E_n^* e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. •

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, consideriamo le applicazioni $e^1, e^2, \ldots, e^n$ definite da:

$$\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e_i} \in E_n \qquad e^i(\mathbf{v}) = v^i \in \Re \qquad (1.7)$$

si dimostra immediatamente che queste applicazioni sono lineari, quindi sono elementi di E_n^*. Inoltre se $\phi \in E_n^*$, per la (1.7)

$$\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e_i} \in E_n \qquad \phi(\mathbf{v}) = v^i \phi(\mathbf{e_i}) = \phi_i e^i(\mathbf{v}) \quad \text{dove} \quad \phi_i = \phi(\mathbf{e_i}) \qquad (1.8)$$

quindi ϕ può essere espressa come una combinazione lineare degli elementi $e^1, e^2, \ldots, e^n$:

$$\phi = \phi_i e^i. \qquad (1.9)$$

Si può dimostrare che la rappresentazione (1.9) è unica. Infatti supponendo che ne esista un'altra: $\phi = \phi'_i e^i$, sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.9), si ottiene: $(\phi_i - \phi'_i)e^i = 0$, quindi tenendo conto che per la (1.7)

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i{}_j \qquad (1.10)$$

essendo $\delta^i{}_j$ il **simbolo di Kronecker** definito da:

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j; \\ 0 & \text{if } i \neq j, \end{cases} \qquad (1.11)$$

si ha:

$$0 = (\phi_i - \phi'_i)e^i(\mathbf{e}_j) = (\phi_i - \phi'_i)\delta^i{}_j = \phi_j - \phi'_j.$$

Resta così dimostrato che $e^1, e^2, \ldots, e^n$ è una base di E_n^* che si chiama **base duale** di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, e quindi

Proposizione 1.2.2 E_n^* *è uno spazio vettoriale di dimensione* n*.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i$ un qualunque vettore di E_n, allora per la (1.4) si ha:

$$e'^i(\mathbf{v}) = v'^i = B^i{}_j v^j = B^i{}_j e^j(\mathbf{v}) \qquad (1.12)$$

quindi

$$e'^i = B^i{}_j e^j \qquad (1.13)$$

e analogamente

$$e^i = A^i{}_j e'^j. \qquad (1.14)$$

Confrontando le (1.13), (1.14) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le basi duali si trasformano con la matrice inversa rispetto alle basi di E_n a cui sono legate.

Ora, se $\phi = \phi_i e^i = \phi'_i e'^i$ è un elemento di E_n^*, allora

$$\phi'_i = \phi(\mathbf{e}'_i) = \phi(A^j{}_i \mathbf{e}_j) = A^j{}_i \phi(\mathbf{e}_j)) = A^j{}_i \phi_j \tag{1.15}$$

analogamente

$$\phi_i = B^j{}_i \phi'_j. \tag{1.16}$$

Confrontando le (1.15), (1.16) con (1.1), (1.2), si deduce che le componenti di una forma lineare si trasformano con la stessa matrice delle basi di E_n, per questo motivo si chiamano **componenti covarianti**.

Per la Proposizione 1.2.2, il duale E_n^{**} di E_n^* è uno spazio vettoriale di dimensione n. Però questa operazione di iterazione del duale non produce una struttura algebrica nuova, come dimostra il seguente

Teorema 1.2.1 *Esiste un isomorfismo* [2] *canonico* [3] *tra E_n e E_n^{**}*

Prima di dimostrare questo teorema conviene dimostrare il seguente

Lemma 1.2.1 *Se $\tau : E_n \to E'_n$ è un'applicazione lineare e iniettiva tra spazi vettoriali di egual dimensione, allora essa è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che τ è surgettiva. Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n consideriamo i vettori $\tau(\mathbf{e}_1), \tau(\mathbf{e}_2), \ldots, \tau(\mathbf{e}_n) \in E'_n$. Essi costituiscono una base di E'_n, infatti per la linearità e inettività di τ

$$\lambda^i \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tau(\lambda^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^i = 0.$$

Quindi se $\mathbf{v} \in E'_n$ allora $\mathbf{v} = v^i \tau(\mathbf{e}_i) = \tau(v^i \mathbf{e}_i)$. $\bullet$

Dimostrazione Teorema 1. Sia τ l'applicazione definita dalla seguente legge:

$$\forall \mathbf{v} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) : E_n^* \to \Re \quad \text{con} \quad \tau(\mathbf{v})(\phi) = \phi(\mathbf{v}) \in \Re \quad \forall \phi \in E_n^*. \tag{1.17}$$

$\tau(\mathbf{v})$ è lineare, infatti:

$$\tau(\mathbf{v})(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(\mathbf{v}) = \alpha\phi_1(\mathbf{v}) + \beta\phi_2(\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{v})(\phi_1) + \beta\tau(\mathbf{v})(\phi_2)$$

quindi $\tau(\mathbf{v}) \in E_n^{**}$ e $\tau : E_n \to E_n^{**}$.

τ è lineare, infatti se $\alpha, \beta \in \Re$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$ allora

$$\forall \phi \in E_n^* \quad \tau(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\phi) = \phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{u})(\phi) + \beta\tau(\mathbf{v})(\phi) = (\alpha\tau(\mathbf{u}) + \beta\tau(\mathbf{v}))(\phi)$$

quindi

$$\tau(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\tau(\mathbf{u}) + \beta\tau(\mathbf{v}).$$

τ è iniettiva, infatti se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E_n$ sono tali che $\tau(\mathbf{v}_1) = \tau(\mathbf{v}_2)$ allora

$$\forall \phi \in E_n^* \quad \tau(\mathbf{v}_1)(\phi) = \tau(\mathbf{v}_2)(\phi) \Rightarrow \phi(\mathbf{v}_1) = \phi(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \phi(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

Assegnata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n e la sua duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (v_1^i - v_2^i)\mathbf{e}_i$, allora per l'equazione precedente

$$0 = e^i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (v_1^i - v_2^i) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.$$

Da quanto dimostrato fino ad ora e dal Lemma 1.2.1 segue l'asserto. $\bullet$

[2] Un isomorfismo tra due spazi vettoriali é un'applicazione lineare e iniettiva da uno spazio vettoriale su tutto l'altro.

[3] Indipendente dalla base. Tra due spazi vettoriali di ugual dimensione si puó sempre trovare un isomorfismo dipendente dalla base, infatti fissando una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ nel primo spazio vettoriale ed una base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ nel secondo, si dimostra facilmente che l'applicazione $\tau(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \mathbf{e}'_i$ è un isomorfismo.

1.3 Tensori doppi covarianti

Definizione 1.3.1 *Assegnato uno spazio vettoriale E_n, si chiama* **tensore di rango 2 covariante** *o* **tensore doppio covariante***, un'applicazione $T : E_n \times E_n \to \Re$ bilineare, cioè lineare rispetto ad entrambe le variabili:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_n$$

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta T(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad T(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \tag{1.18}$$

L'insieme di tutti i tensori doppi covarianti verrà indicato con uno dei simboli $\mathbf{E}^0{}_2 = E_n^* \otimes E_n^*$

Proposizione 1.3.1 *$E_n^* \otimes E_n^*$ è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in E_n^* \otimes E_n^* \qquad (T_1 + T_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + T_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in E_n^* \otimes E_n^* \qquad (\alpha T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$$

danno come risultato elementi di $E_n^* \otimes E_n^*$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. •

Definizione 1.3.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di due forme lineari $\phi_1, \phi_2 \in E_n^*$ e si indica con il simbolo $\phi_1 \otimes \phi_2$ l'applicazione da $E_n \times E_n$ e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad \phi_1 \otimes \phi_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \phi_1(\mathbf{u})\phi_2(\mathbf{v}). \tag{1.19}$$

È immediato verificare che la (1.19) verifica la condizione (1.18), quindi $\phi_1 \otimes \phi_2 \in E_n^* \otimes E_n^*$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in E_n^* \otimes E_n^*$, per le (1.7), (1.18), (1.19) possiamo scrivere:

$$\forall \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) u^i v^j = T_{ij} e^i(\mathbf{u}) e^j(\mathbf{v}) = T_{ij} e^i \otimes e^j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

dove si è posto $T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $e^i \otimes e^j$:

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{1.20}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra $T = T'_{ij} e^i \otimes e^j$ allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.20), si otterrebbe $(T_{ij} - T'_{ij}) e^i \otimes e^j = 0$ e quindi per (1.10) e (1.19)

$$0 = (T_{ij} - T'_{ij}) e^i \otimes e^j(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = (T_{ij} - T'_{ij}) e^i(\mathbf{e}_h) e^j(\mathbf{e}_k) = (T_{ij} - T'_{ij}) \delta^i{}_h \delta^j{}_k = T_{hk} - T'_{hk}.$$

Poiche ogni $T \in E_n^* \otimes E_n^*$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $e^i \otimes e^j$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $E_n^* \otimes E_n^*$, quindi resta provato che

Proposizione 1.3.2 *$E_n^* \otimes E_n^*$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^2.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T_{ij} e^i \otimes e^j = T'_{ij} e'^i \otimes e'^j$ un elemento di $E_n^* \otimes E_n^*$, allora

$$T'_{ij} = T(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = T(A^h{}_i \mathbf{e}_h, A^k{}_j \mathbf{e}_k) = A^h{}_i A^k{}_j T(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = A^h{}_i A^k{}_j T_{hk} \tag{1.21}$$

e analogamente

$$T_{ij} = B^h{}_i B^k{}_j T'_{hk}. \tag{1.22}$$

Confrontando le (1.21), (1.22) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le componenti di un tensore doppio covariante si trasformano con la stessa matrice delle basi di E_n, per questo motivo tali tensori vengono chiamati *covarianti*.

Abbiamo visto che fissato un tensore doppio covariante, allora è possibile associare ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, n^2 numeri reali T_{ij} (le sue componenti) che si trasformano al variare della base mediante le leggi (1.21) e (1.22). Viceversa se ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, associamo n^2 numeri reali T_{ij}, allora la (1.20) definisce un tensore doppio covariante, se gli n^2 numeri assegnati si trasformano, al variare della base, con le leggi (1.21), (1.22).

Quindi un tensore doppio covariante T può essere introdotto sia mediante una forma bilineare o assegnando n^2 numeri reali T_{ij} in ogni base, che si trasformano al variare della base in accordo con le (1.21), (1.22). [4]

[4] Questo discorso vale ovviamente anche per i vettori e per le forme lineari. Per esempio, un vettore può essere introdotto assegnando n componenti v^i in ogni base, che si trasformano al variare della base mediante le (1.4), (1.5)

Definizione 1.3.3 *Un tensore doppio covariante si dice simmetrico se:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.23}$$

Se T_{ij} sono le componenti di un tensore doppio simmetrico T rispetto ad una qualunque base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, allora si ha:

$$T_{ij} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e_j}) = T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e_i}) = T_{ji}$$

Viceversa se le componenti di un tensore doppio covariante in una data base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ verificano la condizione:

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{1.24}$$

allora

$$\forall \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \in E_n$$

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T(u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = u^i v^j T_{ij} = u^i v^j T_{ji} = u^i v^j T(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = T(v^j \mathbf{e}_j, u^i \mathbf{e}_i) = T(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

quindi T è simmetrico e la (1.24) vale in ogni base. Si ha così:

Proposizione 1.3.3 *Un tensore doppio controvariante è simmetrico se e solo se in una base le sue componenti verificano la (1.24).*

Definizione 1.3.4 *Un tensore doppio covariante si dice antisimmetrico se è verificata la seguente condizione:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.25}$$

Con lo stesso procedimento usato per i tensori simmetrici si dimostra che

Proposizione 1.3.4 *Un tensore doppio controvariante è antisimmetrico se e solo se in una base le sue componenti verificano l'equazione*

$$T_{ij} = -T_{ji}. \tag{1.26}$$

Assegnato un tensore T di compnenti T_{ij} nella generica base di E_n, definiamo i seguenti n^2 numeri reali:

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}) \tag{1.27}$$

che chiameremo parte simmetrica di T_{ij}. Verifichiamo che le (1.27) definiscono un tensore, che denoteremo con il simbolo $S(T)$. [5] Infatti se T'_{ij} sono le componenti di T in un'altra base, legate alle T_{ij} dalle (1.21), (1.22), allora:

$$T'_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T'_{ij} + T'_{ji}) = \frac{1}{2!}(A^h{}_i A^k{}_j T_{hk} + A^k{}_j A^h{}_i T_{kh}) = \frac{1}{2!} A^h{}_i A^k{}_j (T_{hk} + T_{kh}) = A^h{}_i A^k{}_j T_{(hk)}.$$

Analogamente si puo definire la parte antisimmetrica di T:

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2!}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{1.28}$$

e dimostrare che le (1.28) sono le componenti di un tensore, che denoteremo con il simbolo $A(T)$. [6]
Infine dalle ovvie implicazioni:

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}, \quad T_{(ij)} = 0 \Leftrightarrow T_{ij} = -T_{ji} \quad \text{e} \quad T_{[ij]} = 0 \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}$$

segue:

Proposizione 1.3.5 *Ogni tensore 'e uguale alla somma della sua parte simmetrica e antisimetrica ed inoltre è simmetrico (antisimmetrico) se e solo la sua parte antisimmetrica (simmetrica) é nulla.*

[5] Questo è un esempio di come si può definire un tensore mediante le sue componenti. $S(T)$ poteva anche essere definito intrinsecamente dalla legge: $S(T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2!}(T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + T(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$.

[6] La definizione intrinseca di $A(T)$ è : $A(T)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2!}(T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - T(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$.

1.4 Tensori doppi controvarianti

Definizione 1.4.1 *Dato uno spazio vettoriale* E_n*, si chiama* **tensore doppio controvariante** *o* **tensore di rango 2 controvariante***, un'applicazione* $T : E_n^* \times E_n^* \to \Re$ *bilineare:*

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall \phi, \psi, \chi \in E_n^*$$

$$T(\alpha\phi + \beta\psi, \chi) = \alpha T(\phi, \chi) + \beta T(\psi, \chi), \quad T(\phi, \alpha\psi + \beta\chi) = \alpha T(\phi, \psi) + \beta T(\phi, \chi). \tag{1.29}$$

L'insieme di tutti i tensori doppi controvarianti verrà indicato con uno dei simboli $\mathbf{E}^2{}_0 = E_n \otimes E_n$*.* [7]

Proposizione 1.4.1 $E_n \otimes E_n$ *è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in E_n \otimes E_n \qquad (T_1 + T_2)(\phi, \psi) = T_1(\phi, \psi) + T_2(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in E_n^*$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in E_n \otimes E_n \qquad (\alpha T)(\phi, \psi) = \alpha T(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in E_n^*$$

danno come risultato elementi di $E_n \otimes E_n$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. •

Definizione 1.4.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di due vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in E_n$ *e si indica con il simbolo* $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2$ *l'applicazione da* $E_n^* \times E_n^*$ *e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \phi, \psi \in E_n^* \quad \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2(\phi, \psi) = \phi(\mathbf{u}_1)\psi(\mathbf{u}_2).^8 \tag{1.30}$$

È immediato verificare che la (1.30) verifica la condizione (1.29), quindi $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \in E_n \otimes E_n$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in E_n \otimes E_n$, per le (1.29), (1.30) possiamo scrivere:

$$\forall \phi = \phi_i e^i, \psi = \psi_i e^i \in E_n^* \quad T(\phi, \psi) = T(\phi_i e^i, \psi_j e^j) = T(e^i, e^j)\phi_i \psi_j = T^{ij}\phi(\mathbf{e}_i)\psi(\mathbf{e}_j) = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j(\phi, \psi)$$

dove si è posto $T^{ij} = T(e^i, e^j)$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$:

$$T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{1.31}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra $T = T'^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.31), si otterrebbe $(T^{ij} - T'^{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = 0$ e quindi per le (1.10) e (1.30)

$$0 = (T^{ij} - T'^{ij})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j(e^h, e^k) = (T^{ij} - T'^{ij})e^h(\mathbf{e}_i)e^k(\mathbf{e}_j) = (T^{ij} - T'^{ij})\delta^h{}_i \delta^k{}_j = T^{hk} - T'^{hk}.$$

Poiche ogni $T \in E_n \otimes E_n$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^2 prodotti tensoriali $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $E_n \otimes E_n$, quindi resta provato che

Proposizione 1.4.2 $E_n \otimes E_n$ *è uno spazio vettoriale di dimensione* n^2*.*

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T'^{ij}\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j$ un elemento di $E_n \otimes E_n$, allora per la (1.13) e (1.29)

$$T'^{ij} = T(e'^i, e'^j) = T(B^i{}_h e^h, B^j{}_k e^k) = B^i{}_h B^j{}_k T(e^h, e^k) = B^i{}_h B^j{}_k T^{hk} \tag{1.32}$$

e analogamente per la (1.14) e (1.29)

$$T^{ij} = A^i{}_h A^j{}_k T'^{hk}. \tag{1.33}$$

Confrontando le (1.32), (1.33) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che le componenti di un tensore doppio controvariante si trasformano con la matrice inversa rispetto a quella del cambiamento di base di E_n, per questo motivo tali tensori vengono chiamati *controvarianti*.

Per i tensori doppi controvarianti si possono ripetere le stesse considerazioni già fatte per quelli covarianti.

In particolare, seguendo lo stesso ragionamento, si puó vedere che un tensore doppio controvariante può essere introdotto, oltre che nella forma intrinseca data dalla Definizione 1.4.1, anche assegnando, per ogni base di E_n, n^2 numeri reali T^{ij} soggetti alla condizione di trasformarsi, al variare della base, in accordo con le (1.32), (1.33).

Si possono definire i tensori doppi controvarianti simmetrici e antisimmetrici in maniera analoga a (1.23), (1.25). E, come nel caso dei tensori doppi covarianti, si può vedere che, un tensore è simmetrico (antisimmetrico) se e solo se in una data base le componenti soddisfano le equazioni $T^{ij} = T^{ji}$ ($T^{ij} = -T^{ji}$).

Analogamente, utilizzando le stesse formule del paragrafo precedente con gli indici in alto, si possono definire i tensori *parte simmetrica* $S(T)$ e *parte antisimmetrica* $A(T)$ di un tensore doppio controvariante T, e concludere che un tensore doppio controvariante si può scrivere come la somma della sua parte simmetrica e della sua parte antisimmetrica e in particolare che esso è simmetrico (antisimmetrico) se e solo se la sua parte antisimmetrica (simmetrica) è nulla.

[7] Tale notazione è giustificata dal Teorema 1.

[8] Questa definizione si basa sull'isomorfismo (1.17) definito nel Teorema 1

1.5 Tensori di rango k

Definizione 1.5.1 *Dato uno spazio vettoriale E_n, $r, s \in \mathcal{N}$ e $k = r + s$, si chiama* **tensore di tipo (r, s)** *o* **tensore di rango k, r-volte controvariante e s-volte covariante** *un'applicazione*

$$T : \underbrace{E_n^* \times \ldots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{s-volte} \rightarrow \Re$$

multilineare, cioè lineare rispetto ad ogni variabile. L'insieme di tutti i tensori di tipo (r, s) si indica con uno dei simboli $\mathbf{E}^r{}_s = \underbrace{E_n \otimes \ldots \otimes E_n}_{r-volte} \otimes \underbrace{E_n^* \otimes \ldots \otimes E_n^*}_{s-volte}$.[9]

Proposizione 1.5.1 $\mathbf{E}^r{}_s$ *è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che le seguenti operazioni:

$$\forall T_1, T_2 \in \mathbf{E}^r{}_s \qquad (T_1 + T_2)(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = T_1(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) + T_2(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$$

$$\forall \alpha \in \Re, \forall T \in \mathbf{E}^r{}_s \qquad (\alpha T)(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = \alpha T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$$

$$\forall \phi_1, \ldots, \phi_r \in E_n^* \quad \forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in E_n$$

danno come risultato elementi di $E^r{}_s$ e soddisfano gli assiomi degli spazi vettoriali. •

Definizione 1.5.2 *Si chiama* **prodotto tensoriale** *di r vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in E_n$ e s 1-forme $\phi_1, \ldots, \phi_s \in E_n^*$ e si indica con il simbolo $\mathbf{u}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_s$, l'applicazione da $\underbrace{E_n^* \times \ldots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{s-volte}$ e a valori reali definita dalla seguente legge:*

$$\forall \psi_1, \ldots, \psi_r \in E_n^*, \forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in E_n$$

$$\mathbf{u}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_s(\psi_1, \ldots, \psi_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = \psi_1(\mathbf{u}_1) \ldots \psi_r(\mathbf{u}_r)\phi_1(\mathbf{v}_1) \ldots \phi_r(\mathbf{v}_s). \tag{1.34}$$

È immediato verificare che la (1.34) è multilineare, quindi $\mathbf{u}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{u}_r \otimes \phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_s \in \mathbf{E}^r{}_s$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n ed in corrispondenza la base duale $e^1, e^2, \ldots, e^n$, se $T \in \mathbf{E}^r{}_s$, per la multilinearità e la (1.34), possiamo scrivere:

$$\forall \phi_1 = \phi_{1 i_1} e^{i_1}, \ldots, \phi_r = \phi_{r i_r} e^{i_r} \in E_n^* \quad \forall \mathbf{v_1} = v_1{}^{j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v_s} = v_s{}^{j_s} \mathbf{e}_{j_s} \in E_n$$

$$T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s}) = T(\phi_{1 i_1} e^{i_1}, \ldots, \phi_{r i_r} e^{i_r}, v_1{}^{j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, v_s{}^{j_s} \mathbf{e}_{j_s}) =$$
$$T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s}) \phi_{1 i_1} \ldots \phi_{r i_r} v_1{}^{j_1} \ldots v_s{}^{j_s} = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \phi_1(\mathbf{e}_{i_1}) \ldots \phi_r(\mathbf{e}_{i_r}) e^{j_1}(\mathbf{v_1}) \ldots e^{j_s}(\mathbf{v_s}) =$$
$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_s})$$

dove si è posto $T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s})$, quindi T si può esprimere come una combinazione lineare degli n^{r+s} prodotti tensoriali $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$:

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}. \tag{1.35}$$

Si può dimostrare che questa rappresentazione di T è unica. Infatti se ce ne fosse un'altra

$$T = T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$$

allora sottraendo membro a membro quest'ultima dalla (1.35), si otterrebbe

$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s} = 0$$

e quindi

$$0 = (T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}(e^{h_1}, \ldots, e^{h_r}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_s}) =$$
$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) e^{h_1}(\mathbf{e}_{i_1}) \ldots e^{h_r}(\mathbf{e}_{i_r}) e^{j_1}(\mathbf{e}_{k_1}) \ldots e^{j_s}(\mathbf{e}_{k_s}) =$$
$$(T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} - T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}) \delta^{h_1}{}_{i_1} \ldots \delta^{h_r}{}_{i_r} \delta^{j_1}{}_{k_1} \ldots \delta^{j_s}{}_{k_s} = T^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s} - T'^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s}.$$

Poichè ogni $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ si può scrivere in uno ed un sol modo come combinazione lineare degli n^{r+s} prodotti tensoriali $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$, ne segue che questi ultimi costituiscono una base di $\mathbf{E}^r{}_s$, quindi resta provato che

[9] La definizione viene data in questa forma per semplicità di scrittura, ma l'ordine dei fattori non è vincolante, per esempio $\mathbf{E}_1{}^2{}_1 = E_n^* \otimes E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$ è l'insieme delle applicazioni multilineari da $E_n \times E_n^* \times E_n^* \times E_n$ a valori in $\Re$. Osserviamo inoltre che: $\mathbf{E}^0{}_1 = E_n^*$, $\mathbf{E}^1{}_0 = E_n^{**} \sim E_n$ (Teorema 1) e per convenzione $\mathbf{E}^0{}_0 = \Re$.

Proposizione 1.5.2 $\mathbf{E}^r{}_s$ *è uno spazio vettoriale di dimensione* n^{r+s}.

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ due basi di E_n legate fra di loro dalle (1.1) e (1.2) e denotiamo con $e^1, e^2, \ldots, e^n$ e $e'^1, e'^2, \ldots, e'^n$ rispettivamente le loro basi duali. Sia $T = T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s} = T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \mathbf{e}'_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{i_r} \otimes e'^{j_1} \otimes \ldots \otimes e'^{j_s}$ un elemento di $\mathbf{E}^r{}_s$, allora per (1.1) e (1.13)

$$T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = T(e'^{i_1}, \ldots, e'^{i_r}, \mathbf{e}'_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}'_{j_s}) = T(B^{i_1}{}_{h_1} e^{h_1}, \ldots, B^{i_r}{}_{h_r} e^{h_r}, A^{k_1}{}_{j_1} \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, A^{k_s}{}_{j_s} \mathbf{e}_{k_s}) =$$

$$B^{i_1}{}_{h_1} \ldots B^{i_r}{}_{h_r} A^{k_1}{}_{j_1} \ldots A^{k_s}{}_{j_s} T(e^{h_1}, \ldots, e^{h_r}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_s}) = B^{i_1}{}_{h_1} \ldots B^{i_r}{}_{h_r} A^{k_1}{}_{j_1} \ldots A^{k_s}{}_{j_s} T^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s} \tag{1.36}$$

e analogamente per (1.2) (1.14)

$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = A^{i_1}{}_{h_1} \ldots A^{i_r}{}_{h_r} B^{k_1}{}_{j_1} \ldots B^{k_s}{}_{j_s} T'^{h_1 \ldots h_r}{}_{k_1 \ldots k_s}. \tag{1.37}$$

Confrontando le (1.36), (1.37) rispettivamente con le (1.1), (1.2) si vede che agli r indici in alto corrisponde la matrice inversa rispetto a quella del cambiamento di base (legge di controvarianza), mentre agli indici in basso corrisponde la stessa matrice (legge di covarianza), per questo motivo tali tensori vengono chiamati *r-volte controvarianti e s-volte covarianti*, gli indici in alto *indici di controvarianza* e gli indici in basso *indici di covarianza*.

Seguendo lo stesso ragionamento fatto nel caso dei tensori doppi covarianti, si può vedere che un tensore di rango $k = r + s$ può essere introdotto, oltre che nella forma intrinseca data dalla Definizione 1.5.1, anche assegnando, per ogni base di E_n, n^k numeri reali $T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ soggetti alla condizione di trasformarsi, al variare della base, in accordo con le (1.36), (1.37).

Le nozioni di simmetria, antisimmetria, parte simmetrica, parte antisimmetrica, introdotte per i tensori doppi, ammettono svariate genealizzazioni nel caso di tensori generici. In generale t indici di covarianza racchiusi da parentesi tonde indicano $\frac{1}{t!}$ per la somma su tutte le possibili permutazione su quegli indici, mentre t indici di covarianza racchiusi da parentesi quadre indicano $\frac{1}{t!}$ per la somma su tutte le possibili permutazione pari su quegli indici meno la differenza sulle permutazioni dispari. La stessa cosa vale se si trovano t indici di controvarianza racchiusi da parentesi tonde o quadre. Di seguito, verranno fatti alcuni esempi, che servono per dare un'idea di come si procede in generale.

Sia $T \in \mathbf{E}^1{}_3$, un tensore di componenti, in una data base, $T^i{}_{jhk}$. Allora si può vedere che T è simmetrico rispetto agli ultimi due indici[10] se e solo se $T^i{}_{jhk} = T^i{}_{jkh}$, condizione che è verificata se e solo se $T^i{}_{j[hk]} = 0$, dove $T^i{}_{j[hk]} = \frac{1}{2!}(T^i{}_{jhk} - T^i{}_{jkh})$.

Possiamo, per esempio, definire, in accordo con quanto detto prima, il tensore *parte antisimmetrica* di T rispetto agli indici di covarianza:

$$T^i{}_{[jhk]} = \frac{1}{3!}(T^i{}_{jhk} + T^i{}_{hkj} + T^i{}_{kjh} - T^i{}_{jkh} - T^i{}_{khj} - T^i{}_{hjk}). \tag{1.38}$$

La dimostrazione della tensorialità di 1.38 è identica a quella della tensorialità di $T_{(ij)}$.

Se T è simmetrico rispetto agli ultimi due indici allora dalla (1.38) segue immediatamente che $T^i{}_{[jhk]} = 0$. Se invece T è antisimmetrico rispetto agli ultimi due indici: $T^i{}_{jhk} = -T^i{}_{jkh} \Leftrightarrow T^i{}_{j(hk)} = 0$, allora:

$$T^i{}_{[jhk]} = \frac{1}{3}(T^i{}_{jhk} + T^i{}_{hkj} + T^i{}_{kjh}). \tag{1.39}$$

Un altro esempio di simmetria è quella che si ottiene scambiamdo gli indici a coppie. Per esempio se $T \in \mathbf{E^0}_4$ è un tensore di componenti, in una data base, T_{ijhk}, allora

$$\forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in E_n \quad T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = T(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

è equivalente a $T_{ijhk} = T_{hkij}$.

1.6 Operazioni sui tensori

Definizione 1.6.1 *Assegnati due tensori* $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ *e* $S \in \mathbf{E}^h{}_k$, *si chiama* **prodotto tensoriale** *di* T *e* S *l'applicazione*

$$T \otimes S : \underbrace{E_n^* \times \ldots \times E_n^*}_{r-volte} \times \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{s-volte} \times \underbrace{E_n^* \times \ldots \times E_n^*}_{h-volte} \times \underbrace{E_n \times \ldots \times E_n}_{k-volte} \to \Re$$

definita da

$$\forall \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k \quad \forall \phi_1, \ldots, \phi_r, \psi_1, \ldots, \psi_h \in E_n^*$$

$$T \otimes S(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \psi_1, \ldots, \psi_h, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k) = T(\phi_1, \ldots, \phi_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) S(\psi_1, \ldots, \psi_h, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k) \tag{1.40}$$

[10] $\forall \phi \in E^*{}_n$ and $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_n \quad T(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$

Ovviamente la definizione precedente implica che $T \otimes S$ è lineare rispetto a tutte le variabili ed inoltre se, rispetto ad una data base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in E_n$, T ha componenti $T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots j_s}$ e S ha componenti $S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots q_k}$, allora

$$(T \otimes S)^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}{}^{p_1 \ldots p_h}{}_{q_1 \ldots q_k} = T \otimes S(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s}, e^{p_1}, \ldots, e^{p_h}, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_k}) =$$

$$T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_s}) S(e^{p_1}, \ldots, e^{p_h}, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_k}) = T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots j_s} S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots q_k}.$$

Si ha quindi

Proposizione 1.6.1 *Se $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ e $S \in \mathbf{E}^h{}_k$ allora $T \otimes S \in \mathbf{E}^r{}_s{}^h{}_k$ e, in un'assegnata base, le componenti di $T \otimes S$ sono i prodotti delle componenti di T per quelle di S.*

Osserviamo che il, prodotto tensoriale di due tensori non è commutativo, infatti, mantenendo la notazione della Definizione 1.6.1, $S \otimes T \in \mathbf{E}^h{}_k{}^r{}_s$ che in generale è diverso da $\mathbf{E}^r{}_s{}^h{}_k$.

Definizione 1.6.2 *Assegnato un tensore $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ con $r, s \neq 0$ avente come componenti gli n^{r+s} numeri reali $T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ rispetto ad una data base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, si chiama* **operazione di saturazione degli indici***, l'operazione che consiste nel saturare un indice di controvarianza con uno di covarianza. Per esempio, tanto per fissare le idee e per semplicità di scrittura, i_1 e j_1:*

$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} \rightarrow S^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s} = T^{i i_2 \ldots i_r}{}_{i j_2 \ldots j_s}. \tag{1.41}$$

Se $T'^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ sono le componenti di T in una nuova base $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ di E_n, legata alla prima dalle (1.1), (1.2), allora

$$S'^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s} = T'^{i i_2 \ldots i_r}{}_{i j_2 \ldots j_s} = B^i{}_{k_1} B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_1}{}_i A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{k_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} =$$

$$\delta^{h_1}{}_{k_1} B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{k_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} = B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} T^{h_1 k_2 \ldots k_r}{}_{h_1 h_2 \ldots h_s} =$$

$$B^{i_2}{}_{k_2} \ldots B^{i_r}{}_{k_r} A^{h_2}{}_{j_2} \ldots A^{h_s}{}_{j_s} S^{k_2 \ldots k_r}{}_{h_2 \ldots h_s}$$

essendo $B^i{}_{k_1} A^{h_1}{}_i = \delta^{h_1}{}_{k_1}$. Resta così dimostrato che gli $n^{r-1+s-1}$ numeri reali $S^{i_2 \ldots i_r}{}_{j_2 \ldots j_s}$ si trasformano al variare della base come le componenti di un tensore. Quindi

Proposizione 1.6.2 *L'operazione di saturazione degli indici trasforma un tensore di $\mathbf{E}^r{}_s$ in un tensore di $\mathbf{E}^{r-1}{}_{s-1}$, quindi abbassa di due il rango.*[11]

Ovviamente questa operazione si può ripetere fino a quando restano sia indici di controvarianza che di covarianza.

Definizione 1.6.3 *Dati due tensori $T \in \mathbf{E}^r{}_s$ e $S \in \mathbf{E}^h{}_k$, si chiama* **moltiplicazione contratta** *di T e S, l'operazione che consiste prima nel moltiplicare tensorialmente T e S e poi nel saturare un indice di controvarianza (covarianza) di T con un indice di covarianza (controvarianza) di S una o più volte.*

Il risultato di una moltiplicazione contratta é ovviamente un tensore, poichè ciascuna delle due operazioni dà come risultato un tensore. Mantenendo le notazioni della definizione precedente il tensore risultante appartiene a $\mathbf{E}^{r-p}{}_{s-q}{}^{h-q}{}_{k-p}$, essendo $p+q$ il numero delle saturazioni.

1.7 Criterio di tensorialità

Si è visto nei paragrafi precedenti che se si associano ad ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, n^{r+s} numeri reali $T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$, questi ultimi si possono considerare le componenti di un tensore di $\mathbf{E}^r{}_s$ se e solo se, al variare della base sono verificate le (1.36) (1.37). Tuttavia questa condizione non è sempre agevole da verificare e normalmente si utilizza un criterio che richiede calcoli più semplici.

Si procede nel seguente modo: si considera uno spazio tensoriale $\mathbf{E}^h{}_k$, se S è il generico tensore di $\mathbf{E}^h{}_k$, di componenti nella base assegnata $S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_1,\ldots,q_k}$, si esegue un'operazione di moltiplicazione contratta tra le componenti di S e le quantitá introdotte prima[12], cioè si considerano le $n^{r+h-1+s+k-1}$ quantità

$$H^{i_2,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s,}{}^{p_1,\ldots,p_h}{}_{q_2,\ldots,q_k} = T^{i,i_2,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} S^{p_1,\ldots,p_h}{}_{i,q_2,\ldots,q_k},^{13} \tag{1.42}$$

allora si dimostra che

[11] Se $r = s = 1$ il risultato è un elemento di $E^0{}_0 = \Re$, cio'è un numero che non dipende dalla base: uno *scalare intrinseco*.

[12] ovviamente $\mathbf{E}^h{}_k$ si sceglie in maniera tale che questo sia possibile: se per esempio $r = 0$ allora deve essere almeno $h = 1$.

[13] la scelta degli indici saturati è stata fatta per semplicità di scrittura, ovviamente si poteva fare una qualunque altra scelta. Si potevano saturare anche più coppie di indici.

Teorema 1.7.1 *$T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s}$ sono le componenti di un tensore se e solo se lo sono le quantità al primo membro della 1.42, per ogni $S \in \mathbf{E}^h{}_k$.*

La condizione è ovviamente necessaria perchè, per quanto visto nella sezione precedente, la moltiplicazione tensoriale contratta tra due tensori dà come risultato un tensore. Dimostriamo la sufficienza in un casi particolari, utilizzando diverse saturazioni[14]:

1. $r = 1$, $s = 2$, scegliendo $h = 1$ e $k = 0$ e saturando il primo indice di covarianza.

2. $r = 1$, $s = 2$, scegliendo $h = 2$ e $k = 1$ e saturando gli indici ordinatamente.

1. In ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, vengono assegnate n^3 quantità $T^i{}_{jk}$ tali che comunque si scelga un vettore $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, le n^2 quantità $H^i{}_k = T^i{}_{jk} v^j$ sono le componenti di un tensore. Se si considera una nuova base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ e si denotano con l'apice tutte le quantità definite nella nuova base, tenendo conto della tensorialità sia di $H^i{}_k$ che di v^j e delle (1.36), (1.37)

$$T'^r{}_{hs} v'^h = H'^r{}_s = B^r{}_i A^k{}_s H^i{}_k = B^r{}_i A^k{}_s T^i{}_{jk} v^j = B^r{}_i A^k{}_s T^i{}_{jk} A^j{}_h v'^h$$

da cui

$$(T'^r{}_{hs} - B^r{}_i A^k{}_s A^j{}_h T^i{}_{jk}) v'^h = 0.$$

Poichè il vettore $\mathbf{v}$ e quindi le sue componenti sono arbitrarie[15], si ottiene

$$T'^r{}_{ts} = B^r{}_i A^j{}_t A^k{}_s T^i{}_{jk} \tag{1.43}$$

2. In ogni base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, vengono assegnate n^3 quantità $T^i{}_{jk}$ tali che comunque si scelga un tensore di componenti $S^{ij}{}_h$ allora $H = T^i{}_{jk} S^{jk}{}_i$ sia un tensore di $\mathbf{E}^0{}_0$, cioè uno scalare intrinseco (non dipendente dalla base). Tenendo conto di queste ipotesi e delle (1.36), (1.37), si ha

$$T'^r{}_{ts} S'^{ts}{}_r = H' = H = T^i{}_{jk} S^{jk}{}_i = T^i{}_{jk} A^j{}_t A^k{}_s B^r{}_i S'^{ts}{}_r$$

da cui

$$(T'^r{}_{ts} - T^i{}_{jk} A^j{}_t A^k{}_s B^r{}_i) S'^{jk}{}_i = 0.$$

Poichè S e quindi le sue componenti sono arbitrarie, si ottiene nuovamente la (1.43).

1.8 Tensore metrico

Definizione 1.8.1 *Assegnato uno spazio vettoriale E_n, un tensore doppio covariante g, si chiama* **tensore metrico** *o* **metrica***, se*

1. *è simmetrico:* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;

2. *è non degenere:* $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in E_n \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ di E_n e denotate con $g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ le componenti di g in tale base, allora la condizione 2 della definizione precedente è equivalente a:

$$(\forall v^j \quad g_{ij} u^i v^j = 0 \ \rightarrow u^i = 0) \Leftrightarrow (g_{ij} u^i = 0 \rightarrow u^i = 0) \Leftrightarrow \det \|g_{ij}\| \neq 0. \tag{1.44}$$

Quindi, tenendo conto anche di quanto specificato per i tensori simmetrici nella sezione 3, si può concludere che le componenti di un tensore metrico, formano una matrice simmetrica e non degenere. E viceversa gli elementi di ogni matrice simmetrica e non degenere possono essere considerati le componenti di un tensore metrico in una base assegnata.

Posto:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{1.45}$$

è immediato verificare che, stante la definizione 1.8.1, la (1.45) verifica gli assiomi che definiscono il prodotto scalare e quindi, in particolare, è possibile definire il quadrato del generico vettore $\mathbf{v} \in E_n$: $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, il **modulo** di $\mathbf{v}$: $|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|}$, il coseno dell'angolo ϕ formato da due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$ di modulo non nullo: $\cos(\phi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ e la condizione di ortogonalità tra due vettori: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Definizione 1.8.2 *Uno spazio vettoriale con un tensore metrico si chiame* **euclideo***.*

[14] la tecnica dimostrativa usata in questi casi è identica a quella che si adotta in tutti gli altri casi e nel caso più generale, l'unica differenza è la lunghezza delle espressioni che intervengono.

[15] basta prendere $v'^h = \delta^h{}_t$

Comunque la definizione 1.8.1 non esclude che un vettore non nullo possa avere modulo nullo e perciò essere ortogonale a se stesso, quindi non è applicabile in un contesto geometrico dove le distanze hanno la forma pitagorica. Perché questo sia possibile, la 2 della definizione 1.8.1 deve essere sostituita dalla

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{1.46}$$

Ovviamente la (1.46) è più restrittiva della 2 della definizione 1.8.1, infatti stante la (1.46) se $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\ \forall \mathbf{v} \in E_n$, in particolare $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. La (1.46) è equivalente ad affermare che in ogni base, le componenti g_{ij} di g, devono verificare la condizione $g_{ij}u^i u^j \geq 0 \quad \forall u^i \in \Re$ e $g_{ij}u^i u^j = 0 \Rightarrow u^i = 0$, quindi la forma quadratica $g_{ij}u^i u^j$ deve essere definita positiva, ed in particolare $\det \|g_{ij}\| > 0$.

Definizione 1.8.3 *Uno spazio vettoriale con una metrica verificante la (1.46) si chiama* **propriamente euclideo** *e la metrica* **euclidea***. In caso contrario lo spazio vettoriale si chiama* **pseudo euclideo** *e la metrica* **pseudo euclidea***.*

Tornando al caso generale, si puó dimostrare il seguente

Teorema 1.8.1 *É sempre possibile determinare una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ di E_n, tale che*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \pm\delta_{ij} = \begin{cases} \pm 1, & se\ i = j; \\ 0 & se\ i \neq j, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \|g_{ij}\| = diag(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{h-volte}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-volte}) \tag{1.47}$$

con $h + k = n$.

Prima di dimostrare il teorama conviene dimostrare alcuni lemmi.

Lemma 1.8.1 *È sempre possibile determinare un vettore $\mathbf{e} \in E_n$ tale che $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \neq 0$.*

Dimostrazione. Infatti, se ciò non fosse vero, il quadrato di ogni vettore di E_n dovrebbe essere nullo, ma, in questo caso, per la

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \left[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right]$$

che si dimostra facilmente applicando la proprietà distributiva al secondo menbro, il prodotto scalare di due vettori qualunque di E_n dovrebbe essere nullo, il che contraddice la (2) della definizione 1.8.1. •

Lemma 1.8.2 *Se $\mathbf{e} \in E_n$ ha modulo non nullo, allora l'insieme $H = \{\mathbf{u} \in E_n \mid \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di E_n di dimensione $n - 1$.*

Dimostrazione. Se $\alpha, \beta \in \Re$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ allora $\mathbf{e} \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} + \beta\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = 0$, quindi $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in H$, questo dimostra che H è un sottospazio vettoriale di E_n. Denotata con p la dimensione di H, poichè $\mathbf{e} \notin H$, chiaramente $p < n$, e supponiamo per assurdo che sia $p < n - 1$. Sia $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ una base di H ed aggiungiamo ad essi altri $n - p$ vettori $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ in modo che insieme costituiscano una base di E_n. Sia $\mathbf{v} = v^{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \dots + v^n\mathbf{e}_n$, poichè $\mathbf{v} \notin H$ (altrimenti i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{p+1}, \dots \mathbf{e}_n$ sarebbero linearmente dipendenti) da $\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = 0$ segue che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $v^{p+1} = \dots = v^n = 0$. D'altra parte l'equazione $\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = v^{p+1}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{p+1} + \dots + v^n\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_n = 0$ nelle $n - p > 1$ incognite $v^{p+1} \dots v^n$ ed a coifficienti non nulli, ammette certamente soluzioni diverse da quella nulla. Si è così arrivati ad una contraddizione determinata dall'aver supposto $p < n - 1$, quindi deve essere $p = n - 1$. •

Dimostrazione Teorema 1.8.1. Utilizzando il lemma 1.8.1 scegliamo un vettore $\mathbf{e'}_1 \in E_n$ tale che $\mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e'}_1 \neq 0$. Denotiamo con H_{n-1} l'insieme di tutti i vettori ortogonali ad $\mathbf{e'}_1$, che per il lemma 1.8.2 è un sottospazio di E_n di dimensione $n - 1$. Introdotta una base $\mathbf{e''}_2, \dots, \mathbf{e''}_n$ in H_{n-1}, allora $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e''}_2, \dots, \mathbf{e''}_n$ è una base di E_n, infatti da $\lambda_1\mathbf{e'}_1 + \lambda_2\mathbf{e''}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{e''}_n = 0$ moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{e'}_1$, si trova $\lambda_1\mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e'}_1 = 0$ da cui $\lambda_1 = 0$, quindi $\lambda_2\mathbf{e''}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{e''}_n = 0$, da cui $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Cosí, tenendo conto che $\mathbf{e'}_1 \cdot \mathbf{e''}_i = 0$, le componenti di g in questa base sono:

$$\|g_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{matrix} \right\|$$

quindi la matrice

$$\left\| \begin{matrix} g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{1.48}$$

ha determinante eguale a $\frac{det\,\|g_{ij}\|}{g_{11}} \neq 0$ ed essendo simmetrica, definisce un prodotto scalare su H_{n-1}. A questo punto il discorso fatto su E_n si può ripetere su H_{n-1}: per il lemma 1.8.1, si può sceglie un vettore $\mathbf{e'}_2 \in H_{n-1}$, di modulo non nullo, si introduce il sottospazio H_{n-2} dei vettori di H_{n-1} ad esso ortogonali, si fa vedere che la restrizione a H_{n-2} del prodotto scalare su H_{n-1} definisce un prodotto scalare su H_{n-2}, quindi ancora per il lemma 1.8.1 si può scegliere su H_{n-2} un vettore $\mathbf{e'}_3$ di modulo non nullo e ortogonale ai precedenti. Iterando questo ragionamento si arrivano a costruire n vettori $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ a due a due ortogonali.[16] Allora si dimostra che i vettori oltre ad essere a due a due ortogonali sono anche linearmente indipendenti, infatti se $\lambda_i \mathbf{e'}_i = 0$ allora $0 = \lambda^i \mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_j = \pm\lambda^i \delta_{ij}$ quindi $\lambda^j = 0$. È stata così costruita una base ortogonale. I vettori $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e'}_i}{|\mathbf{e'}_i|}$ sono quelli cercati, infatti se $i \neq j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_j}{|\mathbf{e'}_i||\mathbf{e'}_j|} = 0$, invece $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_i}{|\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e'}_i|} = \pm 1$. •

Definizione 1.8.4 *Una base verificante la (1.47)si chiama* **base ortonormale**.

Teorema 1.8.2 *I numeri h e k nella (1.47) non dipendono dalla particolare base ortonormale scelta.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sia una base in cui vale la (1.47) e $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \ldots, \mathbf{e'}_n$ u'altra base in cui

$$g'(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e'}_j) = \pm\delta^i{}_j \quad \Leftrightarrow \quad \|g'_{ij}\| = diag(\underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{p-volte}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{q-volte})$$

e supponiamo per assurdo che $h \neq p$, per esempio $h < p$. Consideriamo una terza base $\mathbf{e''}_1, \mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$, legata alle prime due dalle

$$\mathbf{e''}_i = A^i{}_j \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e''}_i = C^i{}_j \mathbf{e'}_i.$$

Sia $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i = v''^i \mathbf{e''}_i \in E_n$, allora, per la (1.5), si ha:

$$v^i = A^i{}_j v''^j, \quad v'^i = C^i{}_j v''^j. \tag{1.49}$$

Se imponiamo che

$$v^1 = \ldots = v^h = 0 \quad \text{e} \quad v'^{p+1} = \ldots, v'^n = 0 \tag{1.50}$$

allora per la (1.49) si ottiene il sistema $A^1{}_j v''^j = 0, \ldots, A^h{}_j v''^j = 0$, $C^{p+1}{}_j v''^j = 0, \ldots, C^n{}_j v''^j = 0$, che è un sistema omogeneo di $h+n-p < n$ equazione nelle n incognite v''^i, che per il teorema di Rouchè-Capelli ammette soluzioni diverse da quella nulla. Così ogni soluzione non nulla delle precedenti equazioni determina le componenti nella base $\mathbf{e''}_1, \mathbf{e''}_2, \ldots, \mathbf{e''}_n$ di un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ che verifica le equazioni (1.50). Ma tale vettore non può esistere perchè se calcoliamo $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ nella prima base otteniamo ${v^{h+1}}^2 + \ldots + {v^n}^2 > 0$, mentre nella seconda base $-{v'^1}^2 - \ldots - {v'^p}^2 < 0$, che è ovviamente assurdo perchè il valore di $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ non può dipendere dalla base. •

Definizione 1.8.5 *Si chiama* **segnatura** *di un tensore metrico, il numero $k - h$.*

Chiaramente per una metrica euclidea $h = 0$ e $k = n$ quindi la segnatura è n.

Definizione 1.8.6 *Un tensore metrico si chiama* **lorentziano** *o* **metrica di Lorentz** *se la segnatura è $n - 2$: $\|g_{ij}\| = diag(-1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(n-1)-volte})$.*

In una metrica di Lorentz i vettori possono aver modulo positivo, negativo o nullo. Infatti se prendiamo una base ortonormale $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, allora $g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = g_{11} = -1$, per $i \neq 1$ $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = g_{ii} = 1$ e $g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + 2g(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = -1 + 1 + 0 = 0$.

Definizione 1.8.7 *Se g è una metrica di Lorentz, un vettore $\mathbf{v} \in E_n$ si chiama* **vettore di tipo tempo** *se $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$,* **vettore di tipo spazio** *se $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$,* **vettore di tipo luce** *o* **vettore di tipo nullo** *se $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.*

[16] la necessità di puntualizzare che la restrizione, ad ogni sottospazio H_p, del prodotto scalare su E_n definisce effettivamente un prodotto scalare, deriva dal fatto che rispetto al prodotto scalare su E_n esistono sottospazi in cui tutti i vettori hanno modulo nullo.

1.9 Operazioni di innalzamento e abbassamento degli indici

Teorema 1.9.1 *Sia E_n uno spazio vettoriale e g una metrica su E_n. Allora g determina un isomorfismo tra E_n e ${E^*}_n$.*

Dimostrazione. $\forall \mathbf{v} \in E_n$, consideriamo l'applicazione $\sigma(\mathbf{v}) : E_n \to \Re$ definita dalla seguente legge di corrispondenza:

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad (\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{1.51}$$

Dalla linearità di g rispetto alla seconda variabile segue la linearità di $\sigma(\mathbf{v})$, quindi $\sigma(\mathbf{v}) \in {E^*}_n$, di conseguenza resta definita l'applicazione $\sigma : E_n \to {E^*}_n$. Dalla linearità di g rispetto alla prima variabile segue la linearità di σ. Inoltre σ è iniettiva, infatti se $\mathbf{v} \in E_n$ è tale che $\sigma(\mathbf{v}) = 0$, allora da questa, dalla (1.51) e dalla 2 della definizione 1.8.1

$$\forall \mathbf{u} \in E_n \quad (\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in E_n \quad g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Da quanto fino ad ora dimostrato e dal lemma 1.2.1, segue la tesi. •

Sia, ora, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ una base di E_n, e $e^1, e^2, \ldots, e^n$ la base duale, se $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i \in E_n$, allora $(\sigma(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = g_{ij} v^i u^j = g_{ij} v^i e^j(\mathbf{u})$, quindi

$$\sigma(\mathbf{v}) = g_{ij} v^i e^j \Rightarrow (\sigma(\mathbf{v}))_j = g_{ij} v^i. \tag{1.52}$$

Definizione 1.9.1 *Se $\mathbf{v} \in E_n$ ha componenti (controvarianti) v^i in una data base, allora*

$$v_j = g_{ij} v^i \tag{1.53}$$

si chiamano **componeti covarianti** *di* $\mathbf{v}$.

La definizione precedente è motivata dal fatto che le (1.53) sono le componenti della forma lineare associata a $\mathbf{v}$ dall'isomorfismo σ. Si dice anche che nella (1.53) le componenti del tensore metrico fanno **abbassare l'indice** delle componenti controvarianti di $\mathbf{v}$.

L'operazione di abbassamento degli indici si può estendere ai tensori. Supponiamo tanto per fissare le idee che $T \in E_n \otimes E_n$,[17] allora fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ di E_n, poichè per la (1.52), $\sigma(\mathbf{e}_h) = g_{ij} {\delta^i}_h e^j = g_{hj} e^j$, possiamo considerare la corrispondenza:

$$T = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \to T^{ij} \sigma(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = T^{ij} g_{ih} e^h \otimes \mathbf{e}_j$$

che associa a T il tensore di ${E^*}_n \otimes E_n$, di componenti

$$T_h{}^j = g_{ih} T^{ij}. \tag{1.54}$$

La stessa motivazione che ha portato a considerare i primi membri delle (1.53) come componenti di $\mathbf{v}$, porta a chiamare le quantità definite dalla (1.54), componenti una volta covarianti e una volta controvarianti del tensore T. Si dice, inoltre, che nella (1.54), il tensore metrico ha abbassato il primo indice di controvarianza di T.

La stessa operazione si può fare sul secondo indice di controvarianza anzicchè sul primo: ${T^i}_j = g_{jh} T^{ih}$ o su entrambi: $T_{ij} = g_{ih} g_{jk} T^{hk}$. Nella stessa maniera si possono fare abbassare gli indici di controvarianza di un tensore qualunque.

Poiche, come si è visto nella sezione precedente, la matrice $\|g_{ij}\|$ è non degenere, possiamo considerare la matrice inversa $\|\gamma^{ij}\|$, allora per la (1.53)

$$\gamma^{ij} v_j = \gamma^{ij} g_{jh} v^h = {\delta^i}_h v^h = v^i. \tag{1.55}$$

La (1.55) è l'invera della (1.53) ed esprime le componenti controvarianti in funzione di quelle covarianti. Analogamente si può invertire la (1.54):

$$\gamma^{kh} T_h{}^j = \gamma^{kh} g_{ih} T^{ij} = {\delta^k}_i T^{ij} = T^{kj}, \tag{1.56}$$

così come si ottiene anche: $T^{ij} = \gamma^{ih} \gamma^{jk} T_{hk}$.

Quindi, mentre le g_{ij}, fanno abbassare gli indici di controvarianza, gli elementi della matrice inversa γ^{ij}, fanno **alzare gli indici** di covarianza.

Si vede immediatamente, applicando il criterio di tensorialità alla (1.55) o alla (1.56), che le γ^{ij} sono le componenti di un tensore doppio controvariante, ma sono qualcosa di più, come dimostra il seguente calcolo delle compomnenti controvarianti di g_{ij}:

$$g^{hk} = \gamma^{hi} \gamma^{kj} g_{ij} = \gamma^{hi} {\delta^k}_i = \gamma^{hk}. \tag{1.57}$$

Possiamo così concludere, che gli elementi della matrice inversa di g_{ij}, sono le componenti controvarianti di g. Quindi le formule (1.55) e (1.56) si possono riscrivere così:

$$v^i = g^{ij} v_j, \quad T^{ij} = g^{ih} T_h{}^j.$$

[17] anche qui la descrizione, fatta in un caso particolare, non è limitativa, perchè ogni altro caso si tratta alla stessa maniera

Le componenti miste del tensore metrico sono:

$$g^i{}_j = g^{ih} g_{hj} = \delta^i{}_j$$

Chiaramente le operazioni di abbassamento e di innalzamento degli indici possono essere estese a tensori arbitrari. Per esempio:

$$T_i{}^{jhk} = g_{ip} g^{jq} g^{hr} g^{ks} T^p{}_{qrs}.$$

1.10 Trasformazioni ortogonali

Ogni tensore $T \in E_n \otimes E^*{}_n$ determina una applicazione $\tau : E_n \to E_n$ nel seguente modo: $\forall \mathbf{v} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) = T \cdot \mathbf{v}$, dove $T \cdot \mathbf{v}$ è il prodotto tensoriale contratto tra T e $\mathbf{v}$, che è un tensore una volta controvariante, quindi un elemento di E_n. Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ è una base di E_n, $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ e $T = T^i{}_j \mathbf{e}_i \otimes e^j$, allora $\tau(\mathbf{v}) = T^i{}_j v^j \mathbf{e}_i$. L'applicazione così definita è ovviamente lineare:

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \quad \tau(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}) = T^i{}_j(\alpha v^j + \beta u^j)\mathbf{e}_i = \alpha T^i{}_j v^j \mathbf{e}_i + \beta T^i{}_j u^j \mathbf{e}_i = \alpha \tau(\mathbf{v}) + \beta \tau(\mathbf{u}).$$

Definizione 1.10.1 *Se E_n è uno spazio euclideo, l'applicazione introdotta sopra, si chiama* **trasformazione ortogonale** *o* **isometria** *se non altera il prodotto scalare:*

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in E_n \quad \tau(\mathbf{v}) \cdot \tau(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \tag{1.58}$$

L'insieme delle trasformazioni ortogonali di E_n relativamente ad una metrica g, verrà denotato con il simbolo $O(g, n)$.

In una data base di E_n, la 1.58 si scrive: $g_{ij} T^i{}_h v^h T^j{}_k u^k = g_{hk} v^h u^k$ quindi $(g_{ij} T^i{}_h T^j{}_k - g_{hk}) v^h u^k = 0$, poichè quest'ultima deve valere per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, ne segue:

$$g_{ij} T^i{}_h T^j{}_k = g_{hk}. \tag{1.59}$$

Teorema 1.10.1 *L'insieme $O(g, n)$ con l'operazione di composizione di applicazioni é un gruppo.*

Dimostrazione. Se $\tau, \tau' \in O(g, n)$, $(\tau \circ \tau')(\mathbf{v}) \cdot (\tau \circ \tau')(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v}) \cdot \tau(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ quindi $\tau \circ \tau'$ é una trasformazione ortogonale su E_n. L'elemento unità è la trasformazione identica, inoltre la (1.58) implica che ogni trasformazione ortogonale τ trasforma una base ortonormale in n vettori ortonormali e quindi in una base ortonormale, questo implica che è un isomorfismo e in quanto tale, invertibile; la sua inversa τ^{-1} moltiplicata per τ dà l'elemento unità. •

In una data base, l'operazione di prodotto é espressa da $\tau \circ \tau'(\mathbf{v}) = \tau(\tau'(v^i \mathbf{e}_i)) = \tau(T'^i{}_j v^j \mathbf{e}_i)) = T^i{}_h T'^h{}_j v^j \mathbf{e}_i$, quindi è definita dal tensore

$$S^i{}_j = T^i{}_h T'^h{}_j, \tag{1.60}$$

questo significa che la moltiplicazione tra τ e τ' corrisponde ad una moltiplicazione contratta tra i tensori T e T' che le definiscono o equivalentemente al prodotto riga per colonna delle matrici che li rappresentano. Poichè $O(g, n)$ è chiuso rispetto alla motiplicazione allora il tensore definito dalla (1.60) deve verificare la (1.59) quando T e T' la verificano. Questo può anche essere dimostrato direttamente: $g_{ij} S^i{}_h S^j{}_k = g_{ij} T^i{}_p T'^p{}_h T^j{}_q T'^q{}_k = g_{pq} T'^p{}_h T'^q{}_k = g_{hk}$.

Ci sono due casi particolarmente importanti di trasformazioni ortogonali: quando g è una metrica propriamente euclidea e quando è una metrica di Lorentz. Nel primo caso, la (1.59) calcolata in una base ortogonale, diventa: $\delta_{hk} = \delta_{ij} T^i{}_h T^j{}_k = \sum_{i=1}^n T^i{}_h T^i{}_k$, questo significa che l'operazione di prodotto colonna per colonna della matrice $\|T^i{}_j\|$ per se stessa, dà come risultato la matrice identità, quindi l'inversa di $\|T^i{}_j\|$ è la sua trasposta, in questo caso $O(g, n)$ è il gruppo delle matrici ortogonali (rotazioni). Nel secondo caso , fissata una base ortonorma le e denotate con $\|\eta_{ij}\|$ le corrispondenti componenti del tensore metrico, per quanto si è visto nei paragrafi precedenti, si ha:

$$\|\eta_{ij}\| = diag(-1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(n-1)-volte}). \tag{1.61}$$

Le matrici che verificano la (1.59) sono quelle per cui: $\eta_{ij} T^i{}_h T^j{}_k = \eta_{hk}$. Il gruppo $O(g, n)$, in questo caso si chiama **gruppo di Lorentz omogeneo**, si indica con $L(n)$. Gli elementi di $L(n)$ si chiamano **trasformazioni di Lorentz**.

Chapter 2

TENSORI SUGLI SPAZI AFFINI

2.1 Spazi vettoriali associati ad uno spazio affine

Con il termine **spazio affine di dimensione n**, da ora in poi, verrà indicato lo spazio Π_n a n dimensioni della geometria euclidea[1].

Ci sono diversi moti di utilizzare gli spazi vettoriali nell'ambito di uno spazio affine. Il primo modo, quello più elementare e maggiormente usato in fisica classica, consiste nell'assegnare ad ogni coppia ordinata di punti $(A, B) \in \Pi_n \times \Pi_n$, il segmento, denotato con il simbolo $B - A$, congiungente A e B e orientato da A verso B. Questa legge di corrispondenza gode delle ovvie proprietà:

1. $\forall A, B \in \Pi_n \quad A - B = -(B - A)$;
2. $\forall A, B, C \in \Pi_n \quad B - A = (B - C) + (C - A)$;

dove $-(B-A)$ indica il segmento orientato che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $A-B$ e verso opposto, mentre la somma si intende eseguita con la regola del parallelogramma.

Ovviamente, sull'insieme dei segmenti orientati non è possibile introdurre un'operazione di somma. Infatti due segmenti orientati che partono dallo stesso punto si possono sommare con la regola del parallelogramma, gli altri no. Per ovviare a questo inconveniente, si introduce la seguente relazione: $A - B \sim C - D$, se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. Ovviamente la relazione così introdotta è una relazione di equivalenza, quindi possiamo considerare l'insieme E di tutti i segmenti orientati di Π_n modulo $\sim$, cioè l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza di segmenti orientati: $[A-B]$. In questo modo, possiamo introdurre in E un'operazione di somma: date due classi di equivalenza $[A - B]$ e $[C - D]$, scegliamo un segmento orientato $A - B$ nella prima ed uno $C' - B$ nella seconda in modo che partano dallo stesso punto B, li sommiamo con la regola del parallelogramma e otteniamo il segmento orientato $D' - B$, allora definiamo $[A-B]+[C-D] = [D'-B]$. Ovviamente questa definizione non dipende dalla particolare scelta dei segmenti orientati $A - B$ e $C' - B$ nelle loro classi di equivalenza. Se $\alpha \in \Re$, con il simbolo $\alpha(B - A)$ indichiamo il segmento orientato che ha la direzione di $B - A$, la lunghezza di $B - A$ moltiplicata per $|\alpha|$ e verso concorde o discorde a quello di $B - A$ secondo che α è positivo o negativo. Fatto questo possiamo definire $\alpha[B - A] = [\alpha(B - A)]$.

Con queste operazioni di somma e moltiplicazione per i numeri reali, E diventa uno spazio vettoriale di dimensione n, che indicheremo con E_n ed i cui elementi verranno indicati usando le stesse notazioni del capitolo precedente. Introdotto E_n, è immediato constatare che accanto alle 1 e 2 precedenti vale anche la seguente proprietà:

3. $\forall P \in \Pi_n \, \forall \mathbf{v} \in E_n \,, \exists | Q \in \Pi_n$ tale che $\mathbf{v} = [Q - P]$.

Fissato un punto $P \in \Pi_n$, denotiamo con $E_P = \{\, Q - P \mid Q \in \Pi_n \,\}$. Poichè i segmenti orientati in E_P hanno tutti lo stesso punto di partenza, possono essere sommati con la regola del parallelogramma, così come possono essere moltiplicati per un numero reale; queste operazioni danno a E_P la struttura di spazio vettoriale di dimensione n, che per la proprietá 3 é, come facilmente si verifica, isomorfo ad E_n. In questo modo, si può associare, ad ogni punto P, lo spazio vettoriale E_P, che, anche in vista delle future generalizzazioni del concetto di spazio affine, verrà chiamato **spazio vettoriale tangente** a Π_n in P.

C'è un modo più formale per definire lo spazio vettoriale tangente a Π_n nel generico punto, che, però, si presta meglio ad essere esteso a strutture geometriche più generali di Π_n. Esso verrà definito nel seguito di questo paragrafo.

Consideriamo in Π_n un sistema di riferimento cartesiano $\{O, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \dots, \vec{x}^n\}$ [2] e denotiamo con $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ le coordinate del generico punto.

---

[1] $\Re^n$ dopo aver introdotto un sistema di riferimento cartesiano.

[2] si ricorda che un sistema di riferimento cartesiano in Π_n puó essere definito da un punto O e da una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ di E_n (o E_O) assegnando ad ogni punto $P \in \Pi_n$, come coordinate, le componenti $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ nella data base di $P - O$: $P - O = x^i \mathbf{e}_i$; ció é equivalente ad assegnare il sistema di riferimento con origine in O ed assi $\vec{x}^i$ paralleli e concordi ai vettori $\mathbf{e}_i$.

Definizione 2.1.1 *Un sistema di coordinate* $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ *sarà detto di classe* C^k *con* $k \in \mathcal{N}$*, se le funzioni*

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) \tag{2.1}$$

che lo legano alle coordinate cartesiane introdotte sopra, sono di classe C^k*.*[3]

Tutti i sistemi di coordinate cartesiane rientrano nella definizione precedente, perché, in questo caso, le (2.1) sono polinomi di primo grado, quindi dotati di derivate continue di qualunque ordine. Questo implica che la definizione precedente non dipende dalle coordinate cartesiane scelte, infatti se le (2.1) sono di classe C^k e $(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$ é un altro sistema di coordinate cartesiane, allora le equazioni di trasformazione rispetto al nuovo sistema di coordinate sono

$$x'^i = x'^i(x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n), x^2(y^1, y^2, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n))$$

quindi funzioni composte di funzioni almeno di classe C^k, quindi a loro volta di classe C^k.

Perché le $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ della definizione 2.1.1 si possano considerare un sistema di coordinate accettabile in un aperto U di Π_n, le (2.1) devono essere (localmente) invertibili in U, con funzioni inverse

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{2.2}$$

Inoltre se $k > 0$, le matrici jacobiane $\frac{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^n)}{\partial(y^1,y^2,\ldots,y^n)}$ e $\frac{\partial(y^1,y^2,\ldots,y^n)}{\partial(x^1,x^2,\ldots,x^n)}$, rispettivamente di (2.1) e (2.2), devono essere una inversa dell'altra:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^h} = \delta^i{}_h \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^h} = \delta^i{}_h. \tag{2.3}$$

In seguito, se non è espressamente specificato, ogni sistema di coordinate introdotto sarà considerato generico (non necessariamente cartesiano). Inoltre dato un sistema di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ definite in un aperto U e $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ definite in un aperto V, se $U \cap V \neq \emptyset$, le equazioni (2.1) e (2.2) indicheranno le trasformazione di coordinate in $U \cap V$, con le rispettive matrici jacobiane verificanti la (2.3).

Definizione 2.1.2 *Sia* U *un aperto di* Π_n*, una funzione* $f : U \to \Re$ *si dice* **differenzibile** *di classe* C^k *su* U*, se, assegnato in* U *un sistema di coordinate* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *di classe* C^k*, la funzione* $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *è di classe* C^k *su* U*.*

La definizione precedente non dipende dal sistema di coordinate di classe C^k assegnato, infatti in qualunque altro sistema di coordinate di classe C^k, la funzione data sarebbe la composizione tra la $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e le funzioni di classe C^k che determinano il cambiamento di coordinate.

L'insieme delle funzioni differenziabili di classe C^k su un aperto U forma un algebra con le consuete operazioni di somma e di prodotto di funzioni, che sarà indicata con il simbolo $\mathcal{F}^k(U)$

Definizione 2.1.3 *Una* **curva differenziabile** *di classe* C^k *è un'applicazione* $\gamma : [a, b] \to \Pi_n$*, dove* $[a, b]$ *è un intervallo chiuso di* $\Re$*, tale che, introdotto in un qualunque aperto* U *che interseca il codominio di* γ*, un sistema coordinate di classe* C^k $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$*, le coordinate* $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ *di* $\gamma(t)$ *sono funzioni di classe* C^k*.*

Per quanto osservato prima, la differenziabilità di γ non dipende dal particolare sistema di coordinate scelto. Le funzioni $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ si chiamano **equazioni parametriche** di γ in U.

Definizione 2.1.4 *Sia* $P \in \Pi_n$*,* $\mathcal{F}^1(P)$ *l'algebra*[4] *delle funzioni differenziabili di classe* C^1 *definite in un intorno aperto di* P *e* $\gamma(t)$ *una curva differenziabile di classe* C^1 *passante per* P*:* $\gamma(t_0) = P$ *per qualche* $t_0 \in]a, b[$*. Si chiama* **vettore tangente** *alla curva* γ *nel punto* P*, l'applicazione* $X : \mathcal{F}^1(P) \to \Re$ *definita da*

$$X(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt}|_{t_0}.^5 \tag{2.4}$$

L'insieme dei vettori tangenti in P *si indica con* T_P*.*

Definizione 2.1.5 *Si chiama* **derivazione** *ogni applicazione* $X : \mathcal{F}^1(P) \to \Re$ *che gode delle seguenti proprietà:*

1. *linearitá:* $\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall f, g \in \mathcal{F}^1(P), \quad X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$;
2. $X(fg) = X(f)g(P) + f(P)X(g)$.

[3] continue e dotate di derivate parziali continue fino all'ordine k.

[4] per essere precisi, $\mathcal{F}^1(P)$ diventa un'algebra dopo aver identificato, mediante una relazione di equivalenza, quelle funzioni che assumono gli stessi valori in un opportuno intorno aperto di P.

[5] X è la derivata di f nella direzione di γ, che, ovviamente esiste sempre, perchè in qualunque sistema di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ di classe C^1, $f(\gamma(t)) = f(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ è la composizione di funzioni di classe C^1

L'insieme delle derivazioni si indica con D_P.

Proposizione 2.1.1 *D_P è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Definendo:

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall X, Y \in D_P \qquad (\alpha X + \beta Y)(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f) \qquad \forall f \in \mathcal{F}^1(P)$$

è una semplice verifica dimostrare che $\alpha X + \beta Y \in D_P$ e che queste operazioni verificano gli assiomi degli spazi vettoriali. •

Proposizione 2.1.2 *Ogni vettore tangente è una derivazione.*

Dimostrazione. Per le regole di derivazione di una somma e di un prodotto

$$X(\alpha f + \beta g) = \frac{d(\alpha f + \beta g)(\gamma(t))}{dt}|_{t_0} = \frac{d(\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t)))}{dt}|_{t_0} = \alpha X(f) + \beta X(g);$$

$$X(fg) = \frac{d(fg)(\gamma(t))}{dt}|_{t_0} = \frac{d(f(\gamma(t))g(\gamma(t)))}{dt}|_{t_0} = X(f)g(\gamma(t_0)) + f(\gamma(t_0))X(g) = X(f)g(P) + F(P)X(g).$$

•

Dalle proposizioni precedenti segue che T_P è un sottinsieme dello spazio vettoriale D_P. Ma si può dimostrare di più.

Teorema 2.1.1 *T_P è uno spazio vettoriale di dimensione n.*

Dimostrazione. Fissato un sistema di coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ di classe C^1 in un intorno aperto di P, consideriamo le n applicazioni $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}|_P$ che ad ogni $f \in \mathcal{F}^1(P)$ fanno corrispondere le sue derivate parziali calcolate in P. Le applicazioni così definite sono ovviamente vettori di D_P e sono linearmente indipendenti, infatti se $\lambda^i X_i = 0$, considerando le funzioni $f^j(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^j$ che ovviamente appartengono a $\mathcal{F}^1(P)$ si ha:

$$0 = \lambda^i X_i(f^j) = \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}|_P = \lambda^i \delta^j{}_i = \lambda^j.$$

Quindi se denotiamo con T'_P l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari degli X_i, esso è un sottospazio vettoriale di D_P di dimensione n.

Ora, se $X \in T_P$ corrisponde alla generica curva di equazioni parametriche $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, per la (2.4),

$$X(f) = \frac{df(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))}{dt}|_{t_0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\frac{dx^i}{dt}(t_0),$$

quindi

$$X = \frac{dx^i}{dt}(t_0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_P, \tag{2.5}$$

da cui segue che $X \in T'_P$, quindi $T_P \subseteq T'_P$.

Viceversa, se $X' \in T'_P$ allora $X' = \lambda^i X_i$. Consideriamo la curva γ di equazioni parametriche $x^i(t) = x^i_0 + \lambda^i t$, dove $(x^1_0, x^2_0, \ldots, x^n_0)$ sono le coordinate di P. Ovviamente γ passa per P (per t=0), quindi possiamo calcolare il suo vettore tangente, che per la (2.5) è

$$X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_P = \lambda^i X_i = X',$$

questo implica che $X' \in T_P$ da cui segue che $T'_P \subseteq T_P$. Resta così dimostrato che T_P è il sottospazio vettoriale di D_P generato dalle $\frac{\partial}{\partial x^i}|_P$. •

Dalla dimostrazione del teorema precedente, in particolare, si deduce che le derivazioni $\frac{\partial}{\partial x^i}|_P$ sono elementi di T_P, d'altra parte, utilizzando l'equazione (2.5), è immediato constatare, che sono i vettori tangenti alle linee coordinate passanti per P: $(x^1_0, \ldots, x^{i-1}_0, t, x^{i+1}_0, \ldots, x^n_0)$, essendo al solito $(x^1_0, x^2_0, \ldots, x^n_0)$ le coordinate di P.

Definizione 2.1.6 *La base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$, si chiama* **base naturale** *associata alle coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.*

Siano $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ due sistemi di coordinate di classe C^1, definiti rispettivamente negli intorni aperti U e V di P, legati tra di loro dalle equazioni (2.1) e (2.2) in $U \cap V$. I due sistemi di coordinate definiscono due basi naturali $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$ e $\frac{\partial}{\partial y^1}|_P, \frac{\partial}{\partial y^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_P$ in T_P. Sia, ora, $f \in \mathcal{F}^1(P)$, allora per la (2.1)

$$f(y^1, y^2, \ldots, y^n) = f(x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n), x^2(y^1, y^2, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n))$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}|_P = \frac{\partial f}{\partial x^h}|_P \frac{\partial x^h}{\partial y^i}|_P$$

poichè questa equazione vale per ogni $f \in \mathcal{F}^1(P)$, allora

$$\frac{\partial}{\partial y^i}|_P = \frac{\partial x^h}{\partial y^i}|_P \frac{\partial}{\partial x^h}|_P. \tag{2.6}$$

L'equazione inversa si ottiene utilizzando la matrice inversa, per cui tenendo conto della (2.3), si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_P = \frac{\partial y^h}{\partial x^i}|_P \frac{\partial}{\partial y^h}|_P. \tag{2.7}$$

Ovviamente, le componenti rispetto alle due basi sono legate tra di loro dalla legge di cotrovarianza.

Definizione 2.1.7 *Lo spazio vettoriale T_P si chiama* **spazio vettoriale tangente** *a Π_n in P.*

Osservazione 1 *La convenzione di chiamare gli spazi vettoriali E_P e T_P con lo stesso nome è dovuta al fatto che, pur essendo i due spazi definiti in maniera diversa, essi possono essere identificati, come verrà mostrato di seguito.*

Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ una base di E_P, consideriamo il sistema di riferimento $\{O, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^n\}$, dove O è un punto qualunque di Π_n e gli assi paralleli e concordi ai vettori della base, ed in corrispondenza la base naturale $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$. Consideriamo l'applicazione lineare $\sigma : E_P \to T_P$ definita da $\sigma(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_P$, chiaramente σ è un isomorfismo perchè trasforma una base in una base e inoltre E_P e T_P hanno la stessa dimensione.

L'isomorfismo σ non dipende dalla particolare base usata per definirlo, infatti se $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ è una nuova base, legata alla prima dalle equazioni (1.1) e (1.2), $\{O', \vec{y}^1, \vec{y}^2, \ldots, \vec{y}^n\}$ un sistema di riferimento ad essa associato e $\frac{\partial}{\partial y^1}|_P, \frac{\partial}{\partial y^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_P$ la corrispondente base naturale, allora si dimostra che $\sigma(\mathbf{e}'_i) = \frac{\partial}{\partial y^i}|_P$.

Utilizzando la (1.1) si ottengono le coordinate del generico punto $Q \in \Pi_n$ nei due sistemi di riferimento:

$$x^i \mathbf{e}_i = P - O = (P - O') + (O' - O) = y^j \mathbf{e}'_j + a^i \mathbf{e}_i = (A^i{}_j y^j + a^i)\mathbf{e}_i$$

dove $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ sono le coordinate di O' nel primo sistema di riferimento, da cui $x^i = A^i{}_j y^j + a^i$, quindi per la (2.6)

$$\frac{\partial}{\partial y^i}|_P = A^h{}_i \frac{\partial}{\partial x^h}|_P = A^h{}_i \sigma(\mathbf{e}_h) = \sigma(A^h{}_i \mathbf{e}_h) = \sigma(\mathbf{e}'_i)).$$

Nel seguito, l'utilizzo di un modello o dell'altro dipenderà da questioni di convenienza.

2.2 Tensori nello spazio tangente

Nel seguito, il simbolo T_P^* indicherà lo spazio duale di T_P.

Definizione 2.2.1 *Sia $f \in \mathcal{F}^1(P)$, si chiama* **differenziale** *di f nel punto P, l'applicazione $df|_P : T_P \to \Re$ definita da*

$$\forall X \in T_P \quad df|_P(X) = X(f). \tag{2.8}$$

Proposizione 2.2.1 $\forall f \in \mathcal{F}^1(P) \quad df \in T_p^*$.

Dimostrazione. Basta dimostrare la linearità. Per la (2.8):

$$\forall \alpha, \beta \in \Re \quad \forall X, Y \in T_P, \qquad df|_P(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f) = \alpha df|_P(X) + \beta df|_P(Y). \quad \bullet$$

Sia $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, un sistema di coordinate di classe C^1, definito in un intorno aperto U di P, se si denota con x^i la funzione $f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^i$, si ha:

$$\forall X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_P \in T_P \quad dx^i|_P(X) = X(x^i) = X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_P = X^j \delta^i{}_j = X^i,$$

quindi, dalla definizione di base duale segue che i differenziali $dx^1|_P, dx^2|_P, \ldots, dx^n|_P$ sono la base duale della base naturale $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$.

In particolare

$$\forall X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_P \in T_P \quad df|_P(X) = X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P dx^i|_P(X),$$

quindi

$$df|_P = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P dx^i|_P.^6 \tag{2.9}$$

Sia ora $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ un altro sistema di coordinate di classe C^1, definito in un intorno aperto V di P, allora, tenendo conto delle (2.1) e (2.2) in $U \cap V$, per la (2.9), si ha:

$$dy^i|_P = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_P dx^j|_P, \tag{2.10}$$

che confrontata con la (2.6) dá una legge di trasformazione consistente con le (1.1) e (1.13). Analogamente l'inversa della (2.10) è:

$$dx^i|_P = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_P dy^j|_P. \tag{2.11}$$

Essendo T_P uno spazio vettoriale di dimensione n, su di esso si puó costruire tutta l'algebra tensoriale sviluppata nel capitolo precedente, l'unica differenza è che in T_P ci sono delle basi, le basi naturali, legate ai sistemi di coordinate in Π_n, che vengono indicate con una notazione diversa. Così, per esempio, se $T \in T_P \otimes T_P^* \otimes T_P^*$, in una base naturale associata ad un sistema di coordinate di classe C^1 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ definito in un intorno aperto di P, si scrive:

$$T = T^i{}_{jh} \frac{\partial}{\partial x^i}|_P \otimes dx^j|_P \otimes dx^h|_P.$$

Se, ora, $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ è un altro sistema di coordinate di classe C^1, definito in un intorno aperto V di P, allora

$$T = T'^i{}_{jh} \frac{\partial}{\partial y^i}|_P \otimes dy^j|_P \otimes dy^h|_P,$$

dove

$$T'^i{}_{jh} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}|_P \frac{\partial x^p}{\partial y^j}|_P \frac{\partial x^q}{\partial y^h}|_P T^k{}_{pq} \quad \text{e} \quad T^i{}_{jh} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}|_P \frac{\partial y^p}{\partial x^j}|_P \frac{\partial y^q}{\partial x^h}|_P T'^k{}_{pq}.$$

2.3 Campi di tensori

Definizione 2.3.1 *Si chiama* **campo vettoriale** *in un aperto U di Π_n, un' applicazione X che per ogni $P \in U$ associa un vettore $X(P) \in T_P$.*

Sia X un campo vettoriale su un aperto U e $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ un sistema di coordinate di classe C^1 su un aperto V tali che $W = U \cap V \neq \emptyset$. Allora per ogni $P \in W$, si ha:

$$X(P) = X^i(P) \frac{\partial}{\partial x^i}|_P.$$

Da ora in poi, i simboli $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ indicheranno la base naturale calcolata nel generico punto in cui le coordinate che la determinano sono definite. Con questa notazione, l'equazione precedente si può scrivere:

$$X(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.12}$$

intendendo che il punto in cui deve essere calcolato $\frac{\partial}{\partial x^i}$, è quello dell'argomento di X^i.

Sia $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ un altro sistema di coordinate di classe C^1 definito su un aperto V', tale che $W' = U \cap V \cap V' \neq \emptyset$, allora in W' vale la (2.12) ma vale anche:

$$X(y^1, y^2, \dots, y^n) = X'^i(y^1, y^2, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

con, su tutto W':

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^h}{\partial y^i}(y^1, y^2, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^h}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial y^h}$$

e quindi:

$$X'^i(y^1(x^1, x^2, \dots, x^n), y^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, x^2, \dots, x^n)) = \frac{\partial y^i}{\partial x^h}(x^1, x^2, \dots, x^n) X^h(x^1, x^2, \dots, x^n))$$

[6] Questa è la nota formula del differenziale di una funzione di n varibili, questa volta, però gli "incrementi" dx^i sono stati definiti in maniera rigorosa, senza fare riferimento ad infinitesimi o ad incrementi finiti e arbitrari.

e

$$X^i(x^1(y^1,y^2,\ldots,y^n),x^2(y^1,y^2,\ldots,y^n),\ldots,x^n(y^1,y^2,\ldots,y^n)) = \frac{\partial x^i}{\partial y^h}(y^1,y^2,\ldots,y^n)X'^h(y^1,y^2,\ldots,y^n).$$

Da ora in poi, per motivi di semplicità, dove non è possibile fare confusione, gli argomenti delle funzioni non saranno specificati. Così le equazioni precedenti si scrivono:

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} = X'^i\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^h}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^h}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^h} \tag{2.14}$$

$$X'^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^h}X^h \quad \text{e} \quad X^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^h}X'^h. \tag{2.15}$$

Definizione 2.3.2 *Si chiama* **campo tensoriale** *r-volte controvariante ed s-volte covariante in un aperto U di Π_n, un' applicazione T che per ogni $P \in U$ associa un tensore $T(P) \in \underbrace{T_P \otimes \ldots \otimes T_P}_{r-volte} \otimes \underbrace{T_P^* \otimes \ldots \otimes T_P^*}_{s-volte}$.*

Introdotti due sistemi di coordinate di classe C^1 $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ e $(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ rispettivamente sugli insiemi aperti V e V', tali che $W = U \cap V \cap V' \neq \emptyset$, allora, utilizzando le convenzioni introdotte sopra e omettendo $|_P$ anche nella base duale, in W si ha:

$$T = T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s} = T'^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dy^{j_1}\otimes\ldots\otimes dy^{j_s} \tag{2.16}$$

$$T'^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{h_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{h_r}}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_s}}{\partial y^{j_s}}T^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} \tag{2.17}$$

e

$$T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}}T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s}. \tag{2.18}$$

Definizione 2.3.3 *Sia U un aperto di Π_n, un campo tensoriale T si dice* **differenzibile** *di classe C^k su U, se, comunque si assegna un sistema di coordinate $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ di classe C^{k+1} in un aperto V tale che $W = U \cap V \neq \emptyset$, allora le sue componenti sono funzioni di $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ differenziabili di classe C^k su W.*

Ovviamente la precedente definizione non dipende dal sistema di coordinate scelto, perchè in qualunque altro riferimento $(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ di classe C^{k+1}, le componenti di T sarebbero date dalla (2.17), quindi prodotti e composizioni di funzioni differenziabili di clase C^k.

2.4 Derivate di un campo tensoriale

Da quanto si è visto nei paragrafi precedenti ed in particolare dalla definizione 2.3.3, si può dedurre che se $f \in \mathcal{F}^k(U)$, allora *df* è un campo di 1-forme [7] su U di classe C^{k-1} ed in particolare che $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ sono le componenti di un campo tensoriale di classe C^{k-1} 1-volte covariante in qualunque sistema di coordinate $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ di classe C^k. In seguito per semplificare le notazioni verrà posto $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Consideriamo, ora, un campo vettoriale X su un aperto U, e due sistemi di coordinate cartesiane $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ e $(y^1,y^2,\ldots,y^n)$, in maniera tale che $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} = X'^i\frac{\partial}{\partial y^i}$. Le trasformazioni di coordinate sono necessariamente funzioni lineari: $x^i = A^i{}_j y^j + a^i$, quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = A^j{}_i\frac{\partial}{\partial x^j} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = B^j{}_i\frac{\partial}{\partial y^j},$$

e

$$X'^j = B^j{}_i X^i \quad X^j = A^j{}_i X'^i.$$

Da cui

$$\frac{\partial X'^i}{\partial y^h} = \frac{\partial}{\partial y^h}(B^i{}_j X^j) = \frac{\partial x^k}{\partial y^h}\frac{\partial}{\partial x^k}(B^i{}_j X^j) = A^k{}_h B^i{}_j\frac{\partial X^j}{\partial x^k},$$

[7] Ad ogni $P \in U$ si associa $df|_P$ sullo spazio tangente T_P come nella definizione 2.2.1.

ponendo $\partial_i X'^j = \frac{\partial X'^j}{\partial y^i}$ e $\partial_i X^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$,[8] si ottiene:

$$\partial_h X'^i = A^k{}_h B^i{}_j \partial_k X^j, \tag{2.19}$$

da questo si vede che le derivate delle componenti di un campo vettoriale si trasformano, nel passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ad un altro, come le componenti di un campo tensoriale doppio una volta covariante ed una volta controvariante. Se, però le coordinate non sono cartesiane la (2.19) non è più valida. Infatti supponiamo che le coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ siano cartesiane, ma che le $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ non lo siano, allora le equazioni che determinano i cambiamenti di base e le variazioni delle componenti sono le (2.14) e (2.15), dove le matrici jacobiane che intervengono non sono costanti, quindi

$$\partial_h X^i = \frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} X'^j) = \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial}{\partial y^k}(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} X'^j) = \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial X'^j}{\partial y^k} + \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^j} X'^j =$$

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial X'^j}{\partial y^k} + \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^q}\frac{\partial y^q}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^j} X'^j = \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(\frac{\partial X'^j}{\partial y^k} + \frac{\partial y^j}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^q} X'^q),$$

posto

$$\Gamma^j{}_{kq} = \frac{\partial y^j}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^q} \tag{2.20}$$

e

$$\nabla_k X'^j = \frac{\partial X'^j}{\partial y^k} + \Gamma^j{}_{kq} X'^q, \tag{2.21}$$

si ottiene

$$\partial_h X^i = \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\nabla_k X'^j,$$

da cui si vede che le componenti di $\partial_h X^i$ in una base qualunque sono date da (2.21). Le funzioni definite dalla (2.20), verranno caratterizzate meglio in seguito, per ora si può osservare che, a causa della commutatività dell'ordine di derivazione, sono simmetriche rispetto agli indici in basso.

La stessa cosa vale per le derivate dei campi tensoriali una volta covarianti: esse sono tensoriali nel passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ad un altro, mentre in un sistema di coordinate non cartesiano si trasformano nel seguente modo:

$$\partial_h X_i = \frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} X'_j) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial X'_j}{\partial y^k} + \frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})\frac{\partial x^p}{\partial y^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^p} X'_q,$$

e tenendo conto che

$$\frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})\frac{\partial x^p}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^p}{\partial y^j}) - \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^h}(\frac{\partial x^p}{\partial y^j}) = \frac{\partial}{\partial x^h}(\delta^i{}_j) - \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^j} = -\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^j},$$

si ottiene

$$\partial_h X_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial X'_j}{\partial y^k} - \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^k \partial y^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^p} X'_q = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}(\frac{\partial X'_j}{\partial y^k} - \Gamma^q{}_{kj} X'_q),$$

da cui ponendo

$$\nabla_k X'_j = \frac{\partial X'_j}{\partial y^k} - \Gamma^q{}_{kj} X'_q, \tag{2.22}$$

si ottiene:

$$\partial_h X_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\nabla_k X'_j,$$

da cui si vede che le componenti di $\partial_h X_i$ in una base naturale qualunque sono date da (2.22).

Con gli stessi conti fatti precedentemente ma ripetuti più volte, si puó dimostrare che le derivate parziali di un campo tensoriale r volte controvariante e s volte covariante, calcolate in un sistema di riferimento cartesiano $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, si trasformano nel passaggio ad un sistema di riferimento non cartesiano con la seguente equazione

$$\partial_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}}\nabla_k T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} \tag{2.23}$$

dove

$$\nabla_k T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} = \partial_k T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} +$$
$$\Gamma^{h_1}{}_{kj} T'^{j,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} + \ldots + \Gamma^{h_r}{}_{kj} T'^{h_1,\ldots,j}{}_{k_1,\ldots,k_s} - \Gamma^j{}_{kk_1} T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{j,\ldots,k_s} - \ldots - \Gamma^j{}_{kk_s} T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,j}. \tag{2.24}$$

Da cui si vede che i termini aggiunti alle derivate partiali sono tanti quanto sono gli indici di controvarianza con il segno + e tanti quanti sono gli indici di covarianza con il segno -.

[8] l'indice i ai piedi di ∂ indica l'iesima coordinata rispetto a cui le componenti sono definite: nella prima y^i nella seconda x^i, nei casi in cui c'è possibilità di fare confusione si userà la notazione di derivata parziale per esteso.

2.5 Tensore metrico su uno spazio affine

Fissato in Π_n un sistema di riferimento cartesiano e le coordinate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ad esso associate, sia $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ la corrispondente base naturale. Definiamo un tensore metrico su T_P per ogni $P \in \Pi_n$, cioè un campo di tensori metrici, dando le sue componenti nella base definita prima:

$$g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \pm\delta^i{}_j \quad \text{cioè} \quad g(x^1, x^2, \ldots, x^n) = -\sum_{i=1}^{h} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=h+1}^{n} dx^i \otimes dx^i. \tag{2.25}$$

Resta cosí definito un tensore metrico in ogni spazio tangente T_P e per determinare le sue componenti rispetto ad ogni altro sistema di coordinate $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, basta applicare la regola di trasformazione di un tensore doppio covariante al variare della base, oppure, si può pervenire allo stesso risultato, tenendo condo che, per come è stato definito, il prodotto tensoriale gode della propietà distributiva rispetto alla somma, ed inoltre valendo la (2.11) si ha:

$$g(y^1, y^2, \ldots, y^n) = -\sum_{i=1}^{h}(\frac{\partial x^i}{\partial y^h}dy^h) \otimes (\frac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^k) + \sum_{i=h+1}^{n}(\frac{\partial x^i}{\partial y^h}dy^h) \otimes (\frac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^k) =$$

$$-\sum_{i=1}^{h} \frac{\partial x^i}{\partial y^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^h \otimes dy^k + \sum_{i=h+1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^h}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^h \otimes dy^k.$$

Esempio 1 *In Π_3, sia $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ la corrispondente base naturale. Definiamo un tensore metrico in Π_3 propiamente euclideo, cioè:*

$$g(x, y, z) = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Sull'aperto $U = \Pi_3 - \{\vec{z}\}$, consideriamo un sistema di coordinate sferiche, legate a quelle cartesiane dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= \rho\, sin(\theta)\, cos(\phi) \\ y &= \rho\, sin(\theta)\, sin(\phi) \qquad \rho > 0 \quad \theta \in]0, \pi[\quad \phi \in [0, 2\pi[\\ z &= \rho\, cos(\theta). \end{aligned}$$

Per la (2.11) in tutti i punti di U, si ottiene

$$\begin{aligned} dx &= sin(\theta)\, cos(\phi)\, d\rho + \rho\, cos(\theta)\, cos(\phi)\, d\theta - \rho\, sin(\theta)\, sin(\phi) d\phi \\ dy &= sin(\theta)\, sin(\phi)\, d\rho + \rho\, cos(\theta)\, sin(\phi)\, d\theta + \rho\, sin(\theta)\, cos(\phi) d\phi \\ dz &= cos(\theta)\, d\rho - \rho\, sin(\theta)\, d\theta, \end{aligned}$$

da cui tenendo conto che, per come sono stati definiti, i prodotti tensoriali godono della proprietà distributiva rispetto alla somma, si ottiene

$$g(\rho, \theta, \phi) = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta + \rho^2 sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi.$$

Un tensore metrico propiamente euclideo, dà a Π_n una nozione di angolo, di distanza, di *distanza infinitesima*, che sono in accordo con quelle della geometria euclidea. Cosí, per esempio, defininendo $\forall P, Q \in \Pi_n \quad d(P, Q) = |P - Q|$, in un sistema di coordinate cartesiane $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ si ha

$$d(P, Q) = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i_P - x^i_Q)^2}, \tag{2.26}$$

che è l'ordinaria distanza pitagorica. D'altra parte se $\gamma : [a, b] \to \Pi_n$ è una curva di classe C^1 e $X(t)$ è il suo vettore tangente per ogni $t \in [a, b]$ allora il modulo di $X(t)$[9] è:

$$|X(t)| = \sqrt{g(X(t), X(t))} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i}{dt}^2 (t)} = \frac{ds}{dt}(t), \tag{2.27}$$

dove s è l'ascissa curvilinea cioè tale che $\int_a^b ds$ =lunghezza di γ. Eliminando dalla (2.27) dt e quindi la dipendenza dalla particolare curva, resta:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} {dx^i}^2. \tag{2.28}$$

[9] il vettore tangente ad una curva è la descrizione rigorosa di due punti $\gamma(t)$ e $\gamma(t + dt)$ *infinitamente vicini.*

L'equazione precedente viene solitamente usata per indicare il tensore metrico:

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i, \tag{2.29}$$

tale notazione è giustificata dal fatto che, dal punto di vista dei calcoli, le due equazioni sono governate dagli stessi meccanismi, come si é viso nell'esempio precedente, ed anche dal fatto che, per ogni curva di classe C^1, entrambe forniscono un meccanismo in grado di determinare l'elemento di lunghezza su tale curva.

Se il tensore metrico non è propriamente euclideo, si può ripetere tutto quello che è stato detto precedentemente, con l'avvertenza di considerare i valori assoluti degli argomenti delle radici. Però le nozioni di distanza date sopra non corrispondono a quelle della geometria euclidea, per esempio possono esistere due punti distinti P e Q con distanza nulla, per questo basta che il vettore $P - Q$ abbia modulo nullo.

Poichè, in coordinate cartesiane, le componenti del tensore metrico sono costanti su Π_n, allora $\partial_i g_{hk} = 0$ in ogni punto di Π_n, quindi per la (2.23) in un qualunque sistema di coordinate $\nabla_i g'_{hk} = 0$. Per evitare l'apice nelle equazioni seguenti, con g_{ij} verrà denotato il tensore metrico in un sistema di coordinate qualunque, per cui l'equazione precedente diventa $\nabla_i g_{hk} = 0$. Da questa equazione, per la (2.24)

$$\partial_i g_{hk} - \Gamma^j_{ih} g_{jk} - \Gamma^j_{ik} g_{hj} = 0,$$

da cui , permutando circolarmente gli indici ihk, si ottengono le altre due equazioni:

$$\partial_h g_{ki} - \Gamma^j_{hk} g_{ji} - \Gamma^j_{hi} g_{kj} = 0$$

e

$$\partial_k g_{ih} - \Gamma^j_{ki} g_{jh} - \Gamma^j_{kh} g_{ij} = 0,$$

sottraendo la terza dalla somma dei primi due e tenendo conto della simmetria di g'_{ij} e della simmetria rispetto a gli indici in basso delle Γ^i_{hk} si ottiene:

$$\partial_i g_{hk} + \partial_h g_{ki} - \partial_k g_{ih} - 2\Gamma^j_{ih} g_{jk} = 0,$$

da cui

$$\Gamma^j_{ih} g_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{hk} + \partial_h g_{ki} - \partial_k g_{ih}).$$

Moltiplicando ambo i membri per le componenti controvarianti del tensore metrico g^{kr} e saturando sull'indice k, si ottiene

$$\Gamma^r_{ih} = \frac{1}{2} g^{kr}(\partial_i g_{hk} + \partial_h g_{ki} - \partial_k g_{ih}). \tag{2.30}$$

Definizione 2.5.1 *Le funzioni Γ^i_{jh} espresse dalle equazioni (2.30) oltre che da (2.20) si chiamano* **simboli di Christoffel**.

Dalla (2.30) si vede che i simboli di Christoffel in coordinate cartesiane sono identicamente nulli su Π_n, invece la (2.20) implica che in generale, in coordinate curvilinee essi non sono tutti ideticamente nulli, perchè se le trasformazioni non sono lineari, le derivate seconde non son tutte nulle. Quanto detto sopra implica che i simboli di Christoffel non sono le componenti di un campo tensoriale una volta controvariante e due volte covariante, perchè un tale campo tensoriale essendo un vettore di $T_P \otimes T^*_P \otimes T^*_P$ per ogni $P \in \Pi_n$, se nullo in una base, dovrebbe essere nullo in ogni altra base.

Proposizione 2.5.1 *Se $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ sono coordinate qualunque definite rispettivamente negli aperti U e V tali che $U \cap V \neq \emptyset$ e $T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$ e $T'^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$ sono rispettivamente le componenti di un tensore T rispetto alle basi naturali associate ai due sistemi di coordinate, allora*

$$\nabla_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial y^k}{\partial x^h} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}} \nabla_k T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s}, \tag{2.31}$$

Dimostrazione. Se $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ é un sistema di coordinate cartesiane, i simboli si Christoffel sono identicamente nulli e quindi $\partial_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \nabla_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}$. Se $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ é un sistema di coordinate cartesiane e $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $(z^1, z^2, \ldots, z^n)$ sono sistemi di coordinate, definite rispettivamente negli aperti U e V tali che $W = U \cap V \neq \emptyset$, allora, in W, per la (2.23)

$$\partial_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial y^k}{\partial x^h} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}} \nabla_k T'^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s} \tag{2.32}$$

$$\partial_h T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = \frac{\partial z^k}{\partial x^h} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{h_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial z^{h_r}} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_s}}{\partial x^{j_s}} \nabla_k T''^{h_1,\ldots,h_r}{}_{k_1,\ldots,k_s}, \tag{2.33}$$

essendo $T'^{h_1,\dots,h_r}{}_{k_1,\dots,k_s}$ e $T''^{h_1,\dots,h_r}{}_{k_1,\dots,k_s}$ le componenti del tensore T nelle basi naturali associate rispettivamente alle coordinate $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ e $(z^1, z^2, \dots, z^n)$. Invertendo la seconda equazione, si ottiene

$$\nabla_q T''^{p_1,\dots,p_r}{}_{q_1,\dots,q_s} = \frac{\partial x^h}{\partial z^q}\frac{\partial z^{p_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial z^{p_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial z^{q_s}}\partial_h T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s}. \tag{2.34}$$

Sostituendo la(2.32) in (2.34) e tenendo conto della regola di derivazone delle funzioni composte, si ricava

$$\nabla_q T''^{p_1,\dots,p_r}{}_{q_1,\dots,q_s} = \frac{\partial x^h}{\partial z^q}\frac{\partial z^{p_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial z^{p_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial z^{q_s}}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}}\nabla_k T'^{h_1,\dots,h_r}{}_{k_1,\dots,k_s} =$$

$$\frac{\partial y^k}{\partial z^q}\frac{\partial z^{p_1}}{\partial y^{h_1}}\cdots\frac{\partial z^{p_r}}{\partial y^{h_r}}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial z^{q_1}}\cdots\frac{\partial y^{k_s}}{\partial z^{q_s}}\nabla_k T'^{h_1,\dots,h_r}{}_{k_1,\dots,k_s}.$$

•

La proposizione precedente mostra che $\nabla_h T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s}$ sono le componenti di un tensore r volte controvariante ed $s+1$ volte covariante, che si chiama **derivata covariante** di T.

I simboli di Christoffel, che sono molto imoportanti per caratterizzare e operare su geometrie più generali di quella euclidea e per il loro significato fisico in Relatività Generale, in questo contesto, possono essere interpretati come *correttivi* non tensoriali che rendono tensoriali le derivate parziali di un tensore.

2.6 Geometria dello spazio-tempo di Minkowski

Definizione 2.6.1 *Si chiama* **spazio-tempo di Minkowski** *e si indica con M_4, lo spazio affine Π_4 con il campo di tensori metrici (2.25) di segnatura 2:*

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.35}$$

dove è stata usata la notazione (2.28) e (t, x, y, z) è un sistema di coordinate cartesiane.

La definizione precedente implica che per ogni $P \in M_4$, nello spazio tangente T_P è stata introdotta una metrica di Lorentz e quindi T_P è dotato di vettori di tipo tempo, di tipo luce e di tipo spazio.

Poiché per la 3 del paragrafo 2.1, c'é una corrispondenza biunivoca tra vettori di T_P e punti di M_4, la distinzione fatta sopra definisce tre regioni in M_4: $\mathcal{T}_P = \{Q \in M_4 \mid (Q-P)\cdot(Q-P) < 0\}$, $\mathcal{L}_P = \{Q \in M_4 \mid (Q-P)\cdot(Q-P) = 0\}$, $\mathcal{S}_P = \{Q \in M_4 \mid (Q-P)\cdot(Q-P) > 0\}$.

Se $P = (t_0, x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{L}_P$ è il luogo dei punti $Q = (t, x, y, z) \in M_4$, tali che $(Q-P)\cdot(Q-P) = 0$, cioè la superficie tridimensionale di equazione

$$-(t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = 0 \tag{2.36}$$

che rappresenta un cono tridimensionale, sferico avente come asse, l'asse $\vec{t}$. Infatti si riconosce facilmente che le superfici $t = t_1 = cost$, sono le sfere di centro P e raggio $|t_1 - t_0|$ che si annulla per $t_1 = t_0$ e tende (linearmente) ad $+\infty$ quando $t_1 \to \pm\infty$.

Definizione 2.6.2 *$\mathcal{L}_P$ si chiama* **cono di luce** *di P e le due falde $\mathcal{L}_P^+ = \{Q \in \mathcal{L}_P \mid t_1 > t_0\}$ e $\mathcal{L}_P^- = \{Q \in \mathcal{L}_P \mid t_1 < t_0\}$ si chiamano rispettivamente* **cono di luce futuro** *e* **cono di luce passato** *di P.*

Il cono di luce di P divide M_4 in due regioni: quella interna al cono che chiamiamo $\mathcal{T}'_P$ e quella esterna che chiamiamo $\mathcal{S}'_P$.

Proposizione 2.6.1 *$\mathcal{T}_P = \mathcal{T}'_P$ e $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}'_P$.*

Dimostrazione. Supponiamo che P abbia coordinate (t_0, x_0, y_0, z_0) e sia Q di coordinate (t_1, x_1, y_1, z_1) un qualunque punto di M_4. L'iperpiano $t = t_1$ passante per Q ed ortogonale all'asse di $\mathcal{L}_P$, interseca l'asse nel punto Q' di coordinate (t_1, x_0, y_0, z_0) e $\mathcal{L}_P$ nella sfera S_{t_1} di centro Q' e raggio $|t_1 - t_0|$. Allora $Q \in \mathcal{T}'_P$, se e solo se é interno a S_{t_1}: $(Q-Q')^2 < (t_1-t_0)^2$, cioé se e solo se $-(t_1-t_0)^2 + (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 < 0$, quindi se e solo se $Q \in \mathcal{T}_P$. $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}'_P$ segue immediatamente da $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}'_P$. •

Definizione 2.6.3 *Una curva di classe C^1 si dice di tipo*

- *tempo, se in ogni punto il vettore tangente é di tipo tempo;*
- *luce o nullo, se in ogni punto il vettore tangente é di tipo luce;*
- *spazio, se in ogni punto il vettore tangente é di tipo spazio;*
- *misto, se il vettore tangente non é in ogni punto dello stesso tipo.*

Chiaramente l'asse $\vec{t}$ é una curva di tipo tempo mentre gli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sono curve di tipo spazio, per questo motivo si chiamano rispettivamente asse temporale ed assi spaziali.

Sia (t', x', y', z') un altro sistema di coordinate con la stessa origine, tale che

$$ds^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2, \tag{2.37}$$

sia $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ la base naturale associata alle coordinate (t, x, y, z), $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ la base naturale associata alle coordinate (t', x', y', z') e $\Lambda = \|\Lambda^i{}_j\|$ la matrice che determina il cambiamento di base $\mathbf{e}_i = \Lambda^j{}_i \mathbf{e}'_j$:

$$t' = \Lambda^0{}_0\, t + \Lambda^0{}_1\, x + \Lambda^0{}_2\, y + \Lambda^0{}_3\, z$$

$$x' = \Lambda^1{}_0\, t + \Lambda^1{}_1\, x + \Lambda^1{}_2\, y + \Lambda^1{}_3\, z$$

$$y' = \Lambda^2{}_0\, t + \Lambda^2{}_1\, x + \Lambda^2{}_2\, y + \Lambda^2{}_3\, z$$

$$z' = \Lambda^3{}_0\, t + \Lambda^3{}_1\, x + \Lambda^3{}_2\, y + \Lambda^3{}_3\, z.$$

Come si vede confrontando (2.35) e (2.37), Λ conserva il tensore metrico, quindi é una trasformazione di Lorentz:

$$\eta_{ij} = \Lambda^h{}_i \Lambda^k{}_j \eta_{hk}, \tag{2.38}$$

dove $\|\eta_{ij}\| = diag(-1, 1, 1, 1)$. Dalla (2.38) segue che

$$-1 = \eta_{00} = \Lambda^h{}_0 \Lambda^k{}_0 \eta_{hk} = -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_1)^2 + (\Lambda^2{}_2)^2 + (\Lambda^3{}_3)^2$$

da cui si ottiene

$$|\Lambda^0{}_0| \geq 1. \tag{2.39}$$

Calcolando il determinante del primo e secondo membro della (2.38), si ottiene

$$(det\Lambda)^2 = 1. \tag{2.40}$$

L'insieme degli elementi del gruppo di Lorentz $L(n)$ tali che $\Lambda^0{}_0 > 1$[10] é un sottogruppo di $L(n)$ che si chiama **gruppo di Lorentz ortocrono** e si indica con $L^{\uparrow}(n)$, mentre l'insieme degli elementi di $L^{\uparrow}(n)$ tali che $det\Lambda = 1$, é un sottogruppo che si chiama **gruppo di Lorentz proprio** e si indica con $L_0(n)$. Da ora in poi saranno considerate solo trasformazioni di Lorentz proprie.

Definizione 2.6.4 *Una trasformazione di Lorentz che lascia inalterati due assi spaziali si chiama* **trasformazione di Lorentz speciale**.

Sia Λ una trasformazione di Lorentz (propria) speciale, che supponiamo, tanto per fissare le idee, lasci invariati gli assi $\vec{y}$ e $\vec{z}$:

$$t' = \Lambda^0{}_0\, t + \Lambda^0{}_1\, x \tag{2.41}$$
$$x' = \Lambda^1{}_0\, t + \Lambda^1{}_1\, x \tag{2.42}$$
$$y' = y \tag{2.43}$$
$$z' = z, \tag{2.44}$$

la (2.38) in questo caso particolare si riduce alle seguenti equazioni:

$$-1 = \eta_{00} = -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 \tag{2.45}$$
$$0 = \eta_{01} = -\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 + \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 \tag{2.46}$$
$$1 = \eta_{11} = -(\Lambda^0{}_1)^2 + (\Lambda^1{}_1)^2, \tag{2.47}$$

dalla prima si ricava $\Lambda^0{}_0 = \pm\cosh\psi$ e $\Lambda^1{}_0 = \pm\sinh\psi$ dove ψ é un parametro reale. Poiché si sta supponendo che la trasformazione é ortocrona, deve essere $\Lambda^0{}_0 = \cosh\psi$, d'altra parte senza ledere la generalitá si puó supporre $\Lambda^1{}_0 = \sinh\psi$, perché se fosse $\Lambda^1{}_0 = -\sinh\psi$, tenendo conto che le funzioni cosh e sinh sono rispettivamente pari e dispari, rispetto al parametro $\phi = -\psi$ si avrebbe $\Lambda^0{}_0 = \cosh\phi$ e $\Lambda^1{}_0 = \sinh\phi$. Dalla (2.46) si ottiene $\Lambda^0{}_1 = \tanh\psi\Lambda^1{}_1$, che sostituita nella (2.47) dá $\Lambda^1{}_1 = \pm\cosh\psi$. Poiché la scelta del segno meno nell'ultima equazione porta a $det\Lambda = -1$, l'unica scelta compatibile con le ipotesi fatte all'inizio é $\Lambda^1{}_1 = \cosh\psi$ e quind $\Lambda^0{}_1 = \sinh\psi$.

[10] questa condizione equivale al fatto, come si vede dalle formule di trasformazione, che gli assi $\vec{t}$ e $\vec{t'}$ siano concordemente orientati e che quindi siano interni alla stessa falda del cono di luce $\mathcal{L}_O$ dell'origine degli assi.

Quindi le eqazioni (2.41)-(2.44) si possono riscrivere nel seguente modo

$$t' = \cosh\psi\, t + \sinh\psi\, x \tag{2.48}$$
$$x' = \sinh\psi\, t + \cosh\psi\, x \tag{2.49}$$
$$y' = y \tag{2.50}$$
$$z' = z. \tag{2.51}$$

Posto $\gamma = \cosh\psi$ e $\beta = -\tanh\psi$, si ha che $|\beta| < 1$ ed inoltre dalla formula fondamentale $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$, dividendo ambo i membri per $\cosh^2\psi$ si ottiene $1 - \tanh^2\psi = \frac{1}{\cosh^2\psi}$ da cui $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, cosí le equazioni (2.48)-(2.51) si possono anche scrivere

$$t' = \gamma\,(t - \beta\, x) \tag{2.52}$$
$$x' = \gamma\,(x - \beta\, t) \tag{2.53}$$
$$y' = y \tag{2.54}$$
$$z' = z \tag{2.55}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad |\beta| < 1.$$

Se si disegnano gli assi nel piano individuato da $\vec{t}$ e $\vec{x}$, allora il cono di luce si riduce alle bisettrici degli assi $t = \pm x$, mentre gli assi $\vec{t}'$ e $\vec{x}'$ sono le rette di equazione rispettivamente $x = \beta t$ e $t = \beta x$ concordemente orientate con gli assi $\vec{t}$ e $\vec{x}$ [11] e hanno come bisettrici $t' = \pm x'$ le rette $t = \pm x$: nei due sistemi di riferimento il cono di luce viene visto alla stessa maniera.

Analogamente si trovano le altre trasformazioni speciali di Lorentz

$$t' = \gamma\,(t - \beta\, y) \tag{2.56}$$
$$x' = x \tag{2.57}$$
$$y' = \gamma\,(y - \beta\, t) \tag{2.58}$$
$$z' = z \tag{2.59}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad |\beta| < 1.$$

e

$$t' = \gamma\,(t - \beta\, z) \tag{2.60}$$
$$x' = x \tag{2.61}$$
$$y' = y \tag{2.62}$$
$$z' = \gamma\,(z - \beta\, t) \tag{2.63}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad |\beta| < 1.$$

Si puó anche vedere che una qualunque rotazione degli assi spaziali che lasci inalterato l'asse temporale é una trasformazione di Lorentz. Infatti considerata la trasformazione

$$t' = t \tag{2.64}$$
$$x' = \Lambda^1{}_1\, x + \Lambda^1{}_2\, y + \Lambda^1{}_3\, z \tag{2.65}$$
$$y' = \Lambda^2{}_1\, x + \Lambda^2{}_2\, y + \Lambda^2{}_3\, z \tag{2.66}$$
$$z' = \Lambda^3{}_1\, x + \Lambda^3{}_2\, y + \Lambda^3{}_3\, z \tag{2.67}$$

essendo la matrice $\|\Lambda^\alpha{}_\beta\|$[12] una matrice ortogonale, cioé tale che

$$\delta_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\sigma{}_\beta \delta_{\gamma\sigma}, \tag{2.68}$$

é un semplice calcolo, utilizzando la (2.68) e il fatto che $\Lambda^0{}_\alpha = \Lambda^\alpha{}_0 = 0$, verificare che $\Lambda^i{}_j \Lambda^h{}_k \eta ih$ coincide, per ogni coppia di indici j, k con η_{jk}. Poiché $\Lambda^0{}_0 = 1$, perché la trasformazione di Lorentz cosí ottenuta sia propria occorre e basta che *det* $\Lambda = 1$, cioé che la rotazione spaziale non cambi l'orientazione degli assi spaziali.

[11] quest'ultima proprietá dipende dal fatto che si stanno considerando trasformazioni di Lorentz proprie.
[12] da ora in poi si converrá che gli indici latini assumano i valori $0, 1, 2, 3$ mentre quelli greci $1, 2, 3$.

Poiché le trasformazioni di Lorentz proprie formano un gruppo, ne segue che comunque si combinino trasformazioni del tipo (2.52)-(2.55), (2.56)-(2.59), (2.60)-(2.63), (2.64)-(2.67), si ottiene una trasformazione di Lorentz propria.

Si puó dimostrare (ma qui non verr'a fatto) anche il viceversa, cioé che ogni trasformazione di Lorentz propria é ottenibile dalla composizione di trasormazioni del tipo (2.52)-(2.55), (2.56)-(2.59), (2.60)-(2.63), (2.64)-(2.67).

É stato accennato prima, che le trasformazioni speciali (2.52)-(2.55) non alterano il cono di luce $\mathcal{L}_O$ dell'origine. Questa proprietá puó essere generalizzata.

Sia $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ la base naturale associata alle coordinate (t, x, y, z) della (2.35) e sia (t', x', y', z') un altro sistema di coordinate cartesiane con la stessa origine del precedente ed associato alla base naturale $\mathbf{e'}_0, \mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$, legata alla prima base dalle (1.1) e (1.2), quindi tale che

$$t' = B^0{}_0\, t + B^0{}_1\, x + B^0{}_2\, y + B^0{}_3\, z \tag{2.69}$$
$$x' = B^1{}_0\, t + B^1{}_1\, x + B^1{}_2\, y + B^1{}_3\, z \tag{2.70}$$
$$y' = B^2{}_0\, t + B^2{}_1\, x + B^2{}_2\, y + B^2{}_3\, z \tag{2.71}$$
$$z' = B^3{}_0\, t + B^3{}_1\, x + B^3{}_2\, y + B^3{}_3\, z. \tag{2.72}$$

Denotato al solito con $\|\eta_{ij}\| = diag(-1, 1, 1, 1)$ il tensore metrico nella prima base, e con η'_{ij} quello nella seconda base, per la legge di trasformazione dei tensori

$$\eta_{ij} = B^h{}_i B^k{}_j \eta'_{hk}. \tag{2.73}$$

Lemma 2.6.1 *Se la trasformazione (2.69)-(2.72) é una trasformazione di Lorentz, allora* $\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i\ \eta_{ij} v^i v^j = \eta_{ij} v'^i v'^j$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\eta_{ij} = B^h{}_i B^k{}_j \eta_{hk}$, che confronata con la (2.73), dá $B^h{}_i B^k{}_j (\eta'_{hk} - \eta_{hk}) = 0$ ed essendo la matrice $\|B^i{}_j\|$ invertibile, $\eta'_{hk} = \eta_{hk}$. D'altra parte, poiché un prodotto scalare non dipende dalla base, $\eta_{ij} v^i v^j = \eta'_{ij} v'^i v'^j$, che unita alla precedente, dá la tesi.

Lemma 2.6.2 *Se* $\forall \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e'}_i$, $\eta_{ij} v^i v^j = 0 \Rightarrow \eta_{ij} v'^i v'^j = 0$, *allora esiste una costante positiva* K, *tale che* $\|\Lambda^i{}_j\| = \|\frac{B^i{}_j}{\sqrt{K}}\|$ *é una trasformazione di Lorentz.*

Dimostrazione. Osservando che

$$\eta_{ij} v'^i v'^j = \eta_{ij} B^i{}_h B^j{}_k v^h v^k = N_{hk} v^h v^k \quad \text{dove} \quad N_{hk} = B^i{}_h B^j{}_k \eta_{ij}, \tag{2.74}$$

l'ipotesi, puó essere riformulata cosí: $\eta_{ij} v^i v^j = 0 \Rightarrow N_{ij} v^i v^j = 0$. Ora, i vettori di componenti $v^i \equiv (1, \pm 1, 0, 0)$ verificano la $\eta_{ij} v^i v^j = 0$, quindi devono verificare la $N_{ij} v^i v^j = 0$, da cui si ottengono le equazioni

$$N_{00} + N_{11} + 2\, N_{01} = 0 \quad \text{e} \quad N_{00} + N_{11} - 2\, N_{01} = 0,$$

che, prima sommate e poi sottratte membro a membro, danno come risultato $N_{11} = -N_{00}$ e $N_{01} = 0$. Ripetendo lo stesso ragionamento con i vettori di componenti $v^i \equiv (1, 0, \pm 1, 0)$ e $v^i \equiv (1, 0, 0, \pm 1)$, si ricava $N_{22} = N_{33} = -N_{00}$ e $N_{02} = N_{03} = 0$. Infine, tenendo conto che i vettori $(\sqrt{2}, 1, 1, 0)$, $(\sqrt{2}, 1, 0, 1)$ e $(\sqrt{2}, 0, 1, 1)$ verificano la $\eta_{ij} v^i v^j = 0$, imponendo che verifichino la $N_{ij} v^i v^j = 0$ e sostituendo le N_{ij} giá trovate, si ottiene $N_{12} = N_{13} = N_{23} = 0$. Quindi, posto $K = -N_{00}$, si ottiene $N_{ij} = K \eta_{ij}$ e per la seconda della (2.74)

$$K \eta_{hk} = B^i{}_h B^j{}_k \eta_{ij}. \tag{2.75}$$

Chiaramente non puó essere $K = 0$, altrimenti essendo la matrice $\|B^i{}_j\|$ invertibile, da $B^i{}_h B^j{}_k \eta_{ij} = 0$ si otterrebbe $\eta_{ij} = 0$. Inoltre se fosse $K < 0$ la (2.75) si potrebbe scrivere $-\eta_{hk} = C^i{}_h C^j{}_k \eta_{ij}$, dove $C^i{}_j = \frac{B^i{}_j}{\sqrt{-K}}$ é una matrice non singolare e quindi determinante un cambiamento di base: $\mathbf{e''}_i = C^j{}_i \mathbf{e}_j$. Nella nuova base, $\eta''_{hk} = C^i{}_h C^j{}_k \eta_{ij}$ e quindi $\eta''_{ij} = -\eta_{ij}$, che é in contrasto con li teorema 1.8.2. Dovendo essere $K > 0$, la (2.75) si puó scrive

$$\eta_{hk} = \Lambda^i{}_h \Lambda^j{}_k \eta_{ij} \tag{2.76}$$

dove $\Lambda^i{}_j = \frac{B^i{}_j}{\sqrt{K}}$ é, per la (2.76), una trasformazione di Lorentz.•

Teorema 2.6.1 *Se la trasformazione (2.69)-(2.72) é una trasformazione di Lorentz, lascia invariate le equazioni dei coni di luce, viceversa se lascia invariate le equazioni dei coni di luce, é, a meno di una trasformazione di scala(omotetia), una trasformazione di Lorentz.*

Dimostrazione. Considerato un qualunque punto $P \equiv (t_0, x_0, y_0, z_0) \equiv (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) \in M_4$, ed un vettore $\mathbf{v} \in T_P$, sia $Q \equiv (t, x, y, z) \equiv (t', x', y', z')$ l'unico punto di M_4 tale che $\mathbf{v} = Q - P = (t - t_0)\mathbf{e}_0 + (x - x_0)\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\mathbf{e}_3 = (t' - t'_0)\mathbf{e}'_0 + (x' - x'_0)\mathbf{e}'_1 + (y' - y'_0)\mathbf{e}'_2 + (z' - z'_0)\mathbf{e}'_3$. Si ha

$$\eta_{ij} v^i v^j = \quad -(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \tag{2.77}$$

$$\eta_{ij} v'^i v'^j = \quad -(t' - t'_0)^2 + (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2. \tag{2.78}$$

Se la (2.69)-(2.72) é una trasformazione di Lorentz, allora per il lemma 2.6.1, i secondi membri delle equazioni (2.77) (2.78) sono identicamente uguali, quindi

$$-(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0 \Leftrightarrow -(t' - t'_0)^2 + (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 = 0.$$

Viceversa se la (2.69)-(2.72) conserva l'equazione dei coni di luce, per le (2.77) (2.78), $\eta_{ij} v^i v^j = 0 \Rightarrow \eta v'^i v'^j = 0$ da cui, per li lemma 2.6.2, segue la tesi.$\bullet$

Chapter 3

RELATIVITÁ RISTRETTA

3.1 Premesse

La teoria dell'elettromagnetismo, introdotta da J.C.Maxwell nel 1864, prediceva, tra le altre cose, che la velocitá della luce c é una costante universale. Poiché in base al *principio dei moti relativi* della cinematica Newtoniana, le velocitá dipendono dal sistema di riferimento in cui vengono misurate, l'universalitá di c implicherebbe l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato in cui essa assumerebbe questo valore. In tutti gli altri sistemi di riferimento, la velocitá della luce differirebbe da c per la velocitá di trascinamento.

Inoltre, essendo previsto dalla teoria di Maxwell, che la luce si propaga come un'onda, é stata postulata l'esistenza di un mezzo, *l'etere* in cui tale onda si dovrebbe propagare. Il sistema di riferimento privilegiato, quindi, a meno di una rotazione o traslazione, é il sistema di riferimento dell'etere. Questo significa che, per un osservatore terrestre, la velocitá della luce dovrebbe differire da c per la velocitá della Terra rispetto all'etere.

Con osservazioni astronomiche, si é trovato che la luce si propaga con velocitá $c = 3 * 10^{10}\ cm/sec$ lungo linee rette rispetto ad un sistema di riferimento (approssimativamente) inerziale I con origine nel Sole ed assi puntati verso tre stella fisse. Si assume, quindi, che con buona approssimazione il sistema di riferimento dell'etere sia proprio I. Quindi la velocitá della Terra rispetto all'etere coincide con la velocitá nel moto di rotazione attorno al Sole, cioé $v = 30Km/sec$. In particolare se in un dato istante la Terra ha velocitá $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ rispetto ad I, dove $\mathbf{t}$ é il versore della tangente all'orbita terrestre, dopo sei mesi la sua velocitá rispetto ad I deve essere $-\mathbf{v}$. Questo implica che, per un osservatore terrestre, in un dato istante, la velocitá della luce deve differire di $\pm 2v$ rispetto alla velocitá di sei mesi prima o sei mesi dopo.

Partendo da queste previsioni teoriche, A.A.Michelson e E.W.Morley nel 1887, cercarono di verificare sperimentalmente questa differenza della velocitá della luce nell'arco di sei mesi, con esperimenti di interferometria. Il risultato a cui pervennero con un'ottima precisione fu $v \approx 0Km/sec$, quindi in completo disaccordo con il valore previsto di $30Km/sec$.

Successivamente furono tentati altri esperimenti, che portarono peró allo stesso di risultato negativo. A questo punto furono fatti diverse ipotesi teoriche, che potessero spiegare i risultati di questi esperimenti, coerentemente con la teoria di Maxwell, come per esempio la teoria secondo cui, la Terra ha velocitá nulla rispetto all'etere, perché il sistema di riferimento dell'etere coincide con quello terrestre,[1] oppure delle ipotesi **ad hoc** sulla contrazione dei regoli nella direzione del moto rispetto all'etere e sulla dilatazione dei tempi in misura tale da poter ottenere gli stessi risultati sperimentali.

Si possono spiegare i risultati dell'esperimento di Michelson e Morley anche supponendo che non ci sia alcun riferimento privilegiato, cioé che la luce abbia velocitá c in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo é in aperto contrasto con il principio dei moti relativi, quindi una tale ipotesi implica una riformulazione della meccanica classica.Questa ipotesi fatta da A. Einstein ha portato alla costruzione di una nuova teoria fisica, la **Relativitá Ristretta** o **Speciale** che si basa sul seguente assioma:

Principio delle relativitá speciale. Esiste una classe di riferimenti, detti inerziali, tale che in ciascuno di essi

1. il moto di un punto isolato é retto dall'equazione $\mathbf{a} = 0$;
2. la velocitá della luce é c.

Come si vede il Principio d'inerzia di Newton viene mantenuto, ma viene introdotto un principio nuovo che, come si vedrá nel prossimo paragrafo porta ad una riformulazione completa della meccanica newtoniana.

L'ipotesi 2 é in contrasto con l'esistenza dell'etere, infatti quest'ultimo non puó essere contemporaneamente in quiete in tutti i sistemi di riferimento inerziali. D'altra parte se la luce é un'onda, come risulta dalle equazioni di Maxwell, in quale mezzo si propaga? Queste considerazioni porterebbero a scartare come *non fisica* l'ipotesi 2. Peró nello stesso periodo in cui fu formulata la relativitá ristretta, fu avanzata, per spiegare altri fenomeni, anche dallo stesso Einstein,

[1] la Terra si trascinerebbe dietro tutto l'etere dell'universo.

l'ipotesi che, pur essendo il moto della luce retto dall'equazione di propagazione delle onde, in realtá essa é composta da corpuscoli detti **fotoni** che si muovono (nel vuoto) lungo linee rette con velocitá c.

3.2 Invarianza della velocitá della luce e trasformazioni di Lorentz

Poiché in un dato sistema di riferimento inerziale, un fotone si muove di moto rettilineo ed uniforme con velocitá c, indicato con $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ il punto da cui é stato emesso all'istante $t = t_0$ e con $P \equiv (x, y, z)$ il punto in cui si trova all'istante t, l'equazione di moto é data da $|P - P_O| = c(t - t_0)$, cioé

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2. \tag{3.1}$$

L'equazione precedente, che rappresenta una sfera di centro P_0 e raggio ct, puó anche essere interpretata come l'equazione di un fronte d'onda sferico che si espande con velocitá uniforme c.

Se ora cosideriamo un altro sistema di riferimento inerziale rispetto al quale le coordinate sono denotate con l'apice, per il pricipio della relativitá speciale, l'equazione di moto del fotone(fronte d'onda) é data da

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 = c^2(t' - t'_0)^2. \tag{3.2}$$

Da notare che nelle (3.1) e (3.2), l'unica quantitá rimasta inalterata é c.[2]

A questo punto, per determinare la classe dei riferimenti inerziali postulati dal principio della relativitá speciale, bisogna capire quali sono le trasformazioni che mutano la (3.1) nella (3.2). Come prima cosa, per il punto 1 del principio di relativitá, si puó affermare che i due sistemi di riferimento a cui si riferiscono le equazioni precedenti si devono muovere, l'uno rispetto all'altro, di moto traslatorio rettilineo ed uniforme. Supponiamo che il secondo si muova con velocitá **v** rispetto al primo, allora, senza perdere in generalitá, si possono scegliere gli assi nei due riferimenti, in maniera tale che $\vec{x}$ e $\vec{x'}$ siano sovrapposti, concordemente orientati e paralleli a **v**, gli assi $\vec{y'}$ e $\vec{z'}$ paralleli e concordi rispettivamente agli assi $\vec{y}$ e $\vec{z}$, e nell'istante in cui le due origini O e O' coincidono, vengano azzerati gli orologi dei due osservatori: $t = t' = 0$. Secondo la meccanica classica, le trasformazioni che fanno passare dal primo sistema di riferimento al secondo sono:

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t,^3 \tag{3.3}$$

essendo v il modulo di **v**. Dalle equazioni precedenti, si ricava che, per $t = t_0$, $x'_0 = x_0 - vt_0$, $y'_0 = y_0$, $z'_0 = z_0$ e quindi la (3.2) viene trasformata nell'equazione

$$(x - x_0 - v(t - t_0))^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2$$

che ovviamente é diversa dalla (3.1). Quindi le trasformazioni di Galileo (3.3) non lasciano invariato il fronte d'onda, perció devono essere abbandonate, se si vuole fare una teoria fisica basata sul principio di relativitá. Poiché le trasformazioni di Galileo si fondano sull'esistenza di un tempo unico per tutti gli osservatori, da ora in poi non bisogna piú dare per scontato che $t' = \alpha t + \beta$ (o $t' = t$, se gli orologi sono sincronizzati e utilizzano la stessa unitá di misura).

Abbandonata l'ipotesi di un tempo assoluto, si deve consentire che, nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, vari, oltre alle coordinate spaziali, anche quella temporale. Da ora in poi i punti in un sistema di riferimento non saranno piú caratterizzati dalle tre coordinate spaziali, ma anche dal tempo, cioé saranno rappresentati dalla quadrupla (t, x, y, z), o, volendo dare a tutte le coordinate le dimensioni fisiche di una lunghezza, si possono considerare le quadruple (ct, x, y, z). Tale quadrupla verrá chiamata **evento**.

L'insieme degli eventi é uno spazio affine di dimensione 4. Osserviamo che le equazioni di evoluzione dei fronti d'onda (3.1)-(3.2) coincidono, nello spazio degli eventi, con le equazioni dei coni di luce rispetto alle coordinate $(w = ct, x, y, z)$ e $(w' = ct', x', y', z')$. Poiché siamo alla ricerca di trasformazioni che conservano le equazioni di evoluzione dei fronti d'onda luminosi e poiché, per quanto visto nell'ultimo paragrafo del capitolo precedente, le trasformazioni di Lorentz sono, a meno di una costante moltiplicativa, tutte e sole le trasformazioni che conservano i coni li luce, la metrica piú naturale per lo spazio degli eventi é la metrica di Lorentz, rispetto a cui le trasformazioni di Lorentz sono le isometrie. Quindi lo spazio degli eventi verrá da ora in poi identificato con lo spazio-tempo di Minkowski.

Ció premesso, consideriamo nello spazio-tempo di Minkowski la generica trasformazione di coordinate che conserva i coni di luce

$$w' = \bar{\Lambda}^0_0\, w + \bar{\Lambda}^0_1\, x + \bar{\Lambda}^0_2\, y + \bar{\Lambda}^0_3\, z$$
$$x' = \bar{\Lambda}^1_0\, w + \bar{\Lambda}^1_1\, x + \bar{\Lambda}^1_2\, y + \bar{\Lambda}^1_3\, z$$

[2] utilizzando unitá di misura diverse nei due sistemi di riferimento, in generale si ottengono valori numerici diversi per c, quindi le equazioni (3.1) e (3.2) presuppongono implicitamente che i due sistemi di riferimento usino unitá di misura per lo spazio e per il tempo uguali: $u_L = u'_L, u_T = u'_T$, o al piú proporzionali: $u_L = \alpha u'_L, u_T = \alpha u'_T$, essendo α una costante positiva.

[3] l'ultima equazione dovrebbe essere $t' = \alpha t + \beta$, essendo α e $beta$ due costanti; ma $\beta = 0$ perché si sta supponendo che i due orologi vengono azzerati contemporaneamente, e si puó porre $\alpha = 1$, supponendo che i due osservatori usino la stessa unitá di misura.

$$y' = \bar{\Lambda}_0^2\, w + \bar{\Lambda}_1^2\, x + \bar{\Lambda}_2^2\, y + \bar{\Lambda}_3^2\, z$$
$$z' = \bar{\Lambda}_0^3\, w + \bar{\Lambda}_1^3\, x + \bar{\Lambda}_2^3\, y + \bar{\Lambda}_3^3\, z.$$

dove $\bar{\Lambda}_j^i = \Lambda^i{}_j\sqrt{K}$ e $\|\Lambda^i{}_j\|$ é una trasformazione di Lorentz. Quindi le equazioni precedenti si possono riscrivere:

$$\frac{w'}{\sqrt{K}} = \Lambda^0{}_0\, w + \Lambda^0{}_1\, x + \Lambda^0{}_2\, y + \Lambda^0{}_3\, z$$
$$\frac{x'}{\sqrt{K}} = \Lambda^1{}_0\, w + \Lambda^1{}_1\, x + \Lambda^1{}_2\, y + \Lambda^1{}_3\, z$$
$$\frac{y'}{\sqrt{K}} = \Lambda^2{}_0\, w + \Lambda^2{}_1\, x + \Lambda^2{}_2\, y + \Lambda^2{}_3\, z$$
$$\frac{z'}{\sqrt{K}} = \Lambda^3{}_0\, w + \Lambda^3{}_1\, x + \Lambda^3{}_2\, y + \Lambda^3{}_3\, z.$$

Nella nota (3.2) é stato puntualizzato che per ottenere lo stesso valore numerico per la velocitá della luce nei due sistemi di riferimento, non é necessario che le unitá di misura siano uguali, ma basta che siano proporzionali. C'é quindi la possibilitá di operare la trasformazione di scala $\tilde{w} = \frac{w'}{\sqrt{K}}, \tilde{x} = \frac{x'}{\sqrt{K}}, \tilde{y} = \frac{y'}{\sqrt{K}}, \tilde{z} = \frac{z'}{\sqrt{K}}$, senza alterare nulla dal punto di vista fisico. Cosí le coordinate $(\tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ e (w, x, y, z) sono tra di loro legate da una trasformazione di Lorentz.

Da ora in poi, per semplicitá di scrittura, le coordinate relative al secondo sistema di riferimento, verranno di nuovo indicate con l'apice, intendendo che l'eventuale trasformazione di scala é stata giá fatta.

Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due sistemi di riferimanto inerziali, in moto il secondo rispetto al primo con velocitá $\mathbf{v}$. Per semplificare l'espressione delle trasformazioni, si scelgono, senza perdere in generalitá, gli assi spaziali come si é fatto nel caso delle trasformazioni di Galileo, cioé gli assi $\vec{x'}$ e $\vec{x}$ sovrapposti, concordemente orientati e paralleli alla velocitá $\mathbf{v}$, gli assi $\vec{y'}$ e $\vec{z'}$ rispettivamente paralleli e concordi agli assi $\vec{y}$ e $\vec{z}$. Si sceglie come istante iniziale per entrambi gli osservatori $t = t' = 0$, quello in cui le due origini O e O' coincidono. Ed infine, si scelgono le unitá di misura in maniera tale che la velocitá della luce abbia lo stesso valore numerico in entrambi i sistemi di riferimento ed il fattore di scala $\sqrt{K}$ sia uguale a 1. Poiché in tali sistemi di riferimento si ha sempre $y = y'$ e $z = z'$, la trasformazione precedente si riduce ad una trasformazione speciale di Lorentz:

$$w' = \gamma(w - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta w) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad |\beta| < 1. \tag{3.4}$$

Da considerazioni fisiche si puó ricavare il legame tra β e $\mathbf{v}$: osservando che per l'origine O' é $x'_{O'} = 0$, si deve avere $x_{O'} = \beta w = \beta ct$. D'altra parte rispetto al primo sistema di riferimento, il moto di O' é retto dall'equazione $x_{O'} = vt$, confrontando le due espressioni si ricava $\beta = \frac{v}{c}$. Riutilizzando di nuovo le coordinate temporali, e l'espressione di β precedentemente ottenuta, la (3.4) diventa

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), \quad x' = \gamma(x - vt) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad |v| < c. \tag{3.5}$$

Da queste equazioni si puó vedere che quando v é piccolo rispetto a c, cioé $\frac{v}{c} \approx 0$, allora, a maggior ragione, $\frac{v}{c^2} \approx 0$ e $\gamma \approx 1$ cosí le (3.5) si riducono alle trasformazioni di Galileo (3.3).

La trasformazione inversa della (3.5) si puó calcolare o facendo i calcoli algebrici per invertire le equazioni, o piú semplicemente osservando che se il secondo sistema di riferimento si muove rispetto al primo con velocitá $\mathbf{v}$, allora il primo si muove rispetto al secondo con velocitá $-\mathbf{v}$, quindi basta cambiare v in $-v$ nella (3.5). In ogni caso il risultato finale é:

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'), \quad x = \gamma(x' + vt') \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad |v| < c. \tag{3.6}$$

3.3 Legge di composizione delle velocitá

Il principio dei moti relativi della fisica classica, che si dimostra facendo l'assunzione di un tempo assoluto per tutti gli osservatori, e che come si é precedentemente visto é incompatibile con il principio di relativitá, puó essere generalizzato utilizzando le trasformazioni di Lorentz.

Chiaramente bisogna partire dalla premessa che ogni osservatore misura il suo tempo, e rispetto a questo tempo vengono calcolate le velocitá.

Considerati i due sistemi di riferimento inerziali $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ del paragrafo precedente ed utilizzando la stessa scelta degli assi, origine dei tempi e unitá di misura, le trasformazioni che legano i due riferimenti sono (3.5) (3.6)). Sia P un punto che si muove con velocitá $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ rispetto ai sistemi di riferimento $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Le due velocitá verranno chiamate rispettivamente *velocitá assoluta* e *velocitá relativa*. Utilizzando la (3.5), si trovano le equazioni che legano le due velocitá

$$u'_{x'} = \tfrac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{3.7}$$

$$u'_{y'} = \tfrac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} \tag{3.8}$$

$$u'_{z'} = \tfrac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2}u_x)}. \tag{3.9}$$

Risolvendo queste ultime equazioni rispetto alle variabili u_x, u_y, u_z o cambiando v con $-v$, si ottengono le inverse

$$u_x = \frac{u'_{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_{x'}}, \quad u_y = \frac{u'_{y'}}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_{x'})}, \quad u_z = \frac{u'_{z'}}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2}u'_{x'})}. \tag{3.10}$$

Quadrando e sommando queste ultime equazioni, si ottiene:

$$u^2 = \frac{c^2}{(c^2 + vu'_{x'})^2}(c^2u'^2 + v^2(c^2 - {u'_{y'}}^2 - {u'_{z'}}^2) + 2c^2vu'_{x'}),$$

da cui dopo semplici calcoli, si trova

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2(c^2 - u'^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 + vu'_{x'})^2}. \tag{3.11}$$

Dalla formula precedente si possono trarre alcune conseguenze significative. Qualunque valore minore di c assumano u' e v, il secondo membro é sempre positivo e quindi la velocitá assoluta resta minore di c, in particolare se $u' = \pm\, c$ allora $u = \pm\, c$.

Proposizione 3.3.1 *La composizione di due velocitá minori di quella della luce, dá come risultato una velocitá inferiore a quella della luce. La composizione tra la velocitá della luce ed una inferiore dá come risultato la velocitá della luce.*

Questo significa che la velocitá della luce non puó essere superata.

3.4 Alcune considerazioni sullo spazio-tempo di Minkowski

Fissati due sistemi di riferimento inerziale $\{\vec{ct},\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\}$, e $\{\ \vec{ct}',\ \vec{x}',\ \vec{y}',\ \vec{z}'\}$, supponendo di scegliere gli assi come nei paragrafi precedenti, i due sistemi di riferimento sono legati tra di loro dalle trasformazioni di Lorentz speciali (3.5) (3.6). Gli assi $\vec{ct}'$, $\vec{x}'$, per le (3.5), hanno rispettivamente equazione $x' = 0 \Leftrightarrow ct = \frac{cx}{v}$ e $ct' = 0 \Leftrightarrow ct = \frac{vx}{c}$, quindi formano con l'asse $\vec{x}$ gli angoli $\frac{\pi}{2} - \phi$ e ϕ, essendo $\tan\phi = \frac{v}{c}$. Disegnando gli assi $\vec{ct}$, $\vec{x}$ ortogonali(secondo gli schemi di una metrica propriamente euclidea), come nella prima delle Fig. 3.1, i due assi $\vec{ct}'$, $\vec{x}'$, malgrado le apparenze, sono tra di loro ortogonali, infatti, denotati con $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$ i versori degli assi $\vec{ct}$, $\vec{x}$ e con $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1$, quelli degli assi $\vec{ct}'$, $\vec{x}'$, poiché le trasformazioni di Lorentz lasciano invariato il tensore metrico, $\mathbf{e}'_0 \cdot \mathbf{e}'_1 = \eta'_{01} = \eta_{01} = 0$. Disegnando gli assi $\vec{ct}'$, $\vec{x}'$ ortogonali (sempre secondo gli schemi di una metrica propiamente euclidea), come nella seconda delle Fig. 3.1, gli assi $\vec{ct}$, $\vec{x}$ per le (3.6), hanno rispettivamente equazione $x = 0 \Leftrightarrow ct' = -\frac{cx}{v}$ e $ct = 0 \Leftrightarrow ct = -\frac{vx}{c}$, quindi formano con l'asse $\vec{x'}$ gli angoli $\frac{\pi}{2} - \phi$ e ϕ, essendo $\tan\phi = -\frac{v}{c}$.

Cosí, per quanto riguarda i due sistemi di riferimento, le figure 3.1, sono tra di loro, dal punto di vista di una metrica di Lorentz, equivalenti ed in particolare sono equivalenti anche per quanto riguarda le linee isotemporali (parallele agli assi spaziali) e isospaziali (paralleli agli assi temporali).

L'insieme degli eventi simultanei nel primo sistema di riferimento ha equazione $t = cost$, quindi é una retta parallela all'asse $\vec{x}$; l'insieme degli eventi simultanei nel secondo sistema di riferimento, ha equazione $t' = cost$, quindi é una retta parallela all'asse $\vec{x'}$. Cosí, due eventi A e B sull'asse $\vec{x'}$ sono simultanei per il secondo osservatore, ma l'insieme degli eventi simultanei ad A (B), per il primo osservatore, é la retta parallela all'asse $\vec{x}$ e passante per A (B) (Fig 3.1). Da questo si riconosce che il concetto di simultaneitá non ha piú il significato assoluto che aveva in meccanica classica.

Analogamente due eventi che avvengono nello stesso luogo rispetto al primo sistema di riferimento, non avvengono nello stesso luogo rispetto al secondo. Infatti, eventi che avvengono nello stesso posto per il primo sistema di riferimento devono stare su una retta parallela all'asse $\vec{ct}$, mentre quelli che avvengono nello stesso posto per il secondo sistema di riferimento, devono stare su una retta parallela all'asse $\vec{ct'}$. Cosí due eventi C e D sull'asse $\vec{ct'}$, avvengono nello stesso posto per il secondo osservatore, ma l'insieme degli eventi che avvengo nello stesso posto di C (D), per il primo osservatore, é la retta parallela all'asse $\vec{ct}$ e passante per C (D) (Fig 3.1).

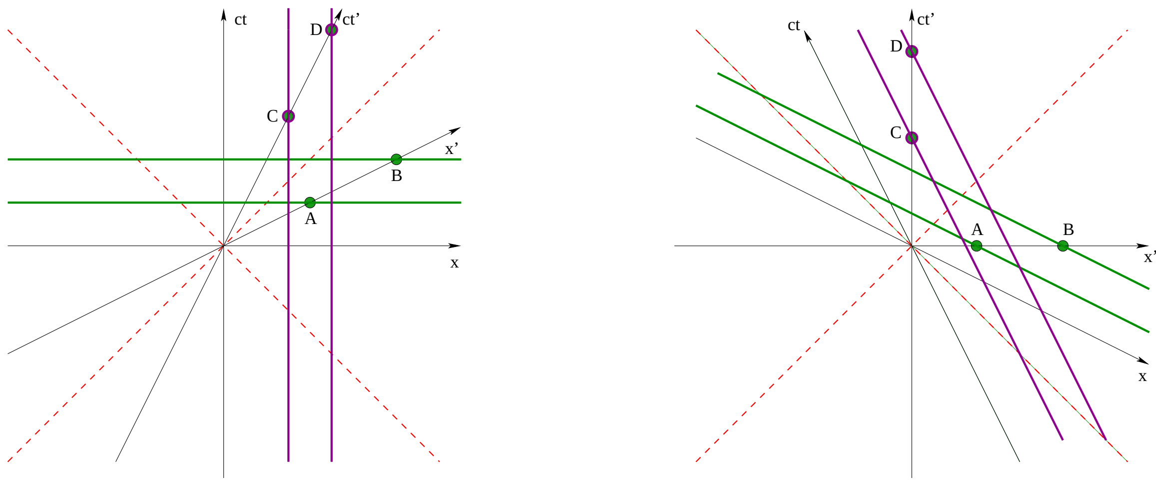

Figure 3.1: Rappresentazione dei riferimenti inerziali nello spazio-tempo di Minkowski

Resta invece indipendente dall'osservatore, tutto ció che viene definito tramite il prodotto scalare: le distanze spazio-temporali e gli angoli. In particolare dall'invarianza degli angoli segue la ben nota invarianza dei coni di luce (linee tratteggiate nelle figure 3.1).

3.5 Contrazione relativistica delle lunghezze

Consideriamo i due sistemi di riferimento dei paragrafi precedenti. Un'asta rigida, in quiete rispetto all'osservatore $\mathcal{R}'$ sia posta sull'asse $\vec{x'}$. Se le coordinate degli estremi dell'asta sono x'_1 e x'_2, la sua lunghezza misurata in $\mathcal{R}'$ é $L_0 = x'_2 - x'_1$. Poiché l'asta é in moto rispetto all'osservatore $\mathcal{R}$, affinché quest'ultimo possa misurarne la lunghezza L, deve rilevare le estremitá x_1 e x_2 nello stesso istante $t_1 = t_2$ e farne la differenza. Quindi utilizzando le (3.5)

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L,$$

da cui

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_0. \tag{3.12}$$

L'effetto della contrazione della misura delle lunghezze sui regoli in movimento, dipende dalla velocitá v del regolo: $\frac{v}{c} \approx 0 \Rightarrow L \approx L_0$, $v \to c \Rightarrow L \to 0$.

Se il sistema di riferimento in cui il regolo é in quiete ed ha lunghezza L_0 é $\mathcal{R}$ e si vuole misurare la lunghezza L in $\mathcal{R}'$, poiché, questa volta il sistema di riferimento di quiete si muove con velocitá $-\mathbf{v}$, nella (3.12) v deve essere scambiato con $-v$. Ma nella (3.12) v compare al quadrato, quindi si ottiene la stessa formula.

La lunghezza L_0 di un regolo rigido, nel sistema di riferimento inerziale in cui é in quiete, si chiama **lunghezza propria**.

La contrazione delle lunghezze puó essere ottenuta graficamente utilizzando la geometria dello spazio-tempo di Minkowskii come si vede dalle Fig. 3.2.

Nella prima figura, i segmenti paralleli all'asse $\vec{x}$, rappresentano un'asta in quiete nel riferimento $\mathcal{R}$ a diversi istanti del tempo di $\mathcal{R}$. Le linee tratteggiate, rappresentano le traiettorie spazio-temporali degli estremi x_1 e x_2 dell'asta. Invece il segmento $\bar{AB}$, rappresenta l'asta vista dall'osservatore $\mathcal{R}'$, in quanto gli estremi x'_1 e x'_2 dell'asta devono essere rilevati simultaneamente, nella figura all'istante $t' = 0$. Misurando le distanze con la metrica di Lorentz, si vede che $\bar{AB}^2 = L^2$ é uguale al quadrato della sua proiezione lungo l'asse $\vec{x}$: $BC^2 = {L_0}^2$, meno il quadrato della sua proiezione lungo l'asse $\vec{ct}$: $\bar{AC}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$. Considerando il triangolo rettangolo ABC, $\frac{c(t_2-t_1)}{x_2-x_1} = \frac{\bar{AC}}{\bar{BC}} = \tan(A\hat{B}C) = \frac{v}{c}$, dove l'ultima eguaglianza é determinata dal fatto che $\tan(A\hat{B}C)$ é, per quanto visto nel paragrafo precedente, il coefficiente angolare dell'asse $\vec{x'}$ rispetto all'asse $\vec{x}$. In definitiva si ottiene: $L^2 = {L_0}^2 - \frac{v^2}{c^2}{L_0}^2$, da cui la (3.12).

Nella seconda figura i segmenti paralleli all'asse $\vec{x'}$, rappresentano un'asta in quiete nel riferimento $\mathcal{R}'$ a diversi istanti del tempo di $\mathcal{R}'$. Le linee tratteggiate rappresentano le traiettorie spazio-temporali degli estremi x'_1 e x'_2 dell'asta. Invece, il segmento $\bar{AB}$ rappresenta l'asta vista dall'osservatore $\mathcal{R}$, in quanto gli estremi x_1 e x_2 dell'asta devono essere rilevati simultaneamente, nella figura all'istante $t = 0$. Misurando le distanze con la metrica di Lorentz, si vede che il quadrato della lunghezza del segmento $\bar{AB}$: L^2, é uguale al quadrato della sua proiezione $\bar{AC}$ lungo l'asse $\vec{x'}$: ${L_0}^2$, meno il quadrato della sua proiezione $\bar{BC}$ lungo l'asse $\vec{ct'}$: $c^2(t_2 - t_1)^2$. Con lo stesso ragionamento fatto prima, e tenendo conto che l'angolo $A\hat{C}B$ é retto perché i segmenti $\bar{AC}$ e $\bar{BC}$ sono paralleli agli assi ortogonali $\vec{x'}$ e $\vec{ct'}$, si riottiene la (3.12).

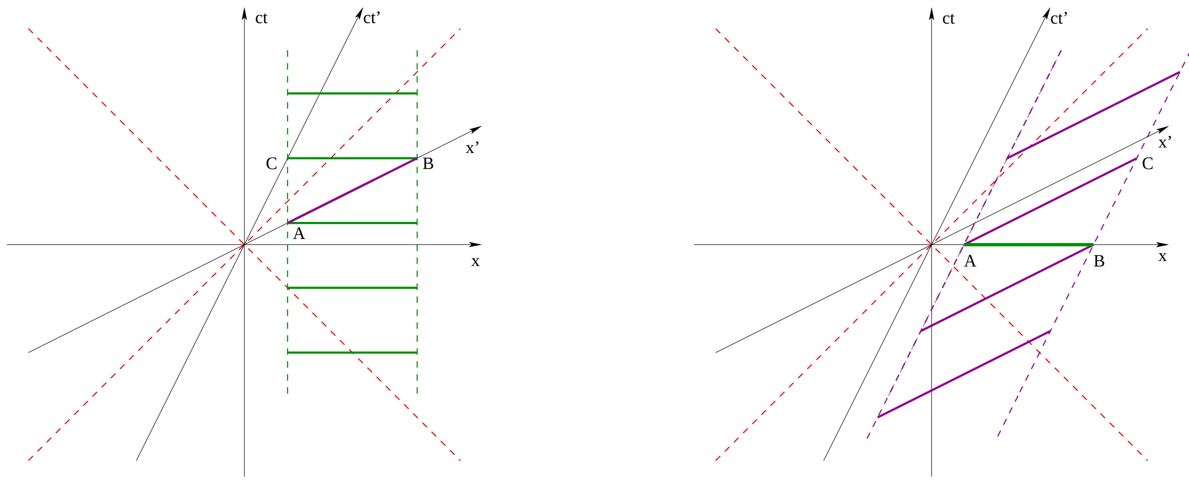

Figure 3.2: Contrazione delle lunghezze per i regoli in movimenro

Osservazione 2 *Si osservi che l'ultimo metodo per il calcolo della contrazione relativistica delle lunghezze, si basa su un presupposto implicito: le distanze nello spazio-tempo di Minkowski hanno un valore assoluto, cioé indipendente dal riferimento in cui vengono calcolate. Infatti, i calcoli sono stati eseguiti imponendo che la misura di un segmento calcolata in un sistema di riferimento fosse uguale a quella calcolata in un altro sistema di riferimento.*

3.6 Dilatazione relativistica dei tempi e paradosso dei gemelli

Cosí come é stato dimostrato che il concetto di lunghezza dipende dall'osservatore, si puó dimostrare che anche la misura del tempo dá risultati dipendenti dall'osservatore. Infatti, supponiamo di misurare nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$, l'intervallo di tempo $t_2' - t_1'$, misurato da $\mathcal{R}'$ nella posizione $x_1' = x_2'$, allora, utilizzando le (3.6), si vede che lo stesso intervallo di tempo misurato da $\mathcal{R}$ é

$$t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1'). \tag{3.13}$$

Poiché $\gamma > 1$, questo significa, per esempio, che, se in un cronometro in quiete in $\mathcal{R}'$, la lancetta ha uno scatto ogni secondo, un osservatore in quiete in $\mathcal{R}$ vede tale lancetta impiegare piú tempo tra uno scatto e l'altro rispetto a quella di un cronometro uguale in quiete in $\mathcal{R}$. Quindi gli orologi in quiete in $\mathcal{R}'$, visti da $\mathcal{R}$, sono piú lenti degli orologi in quiete in $\mathcal{R}$.

Il ragionamento inverso: orologio in quiete in $\mathcal{R}$ visto da $\mathcal{R}'$, richiede solo il cambiamento di $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$, ma poiché nella (3.13), la $\mathbf{v}$ compare solo al quadrato, la formula inversa della (3.13) é:

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1). \tag{3.14}$$

L'intervallo di tempo misurato da un osservatore in quiete in un dato sistema di riferimento inerziale si chiama **tempo proprio**, per distinguerlo da quello misurato da un osservatore in moto. Cosí nella (3.13) il tempo proprio é $t_2' - t_1'$, mentre nella (3.14) é $t_2 - t_1$.

Come nel caso della contrazione delle lunghezze, anche la dilatazione dei tempi puó essere ricavata da considerazioni geometriche, nello spazio-tempo di Minkowski, come si vede dal seguente esame delle figure (3.3).

Nella prima delle figure (3.3), la lunghezza del segmento $\bar{BC}$ é l'intervallo $c(t_2' - t_1')$, misurato dall'osservatore $\mathcal{R}'$ in $x' = 0$. Proiettando $\bar{BC}$ sugli assi $\vec{x}$ e $\vec{ct}$, si ottengono i segmenti $\bar{AC}$ e $\bar{AB}$, tali che $-\bar{BC}^2 = -\bar{AC}^2 + \bar{AB}^2$, cioé $-c^2(t_2' - t_1')^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$. Poiché il triangolo ABC é rettangolo, $\frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)} = \frac{\bar{AB}}{\bar{AC}} = \tan(A\hat{C}B) = \frac{v}{c}$, perché $\tan(A\hat{C}B)$ é il coefficiente angolare dell'asse $\vec{x'}$. Quindi $(t_2' - t_1')^2 = (t_2 - t_1) - \frac{v^2}{c^2}(t_2 - t_1)$, da cui segue la (3.13). Analogo ragionamento si fa con la seconda figura (3.3), tenendo conto che, come nel caso precedente, il triangolo ABC é rettangolo, perché i segmenti $\bar{AB}$ e $\bar{BC}$ sono paralleli agli assi ortogonali $\vec{x'}$ e $\vec{ct'}$.

Si puó osservare che in base alle (3.13) (3.14), ciascuno dei due osservatori vede l'orologio dell'altro andare piú lentamente del suo, questa situazione a prima vista puó sembrare contraddittoria. É stato a tal fine proposto un esperimento ideale per mettere in evidenza questa presunta contraddizione: il **paradosso dei gemelli**. Si supponga che, ad un certo istante, una persona che chiamiamo Bra, parta dalla Terra per raggiungere una data stella ad una velocitá prossima a quella della luce, lasciando sulla Terra il fratello gemello Ket ad aspettarlo. Per quanto visto prima, ognuno di loro vedrá l'orologio dell'altro andare piú lentamente del suo e quindi vedrá l'altro invecchiare piú lentamente di se stesso. Nel momento in cui Bra fará ritorno sulla Terra, ciascuno dei due gemelli troverá l'altro, invecchiato meno di se stesso:

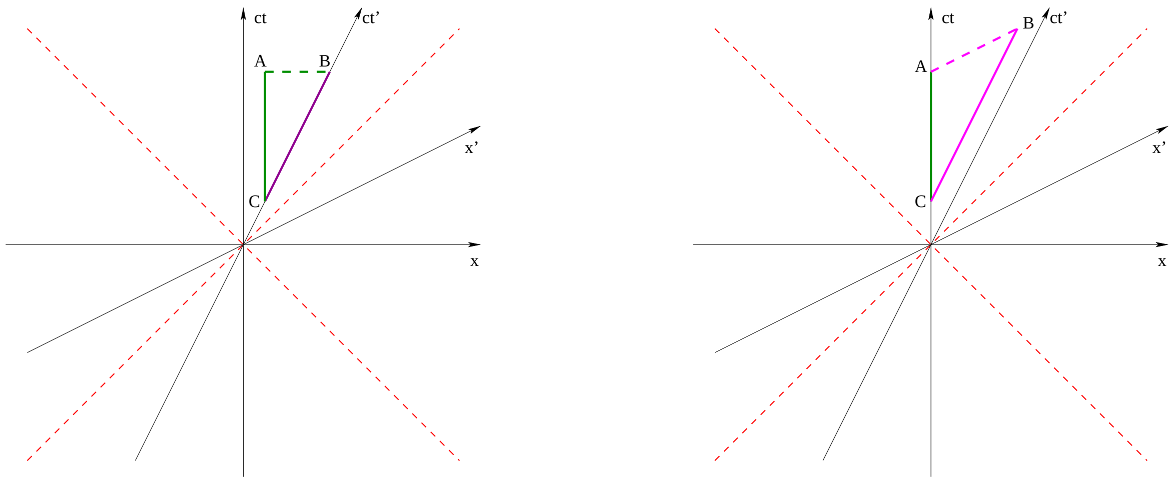

Figure 3.3: Dilatazione dei tempi per gli orologi in movimento

una evidente contraddizione. Tutto questo discorso si basa sulla simmetria delle equazioni (3.13) (3.14), queste ultime essendo vere nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale all'altro. Ma questa premessa non é rigorosamente vera. In realtá, Bra per poter partire dalla Terra ha bisogno di una accelerazione, di una seconda accelerazione ha bisogno quando deve invertire la rotta per tornare indietro, e di una terza, al ritorno, per potersi fermare. Quindi il suo sistema di riferimento non si muove sempre di moto rettilineo ed uniforme rispetto a quello terrestre. Si potrebbe obbiettere a questa osservazione, che delle tre accelerazioni, la prima e la terza si possono evitare[4], per quanto riguarda la seconda, che é inevitabile per poter ritornare sulla Terra, si puó fare in modo che avvenga in tempi cosí brevi da rendere impensabile l'annullamento del grande divario temporale che si é creato nel viaggio di andata e che si creerá in quello di ritorno. Queste ultime considerazioni possono far pensare che, pur non essendo verificati esattamente i presupposti che portano alle equazioni (3.13) (3.14), lo siano con una buona approssimazione, quindi la contraddizione sostanzialmente rimarrebbe.

In realtá, come mostra la figura 3.4, l'accelerazione che serve ad invertire la rotta, rompe irrimediabilmente ogni simmetria tra le traiettorie dei due gemelli e dal calcolo delle lunghezze delle traiettorie spazio-temporali, si riconosce, che per Bra é trascorso meno tempo rispetto a quello trascorso per Ket. Infatti, supponendo che il riferimento $\{\vec{x}, \vec{ct}\}$ sia solidale con la Terra,[5] la traiettoria di Ket é il segmento $\bar{OB}$. Bra, nel viaggio di andata, é in quiete nell'origine del sistema di riferimento $\{\vec{x'}, \vec{ct'}\}$ che si muove con velocitá v rispetto a quello terrestre, mentre nel viaggio di ritorno, é in quiete rispetto al sistema di riferimento $\{\vec{x''}, \vec{ct''}\}$ che si muove con velocitá $-v$ rispetto a quello terrestre, quindi la sua traiettoria é la spezzata composta dai segmenti $\bar{OA}$ e $\bar{AB}$. Misurando le lunghezze delle due traiettorie e facendo il ragionamento precedente a proposito della prima delle figure 3.3, si vede che il quadrato del tempo trascorso per Bra é uguale al quadrato del tempo trascorso per Ket meno $\frac{2}{c^2}$ per il quadrato della lunghezza del segmento $\bar{OM}$. Quindi per Bra é trascorso meno tempo che per Ket.

Osservazione 3 *Anche se per Bra é passato meno tempo che per Ket, non significa che Bra, durante il viaggio si é reso conto che il suo orologio e i suoi ritmi biologici andavano piú lentamente rispetto a prima, significa, invece, che la distanza dalla Terra alla destinazione finale é diminuita per via della contrazione delle lunghezze. Quindi la spiegazioni che entrambi danno della loro differenza di etá, quando si incontrano, é diversa: Ket dice che Bra ha percorso , nel viaggio di andata ed in quello di ritorno, una distanza* L_0 *mentre all'interno dell'astronave tutto andava al rallentatore, Bra invece dice che il suo tempo scorreva normalmente, ma ha fatto prima perché la distanza percorsa é stata* $L < L_0$.

D'altra parte, ci si puó chiedere che fine abbia fatto la simmetria della dilatazione dei tempi, in definitiva anche Bra dovrebbe vedere l'orologio di Ket andare piú lentamente, allora come fa a trovarlo piú vecchio? La spiegazione si trova esaminando la Fig. 3.4. Se Bra volesse calcolare l'intervallo di tempo trascorso per Ket dalla sua partenza al momento in cui inverte la rotta, dovrebbe proiettare il semento $\bar{OM}$ *sul propio asse dei tempi, ottenedo cosí il segmento spazio-temporale* $\bar{OE}$. *Ma Bra non raggiunge mai l'evento E perché inverte la rotta nell'evento A, quindi Bra misura, nel suo sistema di riferimento solo l'intervallo di tempo di Ket che va dall'evento O all'evento D simultaneo ad A. Analogamente, nel viaggio di ritorno, Bra non puó misurare, nel suo sistema di riferimento l'intera lunghezza del segmento* $\bar{MB}$, *perché per fare questo dovrebbe percorrere l'intera proiezione di* $\bar{MB}$ *sul suo asse dei tempi:* $\bar{FB}$. *Poiché, invece, percorre* $\bar{AB}$, *puó proiettare sul suo asse dei tempi solo il segmento* $\bar{CB}$. *Quindi, anche se Bra vede l'orologio di Ket andare piú lentamente del suo, puó misurare solo una parte del tempo che é effettivamente trascorso per Ket. D'altra parte, Ket puó*

[4] per esempio, dopo essere partito, Bra fa un giro e solo dopo aver raggiunto la velocitá di crociera passa accanto a Ket e sincronizza il suo orolgio con quello del fratello, mentre al ritorno, i due orologi possono essere confrontati quando Bra passa accanto a Ket senza fermarsi.

[5] il sistema di riferimento terrestre non é inerziale, peró questo non cambia la sostanza, perché la Terra puó essere sostituita da un'astronave in quiete in un sistema di riferimento inerziale.

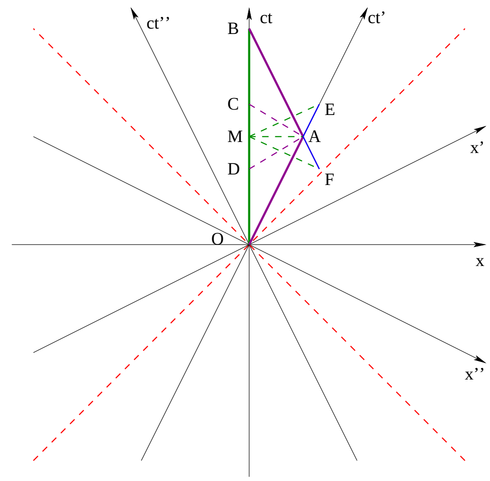

Figure 3.4: Intervalli di tempo misurati dai due osservatori

proiettare sul suo asse dei tempi i segmenti $\bar{OA}$ e $\bar{AB}$ per intero e quindi puó misurare tutto il tempo trascorso per Bra.

Si puó concludere quindi che l'inversione di rotta, anche se avviene istantaneamente come semplicisticamente é stato assunto, é cruciale, perché non consente a Bra di rilevare tutto il tempo che é effettivamente trascorso per Ket.

3.7 Tempo proprio e cinematica relativistica

Definizione 3.7.1 *La traiettoria descritta da una particella P nello spazio-tempo di Minkowski, si chiama* **linea di universo** *di P.*

Proposizione 3.7.1 *La linea d'universo di una particella non puó essere di tipo spazio.*

Dimostrazione. Fissato il sistema di riferimento $\{\vec{ct}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ e la base naturale $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, sia ι la traiettoria di P. Senza perdere in generalitá, si puó scegliere come parametro t, quindi le equazioni parametriche sono: $w = ct, x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ e il vettore tangente é $X(t) = c\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_3$, quindi $X(t) \cdot X(t) = -c^2 + \frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2 = -c^2 + v^2$. Da questa equazione si vede che se $X(t)$ fosse di tipo spazio, dovrebbe essere $v^2 > c^2$. Quindi $X(t)$ é di tipo tempo per una particella che viaggia ad una velocitá inferiore a quella della luce e di tipo nullo per una particella che si muove alla velocitá della luce. •

Sia P un punto che si muove di moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $\{\vec{ct}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ (Fig. 3.5). La linea di universo ι di P, se si prende t come parametro, é la curva di equazioni parametriche $ct = ct, x(t) = a_x t + b_x, y(t) = a_y t + b_y, z(t) = a_z t + b_z$, essendo $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ delle opportune costanti, cioé una retta e tale retta deve essere di tipo tempo o di tipo luce.

Supponiamo che ι sia di tipo tempo, allora, fissati due eventi su ι, $A = \iota(t_0)$ e $B = \iota(t)$ con $t_0 < t$, la lunghezza spazio-temporale del segmento congiungente A e B é, per quanto si é visto nel paragrafo precedente, $c\Delta\tau$ essendo $\Delta\tau$ l'intervallo di tempo proprio misurato nel sistema di riferimento di quiete per P, cioé il sistema di riferimento che ha asse $\vec{ct'}$ parallelo a ι (prima figura 3.5). Quindi si puó chiamare intervallo di tempo proprio di P tra i due eventi A e B, $\Delta\tau = \frac{\bar{AB}}{c}$

La definizione di tempo proprio di una particella si puó generalizzare anche al caso in cui essa non si muova di moto rettilineo ed uniforme. Supponiamo che la linea di universo, $\iota(t)$, di P sia una curva di tipo tempo di classe C^1, siano $A = \iota(t_0)$ e $B = \iota(t)$ con $t_0 < t$, due eventi su ι. Chiameremo intervallo di tempo proprio di P tra i due eventi A e B, la costante positiva $\Delta\tau$, tale che $c\Delta\tau =$*lunghezza dell'arco di curva* ι *di estremi* A *e* B:

$$c\Delta\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{|-(\frac{d(ct)}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2|}dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{|-c^2 + v^2|}dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 - v^2}dt, \tag{3.15}$$

essendo $\mathbf{v}$ la velocitá della particella. Dall'equazione precedente si trae

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \gamma(\mathbf{v})d\tau, \quad \text{dove} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.16}$$

che é molto simile alla formula di dilatazione dei tempi ottenuta nel caso di un moto rettilineo ed uniforme, ma con la differenza che, in questo caso, il fattore di dilatazione non é costante, perché $\mathbf{v}$ non é costante.

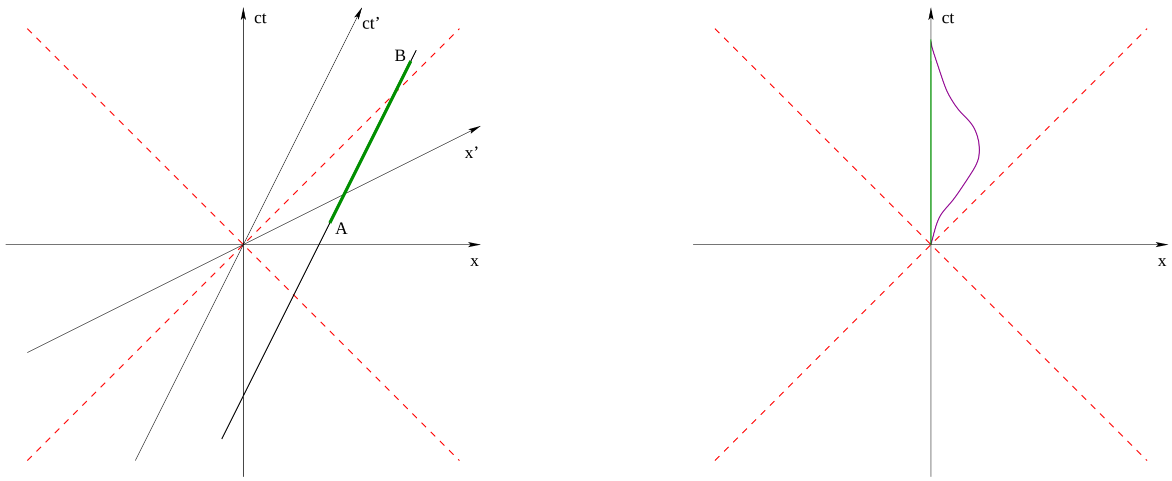

Figure 3.5: Linee d'universo e tempo proprio

Dalla (3.15), in particolare si ricava:

$$\Delta\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt < t - t_0, \tag{3.17}$$

perché l'argomento dell'integrale é minore di 1. Quest'ultima disequazione ci consente di dare una risposta qualitativa sul paradosso dei gemelli anche nel caso in cui Bra non si muova di moto rettilineo ed uniforme, ma abbia una linea di universo come nella seconda delle Fig. 3.5. Il tempo proprio di Bra é l'intervallo $\Delta\tau$, dato dalla lunghezza della sua linea di universo, diviso c, mentre il tempo proprio di Ket é l'intervallo $t - t_0$, dato dalla lunghezza della sua linea d'universo, diviso c. Per la (3.17) il tempo trascorso per Bra é inferiore a quello trascorso per Ket.

Per quanto riguarda le curve di tipo nullo, che, per quanto si é visto prima, rappresentano particelle che si muovono alla velocitá della luce, l'equazione (3.15) dá $\Delta\tau = 0$. Quindi il tempo proprio di un fotone é nullo.

Osservazione 4 *La nozione di tempo proprio assegnato ad una particella, qualunque sia il suo moto, come lunghezza (a meno di un costante moltiplicativa) della sua linea d'universo, poiché non dipende dal particolare sistema di riferimento (anche non inerziale) scelto, in un certo senso ripristina la nozione di* **tempo assoluto**. *Cosí, mentre gli ordinari concetti di distanze spaziali e temporali, perdono nella relativitá ristretta il valore universale che aveveno nella meccanica classica, sostituendo ad essi il concetto di lunghezza spazio-temporale si riottengono delle quantitá assolute. Si puó anche dire che la relativitá ristretta tratta quantitá assolute a condizione di non volere a tutti i costi scindere queste quantitá nelle loro componenti spaziali e temporali che sono dipendenti dall'osservatore.*

Nello spirito dell'osservazione precedente, quei concetti classici che richiedono una distinzione netta tra spazio e tempo, verranno ora generalizzati nel contesto dello spazio-tempo di Minkowski utilizzando quantitá assolute.

Definizione 3.7.2 *Sia $\iota(t)$ la linea di universo di tipo tempo di una particella. Si chiama* **quadrivelocitá** *di P, il vettore $U(t) \in T_{\gamma(t)}$ ottenuto derivando $\gamma(t)$ rispetto al tempo proprio. Si chiama* **quadriaccelerazione** *di P, il vettore $A(t) \in T_{\gamma(t)}$ ottenuto derivando $U(t)$ rispetto al tempo proprio.*

Per la (3.16),

$$U = \frac{d(ct)}{d\tau}\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{d\tau}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{d\tau}\mathbf{e}_3 = \frac{dt}{d\tau}(c\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3) = \gamma(\mathbf{v})(c\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}) \tag{3.18}$$

e

$$A = \frac{dU}{d\tau} = \gamma(\mathbf{v})\frac{dU}{dt} = \gamma(\mathbf{v})(c\frac{d\gamma(\mathbf{v})}{dt}\mathbf{e}_0 + \frac{d}{dt}(\gamma(\mathbf{v})\mathbf{v})). \tag{3.19}$$

Proposizione 3.7.2 *Qualunque sia il moto di P, la quadrivelocitá ha modulo costante e la quadriaccelerazione é costantemente ortogonale alla quadrivelocitá.*

Dimostrazione. $U \cdot U = \gamma(\mathbf{v})^2(-c^2 + v^2) = -c^2$. Da questa equazione si ricava $0 = \frac{d}{d\tau}(U \cdot U) = 2U \cdot A$. •

Osservazione 5 *Come si vede dalla dimostrazione della proposizione precedente, se si scelgono le unitá di misura in maniera tale che $c = 1$, la quadrivelocitá é il versore della tangente alla linea di universo di P.*

Definizione 3.7.3 *Sia $\iota(t)$ la linea di universo di una particella P, si chiama* **sistema di riferimento di quiete istantanea** *per P all'istante t, il sistema di riferimento inerziale (ct', x', y', z') avente come base naturale $\mathbf{e'}_0, \mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$, tale che*

$$U(t) = c\,\mathbf{e'}_0. \tag{3.20}$$

In particolare se P si muove di moto rettilineo ed uniforme, il sistema di riferimento di quiete istantanea é lo stesso per ogni t come nella prima delle figure 3.5, in caso contrario ce né uno per ogni istante. Inoltre la (3.18), scritta nel sistema di quiete istantanea diventa $U = \gamma(\mathbf{v}')(c\mathbf{e}'_0 + \mathbf{v}')$,che, confrontata con la (3.20), implica che la velocitá $\mathbf{v}'$ rispetto a tale riferimento si deve annullare. Quindi il riferimento di quiete istantanea é quello in cui il punto ha, in quell'istante, velocitá nulla. Nella Fig. 3.6, é disegnato, in alcuni punti, il sistema di riferimento di quiete istantanea per linee di universo non rettilinee.

3.8 Moti iperbolici

Il moto piú semplice, dopo quello rettilineo ed uniforme, é, in cinematica classica, il moto rettilineo uniformemente accelerato. Tale tipo di moto non puó, peró, esistere in relativitá ristretta, perché la costanza dell'accelerazione implica che la velocitá dipende linearmente dal tempo, quindi tende ad infinito con t. Questo, ovviamente, é in contraddizione con l'insuperabilitá della velocitá della luce.

Il moto rettilineo uniformemente accelerato della cinematica classica, puó essere generalizzato, in relativitá ristretta da un moto rettilineo con quadriaccelerazione costante. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale $\{\vec{ct}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, con l'asse $\vec{x}$ coincidente con la retta in cui avviene il moto. In questo modo, essendo le coordinate y, z ininfluenti, il problema diventa bidimensionale. In base a questa scelta degli assi, alla proposizione 3.7.2 ed all'ipotesi di quadriaccelerazione costante, le equazioni che intervengono sono:

$$-(U^0)^2 + (U^1)^2 = -c^2, \quad -A^0U^0 + A^1U^1 = 0, \quad -(A^0)^2 + (A^1)^2 = g^2, \quad \text{con} \quad g > 0. \tag{3.21}$$

Per la seconda equazione, deve esistere una funzione α tale che $A^0 = \alpha U^1, A^1 = \alpha U^0$, sostituendo queste ultime nella terza e tenendo conto della prima, si ottiene:

$$g^2 = -\alpha^2(U^1)^2 + \alpha^2(U^0)^2 = \alpha^2c^2,$$

quindi α é costante ed é $\alpha = \pm\frac{g}{c}$. Si ottiene cosí il seguente sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \alpha U^1, \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \alpha U^0,$$

che si risolvono facilmente. Ponendo $U^0(\tau) = \mu_0 e^{\lambda\tau}$ e $U^1(\tau) = \mu_1 e^{\lambda\tau}$, si trova il sistema di equazioni caratteristiche

$$\lambda\mu_0 - \alpha\mu_1 = 0, \quad -\alpha\mu_0 + \lambda\mu_1 = 0,$$

da cui si ottengono come autovalori $\lambda_1 = |\alpha|$ e $\lambda_2 = -|\alpha|$. Se $\alpha = \frac{g}{c} > 0$, in corrispondenza di λ_1 si ottiene $\mu_0 = \mu_1$ ed in corrispondenza di λ_2 si ottiene $\mu_0 = -\mu_1$, da cui le due soluzioni indipendenti $U^0_1(\tau) = e^{\frac{g\tau}{c}}, U^1_1(\tau) = e^{\frac{g\tau}{c}}$ e $U^0_2(\tau) = e^{\frac{-g\tau}{c}}, U^1_2(\tau) = -e^{\frac{-g\tau}{c}}$, quindi l'integrale generale

$$U^0(\tau) = c_1e^{\frac{g\tau}{c}} + c_2e^{\frac{-g\tau}{c}}, \quad U^1(\tau) = c_1e^{\frac{g\tau}{c}} - c_2e^{\frac{-g\tau}{c}}. \tag{3.22}$$

Se $\alpha = -\frac{g}{c} < 0$, in corrispondenza di λ_1 si ottiene $\mu_0 = -\mu_1$ ed in corrispondenza di λ_2 si ottiene $\mu_0 = \mu_1$, da cui le due soluzioni indipendenti $U^0_1(\tau) = e^{\frac{g\tau}{c}}, U^1_1(\tau) = -e^{\frac{g\tau}{c}}$ e $U^0_2(\tau) = e^{\frac{-g\tau}{c}}, U^1_2(\tau) = e^{\frac{-g\tau}{c}}$, quindi l'integrale generale

$$U^0(\tau) = c_1e^{\frac{g\tau}{c}} + c_2e^{\frac{-g\tau}{c}}, \quad U^1(\tau) = -c_1e^{\frac{g\tau}{c}} + c_2e^{\frac{-g\tau}{c}}. \tag{3.23}$$

Supponendo che inizialmente $v = 0$ per $\tau = 0$ e tenendo conto della (3.18), si ottiene $U^0(0) = c, U^1(0) = 0$, quindi $c_1 = c_2 = \frac{c}{2}$, da cui le (3.22) (3.23), diventano rispettivamente

$$U^0(\tau) = c\cosh\frac{g\tau}{c}, \quad U^1(\tau) = c\sinh\frac{g\tau}{c} \tag{3.24}$$

$$U^0(\tau) = c\cosh\frac{-g\tau}{c}, \quad U^1(\tau) = c\sinh\frac{-g\tau}{c}, \tag{3.25}$$

che sono equivalenti ai due sistemi di equazioni differenziali

$$\frac{d(ct)}{d\tau} = c\cosh\frac{g\tau}{c}, \quad \frac{dx}{d\tau} = c\sinh\frac{g\tau}{c} \tag{3.26}$$

$$\frac{d(ct)}{d\tau} = c\cosh\frac{-g\tau}{c}, \quad \frac{dx}{d\tau} = c\sinh\frac{-g\tau}{c}, \tag{3.27}$$

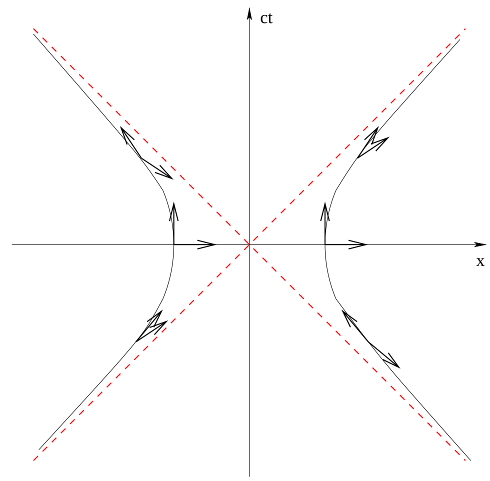

Figure 3.6: Moti iperbolici e sistemi di riferimento di quiete

che integrati, danno

$$ct(\tau) = \frac{c^2}{g}\sinh\frac{g\tau}{c} + cost_1, \quad x(\tau) = \frac{c^2}{g}\cosh\frac{g\tau}{c} + cost_2$$

$$ct(\tau) = -\frac{c^2}{g}\sinh\frac{-g\tau}{c} + cost_1, \quad x(\tau) = -\frac{c^2}{g}\cosh\frac{-g\tau}{c} + cost_2,$$

da cui, imponendo le condizioni iniziali $t(0) = 0, x(0) = \frac{c^2}{g}$ nel primo integrale generale e $t(0) = 0, x(0) = -\frac{c^2}{g}$ nel secondo, si trova, in entrambi i casi, $cost_1 = cost_2 = 0$, quindi le soluzioni sono:

$$ct(\tau) = \frac{c^2}{g}\sinh\frac{g\tau}{c}, \quad x(\tau) = \frac{c^2}{g}\cosh\frac{g\tau}{c} \tag{3.28}$$

$$ct(\tau) = -\frac{c^2}{g}\sinh\frac{-g\tau}{c}, \quad x(\tau) = -\frac{c^2}{g}\cosh\frac{-g\tau}{c}. \tag{3.29}$$

Come si verifica facilmente quadrando e sottraendo, i punti di entrambe le curve appartengono all'iperbole equilatera di equazione $x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2}$, avente come asintoti le bisettrici degli assi, di cui (3.28) é il ramo che sta sul semipiano $x > 0$ e (3.29) é l'altro ramo (Fig. 3.6). Per questo motivo, le soluzioni cosí ottenute si chiamano **moti iperbolici**.

Dal tipo di traiettoria si vede che la quadrivelocitá per $\tau \to \infty$ tende a diventare un vettore di tipo luce e quindi la velocitá tende a c.

3.9 Dinamica relativistica

La dinamica relativistica si puó costruire generalizzando, dove é possibile, la dinamica classica. Come in meccanica classica, ad ogni punto materiale si associa una massa, la cui misura, in questo contesto, non verrá assunta indipendente dal sistema di riferimento in cui viene calcolata. Quindi, cosí come é stato fatto nei paragrafi precedenti con le misure spaziali e temporali, verrá chiamata **massa propria**, la massa del punto misurata nel sistema di riferimento di quiete.

Definizione 3.9.1 *Si chiama* **quadrimpulso***, il vettore $\mathcal{P}$ dato dal prodotto della massa a riposo per la quadrivelocitá $\mathcal{P} = m_0U$.*

Se il punto materiale é isolato, il suo moto é rettilineo ed uniforme, quindi $\mathbf{v} = cost$, da cui U e quindi $\mathcal{P}$ sono costanti. Allora, l'equazione di moto per P é

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = 0.$$

Se invece P non é isolato, generalizzando l'equazione di Newton, si puó tenere conto dell'azione che l'ambiente esercita su P tramite un vettore $\mathcal{F}$ tale che

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \mathcal{F}. \tag{3.30}$$

Il vettore F definito dall'equazione precedente si chiama **quadriforza**.

Osservazione 6 *Sia l'equazione (3.30), sia il principio di azione e reazione vanno usati con cautela in relativitá ristretta, in quanto essi hanno senso per le interazioni che non implichino un'azione a distanza istantanea, Da qui nasce la difficoltá di descrivere un'interazione fondamentale come la gravitá, nell'ambito relativistico. Difficoltá che ha condotto Einstein a formulare la teoria della relativitá generale.*

Proiettando la (3.30) sugli assi spaziali [6] si ottiene

$$\frac{d\mathcal{P}^\alpha}{d\tau} = \frac{d\mathcal{P}^\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \mathcal{F}^\alpha, \tag{3.31}$$

da cui, definendo l'impulso $\mathbf{p}$ come la parte spaziale di $\mathcal{P}$, cioé $\mathbf{p} = \mathcal{P}^1\mathbf{e}_1 + \mathcal{P}^2\mathbf{e}_2 + \mathcal{P}^3\mathbf{e}_3$ e la forza $\mathbf{f}$ come

$$\mathbf{f} = \frac{d\tau}{dt}(\mathcal{F}^1\mathbf{e}_1 + \mathcal{F}^2\mathbf{e}_2 + \mathcal{F}^3\mathbf{e}_3) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(\mathcal{F}^1\mathbf{e}_1 + \mathcal{F}^2\mathbf{e}_2 + \mathcal{F}^3\mathbf{e}_3), \tag{3.32}$$

si ricava l'equazione di moto classica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \tag{3.33}$$

Da notare, comunque, che dalla definizione di quadrimpulso e dalla (3.18), $\mathbf{p} = m_0\,\gamma(\mathbf{v})\mathbf{v}$, quindi per avere la solita definizione di impulso

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{3.34}$$

si deve porre

$$m = \gamma(\mathbf{v})m_0, \tag{3.35}$$

dove m é per definizione la **massa relativa** del punto, cioé la massa misurata dall'osservatore inerziale rispetto a cui il punto si muove con velocitá $\mathbf{v}$. Dall'equazione precedente si vede che la massa relativa coincide con la massa a riposo se $\mathbf{v} = 0$, é maggiore della massa a riposo quando $\mathbf{v} \neq 0$ e cresce senza limiti quando $v \to c$. In particolare, da quest'ultima osservazione si trae la conclusione che nessuna particella di massa a riposo non nulla puó raggiungere la velocitá della luce.

Proiettando la (3.30) sull'asse temporale si ottiene

$$\mathcal{F}^0 = \frac{d(m_0 c\gamma(\mathbf{v}))}{d\tau} = \frac{d(mc)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(mc)}{dt}\gamma(\mathbf{v})$$

da cui

$$\frac{d(mc)}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\mathcal{F}^0. \tag{3.36}$$

In conclusione (3.33) e (3.36) sono rispettivamente, le proiezioni spaziali e temporali dell'equazione di Newton relativistica (3.30).

Ancora per la (3.30)

$$\mathcal{F} = m_0\frac{dU}{d\tau} = m_0 A,$$

quindi, essendo A ortogonale ad U, si ha $\eta_{ij}\mathcal{F}^i U^j = 0$, da cui

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{U^0}\sum_{\alpha=1}^{3}\mathcal{F}^\alpha U^\alpha = \frac{\gamma(\mathbf{v})}{c}\sum_{\alpha=1}^{3} f^\alpha v^\alpha = \frac{\gamma(\mathbf{v})}{c}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v},$$

da quest'ultima e dalla (3.36) si ricava l'equazione dell'energia

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}. \tag{3.37}$$

Quest'ultima equazione, considerando il limite classico $\frac{v}{c} \to 0$, é equivalente al teorma dell'energia cinetica, infatti, sviluppando la funzione $\gamma(\mathbf{v})$ in serie di Taylor attorno a $\frac{v}{c} = 0$ e fermandosi al secondo ordine, si trova

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2,$$

per cui la (3.37) diventa, nel limite classico

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m_0 v^2) \approx \mathbf{f}\cdot\mathbf{v},$$

[6] come al solito gli indici greci si intendono variare da 1 a 3

cioé il teorema dell'energia cinetica: la derivata dell'energia cinetica é uguale alla potenza delle forze applicate. Cosí l'equazione (3.37) suggerisce di considerare la funzione che si deriva al primo membro come l'**energia relativa** E della particella, da cui la ben nota

$$E = mc^2. \tag{3.38}$$

Questa equazione si puó interpretare dicendo che ogni incremento dell'energia relativa corrisponde ad un incremento della massa relativa, in accordo con la (3.35). L'interpretazione secondo cui tutta la massa che figura al secondo membro, cioé, non solo $m - m_0$ ma anche la massa a riposo m_0, si possa trasformare in una grande quantitá di energia (al secondo membro figura c^2), non é deducibile nell'ambito della relativitá ristretta, ma é un'ulteriore ipotesi fatta da Einstein.

3.10 Sistemi di riferimento accelerati e forze apparenti

La rappresentazione di un sistema di riferimento non inerziale nello spazio-tempo di Minkowski non puó avvenire tramite un sistema di coordinate cartesiane, perché le linee di universo delle particelle in quiete in esso ("parallele" all'asse dei tempi), dovendo rappresentare moti accelerati, non son rette. Quindi un sistema di riferimento accelerato, puó essere rappresentato solo da sistemi di coordinate curvilinee (y^0, y^1, y^2, y^3), le cui linee coordinate, in generale, sono una di tipo tempo e tre di tipo spazio[7]. Tali sistemi di coordinate non sono, in generale, definibili su tutto lo spazio-tempo, ma solo localmente ed in alcuni casi solo in zone molto ristrette. Se $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ sono coordinate cartesiane ortogonali, i due sistemi di coordinate sono legati tra di loro da equazioni del tipo $x^i = x^i(y^0, y^1, y^2, y^3)$ e per quanto si é visto nel capitolo precedente, le coordinate curvilinee sono definite nei punti del codominio della trasformazione precedente dove il determinante jacobiano é diverso da zero.

Per esempio, il seguente sistema di coordinate rappresenta un sistema di riferimento non inerziale in cui un punto che si muove di moto iperbolico é in quiete:

$$x^0 = \left(\tfrac{c^2}{g} + y^1\right)\sinh\left(\tfrac{g}{c^2}\, y^0\right) \tag{3.39}$$

$$x^1 = \left(\tfrac{c^2}{g} + y^1\right)\cosh\left(\tfrac{g}{c^2}\, y^0\right) \tag{3.40}$$

$$x^2 = y^2 \tag{3.41}$$

$$x^3 = y^3. \tag{3.42}$$

Le linee coordinate $y^1 = cost$, rappresentano iperboli equilatere di equazione $(x^1)^2 - (x^0)^2 = (\frac{c^2}{g} + y^1)$, aventi come asintoti le bisettrici degli assi, di cui $y^1 = 0$ é proprio il moto iperbolico trovato prima. Le linee coordinate $y^0 = cost$ sono le rette di coseni direttori proporzionali a $\sinh(\frac{g}{c^2}\, y^0)$ e $\cosh(\frac{g}{c^2}\, y^0)$ e passanti, per $y^1 = -\frac{c^2}{g}$, per l'origine. Poiché, sia le iperboli sia le rette[8], devono stare nella zona $\mathcal{D}$ delimitata dalle bisettrici e contenete l'asse $\vec{x^1}$ e poiché il determinante jacobiano $\frac{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial(y^0,y^1,y^2,y^3)} = 1 + \frac{g}{c^2} y^1$ si annulla per $y^1 = -\frac{c^2}{g}$, le equazioni (3.39) (3.42) definiscono un sistema di coordinate curvilinee negli aperti $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \cap \{x^1 > 0\}$ e $\mathcal{D}^- = \mathcal{D} \cap \{x^1 < 0\}$.

Essendo

$$dx^0 = (1 + \tfrac{g}{c^2} y^1)\cosh(\tfrac{g}{c^2} y^0)dy^0 + \sinh(\tfrac{g}{c^2} y^0)dy^1 \tag{3.43}$$

$$dx^1 = (1 + \tfrac{g}{c^2} y^1)\sinh(\tfrac{g}{c^2} y^0)dy^0 + \cosh(\tfrac{g}{c^2} y^0)dy^1 \tag{3.44}$$

$$dx^2 = dy^2 \tag{3.45}$$

$$dx^3 = dy^3, \tag{3.46}$$

il tensore metrico, nel nuovo sistema di coordinate, diventa

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j = -(1 + \frac{g}{c^2} y^1)^2 (dy^0)^2 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2, \tag{3.47}$$

da cui, in particolare si vede che le coordinate curvilinee cosí definite sono ortogonali, infatti la base naturale é costituita da vettori ortogonali: $\frac{\partial}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} = g_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Consideriamo, in generale, due sistemi di riferimento, di cui uno inerziale, espresso, nello spazio-tempo di Minkowski, da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x^0, x^1, x^2, x^3) e l'altro non inerziale, espresso da un sistema di coordinate curvilinee (y^0, y^1, y^2, y^3). Un punto P la cui linea d'universo γ ha nei due sistemi di coordinate, equazioni parametriche $(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$ e $(y^0(\tau), y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau))$, dove τ é il tempo proprio, ha, nei due sistemi di riferimento, quadrivelocitá

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} U'^j.$$

[7] in certi casi si possono scegliere due di tipo nullo e due di tipo luce.

[8] il cui coefficiente angolare é $\tanh(\frac{g}{c^2}\, y^0)$, che ha valore assoluto minore di 1.

Invece la quadriaccelerazione ha, nei due sistemi di riferimento, componenti

$$A^i = \frac{dU^i}{d\tau} = \frac{dx^j}{d\tau}\frac{\partial U^i}{\partial x^j} \quad \text{e} \quad A'^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}A^j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{dx^h}{d\tau}\frac{\partial U^j}{\partial x^h} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{dx^h}{d\tau}\frac{\partial x^j}{\partial y^p}\frac{\partial y^k}{\partial x^h}\nabla_k U'^p = \frac{\partial y^i}{\partial y^p}\frac{dy^k}{d\tau}\nabla_k U'^p = \frac{dy^k}{d\tau}\nabla_k U'^i,$$

avendo utilizzato il fatto, visto nel capitolo precedente, che le componenti delle derivate parziali rispetto a coordinate cartesiane, sono, in un sistema di coordinate qualunque, le derivate covarianti, definite da

$$\nabla_i U'^j = \frac{\partial U'^j}{\partial y^i} + \Gamma^j{}_{ih}U'^h.$$

Tenendo conto che $U^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ e $U'^i = \frac{dy^i}{d\tau}$, si ottiene

$$A^i = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \quad \text{e} \quad A'^i = \frac{dy^k}{d\tau}(\frac{\partial U'^i}{\partial y^k} + \Gamma^i{}_{kh}U'^h) = \frac{dU'^i}{d\tau} + \Gamma^i{}_{kh}U'^h\frac{dy^k}{d\tau} = \frac{d^2y^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{kh}\frac{dy^h}{d\tau}\frac{dy^k}{d\tau}. \tag{3.48}$$

Cosí, la quadriaccelerazione ha, in coordinate curvilinee, la stessa espressione che ha in coordinate cartesiane, piú il termine correttivo $\Gamma^i{}_{kh}\frac{dy^h}{d\tau}\frac{dy^k}{d\tau}$. Moltiplicando la seconda delle (3.48) per la massa propria di P, e ponendo $\mathcal{F}^i = m_0A'^i$ si ottiene l'equazione

$$m_0\frac{d^2y^i}{d\tau^2} = \mathcal{F}^i - m_0\Gamma^i{}_{kh}\frac{dy^h}{d\tau}\frac{dy^k}{d\tau}, \tag{3.49}$$

che, interpretando $\frac{d^2y^i}{d\tau^2}$ come accelerazione relativa, é formalmente identica all'equazione di moto nei sistemi di riferimento non inerziali in meccanica classica, se al termine $m_0\Gamma^i{}_{kh}\frac{dy^h}{d\tau}\frac{dy^k}{d\tau}$ si dá il significato fisico di forza apparente. Con questa interpretazione, i simboli di Christoffel, che si presentano quando si considerano coordinate curvilinee e quindi sistemi di riferimento non inerziali, vengono associati alle forze apparenti, che, si presentano anche loro quando il sistema di riferimento non é inerziale.

Consideriamo l'esempio delle coordinate (y^0, y^1, y^2, y^3), definite dalle equazioni (3.39) (3.42), i simboli di Christoffel non nulli relativi alla metrica (3.47), calcolati utilizzando la (2.30), sono

$$\Gamma^0{}_{01} = \frac{g}{c^2 + gy^1} \quad \text{e} \quad \Gamma^1{}_{00} = \frac{g}{c^4}(c^2 + gy^1),$$

cosí, le equazioni (3.49) si scrivono

$$m_0\frac{d^2y^0}{d\tau^2} = \mathcal{F}^0 - \tfrac{m_0 g}{c^2+gy^1}\tfrac{dy^0}{d\tau}\tfrac{dy^1}{d\tau} \tag{3.50}$$

$$m_0\frac{d^2y^1}{d\tau^2} = \mathcal{F}^1 - \tfrac{m_0 g}{c^4}(c^2 + gy^1)(\tfrac{dy^0}{d\tau})^2 \tag{3.51}$$

$$m_0\frac{d^2y^2}{d\tau^2} = \mathcal{F}^2 \tag{3.52}$$

$$m_0\frac{d^2y^3}{d\tau^2} = \mathcal{F}^3. \tag{3.53}$$

In particolare, rispetto ad un osservatore in quiete nel sistema di riferimento non inerziale: $U'^i = (c, 0, 0, 0)$, si ha

$$0 = \mathcal{F}^0 \tag{3.54}$$

$$0 = \mathcal{F}^1 - m_0g(1 + \tfrac{g}{c^2}y^1) \tag{3.55}$$

$$0 = \mathcal{F}^2 \tag{3.56}$$

$$0 = \mathcal{F}^3, \tag{3.57}$$

considerando quei punti per cui $y^1 \approx 0$, la forza apparente si riduce a $-m_0g$, che é quella a cui sarebbe soggetto un punto in un sistema di riferimento newtoniano accelerato con accelerazione g.

3.11 Forze apparenti e gravitá

Come si é accennato prima, una teoria relativistica della gravitazione, presenta delle difficoltá. Infatti nella formulazione newtoniana, la gravitá é descritta da una equazione di moto del tipo $m\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\phi$, dove ϕ é l'energia potenziale del campo gravitazionale, che, quando generato da un corpo continuo di densitá ρ, é espressa da $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é il laplaciano. Quest'ultima equazione, a causa della presenza del laplaciano, non é invariante per trasformazioni di Lorentz, il che equivale a dire che il potenziale risponde istantaneamente alle variazioni della densitá ρ a distanze arbitrariamente grandi, cioé il campo gravitazionale newtoniano si propaga con velocitá infinita. Quindi una teoria relativistica della gravitá, richiede un cambiamento sostanziale del concetto di campo gravitazionale.

Einstein costruí la teoria generale della relativitá partendo dall'ipotesi che la ben nota equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale fosse qualcosa di piú che una mera coincidenza e che implicasse un legame molto stretto tra le forze gravitazionali e le forze apparenti.

Per capire meglio ció, consideriamo un sistema di riferimento uniformemente accelerato con accelerazione g = accelerazione di gravitá. Poiché in tale sistema di riferimento, denotato con $\mathbf{e}$ il versore dell'accelerazione di trascinamento, l'equazione di moto per un punto di massa m é

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - mg\mathbf{e}, \tag{3.58}$$

se il punto punto sta in quiete, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{F} - mg\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Possiamo considerare due esempi in cui ció avviene.

Il primo esempio é quello di un'astronave che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $g\mathbf{e}$, perpendicolarmente al pavimento. Il passeggero, é soggetto alla forza di trascinamento $-mg\mathbf{e}$ ortogonale al pavimento e diretta verso di esso ed alla opposta reazione vincolare $\mathbf{F}$ che il pavimento esercita su di esso. Questa situazione differisce da quella di un osservatore fermo sulla superficie terrestre, soggetto al proprio peso $-mg\mathbf{k}$, dove $\mathbf{k}$ é il versore della verticale ascendente, ed alla reazione vincolare $\mathbf{F}$ prodotta dalla superficie terrestre, per il fatto che la massa che compare nella forza di trascinamento é la massa inerziale, mentre la massa che compare nella forza peso é la massa gravitazionale. Ma per l'eguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, la situazione in cui si trovano i due osservatori é la stessa. Ció, in particolare, significa che, se il passeggero dell'astronave non puó vedere cosa c'é fuori, non puó capire se si trova fermo sulla Terra o si trova nello spazio con accelerazione costante $g\mathbf{e}$.

Il secondo esempio é quello di un osservatore che si trova all'interno di un ascensore in caduta libera[9]. Egli é soggetto, grazie all'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale, alle due forze opposte: il peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ e la forza di trascinamento $mg\mathbf{k}$, quindi l'effetto della forza di trascinamento é la cancellazione della forza peso. Tale sensazione eterea di assenza di peso, consentirebbe all'osservatore di cullarsi, per qualche secondo, nell'illusione che la scatola in cui si trova é in realtá l'interno di un astronave che si muove di moto rettilineo ed uniforme rispetto alle stelle fisse.

Il ragionamento precedente, alla luce dell'equazione (3.58), si puó sintetizzare dicendo che nel riferimento in caduta libera, si ha la quiete (primo membro nullo) perché le due forze al secondo membro, per una strana coincidenza, sono opposte.

Peró, uscendo dagli schemi classici e considerando l'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale come qualcosa di piú di una semplice coincidenza, si puó ipotizzare che in realtá, le forze gravitazionali siano di natura inerziale, cioé esse appaiono, perché riferimenti classificati come inerziali, in realtá non lo sono. Se si ridefiniscono i sistemi di riferimento inerziali nel seguente modo: un sistema di riferimento, in prossimitá di un corpo S (che nello schema newtoniano genera un campo gravitazionale), si dice inerziale, se é in caduta libera su S[10], le esperienze descritte precedentemente si possono interpretare senza fare ricorso al concetto di forza gravitazionale. Cosí, nell'ascensore in caduta libera, la quiete non é dovuta al fatto che la forza peso viene bilanciata esattamente dalla forza di trascinamento, ma é dovuta al fatto che entrambe le forze al secondo membro sono nulle: non c'é forza di trascinamento perché il sistema di riferimento é inerziale e la forza gravitazionale semplicemente non esiste. Mentre, il peso che avverte un osservatore sulla Terra é dovuto alla forza apparente generata dalla non inerzialitá dell'osservatore, non essendo egli in caduta libera.

Quanto detto, peró, é rigorosamente vero soltanto per campi gravitazionali uniformi, come la forza peso, che si intende costante sia in direzione che in modulo. In realtá, la forza peso é solo un'approssimazione di un campo gravitazionale non uniforme che non é costante in direzione perché diretto verso un centro e neanche in modulo, perché dipende dall'inverso del quadrato della distanza.

Cosí, l'osservatore all'interno dell'ascensore in caduta libera, puó, avendone il tempo, capire dove si trova, semplicemente abbandonando, con velocitá relativa nulla, due oggetti alla stessa altezza. Questi, pur restando sospesi in assenza di gravitá, dovendo seguire due traiettorie rettilinee incidenti nel centro della Terra, man mano che l'ascensore si avvicina al centro di attrazione, si avvicinano l'un l'altro come se si stessero attraendo, cioé sono soggetti ad una accelerazione relativa orizzontale. Analogamente, abbandonando con velocitá nulla due oggetti ad altezze diverse ed in linea con il centro della Terra, l'oggetto piú in basso sará accelerato maggiormente rispetto all'oggetto piú in alto, quindi la loro distanza aumenterá come se si stessero respingendo. In particolare un insieme di punti liberi disposti in una configurazione sferica, si trasformerá in un ellissoide di rotazione, con asse maggiore verticale crescente e assi minori orizzontali decrescenti.

Analogamente, un osservatore terrestre non deve sommare all'attrazione terrestre quella del Sole perché quest'ultima é annullata dalla forza di trascinamento che nasce dal moto di rivoluzione della Terra, ma l'effetto della disuniformitá del campo gravitazionale del Sole si manifesta con le maree, perché c'é una differenza di attrazione gravitazionale tra la parte piú vicina al Sole e quella piú lontana.

Per questo motivo gli effetti della disuniformitá del campo gravitazionale che non sono eliminabili mediante delle forze di trascinamento, si chiamano **forze mareali**.

---

[9] per fare questo esperimento non é necessario sacrificare una vita umana, infatti il passeggero di un satellite in orbita circolare attorno alla terra si troverebbe nella stessa situazione.

[10] intendendo con il termine caduta libera anche i moti satellitari e quelli iperbolici e parabolici.

Le forze mareali, peró, per potersi manifestare hanno bisogno di *spazio*: in un punto chiaramente sono nulle. Questo significa che si possono rendere piccole a piacere pur di considerare piccole zone di spazio e piccoli intervalli di tempo. Quindi, se l'ascensore in caduta libera é sufficientemente piccolo e l'intervallo di tempo utile (prima dell'impatto) per fare degli esperimenti é abbastanza ridotto, l'effetto delle forze mareali é cosí piccolo che non é rilevabile.

Quindi il discorso fatto precedentemente sulla ridefinizione dei sistemi di riferimento inerziali, ha un valore approssimativo. Cosí, un sistema di riferimento in caduta libera si puó considerare inerziale, in piccole regioni e per brevi intervalli di tempo. Per questo motivo un tale sistema di riferimento verrá chiamato **localmente inerziale**.

Ritornando alla relativitá, se si ammette che, come nel caso classico, il primo membro dell'equazione (3.49) si annulla, non perché al secondo membro ci sono due vettori opposti, ma perché i vettori al secondo membro sono nulli, si ottiene $\mathcal{F} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ e ${\Gamma^i}_{jh} = 0$. L'annullarsi della quadriaccelerazione é equivalente al fatto che il punto si muove di moto rettilineo ed uniforme, cioé che la traiettoria spazio-temporale é una retta. L'annullarsi dei simboli di Christoffel é equivalente al fatto che le coordinate (y^0, y^1, y^2, y^3) sono rettilinee, quindi il sistema di riferimento non é in caduta libera, ma é inerziale nel senso ordinario del termine.

Perció, se é questa la strada che si vuole seguire per fare una teoria relativistica della gravitazione, bisogna usare strutture geometriche piú generali di quelle utilizzate per la relativitá ristretta. In particolare, se si vuole che le linee d'universo con quadriaccelerazione nulla, non siano linee rette, bisogna considerare quale modello geometrico dello spazio-tempo, anziché lo spazio affine, un continuo (varietá) in cui sia possibile definire, almeno localmente, sistemi di coordinate quadridimensionali che si trasformano in maniera differenziabile ed in cui il tensore metrico, opportunamente definito, abbia segnatura 2, come richiede una teoria relativistica. Facendo un'analogia bidimensionale, questo equivale a dire che viene tolta l'assunzione che l'ambiente é un piano, potendo essere una superficie regolare qualunque.

In tale varietá, in generale non vi sono linee rette, tale concetto viene generalizzato da quello di curva di quadriaccelerazione nulla: **linea geodetica**. Quindi se si vuole che nell'equazione (3.49), il primo addendo al secondo membro sia nullo basta seguire una geodetica. Il secondo addendo, invece, non é mai identicamente nullo, perché questo puó avvenire solo in coordinate rettilinee, che in una varietá generica non esistono. Peró, si puó dimostrare un teorema secondo cui, assegnato un evento $\bar{P}$, esiste un sistema di coordinate in un intorno di $\bar{P}$, tale che in esso si abbia ${\Gamma^i}_{jh}(\bar{P}) = 0$. Quindi, per continuitá, si possono rendere i simboli di Christoffel piccoli a piacere, pur di prendere un intorno spazio-temporale di $\bar{P}$ sufficientemente piccolo. Questo é esattamente quello che succede per le forze mareali. Quindi il sistema di coordinate in cui i simboli di Christoffel sono aprossimativamente nulli, corrisponde ad un sistema di riferimento localmente inerziale.

Da questo ragionamento qualitativo, si vede che, in questo schema si possono ottenere osservatori localmente inerziali $({\Gamma^i}_{jh} \approx 0)$, le cui traiettorie di quadriaccelerazione nulla (geodetiche) sono curvate, non da una forza a distanza, ma dalla geometria stessa dello spazio-tempo.

Chapter 4

Sistemi continui

4.1 Cinematica classica dei sistemi continui

Dato un sistema continuo $\mathcal{S}$, denotiamo con C^* una configurazione di riferimento per $\mathcal{S}$ e con $C(t)$ la configurazione di $\mathcal{S}$ ad un dato istante t. Denotate con (y^1, y^2, y^3) le coordinate del generico punto P di $\mathcal{S}$ nella configurazione di riferimento, e con (x^1, x^2, x^3) le coordinate di P all'istante t, il moto di $\mathcal{S}$ verrá descritto dalle tre funzioni

$$x^1 = x^1(y^1, y^2, y^3, t), \quad x^2 = x^2(y^1, y^2, y^3, t), \quad x^3 = x^3(y^1, y^2, y^3, t). \tag{4.1}$$

In altri termini, le equazioni (4.1) sono le equazioni parametriche della traiettoria del punto che nella configurazione di riferimento ha coordinate (y^1, y^2, y^3).

Nel seguito, per brevitá di scrittura, le variavili dipendenti verranno indicate con il simbolo (y, t). Cosí, per esempio, le (4.1) si scriveranno $x^i = x^i(y, t)$.

Definizione 4.1.1 *Il moto di $\mathcal{S}$ si dice* **regolare** *in un intervallo di tempo $[t', t'']$, se le (4.1)*

1. *sono almeno di classe C^2 in $C^* \times [t', t'']$,*
2. *$\forall t \in [t', t'']$, stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra C^* e $C(t)$ con funzioni inverse $y^i = y^i(x, t)$ almeno di classe C^2.*

La prima condizione garantisce la non lacerabilitá del sistema e implica che le traiettorie di tutti i punti siano abbastanza regolari da poterne calcolare l'accelerazione. La seconda condizione invece, impedisce che, durante il moto, due punti, inizialmente distinti, possano occupare la stessa posizione (*impenetrabilitá*) o che la traiettoria di un punto possa biforcarsi, ad un certo istante, in due traiettorie distinte.

In particolare, la seconda condizione implica che la matrice jacobiana é non singolare

$$\forall t \in [t', t''] \quad J(y.t) = \det \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3, t)} \neq 0,$$

e dovendo avere, per continuitá, sempre lo stesso segno, si puó supporre, senza perdere in generalitá, che

$$\forall t \in [t', t''] \quad J(y, t) > 0. \tag{4.2}$$

Questa descrizione del moto di un sistema continuo, si chiama **rappresentazione lagrangiana** e le velocitá ed accelerazioni dei punti del sistema, dati da

$$\mathbf{v}(P^*, t) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \mathbf{a}(P^*, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{4.3}$$

e in componenti da

$$v^i(y, t) = \frac{\partial x^i}{\partial t}(y, t), \quad a^i(y, t) = \frac{\partial v^i}{\partial t}(y, t) \tag{4.4}$$

si chiamano **velocitá lagrangiana** ed **accelerazione lagrangiana**.

Il moto di $\mathcal{S}$ puó essere osservato anche dal punto di vista **euleriano**: invece di concentrarsi sulla storia della particella che nella configurazione di riferimento di $\mathcal{S}$ occupava la posizione di coordinate *lagrangiane* (y^1, y^2, y^3), ci si concentra sulla particella che a un dato istante t transita per un fissato punto di coordinate *euleriane* (x^1, x^2, x^3). Chiaramente se, all'istante t, per il punto (x^1, x^2, x^3), transita il punto P, che, nella configurazione di riferimento C^* si trovava nel punto di coordinate (y^1, y^2, y^3), allora le due terne sono legate tra di loro dalle equazioni (4.1) e dalle loro inverse.

Cosí, se un campo q é espresso in coordinate lagrangiane $q(y, t)$, la sua espressione in coordinate euleriane é $q(x, t) = q(y(x, t), t)$ e viceversa un campo definito in coordinate euleriane da $q(x, t)$, é espresso in coodinate lagrangiane da $q(y, t) = q(x(y, t), t)$. Da ora in poi verrá supposto tacitamente che i campi considerati siano almeno di classe C^1.

Definizione 4.1.2 *Sia $q(x,t)$ un campo espresso in coordinate euleriane. Si chiama* **derivata locale** *di q rispetto a t, la derivata parziale $\frac{\partial q}{\partial t}(x,t)$. Si chiame* **derivata lagrangiana** *o* **sostanziale**,

$$\frac{dq}{dt}(x,t) = \frac{dq(x(y,t),t)}{dt}|_{y=y(x,t)} = \frac{\partial q}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x^i}(x,t)\frac{\partial x^i}{\partial t}(y(x,t),t) = \frac{\partial q}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial q}{\partial x^i}(x,t)v^i(x,t).$$

La definizione precedente di derivata sostanziale, applicata al campo di velocitá euleriana $\mathbf{v}(x,t)$, ci dá la seguente formula

$$\mathbf{a}(x,t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i}(x,t)v^i(x,t).$$

Proposizione 4.1.1

$$\frac{\partial J}{\partial t}(y,t) = J(y,t)\ \mathbf{div}\ \mathbf{v}(y,t).$$

Dimostrazione. Tenendo conto della formula di derivazione di un determinante e denotando con il simbolo A^i_j il complemento algebrico di $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$, si trova:

$$\frac{\partial J}{\partial t}(y,t) = A^j_1(y,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^1}{\partial y^j}(y,t) + A^j_2(y,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^2}{\partial y^j}(y,t) + A^j_3(y,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^3}{\partial y^j}(y,t) = A^j_i(y,t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y,t) =$$

$$A^j_i(y,t)\frac{\partial v^i}{\partial y^j}(y,t) = A^j_i(y,t)\frac{\partial x^h}{\partial y^j}(y,t)\frac{\partial v^i}{\partial x^h}(x(y,t),t) = J(y,t)\delta^h_i\frac{\partial v^i}{\partial x^h}(x(y,t),t) = J(y,t)\frac{\partial v^i}{\partial x^i}(x(y,t),t),$$

dove, la penultima eguaglianza é dovuto alla proprietá per cui il prodotto degli elementi di una riga per i loro complementi algebrici dá il determinante e il prodotto degli elementi di una riga per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga, si annulla. •

Il teorema che segue, va sotto il nome di *teorema del trasporto*

Teorema 4.1.1

$$\frac{d}{dt}\int_C q(x,t)dC = \int_C (\frac{dq}{dt}(x,t) + q(x,t)\ \mathbf{div}\ \mathbf{v}(x,t))dC$$

Dimostrazione. Utilizzando la formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli e la proposizione 4.1.1, si trova

$$\frac{d}{dt}\int_C q(x,t)dC = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C^*} q(y,t)J(y,t)dC^* = \int_{C^*}(\frac{\partial q}{\partial t}(y,t)J(y,t) + q(y,t)\frac{\partial J}{\partial t}(y,t))dC^* =$$

$$\int_{C^*}(\frac{\partial q}{\partial t}(y,t) + q(y,t)\ \mathbf{div}\ \mathbf{v}(y,t))J(y,t)dC^* = \int_C(\frac{dq}{dt}(x,t) + q(x,t)\ \mathbf{div}\ \mathbf{v}(x,t))dC. \bullet$$

4.2 Equazioni di bilancio della meccanica dei continui

La prima equazione di bilancio della meccanica dei continui é il principio di conservazione della massa:

$$m = \int_{C(t)} \rho(x,t)dC = costante, \tag{4.5}$$

essendo, $\rho(x,t)$, la densitá, che si supporrá essere positiva e generalmente continua. L'equazione precedente si puó anche scrivere

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \rho(x,t)dC = 0,$$

che, per il teorema del trasporto, diventa

$$\int_{C(t)}(\frac{d\rho}{dt}(x,t) + \rho(x,t)\ \mathbf{div}\,\mathbf{v}(x,t))dC = 0. \tag{4.6}$$

Dovendo, quest'ultima equazione essere vera anche per ogni porzione materiale $c \subseteq C(t)$, non esiste nessun punto in cui la funzione integranda é diversa da zero, altrimenti, essendo continua, per il teorema della permanenza del segno, dovrebbe esistere una porzione materiale $c \subseteq C(t)$ in cui essa assume lo stesso segno, quindi la (4.6) estesa a c non potrebbe annullarsi. Da questo segue

$$\frac{d\rho}{dt}(x,t) + \rho(x,t)\ \mathbf{div}\,\mathbf{v}(x,t) = 0, \tag{4.7}$$

da cui, tenendo conto che

$$\frac{d\rho}{dt}(x,t) + \rho(x,t)\,\mathbf{div}\,\mathbf{v}(x,t) = \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x,t)v^i(x,t) + \rho(x,t)\frac{\partial v^i}{\partial x^i}(x,t) = \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i}(x,t),$$

si ottiene l'equivalente *equazione euleriana di continuitá della massa*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \mathbf{div}(\rho\mathbf{v})(x,t) = 0. \tag{4.8}$$

Come conseguenza della (4.7), si ricava la seguente identitá

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \rho(x,t)q(x,t)dC = \int_{C(t)} \rho(x,t)\frac{dq}{dt}(x,t)dC, \tag{4.9}$$

dove $q(x,t)$ é una qualsiasi funzione di tipo euleriano associata al moto. La (4.9) si ricava dal teorema del trasporto, osservando che, per la (4.7)

$$\frac{d}{dt}(\rho(x,t)q(x,t)) + \rho(x,t)q(x,t)\ \mathbf{div}\ \mathbf{v}(x,y) = (\frac{d\rho}{dt}(x,t) + \rho(x,t)\ \mathbf{div}\,\mathbf{v}(x,t))q(x,t) + \rho(x,t)\frac{dq}{dt}(x,t) = \rho(x,t)\frac{dq}{dt}(x,t).$$

La **quantitá di moto** e il **momento angolare**, sono definiti dalle equazioni

$$\mathbf{Q} = \int_C \rho(x,t)\mathbf{v}(x,t)dC \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_O = \int_C (P-O)\times\rho(x,t)\mathbf{v}(x,t)dC. \tag{4.10}$$

Le equazioni di bilancio della quantitá di moto e del momento angolare sono

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M_O}^{(e)}, \tag{4.11}$$

essendo rispettivamente $\mathbf{R}^{(e)}$ e $\mathbf{M_O}^{(e)}$, il risultante ed il momento risultante delle forze esterne. In generale questi due vettori si possono scomporre in una parte di volume e in una di superficie

$$\mathbf{R}^{(e)} = \int_C \rho\mathbf{F}dC + \int_\Sigma \Phi d\Sigma \quad \text{e} \quad \mathbf{M_O}^{(e)} = \int_C \rho(P-O)\times\mathbf{F}dC + \int_\Sigma (P-O)\times\Phi d\Sigma, \tag{4.12}$$

dove $\mathbf{F}$ rappresenta la densitá specifica (per unitá di massa) di forze di volume e $\mathbf{\Phi}$ é lo sforzo, cioé la forza che agisce sull'unitá di area di superficie $d\Sigma$.

Assioma di Cauchy. Lo sforzo specifico nel punto P dipende solo dalla normale $\mathbf{n}$ all'elemento di superficie $d\Sigma$ in P: $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(P,\mathbf{n},t)$. Il seguente **teorema di Cauchy**, verrá enunciato senza dimostrazione.

Teorema 4.2.1 $\mathbf{\Phi}$ *dipende linearmente dalla normale. Cioé esiste un campo tensoriale doppio t, che si chiama* **tensore degli sforzi***, tale che* $\Phi^i(P,\mathbf{n},t) = t^{ij}n_i$.

Applicando la (4.9) alla (4.10) si ottiene

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_C \rho(x,t)\frac{d\mathbf{v}}{dt}(x,t)dC = \int_C \rho(x,t)\mathbf{a}(x,t)dC,$$

da cui, la prima delle (4.11), tenendo conto della prima delle (4.12) e del teorema di Gauss, si scrive

$$\int_C \rho(a^i - F^i)dC = \int_\Sigma t^{ij}n_i d\Sigma = \int_C \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^i}dC.$$

Da cui, essendo il dominio di integrazione arbitrario e le funzioni integrande continue, si ottiene la forma differenziale dell'equazione di bilancio della quantitá di moto

$$\rho a^j = \rho F^j + \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^i}, \tag{4.13}$$

o in forma vettoriale

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho}\mathbf{div}\,t, \quad \text{essendo} \quad \mathbf{div}\,t = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^i}\mathbf{e}_j. \tag{4.14}$$

Applicando lo stesso procedimento all'equazione dei momenti, si trova

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \int_C \rho(x,t)(P-O) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}(x,t)dC = \int_C \rho(x,t)(P-O) \times \mathbf{a}(x,t)dC,$$

e quindi, ponendo $\mathbf{\Phi}^i = t^{ij}\mathbf{e}_j$, cioé $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^i n_i$

$$\int_C \rho(P-O) \times (\mathbf{a} - \mathbf{F})dC = \int_\Sigma (P-O) \times \mathbf{\Phi}^i n_i d\Sigma = \int_C \frac{\partial}{\partial x^i}((P-O) \times \mathbf{\Phi}^i)dC,$$

da cui si ricava

$$\int_C \rho(P-O) \times (\mathbf{a} - \mathbf{F} - \mathbf{div}\, t)dC = \int_C (\frac{\partial}{\partial x^i}(P-O)) \times \mathbf{\Phi}^i dC = \int_C \mathbf{e}_i \times t^{ij}\mathbf{e}_j dC.$$

Il primo membro é uguale a zero per la (4.14), quindi l'integrale al secondo membro si deve annullare per ogni C:

$$0 = \int_C t^{ij}\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j dC = \int_C t^{ij} dC\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \int_C (t^{12} - t^{21})dC\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \int_C (t^{13} - t^{31})dC\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \int_C (t^{23} - t^{32})dC\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 =$$

$$\int_C (t^{12} - t^{21})dC\ \mathbf{e}_3 - \int_C (t^{13} - t^{31})dC\ \mathbf{e}_2 + \int_C (t^{23} - t^{32})dC\ \mathbf{e}_1 = 0,$$

da cui

$$\int_C (t^{ij} - t^{ji})dC = 0,$$

dovendo quest'ultima eguaglianza valere per ogni C, ed essendo la funzione integranda continua, si ha

$$t^{ij} = t^{ji}, \tag{4.15}$$

cioé il tensore degli sforzi 'e simmetrico.

In conclusione, le equazioni di evoluzione trovate sono la (4.8) e le (4.14), quattro in totale. Le funzioni incognite sono: ρ, v^i e le componenti del tensore degli sforzi, che per le (4.15) si riducono a sei, quindi dieci in totale. Pertanto, questo modello non puó ritenersi completo per descrivere l'evoluzione del sistema. Ció é dovuto al fatto che, nello schema considerato, non si é tenuto conto dell'energia interna delle particelle ed al fatto che tale schema é troppo generale per poter dare risultati univoci. Quindi per poter pareggiare il numero di equazioni con il numero delle incognite, bisogna fare delle ipotesi costitutive sul mezzo, e utilizzare le equazioni della termodinamica per poter rendere conto di quella parte di energia che nella discussione precedente non é stata considerata.

4.3 Ipotesi costitutive

Definizione 4.3.1 *Si chiama* **fluido perfetto***, un fluido*

1. *non viscoso:* $t^i{}_j = -p\delta^i{}_j$*, essendo* p *la pressione;*
2. *a trasformazioni termodinamiche reversibili: la prima legge della termodinamica assume la forma*

$$\theta dS = d\epsilon - \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{4.16}$$

essendo θ *la temperatura assoluta,* s *l'entropia specifica e* ϵ *l'energia interna specifica (per unitá di massa).*

Facendo l'assunzione che il mezzo considerato sia un fluido perfetto, il problema si semplifica notevolmente, infatti, per il primo punto della precedente definizione, il tensore degli sforzi é indiviuato da una sola funzione, quindi in questo modo il numero delle incognite scende a cinque: ρ, p, v^i, mentre le equazione di evoluzione restano sempre quattro: la (4.8) e le (4.14), che, in queste ipotesi, tenendo conto di

$$\frac{\partial t^i{}_j}{\partial x^i} = -\delta^i{}_j \frac{\partial p}{\partial x^i} = -\frac{\partial p}{\partial x^j},$$

diventano

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{4.17}$$

A questo punto, specificando l'equazione di stato del fluido, in generale, é possibile eliminare una delle variabile e cosí pareggiare il numero di equazioni con il numero di incognite. Un esempio importante é costituito dai **fluidi**

perfetti barotropici, i quali hanno un'equazione di stato del tipo $\rho = \rho(p)$, comprendendo il caso particolare dei **fluidi incompressibili**, per i quali $\rho = cost$.

Un esempio di fluido perfetto barotropico si ottiene assumendo la legge dei gas ideali per i fluidi:

$$\epsilon = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}$$

per un flusso adiabatico: dS=0, dove γ é l'indice adiabatico, legato alla natura fisica del gas. In queste ipotesi l'equazione (4.16), diventa

$$0 = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{dp}{\rho} - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad p = A\rho^\gamma,$$

essendo A una costante positiva.

4.4 Continui relativistici

Per un fluido relativistico verrá fatta l'assunzione, come nel caso classico, che ogni particella viene distinta dalle altre mediante l'assegnazione di tre coordinate (y^1, y^2, y^3), che restano immutate durante la sua evoluzione. L'evoluzione, nel contesto relativistico, viene descritta dalla sua linea d'universo, che, prendendo come parametro il tempo proprio, rispetto ad un sistema di coordinate spazio-temporali qualunque (x^0, x^1, x^2, x^3), ha equazione $x^i = x^i(\tau, y^1, y^2, y^3) = x^i(\tau, y)$. Cosí, in questo contesto la velocitá viene sostituita dalla quadrivelocitá $U = \frac{\partial x^i}{\partial \tau}(\tau, y)$ e l'accelerazione dalla quadriaccelerazione $A = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2}(\tau, y)$.

Fatte queste premesse, occorre generalizzare le equazioni di evoluzione ottenute nei paragrafi precedenti, ai sistemi relativistici. Denotiamo con $\|\theta^{ij}(\bar{P})\|$ il tensore doppio simmetrico le cui componenti spaziali coincidono, nel sistema di quiete istantaneo di $\bar{P}$, con le componenti del tensore degli sforzi, mentre le altre sono tutte nulle:

$$\|\theta^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ 0 & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ 0 & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{Vmatrix}$$

Definizione 4.4.1 *Si chiama* **tensore energia-impulso** *il tensore doppio definito da* $T^{ij} = \mu_0 U^i U^j - \theta^{ij}$*, dove* μ_0 *é la densitá di massa propria totale (massa a riposo piú energia interna).*

Assioma 1 *L'evoluzione di un sistema continuo relativistico, in un sistema di coordinate qualunque, é governato dalla seguente equazione di evoluzione*

$$\nabla_i T^{ij} = \psi^j, \tag{4.18}$$

dove ψ^i *é la densitá delle forze esterne distinte dalle forze di contatto di cui si tiene conto nel tensore energia impulso, e* ∇_i *é la derivata covariante.*

Da ora in poi verrá fatta l'ipotesi che le forze esterne siano nulle $\psi^i = 0$ e che le coordinate siano quelle relative ad un sistema di riferimento inerziale $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, in questo modo l'equazione (4.18) si riduce a

$$\partial_i T^{ij} = 0. \tag{4.19}$$

Si dimostra che l'equazione (4.19), nel limite classico $c \to \infty$ si riduce alle equazioni di evoluzione dei continui classici, ricavate nei paragrafi precedenti. Calcoliamo separatamente la parte temporale e quella spaziale della (4.19), ponendo $\mu = \gamma\mu_0$.

$$0 = \partial_i T^{i0} = \partial_0(\mu_0 (U^0)^2) + \partial_\alpha(\mu_0 U^0 U^\alpha) - \partial_i \theta^{i0} = \frac{\partial}{\partial(ct)}(\mu c^2 \gamma) + \partial_\alpha(\mu c \gamma v^\alpha) - \partial_i \theta^{i0} =$$

$$\mu c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma c \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu c v^\alpha \partial_\alpha \gamma + c\gamma \, \mathbf{div}(\mu \mathbf{v}) - \partial_i \theta^{i0}.$$

Dividendo per c

$$\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu v^\alpha \partial_\alpha \gamma + \gamma \, \mathbf{div}(\mu \mathbf{v}) - \frac{1}{c} \partial_i \theta^{i0} = 0,$$

passando al limite per $c \to +\infty$ e tenendo conto che $\gamma \to 1$ e $\partial_i(\gamma) = \frac{\gamma^3}{c^2} v \partial_i v \to 0$, si ricava

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{div}(\mu \mathbf{v}) = 0, \tag{4.20}$$

che coincide con l'equazione di continuitá della massa, tenendo conto che, nel limite classico, μ si riduce alla densitá di massa. Invece, la parte spaziale é

$$0 = \partial_i T^{i\alpha} = \partial_0(\mu_0 U^0 U^\alpha) + \partial_\beta(\mu_0 U^\beta U^\alpha) - \partial_i \theta^{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu\gamma v^\alpha) + \partial_\beta(\mu\gamma v^\beta v^\alpha) - \partial_0\theta^{0\alpha} - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha} =$$

$$\mu v^\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(\mu v^\alpha) + \mu v^\beta v^\alpha \partial_\beta \gamma + \gamma\partial_\beta(\mu v^\beta v^\alpha) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\theta^{0\alpha}) - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha},$$

da cui passando al limite per $c \to \infty$, si trova

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu v^\alpha) + \mathbf{div}(\mu \mathbf{v} v^\alpha) - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha} = 0.$$

Sviluppando le derivate

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} v^\alpha + \mu\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \mathbf{div}(\mu\mathbf{v})v^\alpha + \mu v^\beta \partial_\beta v^\alpha - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha} = 0$$

e tenendo conto dell'equazione di continuitá della massa (4.20), si ricava

$$\mu\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \mu\frac{\partial x^\beta}{\partial t}\partial_\beta v^\alpha - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha} = 0,$$

da cui

$$\mu\frac{dv^\alpha}{dt} - \partial_\beta\theta^{\beta\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\mathbf{a} - \mathbf{div}\theta = 0, \tag{4.21}$$

tenendo conto che nel limite classico μ si riduce alla densitá di massa e θ al tensore degli sforzi, si riottiene l'equazione di evoluzione classica.

Ora, vediamo come si scrive il tensore energia-impulso, nel caso particolare in cui il sistema continuo sia un fluido perfetto. Nel sistema di istantanea quiete del generico punto, il tensore degli sforzi é rappresentato dalla matrice

$$\|\theta^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}$$

e $U^i = (c, 0, 0, 0)$, quindi

$$\|T^{ij}\| = \begin{Vmatrix} \mu_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{Vmatrix},$$

ed in forma covariante, cioé invariante in ogni sistema di riferimento, $T^{ij} = \mu_0 U^i U^j + \eta^{ij} p + \frac{p}{c^2} U^i U^j = (\mu_0 + \frac{p}{c^2}) U^i U^j + p\,\eta^{ij}$. O in forma equivalente, utilizzando il vettore unitario $V = \frac{U}{c}$,

$$T^{ij} = (\mu_0 c^2 + p) V^i V^j + p\,\eta^{ij}. \tag{4.22}$$

Come é stato detto nel paragrafo precedente, specificando l'equazione di stato, il problema si chiude, nel senso che, il numero delle variabili indipendenti eguaglia il numero delle equazioni.

Nel seguito verrá utilizzato il tensore energia-impulso (4.22), verificante l'equazione di evoluzione$\nabla_i T^{ij} = 0$.