Integrali tripli: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di di±coltà maggiore.

Esercizio 1.

g) $\displaystyle\int_{\Omega} 2x\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x > 0, \; 0 < y < 2z + 1, \; x^2 + y^2 + 4z^2 < 1\right\}$

Svolgimento

Quindi si ha che $D = ©(D^0)$, dove

$$D^0 =$$

> #: cos

Fig. 4: Sezione dell'insieme - con il piano *yz* (in azzurro).

Passiamo in coordinate sferiche in cui la colatitudine è misurata rispetto all'asse *y*. Poniamo quindi

8
> *x* = ½ sin # cos '
©: *y* = ½ cos #
> *z*

8
> *x* =>
©:
>

Allora si ha che

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x) \right.$$

Integrando per ¯li paralleli all'asse z si ottiene

$$= \int_{-2}^{0} \left[\frac{1}{3}x \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)^3 - x^3 \left(\frac{1}{2}x \right. \right.$$

con

$$D_1 = \left\{ (z, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < z \leq 0, \; 0 < y < 2z + 1 \right\};$$

$$D_2 = \left\{ (z, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 4z^2 < 1, \; y, z > 0 \right\}.$$

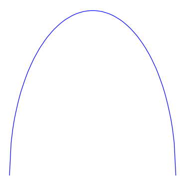

Fig. 11: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Quindi si ha che

$$\int \; 2$$

Fig. 13: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Ne segue che

$$\int_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz = \int_D \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int$$

Fig. 15: L'insieme D' (in verde).

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left(4\cos^2\theta - 1\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\sin^2\theta - \tan\right.$$

Fig. 16: L'insieme D (in azzurro).

Osserviamo che $D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \left\{ (x;y) \in \right.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

p) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega x^2|y|\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

dove

$$D = \Big\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2$$

Esercizio 2. Calcolare il volume dei seguenti insiemi:

a) $E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x > 0, \; y > 0, \; z >

L'insieme E è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = \frac{¼^2}{4}$, interna al cilindro di equazione $x^2 + 4y^2 = ¼$

Quindi si ha che $D_2 = \Phi(D_2')$, dove

$$D_2' = \Big\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$$

Fig. 29: L'insieme $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, con D_1 in rosso, D_2 in verde e D_3 in azzurro.

Quindi

$$m(E) = 6 \int_D z\,dx\,dz = 6 \left(\int_{D_1} z\,dx\,dz + \int_{D_2} z\,dx\,dz + \int_{D_3} z\,dx\,dz \right) =$$

essendo D_1, D_2, D_3 z

Fig. 32: Sezione dell'insieme E con il piano xz (in azzurro).

Z

=

D_1

Consideriamo ora E_2. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = \int_{D_2} \left(\int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \int_{D_2} \Bigg(\sqrt{2 \qquad\qquad}$$

Fig. 33: Sezione dell'insieme E con il piano xz (in azzurro).

h