

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

DOMENICO ZAMBELLA

Elementi di Logica

Un 'corso pratico' di introduzione alla matematica
per il primo anno della laurea in informatica

Quaderno # 19 - Settembre 2003



Prefazione

Questi sono gli appunti usati tra il 2002 ed il 2004 per il corso di *Logica Matematica* della laurea breve (anzi, brevissima) in Informatica.

Logica Matematica è il primo corso nel curriculum dello studente; fornisce alcune nozioni di base su insiemi, relazioni, funzioni, induzione, ecc. e, più in generale, cerca di familiarizzare lo studente col linguaggio della matematica. (Ammetto, il titolo del corso è ben più ambizioso, ma bisogna fare i conti con la realtà. Per fare un paragone, immaginatevi di dover insegnare un corso intitolato *Analisi Matematica* a chi non ha ancora imparato a risolvere una disequazione. . .)

Spesso gli studenti sono abituati ad applicare procedure meccaniche ed hanno trascurato le capacità creative che sono indispensabili per affrontare la matematica. Questo corso cerca di riabilitare queste funzioni. Il compito è simile quello di chi assiste un paziente che per lungo tempo ha avuto le gambe immobilizzate: non serve a nulla spiegare che ad ogni passo si muovono 54 muscoli diversi, occorre proporre esercizi. Per questo ne ho fatto *corso pratico*.

Mi sono posto un'obiettivo concreto: insegnare i linguaggi del prim'ordine, come fossero linguaggi di programmazione. Imparare un linguaggio formale vuol dire anche imparare a pensare in termini logici: per esempio, distinguere affermazioni esistenziali da affermazioni universali, o seguire un argomento induttivo, ecc. La mia speranza è che questo corso possa stimolare lo sviluppo di queste abilità.

Fare un corso pratico di una materia teorica non è una cosa ovvia. Ed è ancor più difficile se questa materia manca di una tradizione didattica omogenea. Così molto del lavoro è sperimentale e la pubblicazione di questi appunti vuole essere un contributo.

Indice

Prefazione	1
1. Gli insiemi	7
1. Gli insiemi	
2. L'universo: U	
3. Il simbolo di appartenenza: $\in$	
4. L'insieme vuoto: $\emptyset$	
5. La notazione: $\{\dots\}$	
6. L'inclusione: $\subseteq$	
7. Uguaglianza e doppia inclusione	
8. Inclusioni banali	
9. L'inclusione stretta: $\subsetneq$	
2. Operazioni booleane	11
1. Intersezione: $\cap$	
2. Unione: $\cup$	
3. Differenza: $\setminus$	
4. Il complemento: $\neg$	
5. Differenza simmetrica: Δ	
6. Identità	
7. Equivalenze	
8. Implicazioni	
9. Leggi di deMorgan	
10. Interdefinibilità di $\neg, \cap$ e $\neg, \cup$	
11. Differenza simmetrica e complemento	
12. Associatività di $\cup, \cap$, e Δ	
13. Algebre booleane di insiemi	
14. Esempi	
3. Le relazioni	21
1. Le coppie	
2. Le tuple	
3. Prodotti e potenze cartesiani	
4. Le relazioni	
5. Osservazioni	
6. Rappresentazione cartesiana	
7. I diagrammi	
8. Esempio	
9. Esempi	
4. Le funzioni	29
1. Le funzioni	
2. Totalità, suriettività, iniettività	
3. La restrizione di una funzione	
4. Esempi e non esempi	
5. L'immagine e l'antiimmagine	
6. Una definizione più generale	
7. Convenzioni discordanti	
8. Altri esempi	
9. La composizione di funzioni	
10. Associatività della composizione	
11. La funzione vuota	
12. La funzione identità	

13. La funzione inversa	18. Le funzioni n -arie	
14. Esempi	19. L'addizione	
15. Le potenze della composizione	20. Le proiezioni	
16. Composizione e commutatività	21. Una biiezione tra $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}^2$	
17. L'inversa della composta		
5. I linguaggi del prim'ordine		45
1. Il linguaggio	4. Esempi	
2. I simboli che compongono le formule	5. Il connettivo principale	
3. La costruzione delle formule	6. L'albero di costruzione	
6. Le strutture		49
1. I modelli	8. Gli insiemi definibili.	
2. I parametri	9. Un caso degenero	
3. Formule chiuse	10. Connettivi e operazioni booleane	
4. La definizione di verità	11. Altri connettivi	
5. Le tavole di verità	12. Tautologie, contraddizioni	
6. Il calcolo della verità	13. Equivalenze e conseguenze logiche	
7. Sostituire variabili con parametri	14. Alcune equivalenze logiche	
7. La logica proposizionale		61
1. Il linguaggio	8. Equivalenze logiche	
2. La costruzione delle formule	9. Esempi	
3. Modelli proposizionali	10. Dai modelli alle formule	
4. La verità	11. Verifica di un'identità booleana	
5. Notazione	12. Congiunzioni e disgiunzioni n -arie	
6. Esempi	13. La transitività dell'implicazione	
7. Tautologie, contraddizioni		
8. I quantificatori		75
1. I quantificatori	10. Leggi logiche	
2. Le formule	11. Interdefinibilità dei quantificatori	
3. La semantica dei quantificatori	12. Una conseguenza logica 'quasi' ovvia	
4. Esempio	13. Esempi	
5. Logica e algebre booleane a confronto	14. Variabili libere e quantificatori	
6. Il raggio di azione: esempio	15. Esempi	
7. Il raggio di azione: definizione	16. Alcune leggi logiche	
8. Variabili libere e variabili vincolate	17. Altre leggi logiche	
9. Sostituire variabili con parametri	18. Quantificazione limitata	

9. Più variabili in azione	91
1. Predicati di arietà arbitraria.	5. Prodotto cartesiano di definibili
2. Le formule	6. Una legge logica
3. La semantica delle formule	7. Esiste-per-ogni e per-ogni-esiste
4. Insiemi definibili	8. Sostituzioni di variabili
 10. L'uguaglianza	 107
1. Le formule e la verità	3. Esiste un'unica soluzione
2. Esistono almeno due soluzioni	
 11. I termini	 113
1. Funzioni e costanti	7. Leggi logiche
2. I modelli	8. Un non esempio
3. I termini	9. Formalizzare proprietà delle funzioni
4. Le formule	10. Esempi
5. La semantica dei termini	11. Esempi
6. La semantica delle formule	12. Esempi
 12. L'induzione	 129
1. Il modello standard dell'aritmetica	4. Gli insiemi di parole
2. L'induzione	5. Gli alberi binari
3. Effetto domino	
 13. Relazioni binarie	 145
1. La simmetria	5. Tournaments
2. L'antisimmetria	6. Le clique
3. La riflessività	7. Esempi
4. L'irriflessività	
 14. La transitività	 151
1. La definizione	7. Chiusura
2. Osservazione	8. Esempio
3. I cammini	9. Gli ordini
4. La relazione di raggiungibilità	10. Un po' di terminologia
5. La chiusura transitiva	11. Ordini densi e discreti
6. Esempio	

15. Le relazioni di equivalenza	165
1. La definizione	9. Da equivalenze a partizioni
2. L'intuizione	10. Chiudere il cerchio
3. Le due relazioni banali	11. Esempi
4. Alcuni semplici esempi	12. Da funzioni ad equivalenze
5. Osservazione.	13. Raffinamento di una partizione
6. Le partizioni	14. Raffinamento di una equivalenza
7. Da partizioni ad equivalenze	15. Esempio
8. Le classi di equivalenza	16. Esempio
 Soluzioni degli esercizi	 181
 Indice analitico	 305

Capitolo 1

Gli insiemi

Ricapitoliamo qui alcune nozioni di base allo scopo di fissare la notazione (le nozioni stesse dovrebbero essere familiari).

1. Gli insiemi

Un **insieme** è semplicemente una collezione di oggetti detti **elementi dell'insieme**. Gli insiemi sono completamente caratterizzati dai loro elementi: due insiemi sono uguali (cioè sono lo stesso insieme) se contengono gli stessi elementi. Questo fatto si chiama **principio di estensionalità**. In questo corso ci occuperemo principalmente di insiemi, delle operazioni che si possono fare sugli insiemi e, più in generale, di come da alcuni insiemi se ne possono ottenere altri.

2. L'universo: $\mathcal{U}$

È bene fissare di volta in volta un **universo** di oggetti. Un generico universo verrà denotato di solito con $\mathcal{U}$. Gli insiemi che verranno considerati conterranno solo elementi di tale universo. Tipiche scelte per universo sono:

$\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali (cioè $0, 1, 2, \dots$);

$\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi (cioè tutto $\mathbb{N}$ più $-1, -2, -3, \dots$);

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ l'insieme dei numeri razionali, l'insieme dei numeri razionali positivi, e l'insieme dei numeri razionali negativi. (N.B. I numeri positivi sono *strettamente* maggiori di 0. I numeri negativi *strettamente* minori di 0. Lo 0 non è nè positivo nè negativo.)

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ l'insieme dei numeri reali, rispettivamente, reali positivi, reali negativi.

3. Il simbolo di appartenenza: $\in$

Quando a denota un elemento e Q un insieme, scriveremo $a \in Q$ per dire che a **appartiene** a Q . Scriveremo $a \notin Q$ per dire che a **non** appartiene a Q . Scriveremo $a, b \in Q$ per abbreviare: $a \in Q$ e $b \in Q$.

4. L'insieme vuoto: $\emptyset$

Due insiemi notevoli contenuti in qualsiasi universo sono l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'universo stesso $\mathbb{U}$. (Non è del tutto corretto parlare di *due* insiemi: nel caso degenerare in cui l'universo è vuoto, si tratta dello stesso insieme.)

5. La notazione: $\{\dots\}$

Fissiamo $\mathbb{N}$ come universo. L'insieme che contiene gli elementi 1, 3, e 5 può essere denotato con $\{1, 3, 5\}$. In modo simile si possono denotare tutti gli insiemi ragionevolmente 'piccoli'. In questa notazione l'ordine non conta (gli insiemi sono caratterizzati solo dai loro elementi) e non contano nemmeno eventuali ripetizioni. Per esempio,

$$\{1, 3, 5\} = \{3, 1, 5\} = \{3, 1, 5, 5\}.$$

6. L'inclusione: $\subseteq$

Diremo che P è un **sottoinsieme** di Q se ogni elemento di P appartiene anche a Q . Si dice anche che P è **incluso** in Q . Scriveremo $P \subseteq Q$. Per dire che P **non** è un sottoinsieme di Q scriveremo $P \not\subseteq Q$. A volte per dire che $P \subseteq Q$ e che $Q \subseteq R$ si scrive per brevità una **catena di inclusioni** $P \subseteq Q \subseteq R$.

7. Uguaglianza e doppia inclusione

Si noti che se $P = Q$ allora ovviamente $P \subseteq Q$ e $Q \subseteq P$. Viceversa, se si ha simultaneamente $P \subseteq Q$ e $Q \subseteq P$ allora P e Q hanno gli stessi elementi e quindi, per il principio di estensionalità, $P = Q$. Abbiamo quindi che

$$P \subseteq Q \subseteq P \text{ se e solo se } P = Q$$

L'espressione *se e solo se* viene spesso abbreviata con **sse** o sostituita con il simbolo $\iff$.

8. Inclusioni banali

È immediato verificare che le inclusioni $P \subseteq P$ e $P \subseteq \mathbb{U}$ valgono per ogni insieme P .

Anche $\emptyset \subseteq P$ vale anche per qualsiasi insieme P . Infatti $\emptyset \subseteq P$ significa che ogni elemento di $\emptyset$ è un elemento di P . Se ciò non fosse vero dovremmo essere in grado di trovare un controesempio, cioè un elemento di $\emptyset$ che non appartiene a P . Ma $\emptyset$ non ha elementi sicché tale controesempio non può esistere.

9. L'inclusione stretta: $\subsetneq$

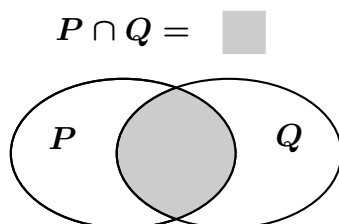
Quando $P \subseteq Q$ e $P \neq Q$ diremo che P è un sottoinsieme **proprio** di Q o anche che P è incluso **strettamente** in Q . In simboli scriveremo $P \subset Q$ oppure $P \subsetneq Q$. (Non si confonda $P \subsetneq Q$ con $P \not\subseteq Q$.)

Operazioni booleane

Ora introduciamo alcune semplici operazioni che, dati alcuni insiemi, permettono di costruire altri insiemi.

1. Intersezione: $\cap$

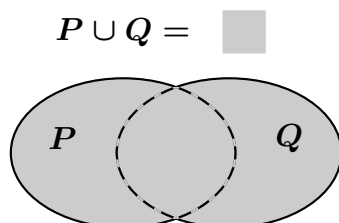
L'insieme degli elementi che appartengono sia a P che a Q si chiama **intersezione** di P e Q e viene denotato con $P \cap Q$.



Due insiemi tali che $P \cap Q = \emptyset$ si dicono **disgiunti**.

2. Unione: $\cup$

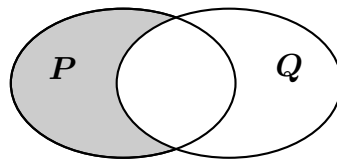
L'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi P e Q si chiama **unione** di P e Q e viene denotato con $P \cup Q$.



3. Differenza: $\setminus$

L'insieme degli elementi che appartengono a P ma non a Q si chiama la **differenza** tra P e Q e viene denotato con $P \setminus Q$.

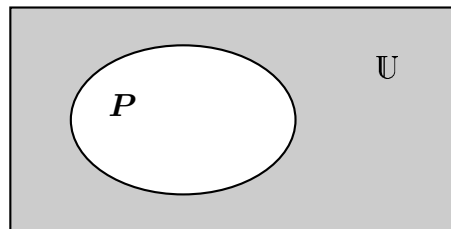
$$P \setminus Q = \text{■}$$



4. Il complemento: $\neg$

La differenza tra l'universo e l'insieme P si chiama il **complemento** di P e viene denotato con $\neg P$.

$$\neg P = \text{■}$$

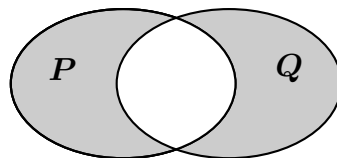


Non esiste una notazione standard per il complemento di un insieme. Le notazioni più usate sono: $\sim P$, $\bar{P}$, P' , P^c . Noi abbiamo scelto di usare lo stesso simbolo usato in logica per la negazione.

5. Differenza simmetrica: $\triangle$

La **differenza simmetrica** tra P e Q è l'insieme degli elementi che appartengono a P ma non a Q o viceversa a Q ma non a P . Viene denotata con $P \triangle Q$.

$$P \triangle Q = \text{■}$$



6. Identità

Le seguenti uguaglianze valgono in *qualsiasi* universo e *qualsiasi* siano gli insiemi P e Q :

- $\neg\neg P = P$
- $P \cup Q = Q \cup P$
- $P \cap Q = Q \cap P$
- $P \triangle Q = Q \triangle P$
- $P \setminus Q = P \cap \neg Q$.

Questi sono esempi di **identità booleane**. Un'identità Booleana è un'uguaglianza tra insiemi che vale *per ogni* insieme in *ogni* universo.

7. Equivalenze

Il simbolo $\iff$ verrà usato per abbreviare l'espressione *se e solo se*. Sottointenderemo anche che l'equivalenza vale *per ogni* insieme e *in ogni* possibile universo. Per esempio, abbiamo che

$$P \cap Q = P \iff P \subseteq Q.$$

oppure anche

$$P \triangle Q = \emptyset \iff P = Q.$$

8. Implicazioni

Il simbolo $\implies$ verrà usato per abbreviare l'espressione *se ... allora*. Anche qui sottointenderemo *per ogni* insieme e *in ogni* possibile universo. Per esempio, abbiamo che

$$P = \emptyset \implies P \subseteq Q.$$

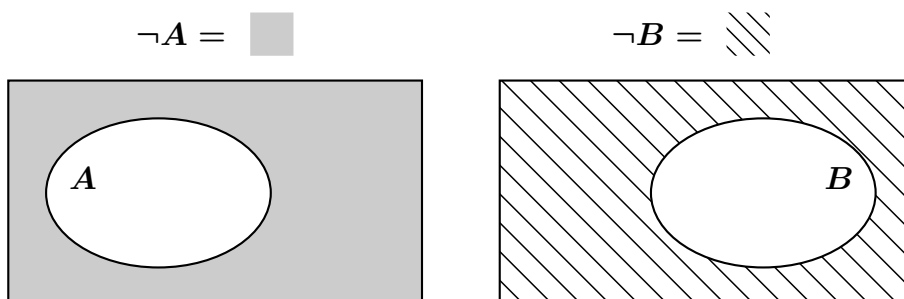
9. Leggi di deMorgan

Le due seguenti identità si chiamano **leggi di deMorgan**

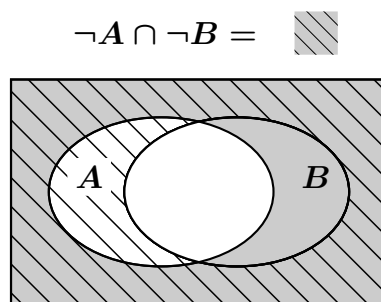
$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

Verifichiamo graficamente la prima:



Sovrapponendo queste due figure otteniamo:



È sufficiente verificare una delle due leggi di deMorgan. Infatti possiamo ottenere facilmente una regola dall'altra. Per esempio aggiungendo una negazione a destra e a sinistra dell'identità appena verificata otteniamo che per ogni A e B :

$$\neg\neg(A \cup B) = \neg(\neg A \cap \neg B).$$

Semplificando la doppia complementazione otteniamo:

$$A \cup B = \neg(\neg A \cap \neg B).$$

Siccome questa legge vale *per ogni* coppia di insiemi A e B , allora varrà anche se agli insiemi A e B sostituiamo $\neg P$ e $\neg Q$, con P e Q arbitrari. Otteniamo quindi che per ogni P e Q :

$$\neg P \cup \neg Q = \neg(\neg\neg P \cap \neg\neg Q).$$

Cancellando ancora la doppia complementazione otteniamo che, per ogni P e Q :

$$\neg P \cup \neg Q = \neg(P \cap Q).$$

Questa è la seconda delle due identità qui sopra.

10. Interdefinibilità di $\neg, \cap$ e $\neg, \cup$

Le leggi di deMorgan permettono di esprimere l'intersezione tramite l'unione ed il complemento o viceversa l'unione tramite l'intersezione ed il complemento. Infatti le leggi di deMorgan possono anche essere scritte come

$$A \cup B = \neg(\neg A \cap \neg B)$$

$$A \cap B = \neg(\neg A \cup \neg B)$$

11. Differenza simmetrica e complemento

Ci sono due identità molto utili che riguardano il rapporto tra il complemento e la differenza simmetrica.

$$P \triangle Q = \neg P \triangle \neg Q.$$

$$\neg(P \triangle Q) = \neg P \triangle Q.$$

La validità è abbastanza facile da derivare direttamente: un elemento a appartiene ad esattamente uno tra P e Q se e solo se appartiene ad esattamente uno tra $\neg P$ e $\neg Q$; quindi la prima identità qui sopra vale. Un elemento a appartiene ad esattamente uno tra $\neg P$ e Q se e solo se appartiene ad entrambi o a nessuno degli insiemi P e Q ; da questo segue la seconda identità.

Le due identità qui sopra si possono anche derivare in modo indiretto ragionando come segue. Le seguenti identità sono abbastanza ovvie:

$$P \triangle Q = (P \cup Q) \setminus (Q \cap P),$$

$$P \triangle Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P).$$

e, ricordando che $A \setminus B = A \cap \neg B$, possiamo riscrivere:

$$1. \quad P \triangle Q = (P \cup Q) \cap \neg(Q \cap P).$$

$$2. \quad P \triangle Q = (P \cap \neg Q) \cup (Q \cap \neg P).$$

Dalla 1, otteniamo

$$P \triangle Q = (P \cup Q) \cap (\neg Q \cup \neg P).$$

e

$$\neg P \triangle \neg Q = (\neg P \cup \neg Q) \cap (\neg\neg Q \cup \neg\neg P).$$

L'equivalenza di $P \triangle Q$ con $\neg P \triangle \neg Q$ segue cancellando la doppia complementazione.

Per verificare l'equivalenza di $\neg(P \triangle Q)$ e $\neg P \triangle Q$ usiamo l'identità 2 a per la prima e l'identità 1 per la seconda. Dobbiamo quindi mostrare che:

$$\neg(P \triangle Q) = \neg((P \cap \neg Q) \cup (Q \cap \neg P))$$

e

$$\neg P \triangle Q = (\neg P \cup Q) \cap (\neg Q \cup P).$$

L'identità segue facilmente applicando deMorgan e cancellando le doppie negazioni.

Esercizi 1 – 24

Si inserisca alla destra del simbolo di uguaglianza una delle seguenti espressioni:

$\cup$	P	$\neg P$	$P \cup Q$	$P \setminus Q$
$\emptyset$	Q	$\neg Q$	$P \cap Q$	$P \triangle Q$

in modo da ottenere un'identità.

1 $P \setminus P =$

2 $P \setminus \mathbb{U} =$

3 $P \setminus \emptyset =$

4 $\emptyset \setminus P =$

5 $P \triangle \emptyset =$

6 $P \triangle \mathbb{U} =$

7 $\neg \emptyset =$

8 $\neg \mathbb{U} =$

9 $P \setminus \neg Q =$

10 $(P \setminus Q) \cup Q =$

11 $(P \triangle Q) \cup Q =$

12 $P \triangle \neg P =$

13 $P \setminus \neg P =$

14 $\neg P \cup P =$

15 $\neg P \cap P =$

16 $\neg P \cup \mathbb{U} =$

17 $\neg P \cap \mathbb{U} =$

18 $P \setminus (P \setminus Q) =$

19 $Q \setminus (P \cup Q) =$

20 $(P \setminus Q) \setminus P =$

21 $P \setminus (Q \setminus P) =$

22 $Q \triangle \neg \emptyset =$

23 $\neg Q \triangle \neg P =$

24 $\neg (Q \triangle \neg P) =$

Esercizi 25 – 28

Dire se le seguenti sono identità ed in caso contrario dare un controesempio (si prenda come universo $\mathbb{N}$).

25 $P \triangle \neg Q = \neg P \triangle Q$

27 $(P \cup Q) \setminus Q = P$

26 $P \setminus Q = Q \setminus P$

28 $Q \triangle Q = P \triangle P$

Esercizi 29 – 34

Si inserisca una delle seguenti espressioni: $\emptyset$, $\mathbb{U}$, P , $\neg P$, Q , $\neg Q$, $P \cup Q$, $\neg(P \cup Q)$ in modo da ottenere un'uguaglianza che vale *per ogni* coppia P e Q di insiemi *disgiunti*.

29 $P \setminus Q =$

32 $Q \cup \neg P =$

30 $P \triangle Q =$

33 $(Q \cup P) \setminus P =$

31 $Q \cap \neg P =$

34 $\neg Q \cup \neg P =$

Esercizi 35 – 39

Si inserisca una delle seguenti espressioni: $\emptyset$, $\mathbb{U}$, P , $\neg P$, Q , $Q \setminus P$ così da ottenere un'uguaglianza vera *per ogni* coppia di insiemi P e Q tali che $P \subseteq Q$.

35 $P \setminus Q =$

38 $Q \cap \neg P =$

36 $P \triangle Q =$

39 $Q \cup \neg P =$

37 $\neg Q \cap P =$

Esercizi 40 – 45

Sia $\mathbb{U}$ un universo non vuoto. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere *per ogni* coppia di insiemi P e Q tali che $P \triangle Q = \mathbb{U}$. In caso contrario si dia un controesempio.

40 $P \not\subseteq Q$

43 $P \setminus Q = \emptyset$

41 $Q \cap P = \emptyset$

44 $\neg P = Q$

42 $Q \cup P = \mathbb{U}$

45 $Q \neq P$

Esercizi 46 – 51

Sia $\mathbb{U}$ un universo qualsiasi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere *per ogni* coppia di insiemi P e Q tali che $P \subsetneq Q$. In caso contrario si dia un controesempio.

46 $P \subseteq Q$

49 $Q \setminus P \neq \emptyset$

47 $Q \cap P \neq Q$

50 $\mathbb{U} \neq \emptyset$

48 $Q \cap P = P$

51 $P \setminus Q \neq Q \setminus P$

Esercizi 52 – 58

Le seguenti affermazioni

$$\begin{array}{llll} P = \emptyset & P \not\subseteq Q & P \triangle Q = \mathbb{U} & P \neq Q \\ \neg P \neq \emptyset & Q \subseteq P & P \setminus Q = \emptyset & P \cap Q = \emptyset \end{array}$$

sono equivalenti (in ogni universo, e per ogni coppia di insiemi P e Q) ad una di queste altre, dire quale.

52 $(P \cup Q) \setminus P = Q$

56 $P \cup Q = P$

53 $P \subsetneq \mathbb{U}$

57 $P \subseteq Q$

54 $P \setminus (P \setminus Q) \neq P$

58 $P \cap \neg P = P$

55 $P = \neg Q$

59 $P \triangle Q \neq \emptyset$

Esercizi 60 – 71

Si scriva alla destra del simbolo $\iff$ una delle seguenti affermazioni

$$\begin{array}{lllll} P = \emptyset & P = \mathbb{U} & P \subseteq Q & P \cap Q = \emptyset & P = Q = \emptyset \\ P = \emptyset & Q = \mathbb{U} & Q \subseteq P & P \cup Q = \mathbb{U} & P = Q = \mathbb{U} \end{array}$$

in modo da ottenere una equivalenza valida.

60 $P \triangle Q = P \cup Q \iff$

66 $P \triangle Q = Q \iff$

61 $P \setminus Q = \emptyset \iff$

67 $P \triangle Q = \neg Q \iff$

62 $P \triangle Q = P \setminus Q \iff$

68 $P \setminus Q = Q \setminus P \iff$

63 $P \cup \neg Q = \mathbb{U} \iff$

69 $P \cap Q = \mathbb{U} \iff$

64 $P \cap \neg Q = \emptyset \iff$

70 $P \setminus Q = P \iff$

65 $P \cup Q = Q \iff$

71 $P \setminus Q = Q \iff$

Esercizi 72 – 74

Si scrivano tutte le implicazioni che valgono tra le seguenti affermazioni.

$$\begin{array}{ll} 72 & P = \emptyset \quad P \subseteq Q \\ & Q = \emptyset \quad Q \not\subseteq P \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 74 & P = Q \quad P \cup Q = \emptyset \\ & P = \mathbb{U} \quad Q \subseteq \neg P \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 73 & P = Q \quad P \setminus Q = P \\ & P = \emptyset \quad Q \subseteq P \end{array}$$

12. Associatività di $\cup$, $\cap$, e Δ

Le seguenti identità si chiamano **leggi di associatività**:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

L'associatività dell'unione e dell'intersezione è immediata da verificare. L'associatività della differenza simmetrica è un po' più laboriosa e viene rimandata a quando avremo a disposizione metodi per semplificare la verifica.

Grazie a queste identità possiamo omettere alcune parentesi. Per esempio, scriveremo semplicemente $A \cup B \cup C \cup D$. Sebbene ci siano quattro modi per calcolare questa unione:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $(A \cup B) \cup (C \cup D)$ | 3. $A \cup ((B \cup C) \cup D)$ |
| 2. $((A \cup B) \cup C) \cup D$ | 4. $A \cup (B \cup (C \cup D))$ |

per l'associatività, il risultato è comunque sempre lo stesso.

13. Algebre booleane di insiemi

Fissiamo un universo arbitrario ma non vuoto $\mathbb{U}$. Un'**algebra booleana** su $\mathbb{U}$ è una collezione di insiemi $\mathcal{B}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{U}$ appartengono a $\mathcal{B}$;
2. se A appartiene a $\mathcal{B}$ allora anche $\neg A$ appartiene a $\mathcal{B}$ (brevemente, si dice anche che $\mathcal{B}$ è **chiusa rispetto alla complementazione**);
3. se A e B appartengono a $\mathcal{B}$ allora anche $A \cap B$ appartiene a $\mathcal{B}$ (brevemente, si dice anche che $\mathcal{B}$ è **chiusa rispetto all'intersezione**);
4. se A e B appartengono a $\mathcal{B}$ allora anche $A \cup B$ appartiene a $\mathcal{B}$ (brevemente, si dice anche che $\mathcal{B}$ è **chiusa rispetto all'unione**).

Avremmo potuto omettere, a scelta, uno degli ultimi due assiomi perchè segue, per deMorgan, dagli altri tre. Dal secondo e dal terzo assioma segue che le algebre booleane sono chiuse rispetto all'intersezione cioè: se A e B appartengono a $\mathcal{B}$ allora anche $A \cap B$ appartiene a $\mathcal{B}$.

14. Esempi

Se $\mathcal{B}$ è la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ allora $\mathcal{B}$ è un'algebra booleana. Questa collezione di insiemi viene spesso denotata $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, la lettera $\mathcal{P}$ sta per *parti*. Se $\mathcal{B}$ contiene solo gli insiemi $\emptyset$ e $\mathcal{U}$ allora $\mathcal{B}$ è un'algebra booleana. Tra questi due estremi esistono generalmente molte altre possibilità. Vediamo alcuni esempi:

1. La collezione contenente i tre insiemi $\emptyset$, $\mathcal{U}$, e $\{0\}$ è un'algebra booleana su $\mathcal{U} = \{0, 1, 2\}$ e così pure la collezione contenente gli insiemi $\emptyset$, $\mathcal{U}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$.
2. L'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contengono tutto $\mathbb{Q}$ o sono disgiunti da $\mathbb{Q}$ è un'algebra booleana su $\mathbb{R}$;
3. Un insieme si dice **finito** se contiene un numero finito di elementi, **cofinito** se il suo complemento è finito. L'insieme dei sottoinsiemi finiti o cofiniti di $\mathbb{N}$ è un'algebra booleana su $\mathbb{N}$.

Esercizi 75 – 79

Si dica qual'è la più piccola algebra booleana su $\mathbb{N}$ che contiene :

- 75** Gli insiemi $\{0\}$ e $\{1\}$.
- 76** L'insieme dei numeri pari P .
- 77** Tutti gli insiemi $A \subseteq P$.
- 78** Tutti i singoletti di $\mathbb{N}$.
- 79** Tutte le coppie non ordinate di $\mathbb{N}$.

I **singoletti** di $\mathbb{N}$ sono gli insiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che contengono solo un elemento. Le **coppie non ordinate** sono gli insiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che contengono esattamente due elementi.

Capitolo 3

Le relazioni

Nel capitolo precedente abbiamo considerato solo sottoinsiemi dell'universo di atietà 1. In questo capitolo considereremo oggetti più complessi: relazioni. Questi sono sottoinsiemi di arietà 2 e più.

1. Le coppie

Useremo il simbolo $\langle a, b \rangle$ per denotare la coppia il cui primo elemento è a e il cui secondo elemento è b . Qualche testo usa le parentesi tonde per indicare le coppie, ma tra i logici le parentesi angolari sono standard. Noi diremo che $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ solo se $a = c$ e $b = d$. Chiameremo $\langle a, b \rangle$ una **coppia ordinata** poiché l'ordine degli elementi che compongono la coppia è rilevante, infatti avremo che $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$ non appena $a \neq b$.

Un insieme di due elementi $\{a, b\}$ è anche chiamato una **coppia non ordinata**. Per le coppie non ordinate, l'ordine non è rilevante, infatti $\{a, b\} = \{b, a\}$. Si noti anche che mentre $\langle a, a \rangle$ è una coppia ordinata, $\{a, a\}$ non è una coppia non ordinata (perchè non è un insieme di due elementi).

Nel seguito, quando diremo semplicemente **coppia**, intenderemo coppia ordinata.

2. Le tuple

La nozione di tupla generalizza quella di coppia. Una **n -tupla (ordinata)** (si legge *entupla*) di V è una sequenza $a_1, \dots, a_n$ di elementi di V . Tuple vengono racchiuse tra parentesi angolari: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

3. Prodotti e potenze cartesiani

Il **prodotto cartesiano** degli insiemi V e U è l'insieme di coppie il cui primo elemento appartiene a V ed il secondo appartiene ad U :

$$V \times U := \left\{ \langle x, y \rangle : x \in V, y \in U \right\}$$

In generale, il prodotto cartesiano degli insiemi $V_1, \dots, V_n$ è:

$$V_1 \times \dots \times V_n := \left\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1 \in V_1, \dots, x_n \in V_n \right\}$$

Il **quadrato cartesiano** dell'insieme V è l'insieme di coppie

$$V^2 := V \times V := \left\{ \langle x, y \rangle : x, y \in V \right\}$$

In generale chiameremo **potenza cartesiana n -esima** dell'insieme V l'insieme delle n -tuple di elementi di V :

$$V^n := V \times \dots \times V := \left\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1, \dots, x_n \in V \right\}$$

Inoltre si conviene che V^1 sia V stesso.

L'insieme delle coppie non ordinate di elementi di V si denota invece con $V^{[2]}$. In generale, l'insieme delle n -tuple non ordinate si denota con $V^{[n]}$.

4. Le relazioni

Una **relazione n -aria** (si legge *ennaria*) è un sottoinsieme della potenza cartesiana U^n . In particolare, quando $n = 2$, diremo che la relazione è **binaria**. In questo caso si usa abbreviare $\langle a, b \rangle \in R$ con **$a R b$** . Questa si chiama la **notazione infissa**. Spesso per dire che $a R b$ e che $b R c$ si scrive in modo compatto: $a R b R c$.

Fissiamo un universo non vuoto U , queste sono le due relazioni più semplici che si possono definire su U :

$$\emptyset, \quad U^2;$$

si chiamano relazioni **banali**.

Vediamo alcuni semplici esempi di relazioni binarie. Fissiamo un universo U e due insiemi P e Q ; fissiamo anche $a, b \in U$.

$$P^2, \quad P \times Q, \quad \{a\} \times P, \quad P \times \{a\}, \quad \{\langle a, b \rangle\},$$

ed anche

$$\left\{ \langle x, x \rangle : x \in P \right\};$$

quest'ultima relazione si chiama **diagonale** di P .

5. Osservazioni

Le seguenti identità sono facili da verificare:

$$Q \times \emptyset = \emptyset \times Q = \emptyset$$

$$Q \times (P \cup R) = (Q \times P) \cup (Q \times R)$$

$$Q \times (P \cap R) = (Q \times P) \cap (Q \times R)$$

La seguente implicazione vale per ogni coppia di insiemi P e Q entrambi non vuoti.

$$Q \times P = P \times Q \implies P = Q$$

6. Rappresentazione cartesiana

Esistono vari modi per rappresentare le relazioni binarie. Il più ovvio è disegnare la relazione nel piano cartesiano: rappresentiamo per prima cosa il quadrato cartesiano $\mathbb{U}^2$, poi per ogni coppia $\langle n, m \rangle$ disegniamo un punto nel piano cartesiano.

7. I diagrammi

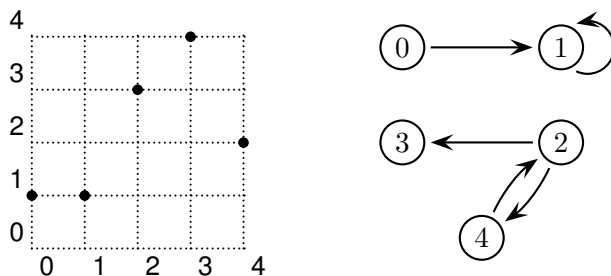
Spesso è più intuitivo rappresentare una relazione binaria usando un **diagramma**. Si disegna un **nodo** per ogni elemento dell'universo e una **freccia** per ogni elemento della relazione. La freccia congiunge i nodi corrispondenti al primo ed al secondo elemento della coppia.

8. Esempio

Fissiamo come universo $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. La relazione

$$R = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

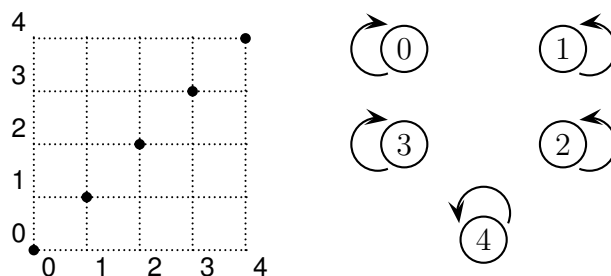
può essere rappresentata in uno dei seguenti modi:



La relazione

$$R = \{\langle x, x \rangle : x \in \mathbb{U}\}$$

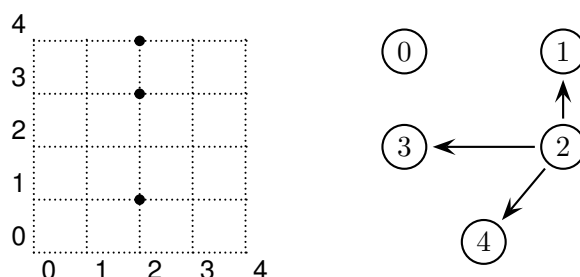
può essere rappresentata in uno dei seguenti modi:



Sia $P = \{1, 3, 4\}$. La relazione

$$\{2\} \times P = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$$

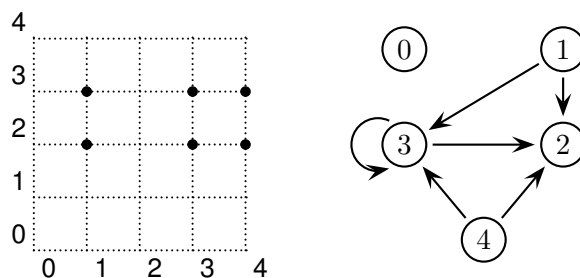
può essere rappresentata in uno dei seguenti modi:



Sia $Q = \{2, 3\}$. La relazione

$$P \times Q = \left\{ \begin{array}{l} \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \\ \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \\ \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \end{array} \right\}$$

può essere rappresentata in uno dei seguenti modi:



9. Esempi

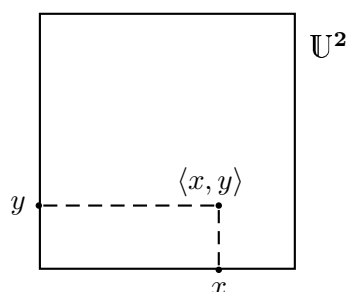
Questi sono alcuni esempi di relazioni su domini infiniti:

- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\};$

- $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : y \text{ è multiplo di } x \right\};$
- $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 : (x - y) \text{ è multiplo di } 7 \right\};$
- $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Q}^2 : x - y \in \mathbb{Z} \right\};$
- $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} : (x - y)^2 \in \mathbb{Q} \right\}.$

Esercizi 80 – 89

Fissiamo un modello in cui il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$. Rappresentiamo $\mathbb{U}^2$ come un quadrato, ogni punto di questo quadrato corrisponde ad una coppia



Dire quale delle figure qui sotto rappresentano i seguenti insiemi (l'area che appartiene all'insieme è colorata; gli insiemi P e Q sono rappresentati dai segmenti in grassetto nell'asse orizzontale e verticale).

80 $P \times Q$

85 $\mathbb{U} \times Q$

81 $Q \times P$

86 $(P \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times Q)$

82 $P \times \mathbb{U}$

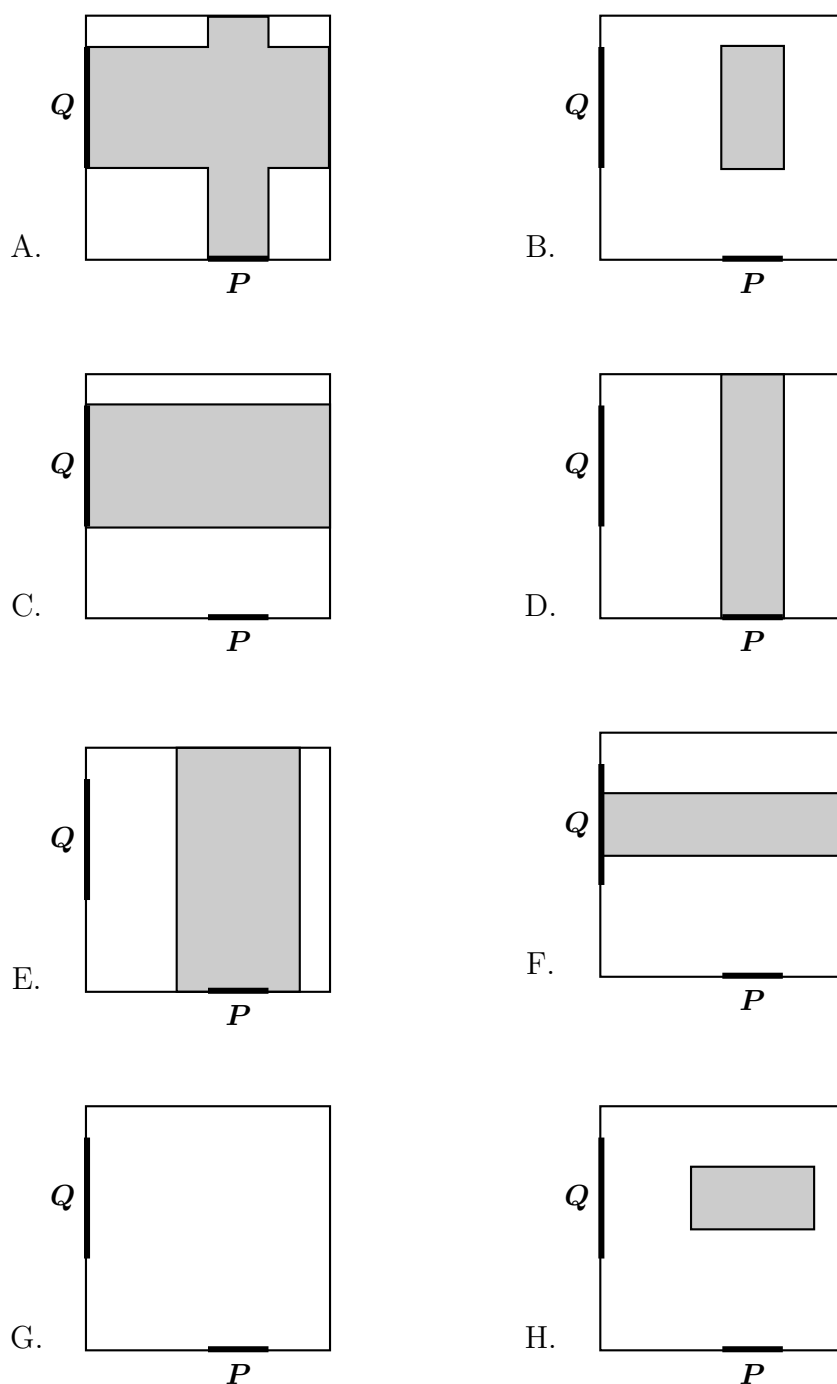
87 $(P \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times Q)$

83 $Q \times \mathbb{U}$

88 $(P \times Q) \cap \mathbb{U}$

84 $\mathbb{U} \times P$

89 $\mathbb{U} \times P \cap \mathbb{U} \times Q$

**Esercizi 90 – 93**

Si completino le seguenti espressioni così che valgano per ogni coppia di insiemi A e B entrambi diversi da $\mathbb{U}$. Si scelga tra le seguenti possibilità:

$$\begin{array}{lll}
 \mathbb{U}^2 & B^2 & (A \cap B) \times \mathbb{U} \\
 A^2 & A \times B & (A \cup B) \times \mathbb{U}
 \end{array}$$

90 $(A \times \mathbb{U}) \cap (B \times \mathbb{U}) =$

92 $(A \times \mathbb{U}) \cup (B \times \mathbb{U}) =$

91 $(A \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times B) =$

93 $(A \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times B) \supseteq$

Esercizi 94 – 98

Si dica quali ipotesi tra

1. $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

3. $A \subseteq B$

2. $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

4. $B \subseteq A$

implicano le seguenti:

94 $A^2 \cup B^2 = (A \cup B)^2$

99 $B \subseteq A \times B$

95 $A^2 \subseteq B^2$

100 $A \subseteq A \times B$

96 $A \times B = A \cup B$

101 $A \times B \subseteq A$

97 $A \times B = \emptyset$

102 $A \times B \subseteq B$

98 $A \times B = B \times A$

Capitolo 4

Le funzioni

Le funzioni possono essere viste sia come insiemi (di coppie) che come operazioni arbitrariamente complesse per ottenere da insiemi altri insiemi.

Gran parte del contenuto di questo capitolo potrebbe essere assunto noto ma è bene fissare le convenzioni che adotteremo in questo corso. (Nella letteratura si trovano spesso notazioni e definizioni discordanti.)

1. Le funzioni

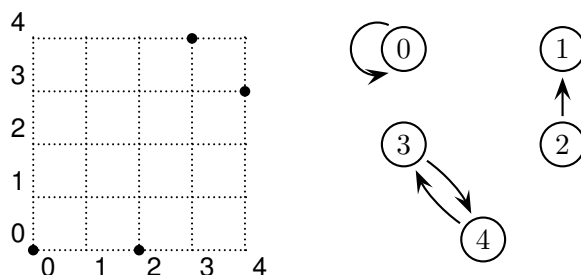
Una funzione (parziale) n -aria è una relazione $(n+1)$ -aria F tale che per ogni $x_1, \dots, x_n$ esiste al più un y tale che $\langle x_1, \dots, x_n, y \rangle \in F$. Diremo anche che la relazione è **univoca** se vale questa proprietà. Scriveremo

$$F : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U} \quad \text{oppure} \quad \mathbb{U}^n \xrightarrow{F} \mathbb{U}$$

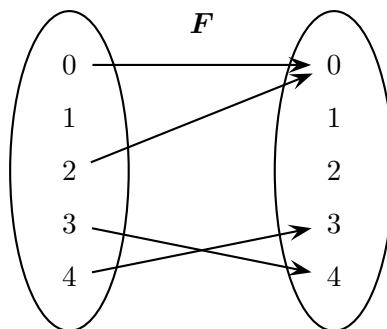
(Ma scriveremo $\mathbb{U}$ per $\mathbb{U}^1$.) Per il momento considereremo solo funzioni unarie. Vediamo un esempio:

$$\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad F = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}.$$

Qui sotto rappresentiamo questa nel piano cartsiano e con un diagramma:



Formalmente una funzione è una relazione, cioè un insieme di coppie. Ma spesso è più conveniente pensare le funzioni come “operatori” che da un input (il primo elemento di una coppia) producono un output (il secondo elemento della coppia). La seguente rappresentazione di F rende meglio quest’idea:



Quando vogliamo riferirci alla funzione F , pensata come relazione, la chiameremo **grafo della funzione** F , ben inteso però che formalmente si tratta di F stessa.

Se la coppia $\langle x, y \rangle$ appartiene ad F diremo che F **mappa** x in y o anche che y è l'immagine di x . Chiameremo y il **valore** di F in x e scriveremo:

$$F : x \mapsto y \quad \text{oppure} \quad x \xrightarrow{F} y$$

Scriveremo $F(x)$ per indicare il valore di F in x . Nell'esempio qui sopra:

$$0 \xrightarrow{F} 2 \quad 2 \xrightarrow{F} 2 \quad 3 \xrightarrow{F} 3 \quad 4 \xrightarrow{F} 4$$

ovvero

$$F(0) = 2, \quad F(2) = 2, \quad F(3) = 3, \quad F(4) = 4.$$

Se esiste un y tale che $\langle x, y \rangle \in F$ diremo che F è **definita** in x . In alcune aree della matematica (per esempio, in teoria della computabilità) si usa scrivere $F(x) \downarrow$ per dire che F è definita in x e $F(x) \uparrow$ per dire che F non è definita in x .

2. Totalità, suriettività, iniettività

L'insieme degli x dove F è definita si chiama **dominio di definizione** di F . Il dominio di definizione di F verrà denotato con $\text{dom } F$. L'insieme degli y tali che $\langle x, y \rangle \in F$, per qualche x , si chiama **immagine** di F . L'immagine di F verrà denotata con $\text{img } F$. Nell'esempio del paragrafo precedente:

$$\text{dom } F = \{0, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \text{img } F = \{0, 3, 4\}.$$

Se il dominio di definizione è tutto l'universo allora la funzione si dice essere una **funzione totale**. Se l'immagine è tutto l'universo allora la funzione si dice **suriettiva**.

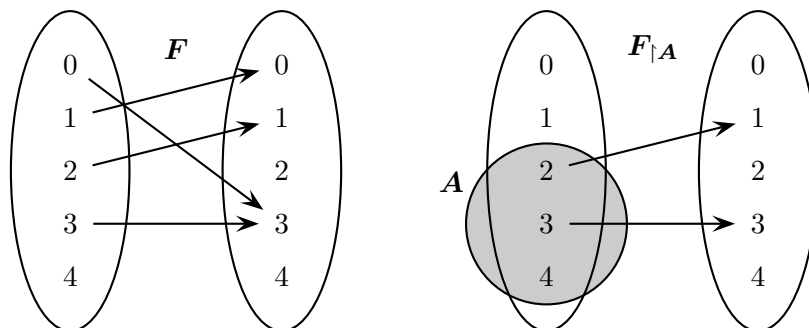
Una funzione si dice **iniettiva** se per ogni y esiste al più un x tale che $\langle x, y \rangle \in F$. Una funzione che è totale, suriettiva, ed iniettiva si dice **biiettiva**.

3. La restrizione di una funzione

Siano F e G funzioni (ma pensiamole anche come relazioni). Se $G \subseteq F$ diremo che F estende G o che G è una restrizione di F .

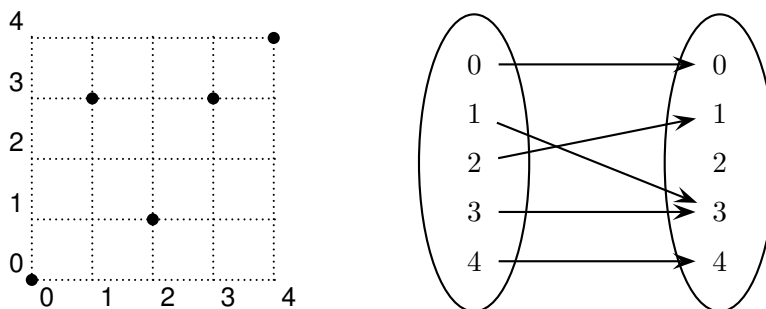
La relazione $F \cup G$ non è sempre una funzione, infatti l'univocità può venire a mancare (se c'è un punto dove entrambe F e G sono definite ma in modo discordante). Se $F \cup G$ è una funzione allora diremo che F e G sono **compatibili**. In questo caso la funzione $F \cup G$ estende sia F che G .

Sia F una funzione e sia A un insieme. Scriveremo $F|_A$ per la relazione $F \cap (A \times \mathbb{U})$. Chiaramente $F|_A$ è ancora una relazione univoca quindi $F|_A$ è ancora una funzione; la chiameremo: la restrizione di F ad A . Esempio:

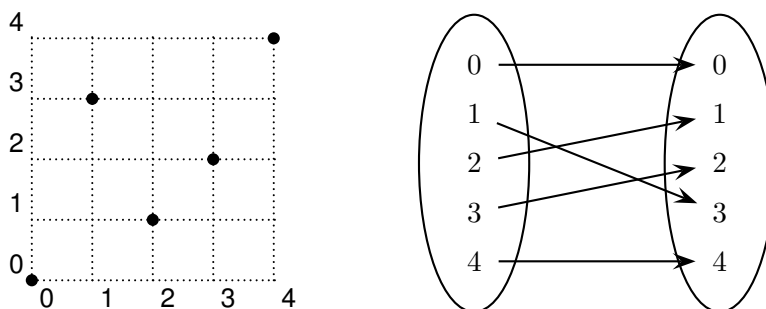


4. Esempi e non esempi

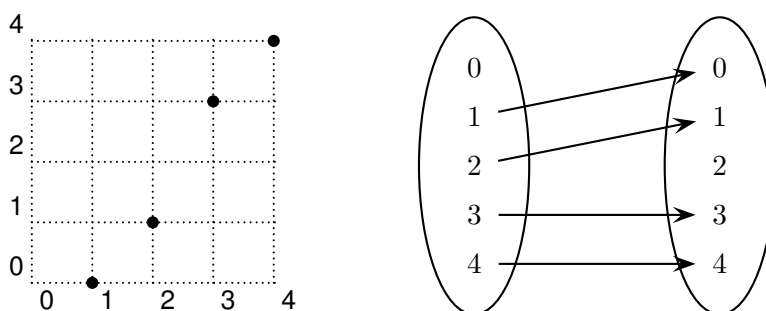
La funzione nell'esempio del precedente paragrafo non è nè totale nè suriettiva. Quella rappresentata qui sotto è totale ma non suriettiva.



La funzione rappresentata qui sotto è una biiezione:



La funzione rappresentata qui sotto è iniettiva, ma non è nè totale nè suriettiva:



5. L'immagine e l'antiimmagine

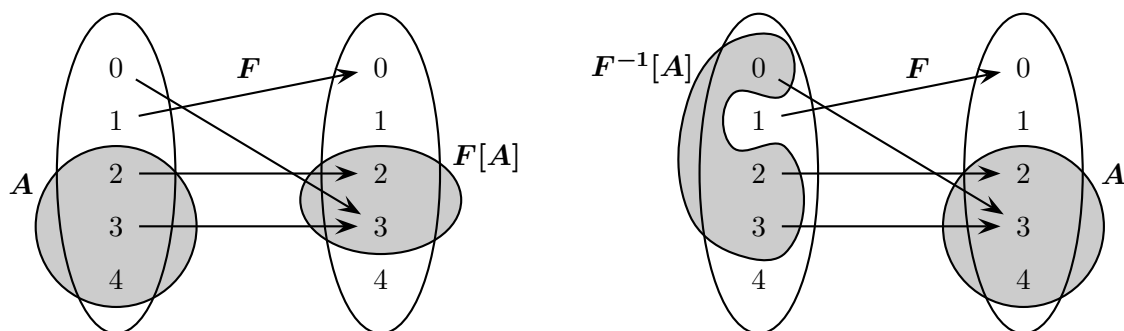
Se A è un qualsiasi insieme, chiameremo **immagine** di A l'insieme

$$F[A] := \{F(x) : x \in A\}$$

(si faccia attenzione alle parentesi quadre). Chiameremo **immagine inversa** o **anti-immagine** di A l'insieme

$$F^{-1}[A] := \{x : F(x) \in A\}.$$

Quando A è un singoletto (cioè contiene un solo elemento), per esempio $A = \{a\}$, allora si preferisce scrivere $F[a]$ o $F^{-1}[a]$ al posto di $F^{-1}[\{a\}]$ e, rispettivamente, $F^{-1}[\{a\}]$. Non si confonda $F(a)$ con $F[a]$: il primo è un elemento mentre il secondo un insieme, precisamente: $F[a] = \emptyset$ se F non è definita in a , altrimenti $F[a] = \{F(a)\}$.



Esercizi 103 – 106

Sia $\mathbb{U}$ un arbitrario universo non vuoto. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ed in caso contrario dare un controesempio.

103 $F[\emptyset] = \emptyset$

105 $F[\mathbb{U}] = \text{img } F$

104 $F^{-1}[\emptyset] = \emptyset$

106 $F^{-1}[\mathbb{U}] = \text{dom } F$

6. Una definizione più generale

Noi abbiamo adottato una definizione di funzione che semplifica la notazione rinunciando ad un po' di generalità. A volte può essere utile generalizzare la definizione data sopra e considerare funzioni del tipo:

$$F : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^m$$

che mappano n -tuple in m -tuple. In altre occasioni si vogliono usare funzioni che mappano elementi di un universo in elementi di un altro universo:

$$F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$$

In questo caso il primo insieme si chiama **dominio** il secondo **codominio**. Le nozioni di totalità, iniettività, ecc., generalizzano facilmente a questi casi.

7. Convenzioni discordanti

È importante fare attenzione poichè diversi autori possono usare diverse definizioni di funzione. Molto spesso (ma non in questo corso) la totalità è inclusa nella definizione di funzione. Più raramente, si include anche la suriettività nella definizione di funzione.

8. Altri esempi

Per avere un esempio di funzione totale iniettiva ma non suriettiva dobbiamo fissare un universo infinito. Sia $\mathbb{N}$ il nostro universo. Consideriamo la funzione $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che mappa $n \mapsto n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questa si chiama la funzione **successore**. Questa funzione è totale e iniettiva, ma non è suriettiva perchè $0 \notin \text{img } S$.

Definiamo ora (questa operazione si chiama **differenza troncata**)

$$x \dot{-} y := \begin{cases} x - y & \text{se } x \geq y \\ 0 & \text{se } x < y \end{cases}$$

Sia $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione che mappa $n \mapsto n - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questa la chiameremo funzione **predecessore**. La funzione predecessore è totale e suriettiva, ma non è iniettiva perchè $P(0) = P(1) = 0$.

La funzione esponenziale $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che mappa $x \mapsto 2^x$ è totale ed iniettiva ma non suriettiva (perchè $2^x > 0$ per ogni x).

La funzione logaritmo $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che mappa $x \mapsto \log_2 x$ è iniettiva e suriettiva ma non è totale (non è definita per $x \leq 0$).

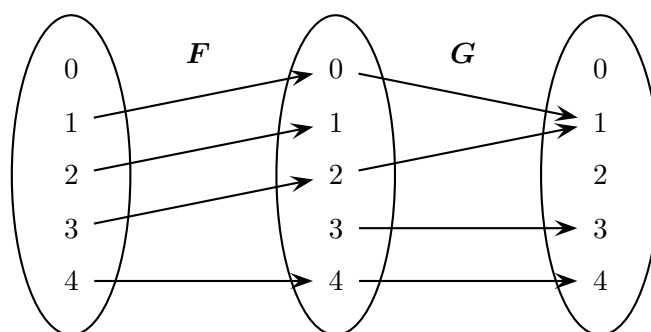
La funzione $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che mappa $x \mapsto x^2$ è totale ma non è nè iniettiva nè suriettiva.

La funzione $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che mappa $x \mapsto 2x$ è una biiezione.

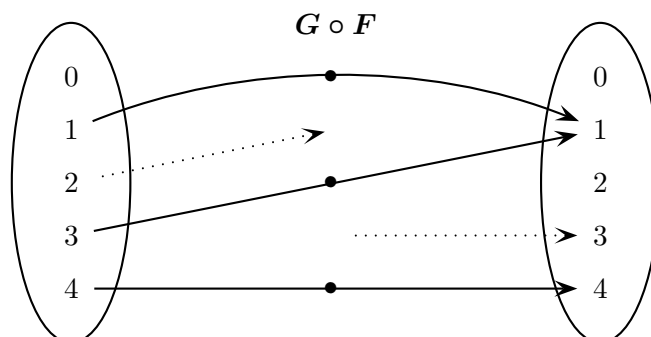
9. La composizione di funzioni

La **composizione** di due funzioni F e G è la funzione che mappa x in $G(F(x))$, cioè nel valore di G in $F(x)$. Stiamo assumendo che F sia definita in x e che G sia definita in $F(x)$, altrimenti si conviene che la composizione di F e G non sia definita in x . La composizione di F e G viene denotata con $G \circ F$.

Vediamo un esempio:



La composizione di queste due funzioni è:



Si noti che $G \circ F$ è definita in x solo se F è definita in x e G è definita in $F(x)$. Nell'esempio, $G \circ F$ non è definita nel 2 e 9 non appartiene all'immagine di $G \circ F$. Il

valore di $G \circ F$ in x può essere denotato in due modi: con $(G \circ F)(x)$ oppure anche con $G(F(x))$.

10. Associatività della composizione

Fissiamo tre funzioni F , G , e H . A priori, queste si possono comporre in due modi diversi: $(F \circ G) \circ H$ oppure $F \circ (G \circ H)$. Ma è abbastanza chiaro che queste due operazioni danno lo stesso risultato. L'operazione di composizione di funzioni è infatti associativa e possiamo, senza rischio di ambiguità, omettere le parentesi e scrivere semplicemente: $F \circ G \circ H$.

11. La funzione vuota

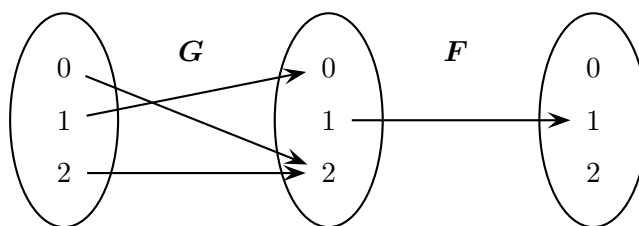
L'insieme vuoto (pensato come una relazione binaria vuota) è un grafo di funzione. Chiameremo questa la **funzione vuota** e la denoteremo con $\emptyset$. Sia il dominio di definizione che l'immagine della funzione vuota è l'insieme vuoto.

Sia F arbitraria. La funzione vuota $\emptyset$ ha la proprietà che

$$\emptyset \circ F = \emptyset \quad \text{e} \quad F \circ \emptyset = \emptyset.$$

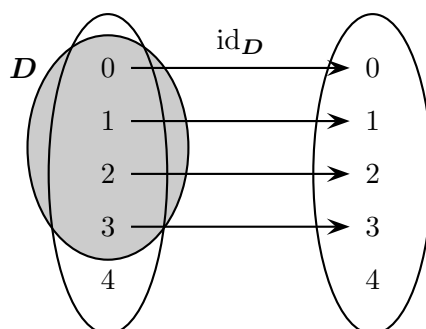
Se F è una funzione totale allora l'unica funzione G tale che $F \circ G = \emptyset$ è la funzione vuota. Simmetricamente, se F è suriettiva, allora la funzione vuota è l'unica funzione G tale che $G \circ F = \emptyset$.

Se F non è totale e G non è suriettiva è ben possibile che $F \circ G = \emptyset$ senza che nè F nè G sia vuota, per esempio:



12. La funzione identità

Sia D un insieme qualsiasi. La funzione che ha come grafo la diagonale di D si chiama **funzione identità** su D . Esempio:



Questa funzione viene denotata con id_D . La funzione id_D è ovviamente iniettiva; è una biiezione se e solo se D è tutto l'universo.

La funzione id_U ha la proprietà che per qualsiasi funzione F ,

$$\text{id}_U \circ F = F \circ \text{id}_U = F.$$

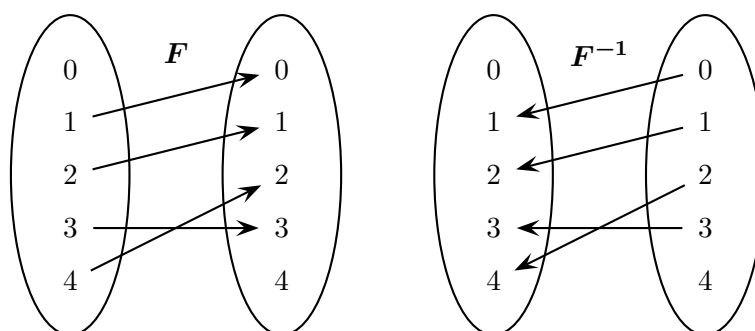
13. La funzione inversa

Se F è una funzione iniettiva allora chiameremo **funzione inversa** di F la funzione

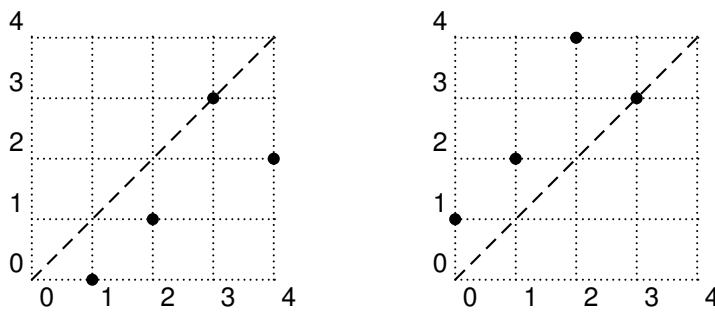
$$F^{-1} := \{ \langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in F \}.$$

Si noti che l'aver assunto F iniettiva serve ad assicurare che F^{-1} sia univoca; altrimenti F^{-1} non è una funzione. Non si confonda la notazione $F^{-1}[a]$ con $F^{-1}(a)$ il primo è un insieme (possibilmente vuoto) ed esiste per qualsiasi F ed a , il secondo (detto l'**antiimmagine** di a) è definito solo se F è iniettiva ed $a \in \text{img } F$.

Chiaramente il diagramma della funzione inversa si ottiene semplicemente invertendo le frecce. Per esempio:



La rappresentazione nel piano cartesiano della funzione inversa si ottiene disegnando l'immagine speculare rispetto alla diagonale:



Notiamo che una iniezione F è suriettiva se e solo se F^{-1} è totale.

È immediato verificare che la funzione inversa di F^{-1} è di nuovo la funzione F . È anche immediato che:

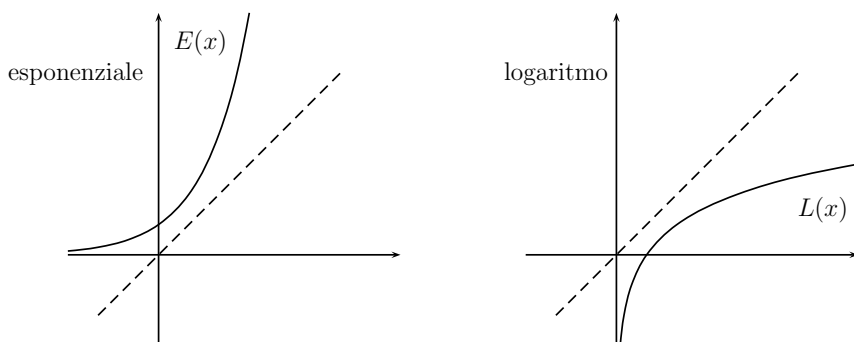
$$F^{-1} \circ F = \text{id}_{\text{dom } F} \quad \text{e} \quad F \circ F^{-1} = \text{id}_{\text{img } F}.$$

Viceversa, se G è tale che $G \circ F = \text{id}_{\text{dom } F}$ allora $F^{-1} \subseteq G$. L'uguaglianza vale se F è suriettiva o, in generale, quando $\text{dom } G = \text{img } F$. Simmetricamente: una funzione H è tale che $H \circ F^{-1} = \text{id}_{\text{img } F}$ se e solo se $F \subseteq H$.

14. Esempi

Si consideri la funzione successore $S : x \mapsto x+1$ e la funzione predecessore $P : x \mapsto x-1$ entrambe da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Chiaramente $P \circ S = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ma P non è l'inversa di S , infatti la funzione inversa di S non è definita nello 0. Avremo quindi che $S^{-1} \subsetneq P$.

Sia $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che mappa $x \mapsto 2^x$. La funzione inversa di E è la funzione che mappa $x \mapsto \log_2 x$ se x è positivo e non è definita sui reali negativi o nulli. Il grafico di L si ottiene dal grafico di E prendendo l'immagine simmetrica rispetto alla diagonale:



15. Le potenze della composizione

Possiamo comporre una funzione F con se stessa. Scriveremo F^2 per $F \circ F$ e in generale denotiamo con F^n la composizione di F con se stessa n volte:

$$F^n := \overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n \text{ volte}}$$

Se F è una iniezione, allora F^{-1} esiste e possiamo comporre F^{-1} con se stessa: denotiamo con F^{-n} la composizione di F^{-1} con se stessa n volte:

$$F^{-n} := \overbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}^{n \text{ volte}}$$

Supponiamo ora che F sia biettiva. Verifichiamo che F^{-n} è la funzione inversa di F^n . Poichè sia F^n che F^{-n} sono funzioni biettive, è sufficiente verificare che $F^n \circ F^{-n} = \text{id}_{\mathbb{U}}$:

$$\overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n \text{ volte}} \circ \overbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}^{n \text{ volte}}$$

poichè la composizione è associativa possiamo comporre queste funzioni nell'ordine preferito. Consideriamo l'operazione di composizione più centrale.

$$\overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n-1 \text{ volte}} \circ F \circ F^{-1} \circ \overbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}^{n-1 \text{ volte}}$$

possiamo sostituire $F \circ F^{-1}$ con $\text{id}_{\mathbb{U}}$ ed ottenere:

$$\overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n-1 \text{ volte}} \circ \text{id}_{\mathbb{U}} \circ \overbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}^{n-1 \text{ volte}}$$

possiamo eliminare $\text{id}_{\mathbb{U}}$ ed ottenere:

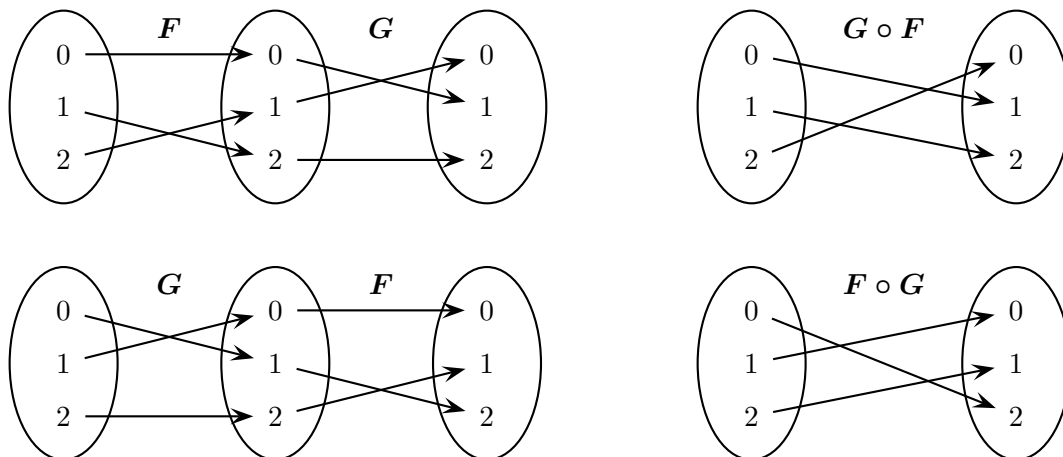
$$\overbrace{F \circ \dots \circ F}^{n-1 \text{ volte}} \circ \overbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}^{n-1 \text{ volte}}$$

Proseguendo in questo modo possiamo ridurre l'intera sequenza a $\text{id}_{\mathbb{U}}$.

Questo argomento può essere generalizzato per calcolare $F^n \circ F^m = F^{n+m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ arbitrari. Se si conviene che $F^0 = \text{id}_{\mathbb{U}}$ allora avremo che $F^n \circ F^m = F^{n+m}$.

16. Composizione e commutatività

L'operazione di composizione non è commutativa. Se F e G sono due funzioni da $\mathbb{U}$ in se stesso, in generale non vale $F \circ G = G \circ F$. Un semplicissimo controesempio:



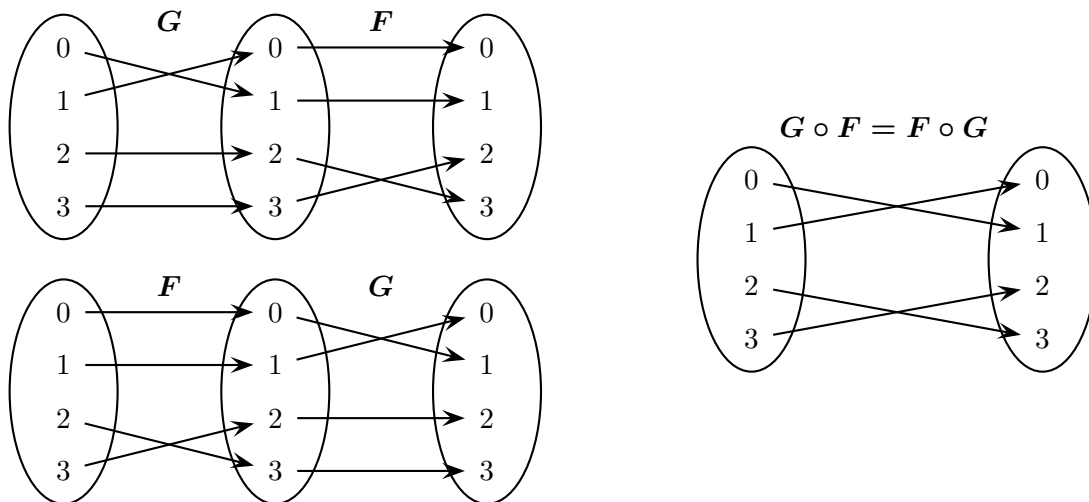
Le funzioni reali definite qui sopra offrono altri semplici controesempi alla commutatività. Se $E : x \mapsto 2^x$ e $D : x \mapsto 2x$ allora

$$E \circ D : x \mapsto 2^{2x} \quad \text{e} \quad D \circ E : x \mapsto 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}.$$

Un altro esempio si ottiene definendo $Q : x \mapsto x^2$. Allora

$$E \circ Q : x \mapsto 2^{x^2} \quad \text{e} \quad Q \circ E : x \mapsto (2^x)^2 = 2^{2x}.$$

Comunque, in qualche caso particolare, può ben succedere che $F \circ G = G \circ F$, nel qual caso diremo che F e G **commutano**. Un esempio di funzioni la cui composizione commuta:



17. L'inversa della composta

Se due funzioni F e G sono iniettive allora la loro composizione $F \circ G$ è anche iniettiva

ed ha dunque un'inversa $(F \circ G)^{-1}$. Questa inversa si può costruire partendo dalle inverse di F e di G , infatti, è immediato verificare che:

$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}.$$

Per semplicità verifichiamo questa identità solo nel caso in cui entrambe le funzioni sono biiezioni. Se F e G sono entrambe biiezioni, allora anche $F \circ G$ è una biiezione, così per verificare l'identità qui sopra è sufficiente dimostrare che:

$$(F \circ G) \circ (G^{-1} \circ F^{-1}) = \text{id}_{\mathbb{U}}.$$

Ma questo è ovvio perchè:

$$(F \circ G) \circ (G^{-1} \circ F^{-1}) = F \circ (G \circ G^{-1}) \circ F^{-1} = F \circ F^{-1}.$$

Esercizi 107 – 110

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3\}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ed in caso contrario dare un controesempio.

107 $F = F^{-1} \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

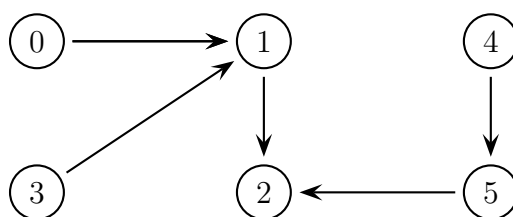
109 $F^2 = F \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

108 $F^2 = F^{-1} \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

110 $F^2 = G^2 \implies F = G.$

Esercizi 111 – 113

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ la funzione il cui grafo è rappresentato nel seguente diagramma.



111 è $F|_{\{1,2,4,5\}}$ è iniettiva?

112 è $F|_{\{1,2,4,5\}}$ è suriettiva?

113 Si scriva $\text{img } F$, $\text{img } F^2$, ed $\text{img } F^3$.

Esercizi 114 – 115

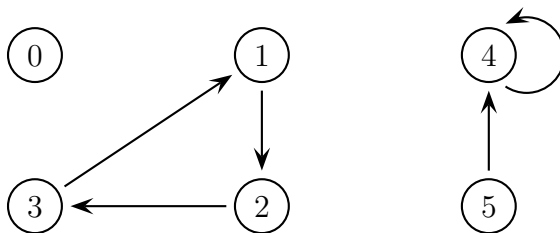
Siano F e G due funzioni tali che $F^2 = G^2 = \text{id}_{\mathbb{U}}$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio. (Per gli eventuali controesempi è sufficiente considerare $\mathbb{U} = \{0, 1, 2\}$):

114 $(F \circ G)^{-1} = F \circ G$

115 $(F \circ G)^{-1} = G \circ F$

Esercizi 116 – 119

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ la funzione il cui grafo è rappresentato nel seguente diagramma.



Per i seguenti valori di V dire

A. $V = \{1, 2, 3\}$

B. $V = \{0, 1, 2, 3\}$

C. $V = \{1, 2, 3, 4\}$

D. $V = \mathbb{U}$

se le seguenti affermazioni sono vere:

116 $F[V] \subseteq V$

118 $V \subseteq F[V]$

117 $F|_V = F$

119 $F|_V$ è iniettiva

Esercizi 120 – 121

Sia F una funzione biiettiva e sia A un insieme. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio.

120 $F|_A$ è sempre iniettiva.

121 $F|_A$ è suriettiva sse $A = \mathbb{U}$.

Esercizi 122 – 126

Siano F e G due funzioni qualsiasi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio.

122 Se $F \circ G$ è iniettiva allora F e G sono iniettive.

123 Se $F \circ G$ è suriettiva allora F e G sono suriettive.

124 Se F e G sono suriettive allora $F \circ G$ è suriettiva.

125 Se F non è totale allora $F \circ G$ non è totale.

126 Se G non è totale allora $F \circ G$ non è totale.

18. Le funzioni n -arie

Finora, spesso solo per comodità di notazione, abbiamo considerato solo funzioni unarie. Le definizioni di dominio di definizione e di immagine si generalizzano facilmente al caso n -ario. Anche le nozioni di totalità, suriettività, ed iniettività sono essenzialmente identiche al caso unario.

19. L'addizione

Definiamo $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ essere la funzione che mappa $\langle x, y \rangle \mapsto x + y$. Questa è una funzione totale e suriettiva. Non è iniettiva, per esempio, $A(0, 1) = A(1, 0)$.

20. Le proiezioni

Sia $\mathbb{U}$ un universo arbitrario e sia $n > 0$. Per ogni $0 < i \leq n$ è definiamo una funzione

$$P_i^n : \mathbb{U}^n \longrightarrow \mathbb{U}$$

che chiameremo **proiezione n - i -esima**. Questa funzione mappa

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i.$$

P_1^1 è semplicemente $\text{id}_{\mathbb{U}}$. Quando $n > 1$, nessuna di queste funzioni è iniettiva (tranne che nel caso banale in cui $\mathbb{U}$ contiene un solo elemento). Le proiezioni sono sempre totali e suriettive.

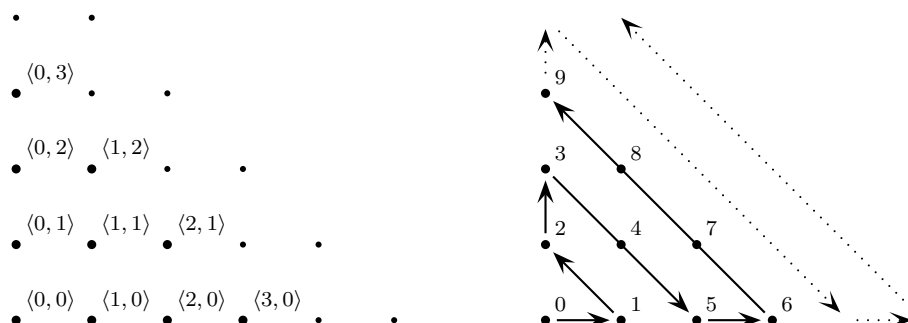
21. Una biiezione tra $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}^2$

Se $\mathbb{U}$ è un universo finito con almeno due elementi allora nessuna funzione $F : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$

può essere biiettiva. Infatti, se esistesse una funzione $F : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ allora $\mathbb{U}^2$ e $\mathbb{U}$ dovrebbero avere lo stesso numero di elementi. Sia n il numero di elementi di $\mathbb{U}$, allora $\mathbb{U}^2$ ha n^2 elementi. Chiaramente $n^2 = n$ vale solo quando n è 0 o 1.

Invece esiste una funzione biiettiva $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Possiamo rappresentarci mentalmente $\mathbb{N}^2$ come un reticolo di punti che si estende (in alto e a destra) fino all'infinito. Rappresentiamo nella figura qui sotto l'angolo in basso a sinistra di questo reticolo infinito.

Cominciando dalla coppia $\langle 0, 0 \rangle$ possiamo percorrere questo quadrato a zig-zag. Lungo questo percorso si incontrano tutte le coppie di numeri naturali e a queste assegnamo valori crescenti di $F(x, y)$.



Capitolo 5

I linguaggi del prim'ordine

Considereremo ora un altro modo per costruire nuovi insiemi a partire da insiemi dati. Per esempio, dati due insiemi P e Q , con l'espressione

$$\{x : x \in P \text{ e } x \in Q\}$$

denotiamo l'insieme che contiene tutti e soli gli elementi (dell'universo) che sono elementi sia di P che di Q . Questo è quindi un modo alternativo per descrivere $P \cap Q$. In generale la notazione che verrà usata è: $\{x : \dots\}$, dove al posto di “...” inseriremo una proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme, la cosiddetta *definizione* dell'insieme.

Un altro esempio è l'insieme

$$\{\langle x, y \rangle : x \in P \text{ e } y \in Q\}$$

cioè l'insieme delle coppie dove il primo elemento appartiene a P ed il secondo a Q . Ovvero il prodotto cartesiano: $P \times Q$.

Nel seguito la definizione di un insieme sarà una *formula della logica del prim'ordine* cioè un'espressione formale costruita a partire da alcune espressioni di base (come per esempio l'appartenenza a degli insiemi dati) seguendo ben precise regole grammaticali. La sintassi (cioè le regole grammaticali) con cui queste espressioni vengono costruite è l'argomento di questo capitolo. Per il momento considereremo una versione semplificata della logica del prim'ordine. Questa conterrà poche semplici regole per la formazione delle formule. Così le formule che otterremo saranno relativamente poco espressive. (Nei prossimi capitoli, oltre ad usare più variabili, introdurremo i quantificatori, le costanti, e le funzioni.)

1. Il linguaggio

Un **linguaggio**, detto anche una **signatura**, è un insieme qualunque (gli elementi del linguaggio li penseremo come caratteri). Useremo la lettera L per denotare un

linguaggio generico. Useremo le lettere p , q , ed r , per indicare generici elementi del linguaggio. Questi verranno anche chiamati **predicati**. Possiamo pensarli come *nomi* per insiemi e useremo l'espressione formale px per “ x appartiene all'insieme di nome p ”. Per il momento ignoreremo il significato di questi nomi e forniremo solo delle regole per costruire da questi nomi “semplici” altri nomi più “complessi”. Queste regole sono puramente sintattiche ma verranno tra breve interpretate con operazioni molto simili a quelle viste per le algebre booleane.

2. I simboli che compongono le formule

Fissiamo un insieme infinito V di oggetti che chiameremo variabili. Generiche variabili verranno denotate con le lettere $x_0, x_1, x_3, \dots$ oppure x, y, z . Una **formula** del linguaggio L è una sequenza costruita da elementi di L e V e uno dei seguenti simboli:

- $\neg$ chiamato **negazione** (si legge *non*),
 - $\perp$ chiamato **contraddizione**,
 - $\top$ chiamato **tautologia**,
 - $\wedge$ chiamato **congiunzione** (si legge *e*),
 - $\vee$ chiamato **disgiunzione** (si legge *o*),
 - $\oplus$ chiamato **disgiunzione esclusiva** (la leggeremo *xor*)
 - [chiamato parentesi aperta;
 -] chiamato parentesi chiusa (per migliorare la leggibilità useremo anche altre tipi di parentesi ma a rigore queste sono sufficienti).
- 

3. La costruzione delle formule

Le formule del linguaggio vengono costruite concatenando i simboli elencati sopra secondo le seguenti regole. (Generiche formule verranno denotate con le lettere minuscole dell'alfabeto greco; tipicamente φ , ψ , e θ .)

- ♣ $\perp$ e $\top$ sono formule;
- ♣ se p è un elemento di L ed x è un elemento di V allora px è una formula (formule di questo tipo sono dette **atomiche**);
- ♣ se φ e ψ sono formule allora anche $\neg\varphi$, $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$ e $[\varphi \oplus \psi]$ sono formule.

Nei prossimi capitoli aggiungeremo a queste altre regole di formazione per ottenere più formule.

Spesso scriveremo $p(x)$ al posto di px ; a rigore non concorda con la nostra definizione ma facilita la lettura. Le parentesi più esterne di una formula vengono quasi sempre omesse. Scriveremo

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

per enfatizzare che $x_1, \dots, x_n$ sono tutte le variabili che occorrono nella formula φ . È bene fare attenzione, perchè questa notazione può indurre in errore: scrivendo $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ non si afferma che le variabili $x_1, \dots, x_n$ occorrono veramente in φ ma solo che le variabili *diverse da* $x_1, \dots, x_n$ *non occorrono*.

4. Esempi

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Le seguenti sono formule:

$$\begin{array}{ccc} \perp & px \vee \perp & [py \vee \perp] \\ qx & py & py \vee \perp \end{array}$$

Nella colonna più a destra la stessa formula occorre in forma estesa ed in forma abbreviata: sono state omesse le parentesi più esterne.

5. Il connettivo principale

Applicando le stesse regole di formazione ma in ordine diverso si ottengono formule diverse. L'ordine in cui le regole vengono applicate per costruire una formula è quindi molto importante. Le parentesi servono proprio per poter ricostruire inequivocabilmente quest'ordine. Il connettivo più esterno (cioè l'ultimo connettivo applicato nella costruzione della formula) si chiama **connettivo principale** della formula. Esempi:

$$\begin{array}{ccc} px \bigvee \perp & & \neg [qx \wedge [px \vee \perp]] \\ \neg \neg [px \vee \perp] & & \perp \\ qx \bigwedge \neg [px \vee \perp] & & \neg \perp \end{array}$$

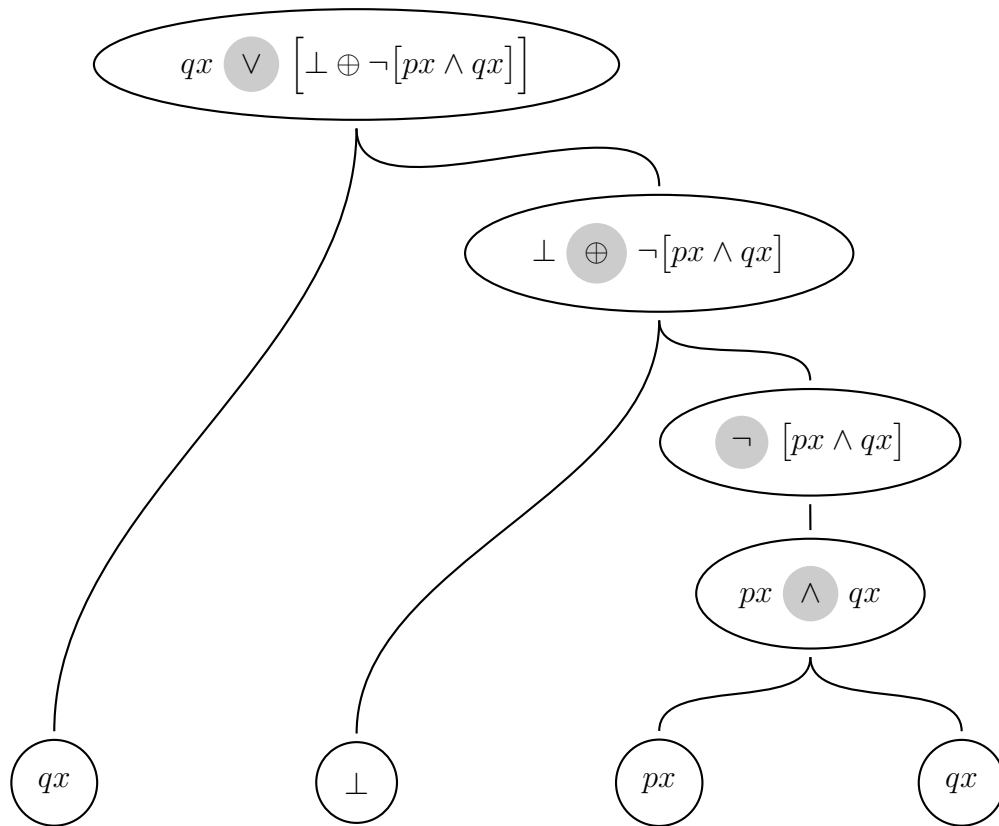
(Il connettivo principale è stato evidenziato.)

6. L'albero di costruzione

L'**albero di costruzione** della formula è una rappresentazione grafica del processo di formazione. Per esempio, alla formula

$$qx \vee [\perp \oplus \neg [px \wedge qx]]$$

corrisponde il seguente albero di costruzione:



Capitolo 6

Le strutture

Nel capitolo precedente abbiamo fissato la sintassi dei linguaggi del prim'ordine, cioè le regole per la formazione delle formule. Le formule esistono indipendentemente dal loro significato. In questo capitolo fissato un *modello* daremo un significato alle formule. In generale, il significato dipende dal modello. Aver tenuto distinti sintassi (cioè la grammatica) e semantica (cioè il significato) permette lo studio di questa dipendenza.

1. I modelli

Gli elementi di una signature L sono oggetti qualsiasi: ora noi li andremo ad *interpretare* come insiemi. Un **modello**, detto anche una **struttura**, di signature L consiste di

- ◆ un **universo** o **dominio** $\mathbb{U}$ non vuoto, e
- ◆ l'assegnazione di un qualche sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{U}$ ad ogni simbolo $p \in L$.

Questa assegnazione è chiamata **interpretazione**. Spesso i modelli vengono indicati con una lettera in stile calligrafico, per esempio, $\mathcal{U}$. Useremo la notazione $\mathcal{U} : p \rightsquigarrow P$ per dire che il modello $\mathcal{U}$ assegna al simbolo p l'insieme P (quest'ultima non è una notazione standard). Se il linguaggio è l'insieme $\{p_1, \dots, p_n\}$, allora il modello con dominio $\mathbb{U}$ e interpretazione

$$\mathcal{U} : p_1 \rightsquigarrow P_1, \quad \mathcal{U} : p_2 \rightsquigarrow P_2, \quad \dots \quad \mathcal{U} : p_n \rightsquigarrow P_n,$$

si può anche indicare scrivendo $\langle \mathbb{U}, P_1, P_2, \dots, P_n \rangle$. Questa notazione compatta assume che i simboli del linguaggio siano stati presentati in un certo ordine.

Fissato un modello daremo un significato alle formule del linguaggio. Cioè definiremo la **semantica**. Le formule saranno interpretate come definizioni di sottoinsiemi del dominio.

Notiamo che nella definizione di modello abbiamo escluso modelli con dominio vuoto. Questa è una assunzione molto comune ma non universale. Cambiare questa convenzione a qualche piccola conseguenza, la faremo notare nel seguito quando ce ne sarà occasione.

2. I parametri

Prima di definire la semantica, conviene estendere leggermente la nozione di formula. Fissata una struttura, è comodo poter nominare all'interno di una formula particolari elementi dell'universo. La nozione di formula data nel capitolo precedente non permette di fare ciò: la sintassi è completamente distinta dalla semantica. Introduciamo quindi una nuova nozione di formula; un concetto ibrido tra sintassi e semantica. Nelle **formule con parametri in $\mathbb{U}$** gli elementi dell'universo possono occorrere come fossero simboli del linguaggio. Le formule con parametri si costruiscono come le formule senza parametri ma con una regola in più:

♠ se p è un simbolo di L ed a è un parametro allora pa è una formula.

Il termine **parametro** significa semplicemente *elemento dell'universo* e viene usato per enfatizzare che questo elemento occorre in una formula. Quando il contesto non permette ambiguità le formule con parametri vengono chiamate semplicemente *formule*. Per esempio, fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$ e come universo $\mathbb{N}$. Le seguenti sono formule con parametri:

$$\begin{array}{ccc} q(0) & p(4) & p(x) \vee q(10) \\ r(x) & \perp & p(3) \wedge q(22) \end{array}$$

3. Formule chiuse

In alcune formule occorre la variabile x , in altre formule no. Queste ultime si chiamano **formule chiuse**. Per esempio:

$$\begin{array}{ccc} q(0) & \text{chiusa} & r(x) & \text{non chiusa} \\ p(4) & \text{chiusa} & p(x) \vee q(10) & \text{non chiusa} \\ \perp & \text{chiusa} & p(3) \wedge q(22) & \text{chiusa} \end{array}$$

Alle formule chiuse verrà assegnato un **valore di verità** cioè diremo se sono vere o false.

4. La definizione di verità

Fissiamo linguaggio ed un modello $\mathcal{U}$. Ora definiremo quando una formula *chiusa* (con parametri in $\mathbb{U}$) è **vera** in $\mathcal{U}$. Diremo anche che la formula **vale** in $\mathcal{U}$. Quando una formula non vale in $\mathcal{U}$ diremo che la formula è **falsa** in $\mathcal{U}$.

$\perp$ è falsa;

$\top$ è vera;

pa è vera se $a \in P$, dove P è l'interpretazione di p in $\mathcal{U}$,
falsa se $a \notin P$;

$\neg\varphi$ è vera se φ è falsa,
falsa se φ è vera;

$\varphi \wedge \psi$ è vera se *entrambe* φ e ψ sono vere,
falsa altrimenti;

$\varphi \vee \psi$ è vera se *almeno una* tra φ e ψ è vera,
falsa altrimenti;

$\varphi \oplus \psi$ è vera se *esattamente una* tra φ e ψ è vera,
falsa altrimenti.

Scriveremo $\mathcal{U} \models \varphi$ per dire che φ è vera nel modello $\mathcal{U}$. Diremo anche che $\mathcal{U}$ **modella** φ . Per dire che φ non vale nel modello $\mathcal{U}$ scriveremo invece $\mathcal{U} \not\models \varphi$.

Si noti che un valore di verità viene assegnato solo alle formule chiuse. Più sotto mostreremo che le formule possono anche essere interpretate come (definizioni di) insiemi, questo vale per tutte le formule.

5. Le tavole di verità

L'interpretazione dei connettivi viene riassunto nelle cosiddette **tavole di verità**:

$\top$	$\perp$	$\neg$
v	f	f
f	v	v

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	v

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	v

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	f

6. Il calcolo della verità

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ che ha come dominio $\mathbb{N}$ e come interpretazione

$$\mathcal{U} : p \rightsquigarrow P \qquad \mathcal{U} : q \rightsquigarrow D \qquad \mathcal{U} : r \rightsquigarrow \text{i numeri} > 10.$$

Dove P è l'insieme dei numeri pari e D è l'insieme dei numeri dispari. Otteniamo:

$$\mathcal{U} \not\models p(1), \quad \mathcal{U} \models p(0) \vee q(0), \quad \mathcal{U} \not\models p(12) \wedge r(0)$$

Valutiamo ora le stesse formule in un altro modello $\mathcal{V}$ che come universo ha $\mathbb{Z}$ e come interpretazione

$$\mathcal{V} : p \rightsquigarrow \mathbb{Z}^+ \quad \mathcal{V} : q \rightsquigarrow \emptyset, \quad \mathcal{V} : r \rightsquigarrow \{0\}.$$

Otteniamo:

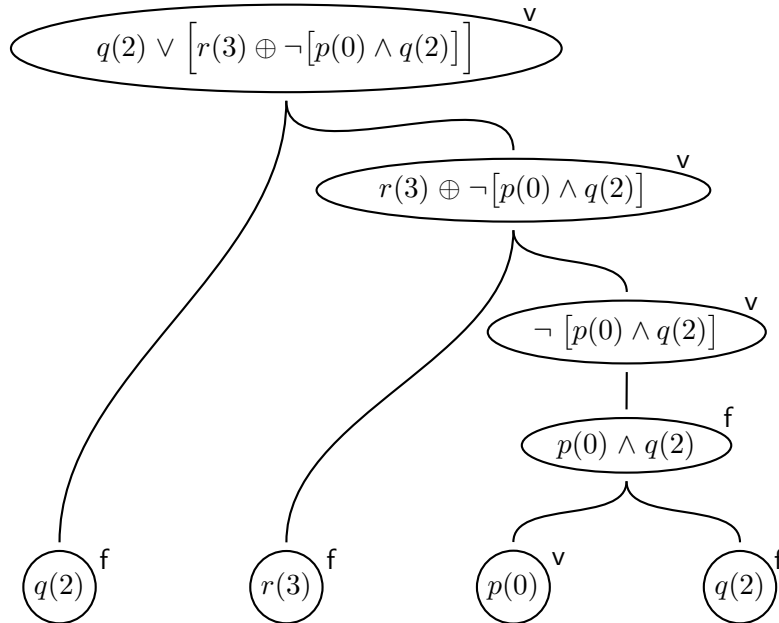
$$\mathcal{V} \models p(1), \quad \mathcal{V} \not\models p(0) \vee q(0), \quad \mathcal{V} \models p(12) \wedge r(0)$$

Per calcolare la verità di formule complesse occorre tener ben presente il modo in cui le formule sono state costruite. Consideriamo per esempio la formula

$$q(2) \vee [r(3) \oplus \neg[p(0) \wedge q(2)]]$$

Calcoliamo la verità nel modello $\mathcal{N}$ con universo $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$$\mathcal{N} : p \rightsquigarrow P \quad \mathcal{N} : q \rightsquigarrow D \quad \mathcal{N} : r \rightsquigarrow \{6, 7, 9\}.$$



7. Sostituire variabili con parametri

Se a è un parametro, scriveremo $\varphi(x/a)$ per denotare la formula che si ottiene sostituendo a a tutte le occorrenze di x in φ . Se non ci sono rischi di ambiguità (e finchè lavoreremo con una sola variabile non ci sarà mai alcun rischio) scriveremo semplicemente $\varphi(a)$ per $\varphi(x/a)$. In generale, scriveremo $\varphi(x_1, \dots, x_n/a_1, \dots, a_n)$ o, in notazione concisa, $\varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Se $\varphi(a)$ è vera diremo che a **soddisfa** la formula $\varphi(x)$. A volte si dice anche che a è una **soluzione** della formula $\varphi(x)$.

Scriveremo anche $\mathcal{U}, a \models \varphi$ per dire $\mathcal{U} \models \varphi(x/a)$. Con formule a più variabili scriveremo $\mathcal{U}, a_1, \dots, a_n \models \varphi$ oppure, nei casi in cui la notazione è ambigua, $\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n/a_1, \dots, a_n \models \varphi$.

Per esempio, fissiamo come universo $\mathbb{N}$. Sia $\varphi(x)$ la formula $p(0) \wedge q(x)$. Allora:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= p(0) \wedge q(0), \\ \varphi(1) &= p(0) \wedge q(1), \\ \varphi(2) &= p(0) \wedge q(2), \\ \varphi(3) &= \dots\end{aligned}$$

8. Gli insiemi definibili.

Tutte le formule (chiuse o non chiuse, con parametri o senza) possono essere interpretate come la definizione di un sottoinsieme dell'universo. Dati un modello $\mathcal{U}$ ed una formula $\varphi(x)$ scriveremo

$$A := \{x : \varphi(x)\}$$

per denotare l'insieme degli elementi dell'universo che soddisfano $\varphi(x)$, cioè l'insieme,

$$A := \{a \in \mathbb{U} : \mathcal{U}, a \models \varphi(x)\}.$$

La formula $\varphi(x)$ si dice essere la **definizione** dell'insieme A . L'insieme A si dice essere **definibile**. Gli insiemi definibili formano un'algebra booleana sul dominio del modello.

Più in generale, una formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ definisce una relazione n -aria su $\mathcal{U}$

$$R := \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

Nei prossimi capitoli tratteremo principalmente con formule con al più una variabile libera. Dal capitolo 16 dedicheremo più attenzione alla definibilità delle relazioni n -arie.

Vediamo un esempio; fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$ ed il modello $\langle \mathbb{N}, P, Q, R \rangle$ dove P è l'insieme dei numeri < 2 , Q l'insieme dei multipli di 3, R l'insieme dei numeri < 10 . Calcoliamo l'insieme definito dalla formula $[p(x) \vee q(x)] \wedge r(x)$:

$$\{x : [p(x) \vee q(x)] \wedge r(x)\} = \{0, 1, 3, 6, 9\}$$

L'insieme ottenuto dipende sensibilmente dall'interpretazione. Consideriamo il modello $\langle \mathbb{N}, P', Q, R' \rangle$ dove P' è l'insieme dei numeri < 4 , Q' l'insieme dei multipli di 3, R' l'insieme delle potenze di 4. Otteniamo:

$$\{x : [p(x) \vee q(x)] \wedge r(x)\} = \emptyset$$

Consideriamo il modello $\langle \mathbb{N}, P'', Q'', R'' \rangle$ dove P'' è l'insieme dei numeri pari, P'' l'insieme dei numeri dispari, ed $R'' = \mathbb{N}$. Otteniamo:

$$\{x : [p(x) \vee q(x)] \wedge r(x)\} = \mathbb{N}$$

9. Un caso degenere

Supponiamo che la formula φ sia chiusa. La notazione $\varphi(x)$ è comunque legittima (si intende che nessuna variabile tranne al più x occorre in φ). Ricordiamo che $\varphi(a)$ è la formula che si ottiene sostituendo x con a . Se x non occorre, $\varphi(a)$ risulta essere identica a φ . Si hanno quindi solo due casi: $\varphi(a)$ è vera per ogni $a \in \mathbb{U}$ o $\varphi(a)$ è falsa per ogni $a \in \mathbb{U}$. L'insieme definito da $\varphi(x)$ sarà dunque $\mathbb{U}$ o $\emptyset$.

10. Connettivi e operazioni booleane

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due formule qualsiasi. Definiamo

$$A := \{x : \varphi(x)\} \quad \text{e} \quad B := \{x : \psi(x)\}$$

È immediato verificare che:

$$A \cap B = \{x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\}$$

$$A \cup B = \{x : \varphi(x) \vee \psi(x)\}$$

$$A \triangle B = \{x : \varphi(x) \oplus \psi(x)\}$$

$$\neg B = \{x : \neg \psi(x)\}$$

$$A \setminus B = \{x : \varphi(x) \wedge \neg \psi(x)\}$$

Se osserva che in ogni modello

$$\emptyset = \{x : \perp\} \quad \text{e} \quad \mathbb{U} = \{x : \top\}$$

segue immediatamente che gli insiemi definibili formano un'algebra booleana sul dominio del modello.

11. Altri connettivi

Introduciamo altri due connettivi.

$\leftrightarrow$ chiamato **biimplicazione** (si legge *se e solo se*)

$\rightarrow$ chiamato **implicazione** (si legge *implica* oppure *se ... allora*).

Alle regole di costruzione delle formule aggiungiamo la seguente:

♣ se φ e ψ sono formule allora anche $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ e $[\varphi \rightarrow \psi]$ sono formule.

La semantica di questi due connettivi è definita da:

$\varphi \leftrightarrow \psi$ è vera se φ e ψ sono entrambe vere o entrambe false, falsa altrimenti.

$\varphi \rightarrow \psi$ è vera se φ è falsa o se ψ è vera, falsa altrimenti (cioè quando φ è vera e ψ è falsa).

In altre parole la formula $\varphi \leftrightarrow \psi$ è equivalente a $\neg[\varphi \oplus \psi]$ e la formula $\varphi \rightarrow \psi$ è equivalente a $\neg\varphi \vee \psi$. Possiamo quindi considerare questi due connettivi a tutti gli effetti come abbreviazioni.

Riassumiamo con le tavole di verità qui sotto la semantica di questi due connettivi.

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
f	f	v
f	v	f
v	f	f
v	v	v

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

Esercizi 127 – 130

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dei seguenti insiemi dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, coincidono con l'insieme definito dalla formula $px \leftrightarrow qx$? In caso contrario dare un controesempio.

127 $\neg[Q \triangle P]$

129 $Q \triangle \neg P$

128 $[P \cap Q] \cup [\neg P \cap \neg Q]$

130 $\neg Q \triangle P$

Esercizi 131 – 136

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Delle seguenti formule dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, definiscono l'insieme $Q \triangle \neg P$. In caso contrario dare un controesempio.

131 $px \rightarrow qx$

132 $\neg px \rightarrow qx$

$$133 \quad \neg px \vee qx$$

$$135 \quad \neg px \leftrightarrow \neg qx$$

$$134 \quad px \leftrightarrow qx$$

$$136 \quad px \oplus \neg qx$$

Esercizi 137 – 139

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Delle seguenti formule dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, definiscono l'insieme $\neg P \triangle \neg Q$. In caso contrario dare un controesempio.

$$137 \quad px \rightarrow qx$$

$$139 \quad \neg px \vee \neg qx$$

$$138 \quad \neg px \rightarrow \neg qx$$

Esercizi 140 – 143

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Scrivere una formula che in ogni modello $\langle \mathbb{U}, P, Q, R \rangle$ è soddisfatta da tutti e soli gli elementi appartenenti a:

$$140 \quad \text{uno degli insiemi } P, Q, \text{ ed } R.$$

$$141 \quad \text{due degli insiemi } P, Q, \text{ ed } R.$$

È conveniente utilizzare il fatto che la formula $p \oplus q \oplus r$ è vera quando tutte o una sola delle formule p, q ed r sono vere.

Esercizi 142 – 147

Il linguaggio è $L = \{p, q\}$. Fissiamo un generico modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$. Si dica quali sono gli insiemi definiti dalle seguenti formule:

$$142 \quad [\neg px \rightarrow qx] \vee px$$

$$143 \quad [px \leftrightarrow qx] \vee [px \oplus qx]$$

$$144 \quad [px \oplus qx] \vee \neg [px \rightarrow qx]$$

$$145 \quad [\neg px \rightarrow qx] \vee qx$$

$$146 \quad [\neg qx \rightarrow px] \vee qx$$

$$147 \quad \neg[px \rightarrow qx] \wedge [px \oplus qx]$$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{U} & P & \neg P & P \cup Q & P \setminus Q & Q \triangle P \\ \emptyset & Q & \neg Q & P \cap Q & Q \setminus P & \neg Q \triangle P \end{array}$$

Esercizi 148 – 153

Ognuna delle formule elencate qui sotto definisce, in tutti i modelli tali che $P \subseteq Q$, uno dei seguenti insiemi,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \neg P & \neg P \cap Q \\ \emptyset & \neg Q & \neg P \cup Q \\ P & Q & \neg Q \triangle P \end{array}$$

si dica quale.

$$148 \quad p(x) \wedge q(x)$$

$$151 \quad q(x) \oplus p(x)$$

$$149 \quad p(x) \vee q(x)$$

$$152 \quad p(x) \wedge \neg q(x)$$

$$150 \quad \neg q(x) \vee \neg p(x)$$

$$153 \quad q(x) \rightarrow p(x)$$

12. Tautologie, contraddizioni

Una formula chiusa e senza parametri φ è una **tautologia** se è vera in ogni modello. Diremo che φ è una **contraddizione** se $\neg\varphi$ è una tautologia, ovvero, se φ è falsa in ogni modello. Una formula che non è una contraddizione si dice essere **consistente**.

Possiamo estendere queste definizioni anche a formule non chiuse. Così diremo che $\varphi(x)$ è una **tautologia** se in ogni modello, ogni elemento del dominio soddisfa $\varphi(x)$. Detto con altre parole: in ogni modello l'insieme definito da $\varphi(x)$ è tutto il dominio. Diremo che $\varphi(x)$ è una **contraddizione** se in ogni modello, $\varphi(x)$ definisce l'insieme vuoto.

Un esempio:

$$px \vee \neg px \text{ è una tautologia.}$$

Infatti, se l'insieme P è l'interpretazione di p allora la formula qui sopra dice che

$$P \cup \neg P = \mathbb{U}.$$

Questo è vero qualsiasi siano l'universo $\mathbb{U}$ e l'insieme P . Analogamente la formula

$px \wedge \neg px$ è una contraddizione.

Infatti questa formula dice che

$$P \cap \neg P = \emptyset.$$

Anche questo è vero qualsiasi siano l'universo $\mathbb{U}$ e l'insieme P

13. Equivalenze e conseguenze logiche

Diremo che due formule φ e ψ sono **logicamente equivalenti** se in **ogni** modello e per ogni parametro a si ha che $\varphi(x/a)$ è vera se e solo se $\psi(x/a)$ è vera. Scriveremo

$$\varphi \iff \psi$$

per dire che φ e ψ sono logicamente equivalenti. Chiameremo questa espressione un'**equivalenza logica**. (Il riferimento al parametro a è ridondante se φ e ψ sono entrambe chiuse.)

È facile verificare che $\varphi \iff \psi$ vale sse $\varphi \leftrightarrow \psi$ è una tautologia.

Diremo che ψ è una **conseguenza logica** di φ se $\psi(x/a)$ è vera in **ogni** modello e per ogni valore del parametro a che rende vera $\varphi(x/a)$. Scriveremo

$$\varphi \implies \psi$$

per dire che ψ è una conseguenza logica di φ . È facile verificare che $\varphi \implies \psi$ vale sse $\varphi \rightarrow \psi$ è una tautologia. Si osservi che $\varphi \iff \psi$ vale sse valgono entrambe le conseguenze $\varphi \implies \psi$ e $\psi \implies \varphi$.

Esistono vari modi per affermare che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono logicamente equivalenti:

- $\mathcal{U}, a \models \varphi(x) \iff \mathcal{U}, a \models \psi(x)$, per ogni modello $\mathcal{U}$ e parametro a ,
- $\{x : \varphi(x)\} = \{x : \psi(x)\}$, in ogni modello $\mathcal{U}$,
- $\mathcal{U}, a \models \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, per ogni modello $\mathcal{U}$ e parametro a .

Le seguenti affermazioni asseriscono tutte che $\psi(x)$ è una conseguenza logica di $\varphi(x)$:

- $\mathcal{U}, a \models \varphi(x) \implies \mathcal{U}, a \models \psi(x)$, per ogni modello $\mathcal{U}$ e parametro a ,
- $\{x : \varphi(x)\} \subseteq \{x : \psi(x)\}$, in ogni modello $\mathcal{U}$,
- $\mathcal{U}, a \models \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$, per ogni modello $\mathcal{U}$ e parametro a .

14. Alcune equivalenze logiche

Molte equivalenze logiche possono essere dedotte dalle corrispondenti identità booleane. Per esempio, dall'associatività di $\cap$, $\cup$, e $\triangle$ segue immediatamente l'associatività dei connettivi $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$ sono associativi. Cioè, per ogni formula φ , ψ e θ :

$$[\varphi \wedge \psi] \wedge \theta \iff \varphi \wedge [\psi \wedge \theta]$$

$$[\varphi \vee \psi] \vee \theta \iff \varphi \vee [\psi \vee \theta]$$

$$[\varphi \oplus \psi] \oplus \theta \iff \varphi \oplus [\psi \oplus \theta]$$

Dalle corrispondenti identità booleane deduciamo anche che la doppia negazione si semplifica

$$\neg\neg\varphi \iff \varphi,$$

e che valgono le leggi di deMorgan:

$$\neg\varphi \vee \neg\psi \iff \neg[\varphi \wedge \psi]$$

$$\neg\varphi \wedge \neg\psi \iff \neg[\varphi \vee \psi]$$

Capitolo 7

La logica proposizionale

Apriamo ora una lunga parentesi per concentrarci sulla semantica dei connettivi booleani.

Fissiamo per chiarezza una signature $L = \{p, q\}$. Fissiamo anche un dominio $\mathbb{U}$ ed un parametro $a \in \mathbb{U}$. Per determinare la verità di una formula prim'ordine $\varphi(x)$ in $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$, a basta solo sapere se P e Q contengono o no l'elemento a (questo è vero *solo* perchè finora abbiamo considerato solo una versione molto ristretta dei linguaggi del prim'ordine). Abbiamo cioè bisogno di solo due “bit di informazione”: il valore di P e Q su tutti gli altri elementi di $\mathbb{U}$ è irrilevante ai fini di determinare se $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle \models \varphi(a)$. Possiamo quindi semplificare la nozione di linguaggio e di modello: scriveremo semplicemente p e q (che possiamo pensare come un abbreviazione di $p(a)$ e $q(a)$) e il nostro modello sarà semplicemente una coppia del tipo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle$ o $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$ ecc. (che possiamo pensare come un abbreviazione di $a \in P$, $a \notin Q$ oppure $a \notin P$, $a \notin Q$).

1. Il linguaggio

Un linguaggio proposizionale è, come nei capitoli precedenti, semplicemente un insieme. Generalmente il linguaggio verrà denotato con L e gli elementi del linguaggio indicati con le lettere p , q , ed r . Gli elementi di un linguaggio proposizionale sono chiamati **lettere proposizionali**. Le formule verranno costruite a partire da questi simboli e dai connettivi logici booleani introdotti nei capitoli precedenti: $\perp$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, e dai due simboli di parentesi: $[$, e $]$. (Tutto come nel capitolo precedente, ma è stata omessa la variabile x .)

2. La costruzione delle formule

Fissiamo un linguaggio L . In parole povere una formula proposizionale è una formula del prim'ordine (nella versione ridotta dei capitoli precedenti) a cui è stata tolta ogni occorrenza della variabile x . Vediamo comunque la definizione corretta; le formule proposizionali si formano con le seguenti regole:

- ♣ $\perp, \top$,
- ♣ gli elementi di L sono formule (dette **formule atomiche**);
- ♣ se φ è una formula qualsiasi allora $\neg\varphi$ è anche una formula;
- ♣ se φ e ψ sono formule allora anche $\neg\varphi$, $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \oplus \psi]$, $[\varphi \rightarrow \psi]$ e $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ sono formule.

3. Modelli proposizionali

La nozione di modello della logica proposizionale è estremamente semplice. Fissiamo due simboli: **v** ed **f** che chiameremo **valori di verità**. Il primo lo leggeremo **vero** il secondo **falso**. Dato un linguaggio L , un **modello** è un assegnazione $p \rightsquigarrow \mathbb{W}$ di un valore di verità $\mathbf{w} \in \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ ad ogni simbolo $p \in L$. Se il linguaggio è presentato come una sequenza di lettere proposizionali: $p_1, \dots, p_n$ allora i modelli verranno indicati con una sequenza di valori di verità: $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$. Se vogliamo denotare il modello con un solo simbolo, useremo una lettera in stile calligrafico, per esempio, $\mathcal{W}$. Scriveremo $\mathcal{W} : p \rightsquigarrow \mathbf{w}$ per dire che il modello $\mathcal{W}$ assegna alla lettera proposizionale p valore di verità $\mathbf{w}$.

4. La verità

Fissiamo un linguaggio ed un modello proposizionale $\mathcal{W}$. Ad ogni formula atomica assegniamo un valore di verità come segue:

$$p \text{ è vera se } \mathcal{W} : p \rightsquigarrow \mathbf{v}, \text{ è falsa se } \mathcal{W} : p \rightsquigarrow \mathbf{f}$$

Poi definiamo la verità di $\neg\varphi$, $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \oplus \psi]$, $[\varphi \rightarrow \psi]$, e $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ esattamente come nella logica del prim'ordine (vedi paragrafo 5 del capitolo 6).

5. Notazione

Date delle formule proposizionali φ e $\psi_1, \dots, \psi_n$ scriveremo

$$\varphi(p_1, \dots, p_n / \psi_1, \dots, \psi_n)$$

per indicare la formula che si ottiene sostituendo nella formula φ i simboli $p_1, \dots, p_n$ con le formule $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Scriveremo $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ per indicare che in φ occorrono *al più* gli atomi $p_1, \dots, p_n$. Se dal contesto è chiaro che $p_1, \dots, p_n$ sono le lettere proposizionali che occorrono in φ allora possiamo abbreviare

$$\varphi(p_1, \dots, p_n / \psi_1, \dots, \psi_n)$$

con $\varphi(\psi_1 \dots, \psi_n)$. (La notazione è simile a quella usata negli altri capitoli, ma non ci sono rischi di ambiguità: nel contesto della logica proposizionale non occorrono variabili.)

6. Esempi

Sia $\varphi(p, q) := p \rightarrow q$ allora:

$$\varphi(q, p) = q \rightarrow p$$

$$\varphi(p, p) = p \rightarrow p$$

$$\varphi(\top, p) = \top \rightarrow p$$

$$\varphi(p \rightarrow p, q) = [p \rightarrow p] \rightarrow q$$

Esercizi 154 – 159

Sia $\varphi(p, q) := p \wedge q \rightarrow p$ e sia $\psi(p) := \neg p$. Si scrivano esplicitamente le seguenti formule:

154 $\varphi(q, p)$

157 $\psi(\varphi(r, q))$

155 $\varphi(\top, r)$

158 $\varphi(\varphi(p, q), q)$

156 $\varphi(p, \psi(p))$

159 $\psi(\neg\psi(p))$

7. Tautologie, contraddizioni

Una formula proposizionale φ è una **tautologia** se è vera in ogni modello. Diremo che φ è una **contraddizione** se $\neg\varphi$ è una tautologia, ovvero, se φ è falsa in ogni modello. Una formula che non è una contraddizione si dice essere **consistente**. È immediato verificare che φ è una tautologia sse per ogni possibile sostituzione di $\top$ e $\perp$ al posto degli atomi che occorrono in φ , si ottiene una formula vera. Analogamente φ è una contraddizione sse per ogni possibile sostituzione di $\top$ e $\perp$ al posto degli atomi che occorrono in φ , si ottiene una formula falsa.

8. Equivalenze logiche

Diremo che due formule φ e ψ sono **logicamente equivalenti** se, in **ogni** modello, φ è vera se e solo se ψ è vera. Scriveremo

$$\varphi \iff \psi$$

per dire che φ e ψ sono logicamente equivalenti. È facile verificare che $\varphi \iff \psi$ vale sse $\varphi \leftrightarrow \psi$ è una tautologia.

Diremo che ψ è una **conseguenza logica** di φ se ψ è vera in **ogni** modello che rende vera φ . Scriveremo

$$\varphi \implies \psi$$

per dire che ψ è una conseguenza logica di φ . È facile verificare che $\varphi \implies \psi$ vale sse $\varphi \rightarrow \psi$ è una tautologia. Si osservi che $\varphi \iff \psi$ vale sse vale $\varphi \implies \psi$ e anche $\psi \implies \varphi$.

9. Esempi

Esempi notevoli di tautologie sono:

$p \vee \neg p$ chiamata *principio del terzo escluso*
oppure *terzium non datur*

$\perp \rightarrow p$ chiamata *ex falso (sequitur) quodlibet*

$$p \rightarrow [q \rightarrow p]$$

Alcune leggi logiche notevoli:

$$\neg[p \wedge q] \iff \neg p \vee \neg q$$

$$\neg[p \vee q] \iff \neg p \wedge \neg q$$

$$p \rightarrow q \iff \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg[p \leftrightarrow q] \iff \neg p \leftrightarrow q$$

Ora, usando le tavole di verità, verifichiamo che $p \rightarrow [q \rightarrow p]$ è una tautologia. In alto a sinistra elenchiamo proposizioni che occorrono nella formula. Sotto di queste tutte le combinazioni di possibili valori di verità. In alto a destra scriviamo la formula di cui vogliamo calcolare la tavola di verità. Sotto ogni proposizione ricopiamo il valore di verità che appare sulla sinistra.

p	q	$p \rightarrow [q \rightarrow p]$
f	f	
f	v	
v	f	
v	v	

p	q	p	q	$p \rightarrow [q \rightarrow p]$
f	f	f	f	f
f	v	f	v	f
v	f	v	f	v
v	v	v	v	v

Seguendo l'ordine di costruzione delle formule scriviamo sotto il connettivo il valore di verità che si ottiene dai valori di verità delle sottoformule. Il risultato finale si leggerà quindi sotto il connettivo principale.

p	q	$p \rightarrow [q \rightarrow p]$	p	q	$p \rightarrow [q \rightarrow p]$
f	f	f	f	f	f
f	v	f	f	v	f
v	f	f	v	f	f
v	v	f	v	v	f

la formula dell'esempio risulta essere una tautologia.

Esercizi 160 – 163

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono tautologie ed in caso contrario dare un controesempio, cioè un modello dove le formule sono false.

160 $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

162 $p \oplus q \rightarrow p \vee q$

161 $\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$

163 $p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$

Esercizi 164 – 167

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono consistenti ed in caso favorevole dare un esempio di modello dove le formule sono vere.

164 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$

166 $p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$

165 $\neg[p \wedge q \rightarrow p \vee q]$

167 $\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$

Esercizi 168 – 171

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Quanti modelli hanno le seguenti formule? E quanti ne hanno se invece poniamo $L = \{p, q, r, s, v\}$?

168 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$

170 $\neg[p \wedge q \rightarrow p \vee q]$

169 $\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$

171 $p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$

10. Dai modelli alle formule

Data una qualsiasi formula proposizionale possiamo costruire una tavola di verità e quindi sapere quali sono i modelli che rendono vera la formula. Possiamo invertire

questa procedimento? Data un insieme di modelli (pensiamo il linguaggio fissato) come possiamo costruire una formula che è vera per tutti e soli i modelli dell'insieme?

Vediamo un esempio molto semplice. Il linguaggio è $L = \{p, q, r\}$. Vogliamo una formula vera solo nel modello $\langle f, v, v \rangle$. La formula che dice che p è falsa e che q ed r sono vere è $\neg p \wedge q \wedge r$.

Consideriamo un caso un po' più complesso. Vogliamo una formula vera solo nei modelli $\langle f, v, v \rangle$ e $\langle v, f, v \rangle$. Abbiamo appena visto che $\neg p \wedge q \wedge r$ è vera solo nel modello $\langle f, v, v \rangle$. Analogamente, la formula $p \wedge \neg q \wedge r$ è vera solo nel modello $\langle v, f, v \rangle$. La formula che cerchiamo è vera solo in $\langle f, v, v \rangle$ o in $\langle v, f, v \rangle$. Quindi sarà la disgiunzione di queste due formule:

$$(*) \quad (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

Il procedimento è del tutto generale. Data una qualsiasi tavola di verità (pensiamola come un insieme di modelli) possiamo costruire una formula che ha esattamente quella tavola di verità. Una conseguenza è che ogni formula proposizionale è equivalente ad una formula come in (*) cioè una disgiunzione di congiunzioni di formule atomiche o negazioni di formule atomiche. Formule con questa forma si chiamano formule in **forma normale disgiuntiva**.

Esercizi 172 – 173

Quante sono, a meno di equivalenza logica

172 le formule $\varphi(p, q)$ che implicano $p \oplus q$?

173 le formule tali che $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, \neg q)$?

Si noti che, grazie all'osservazione fatta nel capitolo precedente, contare le formule 'a meno di equivalenza logica' corrisponde a contare le tavole di verità.

11. Verifica di un'identità booleana

Vediamo un'applicazione delle tavole di verità. Vogliamo verificare l'associatività dell'operazione di differenza simmetrica, cioè la seguente identità booleana:

$$(P \triangle Q) \triangle R = P \triangle (Q \triangle R)$$

Data la corrispondenza (discussa nel capitolo precedente) tra operazioni booleane e connettivi logici è sufficiente verificare che le seguenti formule del prim'ordine sono equivalenti:

$$[px \oplus qx] \oplus rx \iff px \oplus [qx \oplus rx].$$

Ciò è equivalente a verificare che le seguenti formule proposizionali sono equivalenti:

$$[p \oplus q] \oplus r \iff p \oplus [q \oplus r]$$

Confrontando le tavole di verità la verifica è immediata.

Esercizi 174 – 178

Si inserisca alla destra del simbolo di (bi)implicazione una delle seguenti formule:

$$\begin{array}{ccccc} \top & p & \neg p & p \vee q & p \oplus q \\ \perp & q & \neg q & p \wedge q & p \leftrightarrow q \end{array}$$

in modo da ottenere delle tautologie.

174 $p \wedge \neg p \leftrightarrow$

179 $\neg \perp \leftrightarrow$

175 $p \wedge \top \leftrightarrow$

180 $(p \wedge q) \wedge q \leftrightarrow$

176 $p \oplus \top \leftrightarrow$

181 $r \rightarrow$

177 $\perp \wedge p \leftrightarrow$

182 $r \leftarrow$

178 $[p \vee q] \wedge \neg[p \wedge q] \leftrightarrow$

183 $\perp \leftarrow$

Esercizi 184 – 187

Si inserisca alla destra del simbolo di biimplicazione (casus quo, implicazione) una delle seguenti formule:

$$\begin{array}{ccccc} \top & p & \neg p & p \vee q & p \oplus q \\ \perp & q & \neg q & p \wedge q & p \leftrightarrow q \end{array}$$

in modo da ottenere delle contraddizioni.

184 $p \wedge \neg p \leftrightarrow$

188 $\neg \perp \leftrightarrow$

185 $p \wedge \top \leftrightarrow$

189 $\top \rightarrow$

186 $p \oplus \top \leftrightarrow$

190 $\perp \leftarrow$

187 $\perp \wedge p \leftrightarrow$

Esercizi 191 – 194

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, r\}$. Supponiamo che $\varphi(p, r)$ sia una tautologia. Dire, se possibile, se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni, nè tautologie nè contraddizioni.

191 $\varphi(p, p)$

193 $\neg\varphi(\neg p, \neg r)$

192 $p \rightarrow \varphi(p, r)$

194 $p \wedge \varphi(p, r)$

Esercizi 195 – 204

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, r\}$. Supponiamo che $p \rightarrow \varphi(p, r)$ sia una tautologia. Dire, se possibile, se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni, nè tautologie nè contraddizioni. (N.B. Si risponda solo nei casi in cui la risposta è indipendente dalla particolare formula $\varphi(p, r)$ nella classe descritta.)

195 $\varphi(p, r)$

200 $\varphi(p, r) \rightarrow r \wedge \neg p$

196 $\varphi(\top, r)$

201 $\neg\varphi(p, r) \wedge p$

197 $\varphi(r, r)$

202 $\varphi(p, r) \wedge \neg p$

198 $\neg\varphi(p, r) \rightarrow \neg p$

203 $\neg\varphi(p, r) \vee r$

199 $\varphi(p, r) \rightarrow \neg p$

204 $\varphi(r, p) \vee \neg r$

Esercizi 205 – 208

Si costruiscano le tavole di verità di tutte le formule proposizionali $\varphi(p, q)$ che verifichino le seguenti identità. (N.B. in alcuni casi l'identità non è soddisfatta da nessuna formula.)

205 $\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(p, \neg q)$

206 $\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(\neg p, q)$

207 $\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(q, p)$

208 $\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \neg\varphi(q, p)$

209 $\varphi(p, q) \iff \varphi(\varphi(p, q), q) \wedge q$

Esercizi 210 – 217

Si costruiscano le tavole di verità di tutte le formule proposizionali $\varphi(p, q)$ che verificano le seguenti identità. (N.B. in alcuni casi l'identità non è soddisfatta da nessuna formula.)

210 $\varphi(p, q) \iff \varphi(q, p) \vee q$

214 $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, q) \wedge p \wedge q$

211 $\varphi(p, q) \iff \neg\varphi(p, q) \vee q$

215 $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, q) \leftrightarrow p \wedge q$

212 $\varphi(p, q) \iff \neg\varphi(\neg p, q) \vee q$

216 $\varphi(p, q) \iff p \wedge q$

213 $\varphi(p, q) \iff \neg q \leftrightarrow \varphi(p, q)$

217 $p \iff \varphi(p, q) \wedge p \wedge q$

Esercizi 218 – 219

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Quanti modelli ha la formula $\varphi(p, q)$ se:

218 $r \rightarrow \varphi(p, q)$ ha 7 modelli.

219 $\varphi(p, q) \rightarrow r$ ha 7 modelli.

Esercizi 220 – 221

Si calcoli la tavola di verità di $\varphi(p, q)$ assumendo che le seguenti formule siano tautologie

220 $p \rightarrow \varphi(p, q) \text{ e } p \vee [\varphi(p, q) \leftrightarrow q]$

221 $\varphi(p, \neg p) \text{ e } \varphi(p, q) \rightarrow q \oplus p$

Esercizi 222 – 225

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r, s\}$. Siano $\varphi(p, q)$ e $\psi(r, s)$ due formule che hanno entrambe esattamente 4 modelli (N.B.: modelli per il linguaggio L). Dire, se possibile, quanti modelli hanno le seguenti formule:

$$\mathbf{222} \quad \varphi(p, q) \wedge \psi(r, s)$$

$$\mathbf{224} \quad \varphi(p, q) \rightarrow \psi(p, q)$$

$$\mathbf{223} \quad \varphi(p, q) \rightarrow \psi(r, s)$$

$$\mathbf{225} \quad \varphi(r, s).$$

Esercizi 226 – 233

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Sia $\varphi(p, r)$ una formula proposizionale che ha esattamente 6 modelli nel linguaggio L . Si dica quanti modelli hanno le seguenti formule.

$$\mathbf{226} \quad \varphi(p, r) \vee q$$

$$\mathbf{228} \quad q \rightarrow \varphi(p, r)$$

$$\mathbf{227} \quad \varphi(p, r) \wedge q$$

$$\mathbf{229} \quad \varphi(p, r) \rightarrow q$$

Supponiamo ora che la formula $\varphi(p, r)$ abbia 4 modelli nel linguaggio L . Quanti modelli hanno le seguenti formule?

$$\mathbf{230} \quad \varphi(p, r) \wedge q$$

$$\mathbf{232} \quad q \rightarrow \varphi(p, r)$$

$$\mathbf{231} \quad \varphi(p, r) \vee q$$

$$\mathbf{233} \quad \varphi(p, r) \rightarrow q$$

12. Congiunzioni e disgiunzioni n -arie

A volte ci troviamo a dover scrivere una lunga serie di congiunzioni o di disgiunzioni:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$$

La seguente è una notazione compatta e precisa per rendere queste formule:

$$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$$

$$\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$$

Facciamo uso di questa notazione per enunciare un'importante legge logica: la legge di deMorgan generalizzata.

$$\neg \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i \iff \bigvee_{i=1}^n \neg \varphi_i$$

Esercizi 234 – 241

Fissiamo un linguaggio $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ dove $n \geq 1$. Si dica in funzione di n quanti sono i modelli delle seguenti formule

$$234 \quad \bigwedge_{i=1}^n p_i$$

$$235 \quad \bigwedge_{i=1}^n \neg p_i$$

$$236 \quad \bigvee_{i=1}^n p_i$$

$$237 \quad \bigvee_{i=1}^n \neg p_i$$

$$238 \quad \bigwedge_{i=2}^n p_i$$

$$239 \quad \bigvee_{i=3}^n p_i$$

$$240 \quad p_1 \rightarrow \bigvee_{i=2}^n p_i$$

$$241 \quad p_1 \rightarrow \bigwedge_{i=2}^n p_i$$

$$242 \quad \bigwedge_{i=2}^n p_i \rightarrow p_1$$

$$243 \quad \bigvee_{i=2}^n p_i \rightarrow p_1$$

$$244 \quad \bigvee_{i=2}^n p_i \leftrightarrow p_1$$

$$245 \quad \bigwedge_{i=2}^n p_i \leftrightarrow p_1$$

$$246 \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_i \rightarrow p_1]$$

$$247 \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_1 \rightarrow p_i]$$

$$248 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_i \rightarrow p_1]$$

$$249 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_1 \rightarrow p_i]$$

$$250 \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_i \leftrightarrow p_1]$$

$$251 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_i \leftrightarrow p_1]$$

13. La transitività dell'implicazione

Una delle proprietà più interessanti del connettivo implicazione è la cosiddetta **transitività** che possiamo riassumere con la seguente conseguenza logica:

$$[p \rightarrow q] \wedge [q \rightarrow r] \implies p \rightarrow r$$

Questa legge può essere iterata un numero arbitrario di volte:

$$\bigwedge_{i=1}^n [p_i \rightarrow p_{i+1}] \implies p_1 \rightarrow p_n$$

o, in generale,

$$\bigwedge_{i=1}^n [p_i \rightarrow p_{i+1}] \implies p_h \rightarrow p_k$$

per qualsiasi $1 \leq h \leq k \leq n$.

Esercizi 252 – 257

Fissiamo un linguaggio $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ dove $n \geq 3$. Si dica quanti modelli hanno le seguenti formule. La risposta va espressa in funzione di n . In qualche formula compare il parametro m : un arbitrario numero tale che $1 \leq m \leq n$. In questo caso la risposta va espressa in funzione anche di m .

252 $\bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}]$

253 $p_m \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}]$

254 $p_m \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}]$

255 $\bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}]$

256 $[p_n \rightarrow p_1] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}]$

257 $[p_m \rightarrow p_1] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}]$

Esercizi 258 – 263

Per risolvere i seguenti esercizi occorre conoscere alcune famose formule ricorsive che generalmente non appartengono al bagaglio culturale dello studente della scuola

superiore.

$$\textbf{258} \quad \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \vee p_{i+1}]$$

$$\textbf{259} \quad [p_1 \vee p_2] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \vee p_{i+1} \rightarrow p_{i+1} \vee p_{i+2}]$$

$$\textbf{260} \quad p_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \rightarrow p_{i+1} \vee p_{i+2}]$$

Capitolo 8

I quantificatori

Chiusa la parentesi sulla logica proposizionale torniamo alla logica del prim'ordine.

1. I quantificatori

In questo capitolo i simboli logici primitivi sono quelli del capitolo 5: $\perp$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, x , $[$, e $]$ più i seguenti due nuovi simboli:

$\forall$ chiamato **quantificatore universale** (si legge *per ogni*)

$\exists$ chiamato **quantificatore esistenziale** (si legge *esiste*).

Per semplicità i connettivi $\vee$, $\oplus$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ non verranno considerati come primitivi ma come abbreviazioni.

2. Le formule

Le formule si ottengono aggiungendo alle regole di costruzione viste nel paragrafo 3 del capitolo 5 la seguente regola:

♣ se φ è una formula allora anche $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$ sono formule.

3. La semantica dei quantificatori

Fissiamo un linguaggio L ed un modello $\mathcal{U}$. Se φ è una formula chiusa (con parametri) e x è una variabile, diremo che

$\forall x \varphi$ è vera se $\varphi(x/a)$ è vera per ogni $a \in \mathbb{U}$,
falsa altrimenti –cioè se $\varphi(x/a)$ è falsa per qualche $a \in \mathbb{U}$;

$\exists x \varphi$ è vera se $\varphi(x/a)$ è vera per qualche $a \in \mathbb{U}$
falsa altrimenti –cioè se $\varphi(x/a)$ è falsa per ogni $a \in \mathbb{U}$.

Nel capitolo 5 l'espressione $\varphi(x/a)$ indicava la sostituzione di x con a . Qui il significato è lo stesso se la formula φ non contiene a sua volta dei quantificatori. Quando la

formula φ contiene a sua volta dei quantificatori ma nel caso generale bisogna dare una definizione più accorta. Per il momento ci limitiamo a considerare solo formule con al più un quantificatore rimandiamo la discussione del caso generale al paragrafo 6.

Sia $\mathcal{U}$ un modello con dominio finito. Direttamente dalla definizione qui sopra otteniamo che

$$\mathcal{U} \models \forall x \varphi \iff \bigwedge_{a \in \mathbb{U}} \varphi(x/a)$$

e

$$\mathcal{U} \models \exists x \varphi \iff \bigvee_{a \in \mathbb{U}} \varphi(x/a).$$

I quantificatori possono quindi essere pensati come un modo sintetico (e senza parametri) per scrivere lunghe congiunzioni e disgiunzioni. La stessa intuizione è valida anche se $\mathbb{U}$ è infinito ma in questo caso le congiunzioni/disgiunzioni qui sopra non sono più formule nel senso della nostra definizione.

4. Esempio

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Sia $\mathcal{U}$ il modello con dominio $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri pari}, \quad q \rightsquigarrow \text{i numeri multipli di 3},$$

Otteniamo:

$$\mathcal{U} \not\models \forall x [p(x) \vee q(x)] \quad \text{infatti } \mathcal{U} \not\models p(5) \vee q(5)$$

$$\mathcal{U} \not\models \forall x \neg [q(x) \vee p(x)] \quad \text{infatti } \mathcal{U} \not\models \neg [q(6) \vee p(6)]$$

$$\mathcal{U} \models \forall x p(x) \vee p(0)$$

$$\mathcal{U} \models \forall x [q(0) \vee p(x)]$$

$$\mathcal{U} \models \exists x [q(x) \wedge p(x)] \quad \text{infatti } \mathcal{U} \models q(6) \wedge p(6)$$

$$\mathcal{U} \models \forall x p(0)$$

$$\mathcal{U} \models \exists x p(0)$$

5. Logica e algebre booleane a confronto

Fissato un modello qualsiasi con dominio $\mathbb{U}$ avremo:

$$\{x : \varphi(x)\} = \emptyset \quad \text{se e solo se vale} \quad \neg \exists x \varphi(x)$$

$$\{x : \varphi(x)\} = \mathbb{U} \quad \text{se e solo se vale} \quad \forall x \varphi(x)$$

$$\{x : \varphi(x)\} = \{x : \psi(x)\} \quad \text{se e solo se vale} \quad \forall x [\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$$

$$\{x : \varphi(x)\} \subseteq \{x : \psi(x)\} \quad \text{se e solo se vale} \quad \forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)].$$

6. Il raggio di azione: esempio

Per poter assegnare un valore di verità $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$ anche nel caso in cui φ contiene a sua volta dei quantificatori dobbiamo decidere cosa intendiamo con $\varphi(a)$. La soluzione più ovvia: *sostituire x con a in φ* non ha sempre l'effetto desiderato. Vediamo un esempio. Sia

$$\varphi(x) := p(x) \wedge \exists x q(x)$$

La sottoformula $\exists x q(x)$ ha un proprio valore di verità ed è quindi ragionevole stipulare che $\forall x \varphi(x)$ è vera se per ogni elemento a dell'universo $p(a) \wedge \exists x q(x)$. Per $\varphi(a)$ si deve quindi intendere $p(a) \wedge \exists x q(x)$. La pedestre sostituzione di x con a produce invece

$$p(a) \wedge \exists x q(a) \quad \text{(equivalente a } p(a) \wedge q(a))$$

o addirittura

$$p(a) \wedge \exists a q(a) \quad \text{(espressione senza senso).}$$

7. Il raggio di azione: definizione

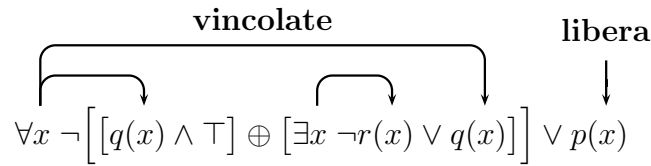
Il **raggio di azione** di un quantificatore è la sottoformula che comincia con il simbolo $\forall x$ o $\exists x$. Esempio:

$$\forall x \neg \left[\underbrace{[q(x) \wedge \top] \oplus [\exists x \neg r(x) \vee q(x)]}_{\text{raggio di azione}} \right] \vee p(x)$$

Nel caso di dubbio occorre ripensare all'albero di costruzione della formula.

8. Variabili libere e variabili vincolate

Diremo che la variabile x è **vincolata** se occorre nel raggio di azione di un quantificatore. Una variabile che non è vincolata è **libera**. Più correttamente si dovrebbe parlare di *occorrenze libere* e *occorrenze vincolate* della variabile x . Esempio:



9. Sostituire variabili con parametri

Data una formula $\varphi(x)$ ed un parametro a scriveremo $\varphi(a)$, per indicare la formula che si ottiene sostituendo le occorrenze *libere* di x con a .

Esercizi 261 – 265

Per ognuna le formule $\varphi(x)$ elencate qui sotto, si scriva $\varphi(a)$, dove a è un generico parametro.

261 $p(x) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(x)]$

264 $p(c) \wedge [\forall x q(x) \vee p(x)]$

262 $p(x) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(a)]$

265 $\exists x p(x) \wedge [\forall x q(a) \vee p(x)]$

263 $\exists x [p(x) \wedge [\forall x q(x) \vee p(x)]]$

Esercizi 266 – 269

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Scrivere una formula chiusa φ tale che il modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ renda vera φ se e solo se:

266 P e Q sono disgiunti;

268 $P \subsetneq Q$;

267 $\mathbb{U}$ è l'unione di P e Q ;

269 P è il complemento di Q .

Esercizi 270 – 273

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Scrivere una formula chiusa φ tale che il modello $\langle \mathbb{N}, P, Q, R \rangle$ renda vera φ se e solo se:

270 R è l'unione di P e Q ;

271 $P \cap Q \subseteq R$;

272 nessun elemento di R appartiene a $P \cap Q$.

273 R è l'unione di P e Q ;

Esercizi 274 – 283

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Limitiamoci a considerare la classe di modelli $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tali che

$$P \Delta Q = \{x : 3 \leq x\}, \quad \{0, 1, 4\} \subseteq Q.$$

Per ognuna delle seguenti formule si dica se questa è vera o falsa in *ogni* modello della classe o se invece può essere vera o falsa a seconda del modello. In questo caso si dia un modello che la rende vera ed uno che la rende falsa.

274 $\neg p(4)$

279 $p(2) \wedge \forall x q(x)$

275 $p(3)$

280 $\exists x [p(x) \oplus q(x)]$

276 $\exists x [p(x) \wedge q(x)]$

281 $\forall x p(x)$

277 $\exists x [\neg q(x) \wedge \neg p(x)]$

282 $\forall x [p(x) \oplus q(x)]$

278 $\forall x [q(x) \vee p(x)]$

283 $\forall x [p(x) \rightarrow p(x) \oplus q(x)]$

Esercizi 284 – 293

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Dire se le seguenti formule sono vere in *ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q, R \rangle$ tale che

$$P \cup Q = \mathbb{N}, \quad R = \{0, 1\}, \quad R \subseteq P.$$

In caso contrario dare un controesempio.

284 $\neg p(3)$

287 $\forall x [r(x) \rightarrow \neg q(x)]$

285 $\neg \exists x [\neg p(x) \wedge q(x)]$

288 $q(0)$

286 $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra che rende vere le formula seguenti. In caso affermativo si dia un esempio.

289 $\forall x \neg q(x)$

292 $\forall x [p(x) \rightarrow r(x)]$

290 $\forall x q(x)$

293 $\neg q(2)$

291 $\neg \exists x [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)]$

Esercizi 294 – 304

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono vere *in ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tale che $\neg P \subseteq Q$. In caso contrario dare un controesempio.

294 $\forall x \neg p(x)$

297 $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$

295 $\forall x [p(x) \vee q(x)]$

298 $\exists x q(x) \vee \exists x p(x)$

296 $\neg \forall x [q(x) \wedge p(x)]$

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra che rende vere le formule seguenti. In caso affermativo si dia un esempio.

299 $\forall x \neg p(x)$

302 $\forall x [p(x) \wedge q(x)]$

300 $\forall x \neg p(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

303 $\neg \exists x [q(x) \wedge p(x)]$

301 $\exists x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

304 $\exists x [q(x) \oplus p(x)]$

Esercizi 305 – 314

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$ ed un universo $\mathbb{U}$. Dire se le seguenti formule sono vere *in ogni* modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ tale che $Q \subseteq \neg P$. In caso contrario dare un controesempio.

305 $\forall x \neg q(x)$

308 $\forall x [q(x) \vee p(x)]$

306 $\neg \exists x [q(x) \wedge p(x)]$

309 $\neg \exists x [p(x) \leftrightarrow q(x)]$

307 $\forall x [p(x) \rightarrow \neg q(x)]$

Ora invece dire se le seguenti formule sono vere *in qualche* modello come sopra. In caso affermativo dare un esempio.

310 $\forall x \neg q(x)$

313 $\forall x [q(x) \vee p(x)]$

311 $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$

314 $\neg \exists x [p(x) \leftrightarrow q(x)]$

312 $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$

Esercizi 315 – 325

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, s\}$. Dire se le seguenti affermazioni valgono *in ogni* modello $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists x [s(x) \leftrightarrow r(x)]$$

In caso contrario dare un controesempio.

315 $S = R$

318 $S \neq R$

316 $S \triangle R \neq \mathbb{U}$

319 $S \triangle R \neq \{0\}$

317 $\neg S \neq R$

Ora invece dire se *esistono* modelli $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists x \neg [s(x) \rightarrow r(x)]$$

e che rendono vere le seguenti affermazioni. In caso affermativo dare un esempio.

320 $S = \emptyset$

323 $S = R$

321 $R = \mathbb{U}$

324 $R \subseteq S$

322 $S \triangle R \neq \mathbb{N}$

Esercizi 325 – 333

Consideriamo un linguaggio $L = \{r, s\}$ e i modelli del tipo $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ dove $R \not\subseteq S$. Si dica quali sono gli insiemi definiti dalle seguenti formule:

325 $r(x) \wedge s(x) \rightarrow \forall x [r(x) \rightarrow s(x)]$

326 $r(x) \wedge s(x) \wedge \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

$$327 \quad r(x) \vee s(x) \rightarrow \forall x s(x)$$

$$328 \quad r(x) \rightarrow [s(x) \rightarrow \exists x r(x)]$$

Ora invece supponiamo che $R \cap S = \emptyset$

$$329 \quad [r(x) \vee s(x)] \wedge \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$$

$$330 \quad r(x) \vee [s(x) \wedge \forall x r(x)]$$

Come sopra ma si assuma che $R \cap S \neq \emptyset$

$$331 \quad s(x) \wedge [\forall x r(x) \rightarrow r(x)]$$

$$332 \quad r(x) \vee s(x) \rightarrow \forall x \neg s(x)$$

$$333 \quad r(x) \vee [\forall x r(x) \rightarrow s(x)]$$

Esercizi 334 – 350

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se *in ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ le seguenti formule definiscono l'insieme $\neg Q \triangle P$. In caso contrario dare un controesempio.

$$334 \quad \exists x [q(x) \vee p(x)] \rightarrow [q(x) \leftrightarrow p(x)]$$

$$335 \quad [q(x) \leftrightarrow p(x)] \wedge \exists x q(x)$$

$$336 \quad q(x) \leftrightarrow [p(x) \wedge \exists x q(x)]$$

$$337 \quad \exists x [\neg q(x) \oplus p(x)]$$

$$338 \quad \forall x [\neg q(x) \oplus p(x)]$$

Come sopra ma per l'insieme $\neg Q \triangle \neg P$ e le formule:

$$339 \quad \exists x [q(x) \vee p(x)] \rightarrow [q(x) \oplus p(x)]$$

340 $[q(x) \oplus p(x)] \wedge \exists x q(x)$

341 $[q(x) \leftrightarrow p(x)] \rightarrow \forall x q(x)$

342 $p(x) \oplus [q(x) \vee \forall x q(x)]$

343 $p(x) \oplus [q(x) \wedge \exists x q(x)]$

344 $\exists x [q(x) \oplus p(x)]$

345 $\forall x [\neg q(x) \oplus \neg p(x)]$

Come sopra ma per l'insieme $P \setminus Q$ e le formule:

346 $\neg \forall x [q(x) \leftrightarrow p(x)] \wedge \neg [p(x) \rightarrow q(x)]$

347 $p(x) \wedge \neg q(x) \wedge \exists x p(x)$

348 $p(x) \wedge \neg q(x) \wedge \neg \forall x q(x)$

349 $\neg [p(x) \rightarrow q(x)] \wedge \forall x p(x)$

350 $p(x) \wedge \neg [q(x) \wedge \exists x [p(x) \wedge q(x)]]$

Esercizi 351 – 354

Il linguaggio contiene due simboli di predicati unari p e q . Si considerino le strutture del tipo $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è un qualsiasi universo.

351 Si scriva una formula che definisce P se $P \subseteq Q$, $\emptyset$ altrimenti.

352 Si scriva una formula che definisce P se $P \subseteq Q$, $\mathbb{U}$ altrimenti.

353 Si scriva una formula che definisce $P \cup Q$ se quest'insieme è non vuoto, $\mathbb{U}$ altrimenti.

354 Qual'è l'insieme definito da $\neg \exists x p(x) \vee q(x)$?

Esercizi 355 – 362

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se *in tutti* i modelli $\mathcal{U} = \langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tali che

$$\mathcal{U} \models \forall x \neg [\neg p(x) \wedge q(x)]$$

le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario dare un controesempio:

355 $P = Q$

357 $Q \subseteq P$

356 $P \subseteq Q$

358 $Q \cap P = \emptyset$

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra tale che

359 $P = Q$

361 $Q \subseteq P$

360 $P \subseteq Q$

362 $Q \cap P = \emptyset$

In caso affermativo dare un esempio.

10. Leggi logiche

La definizione di tautologia, contraddizione, equivalenza e conseguenza logica è del tutto analoga a quella data nei precedenti capitoli. Si osservi che $\varphi(x)$ è una tautologia sse $\forall x \varphi(x)$ è una tautologia.

11. Interdefinibilità dei quantificatori

Per ogni formula $\varphi(x)$ si ha:

$$\neg \exists x \varphi(x) \iff \forall x \neg \varphi(x).$$

Verifica. Sia P come nel paragrafo precedente. La prima formula dice che $P = \emptyset$ la seconda che $\neg P = \mathbb{U}$. Quindi anche questa equivalenza è immediata.

Da questa legge segue facilmente che per ogni formula $\varphi(x)$ si ha:

$$\exists x \varphi(x) \iff \neg \forall x \neg \varphi(x).$$

$$\forall x \varphi(x) \iff \neg \exists x \neg \varphi(x).$$

Queste dicono che i due quantificatori sono interdefinibili (avremmo potuto introdurre solo uno dei due e definire l'altro come un'abbreviazione).

Possiamo interpretare queste equivalenze logiche come delle leggi di deMorgan generalizzate. Infatti, se fissiamo un generico modello $\mathcal{U}$, possiamo immaginare quantificatori come congiunzioni/disgiunzioni generalizzate. Le equivalenze logiche qui sopra diventano:

$$\bigvee_{a \in \mathbb{U}} \varphi(a) \iff \neg \bigwedge_{a \in \mathbb{U}} \neg \varphi(a)$$

$$\bigwedge_{a \in \mathbb{U}} \varphi(a) \iff \neg \bigvee_{a \in \mathbb{U}} \neg \varphi(a).$$

12. Una conseguenza logica ‘quasi’ ovvia

La conseguenza logica

$$\forall x \varphi(x) \implies \exists x \varphi(x)$$

è abbastanza intuitiva: $\forall x$ è una richiesta più forte di $\exists x$. Vale comunque solo perché nella definizione di modello abbiamo concordato di escludere il modello con dominio vuoto (una convenzione che qualche autore non assume). Il modello vuoto avrebbe fornito un controesempio: in un universo vuoto ogni formula che comincia con un quantificatore universale è vera, per l'assenza di possibili controesempi, ed ogni formula che comincia con un quantificatore esistenziale è falsa per assenza di possibili testimoni.

Esercizi 363 – 366

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, s\}$. Sia $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ un modello. Si dica a cosa equivale la verità in $\mathcal{U}$ delle seguenti formule:

363 $\forall x \neg [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

365 $\neg \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

364 $\neg \exists x \neg [r(x) \rightarrow s(x)]$

366 $\neg \exists x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$R = S$

$R \neq S$

$R = \neg S$

$R \neq \neg S,$

$R \subseteq S$

$S \subseteq R$

$R \not\subseteq S$

$S \not\subseteq R$

13. Esempi

Verifichiamo la verità di una importante legge logica: per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\forall x [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \iff \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x).$$

Definiamo $P := \{x : \varphi(x)\}$ e sia $Q := \{x : \psi(x)\}$. La formula a sinistra dice che $P \cap Q = \mathbb{U}$ la formula alla destra dice che sia P che Q sono uguali ad $\mathbb{U}$. Quindi l'equivalenza è ovvia.

La seguente legge logica è essenzialmente equivalente e può essere ricavata dalla precedente usando le leggi di deMorgan: per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\exists x [\varphi(x) \vee \psi(x)] \iff \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x).$$

La verifica diretta è anche molto semplice: siano P e Q come sopra. La formula a sinistra dice che $P \cup Q \neq \emptyset$, la formula alla destra dice che almeno uno tra P e Q è non vuoto. Quindi l'equivalenza è ovvia.

14. Variabili libere e quantificatori

Notiamo le seguenti conseguenze logiche (si faccia attenzione a non rovesciare il segno della conseguenza)

$$\forall x \varphi(x) \implies \varphi(x)$$

Segue in particolare che se $\forall x \varphi(x)$ è una tautologia allora in qualsiasi modello $\varphi(x)$ definisce tutto l'universo. Avremo anche che

$$\varphi(x) \implies \exists x \varphi(x)$$

Se $\exists x \varphi(x)$ è una contraddizione allora in qualsiasi modello $\varphi(x)$ definisce l'insieme vuoto.

15. Esempi

Il seguente è un ovvio esempio di contraddizione:

$$\varphi(x) \wedge \forall x \neg \varphi(x)$$

e le seguenti sono due ovvie conseguenze logiche (con approssimativamente lo stesso contenuto euristico)

$$\varphi(x) \implies \exists x \varphi(x),$$

$$\forall x \varphi(x) \implies \varphi(x).$$

16. Alcune leggi logiche

Ora invece mostriamo che alcune equivalenze non sono valide. Mostriamo che esiste una coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che:

$$\forall x [\varphi(x) \vee \psi(x)] \not\iff \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x).$$

Traducendo questa (non) equivalenza nell'linguaggio degli insiemi ci si accorge facilmente che in molti casi non vale. Se P è l'insieme definito da $\varphi(x)$ e Q l'insieme definito da $\psi(x)$ allora questa equivalenza afferma che $P \cup Q = \mathbb{U}$ sse P o Q sono uguali ad $\mathbb{U}$. Per dare un controesempio, prendiamo $\varphi(x) = p(x)$ e $\psi(x) = q(x)$. Denotiamo con $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ un modello con dominio $\mathbb{N}$, dove P è l'insieme dei numeri pari e Q è l'insieme dei numeri dispari. L'interpretazione è $p \rightsquigarrow P$ e $q \rightsquigarrow Q$. La formula a sinistra è vera perchè $P \cup Q = \mathbb{N}$. La formula a destra è falsa perchè sia P che Q sono diversi da $\mathbb{N}$.

Esiste una coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che:

$$\exists x [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \not\iff \exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x).$$

Fissiamo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ come sopra e fissiamo anche lo stesso modello. La formula di destra dice che sia P che Q sono non vuoti: questo è vero nel modello fissato. La formula di sinistra afferma invece $P \cap Q \neq \emptyset$ che è falso.

17. Altre leggi logiche

Controlliamo la verità di alcune importanti leggi logiche. Si noti che nelle seguenti leggi logiche è necessario assumere che ψ sia chiusa. Alcuni controesempi sono stati dati qui sopra altri sono richiesti nei prossimi esercizi.

Per ogni formula $\varphi(x)$ ed ogni formula chiusa ψ si ha:

$$\forall x [\varphi(x) \vee \psi] \iff \forall x \varphi(x) \vee \psi.$$

Verifica. La formula ψ è chiusa quindi è vera o falsa. Nel primo caso sia la formula di destra che quella di sinistra sono vere. Nel secondo caso, sia la formula di destra che quella di sinistra sono equivalenti a $\forall x \varphi(x)$.

Per ogni formula $\varphi(x)$ ed ogni formula chiusa ψ si ha:

$$\exists x [\varphi(x) \wedge \psi] \iff \exists x \varphi(x) \wedge \psi.$$

Verifica. La formula ψ è chiusa quindi è vera o falsa. Nel primo caso, sia la formula di destra che quella di sinistra sono equivalenti a $\forall x \varphi(x)$. Nel secondo caso sia la formula di destra che quella di sinistra sono false.

Per ogni formula $\varphi(x)$ e ogni formula chiusa ψ si ha:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi] \iff \exists x \varphi(x) \rightarrow \psi.$$

Verifica. Ricordiamo che l'implicazione si può riscrivere con una negazione–disgiunzione, quindi l'equivalenza da dimostrare si può riscrivere

$$\forall x [\neg\varphi(x) \vee \psi] \iff \neg \exists x \varphi(x) \vee \psi.$$

L'equivalenza si verifica applicando a sinistra la legge appena dimostrata e, a destra, sostituendo $\neg\exists x$ con $\forall x \neg$.

Esercizi 367 – 369

Dire se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario dare un controesempio (per i controesempi è sufficiente prendere un linguaggio con un solo simbolo p e come modello $\langle \mathbb{U}, P \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è un dominio con almeno due elementi mentre P è un singoletto.):

367 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\exists x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$$

368 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\exists x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$$

369 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$$

370 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$$

18. Quantificazione limitata

La formula $\exists x \varphi(x)$ afferma l'esistenza di un elemento che soddisfa $\varphi(x)$. Per verificarne la verità basta trovare un qualsiasi elemento dell'universo che è soluzione di $\varphi(x)$. Dato un insieme A supponiamo di voler esprimere la seguente proprietà: esiste un elemento di A che soddisfa $\varphi(x)$. Vogliamo cioè limitare il “range” del quantificatore

$\exists x$: questo dovrà essere l'insieme A invece di tutto l'universo. Con notazione informale ma suggestiva a volte si scrive:

$$\exists x \in A \varphi(x)$$

Se l'insieme A è definibile possiamo facilmente esprimere questa proprietà nel linguaggio del prim'ordine. Sia $\psi(x)$ una definizione di A , la formula richiesta è:

$$\exists x [\psi(x) \wedge \varphi(x)]$$

Infatti l'appartenenza ad A , ovvero il soddisfare $\psi(x)$, non è nient'altro che un ulteriore vincolo imposto al testimone di $\exists x$.

Passiamo ora a limitare il range del quantificatore universale. Vogliamo esprimere la proprietà: tutti gli elementi di A soddisfano $\varphi(x)$ ovvero, con la notazione informale:

$$\forall x \in A \varphi(x)$$

Anche in questo caso è possibile (sempre che A sia definibile) esprimere questa proprietà all'interno della logica del prim'ordine. Conviene formalizzare la negazione di questa proprietà: esiste un elemento di A che non soddisfa $\varphi(x)$. Per quanto visto sopra questa affermazione si traduce con:

$$\exists x [\psi(x) \wedge \neg\varphi(x)].$$

Quindi la formula richiesta è semplicemente la negazione di quest'ultima:

$$\neg\exists x [\psi(x) \wedge \neg\varphi(x)].$$

Ovvero, sostituendo $\neg\exists x$ con $\forall x\neg$:

$$\forall x \neg [\psi(x) \wedge \neg\varphi(x)].$$

Usando le leggi di deMorgan:

$$\forall x [\neg\psi(x) \vee \varphi(x)].$$

Ovvero, per la definizione di implicazione:

$$\forall x [\psi(x) \rightarrow \varphi(x)].$$

A posteriori è facile verificare che la formula qui sopra afferma esattamente che $\varphi(x)$ vale per ogni $x \in A$. Per tutti gli a tali che $\psi(a)$ la verità di $\psi(a) \rightarrow \varphi(a)$ è infatti equivalente alla verità di $\varphi(a)$. Invece, se a non soddisfa $\psi(a)$, la verità di $\psi(a) \rightarrow \varphi(a)$ non pone invece nessuna condizione su $\varphi(a)$ per gli elementi che non soddisfano $\psi(a)$. Infatti per tali elementi $\psi(a) \rightarrow \varphi(a)$ è sempre vera.

Esercizi 371 – 372

Il linguaggio contiene (almeno) il simbolo di relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{R}$ un modello con dominio i numeri reali $\mathbb{R}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale. Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due formule qualsiasi e sia $\theta(x)$ una formula tale che (in notazione informale):

$$\theta(x) \leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x > 0 \\ \psi(x) & \text{se } x < 0 \\ \top & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si dica a cosa sono equivalenti le seguenti formule. Si scelga tra $x = 0$, $x \neq 0$, $\top$, $\perp$, e $\theta(x)$.

371 $[x > 0 \rightarrow \varphi(x)] \quad \vee \quad [x < 0 \rightarrow \psi(x)].$

372 $[x > 0 \rightarrow \varphi(x)] \quad \wedge \quad [x < 0 \rightarrow \psi(x)].$

Capitolo 9

Più variabili in azione

Finora, per semplicità, abbiamo trascurato le formule in cui occorre più di una variabile; in questo capitolo invece approfondiremo proprio il significato di queste formule. Introduciamo anche una più ampia classe di linguaggi del prim'ordine: introdurremo predicati di arietà arbitraria.

1. Predicati di arietà arbitraria.

Il linguaggio L è unione di infiniti insiemi disgiunti L_n per ogni numero intero n positivo. L'insieme L_n è l'insieme dei simboli per predicati n -ari (si legge: *ennari*.) Questi simboli verranno interpretati con relazioni n -arie. Notate che ognuno degli insiemi L_n potrebbe essere vuoto. In quasi tutti gli esempi useremo simboli unari o binari e assumeremo L_n vuoto per $n > 2$.

Un modello di signature L è composto da:

- ◆ un universo $\mathbb{U}$ non vuoto;
- ◆ l'assegnazione $p \rightsquigarrow P$ di un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{U}^n$, ovvero una relazione n -aria su $\mathbb{U}$, ad ogni simbolo di predicato n -ario $p \in L_n$.

2. Le formule

Fissiamo anche un insieme infinito di variabile V . Le formule si costruiscono a partire dalle formule atomiche usando gli usuali connettivi. Le regole di costruzione sono quelle già viste, ora però useremo una definizione di formula atomica più generale:

- ♣ se $x_1, \dots, x_n$ sono variabili e p è un simbolo di predicato n -ario, allora $p x_1 \dots x_n$ è una formula (atomica);

Nel caso di formule con parametri formule atomiche sono definite così:

- ♠ se $t_1, \dots, t_n$ sono n elementi di $V \cup \mathbb{U}$ (cioè variabili o parametri) e p è un simbolo di predicato n -ario, allora $p t_1 \dots t_n$ è una formula atomica *con parametri*,

dove $\mathbb{U}$ è il dominio di un modello. Come al solito, per aiutare la lettura aggiungeremo parentesi e virgole e scriveremo, per esempio, $p(x_1, \dots, x_n)$ al posto di $p x_1 \dots x_n$.

Una lunga serie di quantificatori dello stesso tipo, come ad esempio $\exists x_1, \dots, \exists x_n$, verrà abbreviata omettendo di ripetere il simbolo di quantificatore: $\exists x_1, \dots, x_n$.

3. La semantica delle formule

Fissiamo un linguaggio ed un modello. Ad ogni formula atomica *chiusa* con parametri in $\mathbb{U}$ assegniamo un valore di verità come segue

$p a_1, \dots, a_n$ è vera sse $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in P$, dove P è l'interpretazione del predicato p .

Definizione di verità viene poi estesa tutte le formule chiuse come nel modo usuale.

4. Insiemi definibili

Fissiamo un modello $\mathcal{U}$, ed una formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Ricordiamo che l'interpretazione di $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathcal{U}$ è l'insieme delle n -tuple che soddisfano $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Questo insieme è quindi un sottoinsieme di $\mathbb{U}^n$, ovvero una relazione n -aria. Scriveremo:

$$A := \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : \varphi(x_1, \dots, x_n) \}.$$

Diremo che A è **definibile** e che $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è una **definizione** di A

5. Prodotto cartesiano di definibili

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due formule qualsiasi. Definiamo

$$A := \{ x : \varphi(x) \} \quad \text{e} \quad B := \{ x : \psi(x) \}$$

È immediato verificare che:

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle : \varphi(x) \wedge \psi(y) \}$$

$$A \times \mathbb{U} = \{ \langle x, y \rangle : \varphi(x) \}$$

$$\mathbb{U} \times A = \{ \langle x, y \rangle : \varphi(y) \}$$

Esercizi 373 – 380

Fissiamo un modello in cui il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$. Per i seguenti valori di $\theta(x, y)$ dire quale delle figure qui sotto rappresenta l'insieme $\{ \langle x, y \rangle : \theta(x, y) \}$.

373 $\varphi(x) \wedge \psi(y)$

374 $\varphi(x) \vee \psi(y)$

375 $\varphi(x) \rightarrow \psi(y)$

376 $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(y)$

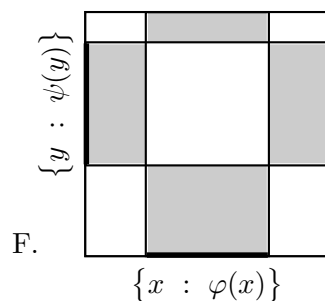
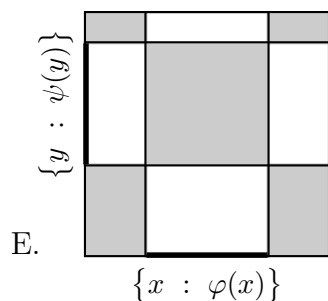
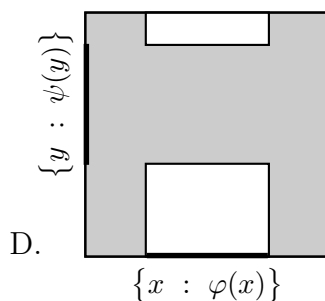
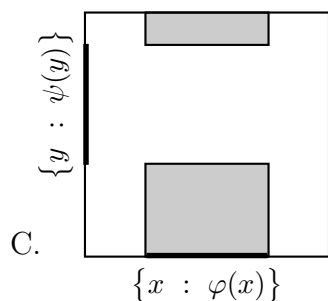
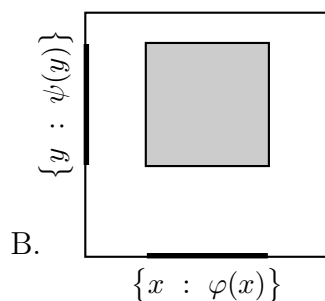
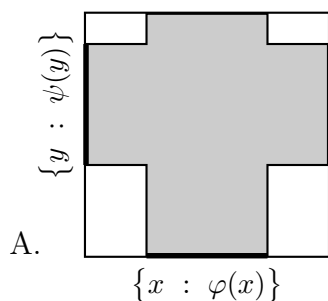
377 $\varphi(x) \wedge \neg\psi(y)$

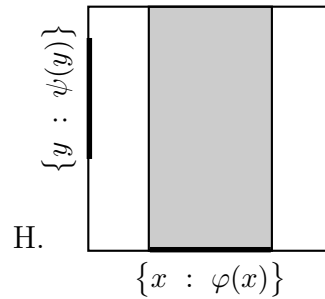
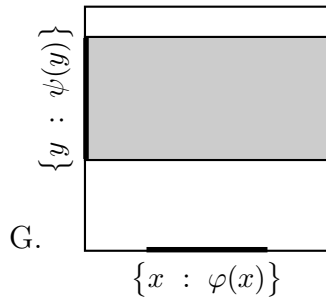
378 $\varphi(x) \oplus \psi(y)$

379 $\varphi(x)$

380 $\psi(y)$

L'insieme $\mathbb{U}^2$ è rappresentato come un quadrato nel modo usuale. Gli insiemi definiti da $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono rappresentati da segmenti in grassetto nell'asse orizzontale e verticale. L'area che appartiene all'insieme definito dalle formule $\theta(x, y)$ qui sotto è colorata in grigio.




Esercizi 381 – 386

Il modello è come nell'esercizio precedente. Sia $\delta(x, y)$ una formula vera se $4(x - y)^2 \leq 1$. Sia $\sigma(x)$ una formula vera se $2 \leq 4x \leq 3$. Per i seguenti valori di $\theta(x, y)$ dire quale delle figure qui sotto rappresentano gli insiemi definiti da $\theta(x, y)$.

381 $\sigma(x)$

385 $\delta(x, y)$

382 $\sigma(y)$

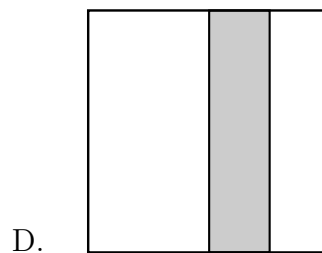
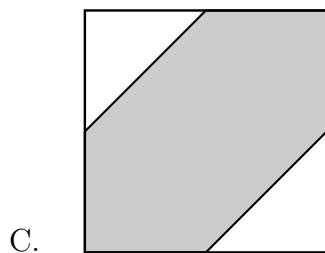
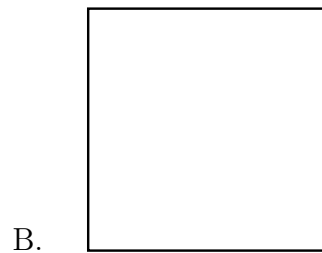
386 $\delta(y, x)$

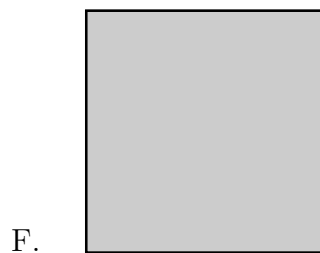
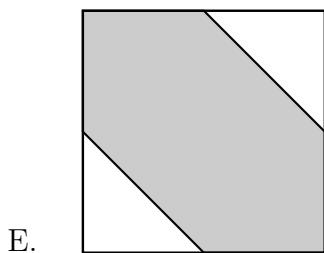
383 $\sigma(0)$

387 $\delta(x, x)$

384 $\sigma(1)$

388 $\delta(y, y)$





6. Una legge logica

Si ricordi che per qualche coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ può succedere che

$$\forall x [\varphi(x) \vee \psi(x)] \not\Rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$$

Infatti, posto $A = \{x : \varphi(x)\}$ e $B = \{x : \psi(x)\}$, la formula di sinistra afferma che $A \cup B$ è tutto l'universo, mentre la seconda afferma che sia A che B sono tutto l'universo.

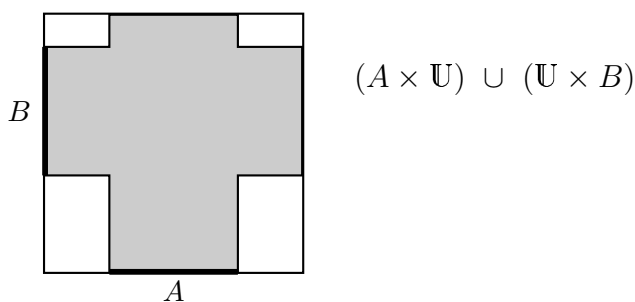
È comunque possibile distribuire (oppure, raccogliere) il quantificatore universale sulla disgiunzione se si usano due diverse variabili, infatti, per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(y)$:

$$\forall x y [\varphi(x) \vee \psi(y)] \iff \forall x \varphi(x) \vee \forall y \psi(y).$$

Infatti, ora la formula di sinistra afferma che l'insieme

$$(A \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times B)$$

è tutto $\mathbb{U}^2$. E, se si immagina quest'insieme come in figura,



risulta chiaro che questo può essere uguale ad $\mathbb{U}^2$ solo se entrambi A e B sono uguali ad $\mathbb{U}$. Formalmente questa identità logica può essere derivata dall'identità:

$$\forall x [\varphi \vee \psi(x)] \iff \varphi \vee \forall x \psi(x).$$

che vale quando φ è una formula chiusa. Infatti, (verifichiamo la direzione $\Rightarrow$ e lasciamo al lettore la verifica della conseguenza opposta) fissiamo un modello arbitrario $\mathcal{U}$ e supponiamo che

$$\mathcal{U} \models \forall x y [\varphi(y) \vee \psi(x)].$$

Allora, per qualsiasi parametro a ,

$$\mathcal{U} \models \forall x [\varphi(a) \vee \psi(x)].$$

Poichè x non è libera in $\varphi(a)$ otteniamo

$$\mathcal{U} \models \varphi(a) \vee \forall x \psi(x)$$

Questo vale per ogni a quindi

$$\mathcal{U} \models \forall y [\varphi(y) \vee \forall x \psi(x)]$$

Poichè x non è libera in $\forall x \psi(x)$, possiamo concludere che:

$$\mathcal{U} \models \forall y \varphi(y) \vee \forall x \psi(x).$$

Questo è ciò che volevamo ottenere.

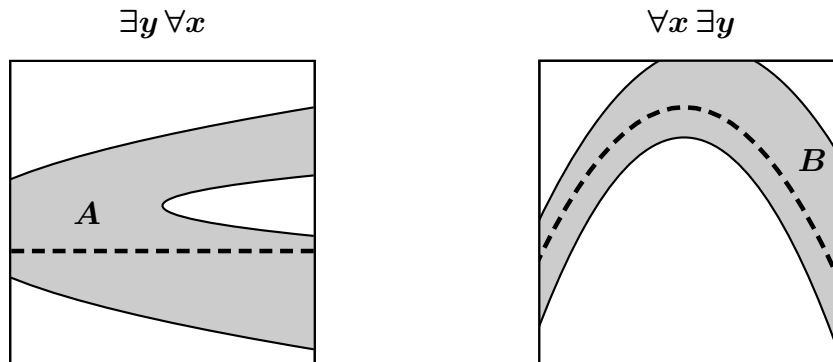
7. Esiste-per-ogni e per-ogni-esiste

È importante non confondere le seguenti due formule

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \quad \text{e} \quad \exists y \forall x \varphi(x, y).$$

Queste due formule hanno un significato ben diverso e, nella maggior parte dei casi, non sono equivalenti.

La differenza di significato tra queste due espressioni è raffigurata graficamente nelle figure qui sotto. Le regioni ombreggiate rappresentano i sottoinsiemi A e B di $\mathbb{U}^2$. La formula $\exists y \forall x \alpha(x, y)$ richiede che l'insieme A definito da $\alpha(x, y)$ contenga una retta orizzontale (come nella figura di destra) mentre $\forall x \exists y \beta(x, y)$ richiede che l'insieme B definito da $\beta(x, y)$ contenga una semplice curva che congiunge il lato destro a quello sinistro.

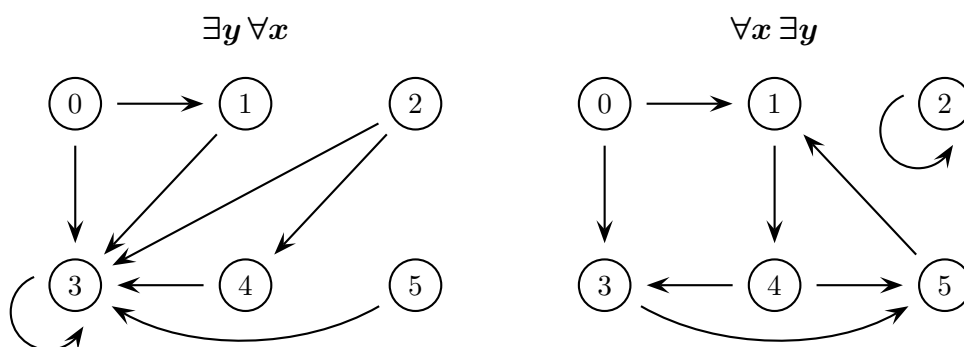


Richiedere $\exists y \forall x \varphi(x, y)$ è quindi una condizione più forte di $\forall x \exists y \varphi(x, y)$. Vale la seguente conseguenza logica

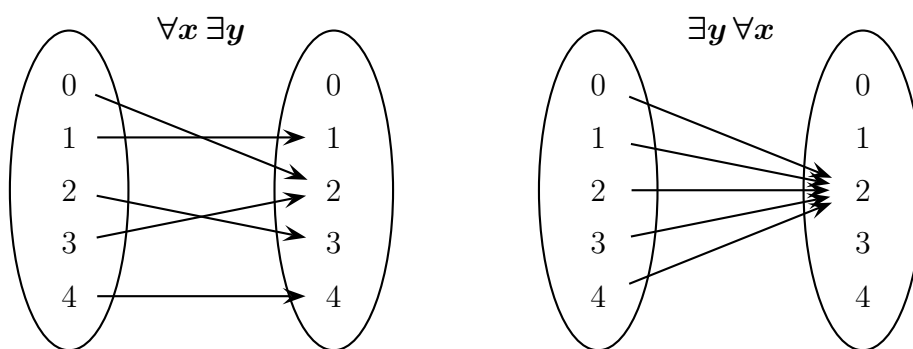
$$\exists y \forall x \varphi(x, y) \implies \forall x \exists y \varphi(x, y),$$

ma la direzione inversa non vale.

Anche i seguenti diagrammi rappresentano molto bene la differenza tra le due sequenze di quantificatori: $\forall x \exists y$ ed $\exists y \forall x$. Le frecce dei diagrammi qui sotto rappresentano due possibili relazioni binarie definite dalla formula $\varphi(x, y)$. La formula $\exists y \forall x \varphi(x, y)$ afferma l'esistenza di un nodo verso cui tutti gli altri nodi puntano (come il nodo 3 nella figura di sinistra). Invece $\forall x \exists y \beta(x, y)$ richiede semplicemente che da ogni nodo esca una freccia (come in entrambe le figure).



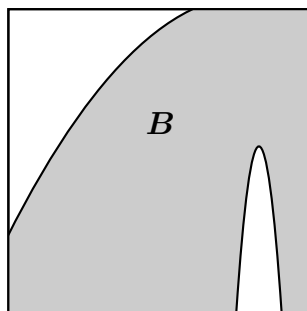
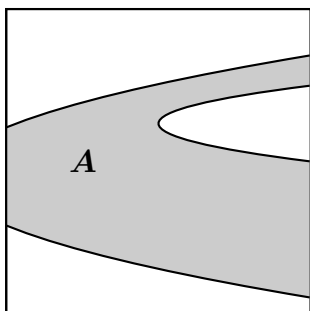
Come ultimo esempio supponiamo che f sia un simbolo che sta per il grafo di una funzione (cioè $f(x, y)$ sta per $F(x) = y$). Si noti la differenza di significato tra $\forall x \exists y f(x, y)$ e $\exists y \forall x f(x, y)$:



La prima dice che F è totale, la seconda dice anche che F è una funzione costante.

Esercizi 389 – 398

Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme A rappresentato nell'area grigia della figura qui sotto. Sia $\beta(x, y)$ la formula che definisce l'insieme B . Dire se le seguenti formule sono vere:



389 $\forall x \exists y \alpha(x, y)$

394 $\exists x \forall y \beta(y, x)$

390 $\forall x \exists y \beta(x, y)$

395 $\forall x \alpha(x, x)$

391 $\exists x \forall y \alpha(x, y)$

396 $\forall x \beta(x, x)$

392 $\exists x \forall y \beta(x, y)$

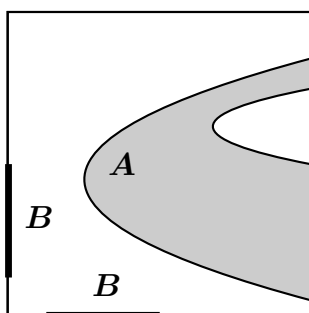
397 $\exists y \alpha(y, y)$

393 $\exists x \forall y \alpha(y, x)$

398 $\exists y \beta(y, y)$

Esercizi 399 – 406

Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme $A \subseteq \mathbb{U}^2$ rappresentato nell'area grigia della figura qui sotto. Sia $\beta(x)$ la formula che definisce l'insieme $B \subseteq \mathbb{U}$ che, per comodità, rappresentiamo sia sulle ordinate che sulle ascisse. Dire se le seguenti formule sono vere:



399 $\forall x [\beta(x) \rightarrow \exists y \alpha(x, y)]$

401 $\forall x [\forall y \alpha(x, y) \rightarrow \beta(x)]$

400 $\exists x [\beta(x) \wedge \exists y \alpha(x, y)]$

402 $\forall x \exists y [\alpha(x, y) \rightarrow \beta(x)]$

403 $\exists x [\beta(x) \wedge \forall y \alpha(x, y)]$

405 $\exists y [\beta(y) \wedge \exists x \alpha(x, y)]$

404 $\forall y [\beta(y) \rightarrow \exists x \alpha(x, y)]$

406 $\exists y [\beta(y) \wedge \forall x \alpha(x, y)]$

Esercizi 407 – 414

Ciascuna di queste formule

407 $\exists y \forall x [\varphi(x) \wedge \psi(y)]$

412 $\forall x \exists y [\varphi(x) \rightarrow \psi(y)]$

408 $\forall x \exists y [\varphi(x) \wedge \psi(y)]$

413 $\exists y \forall x \varphi(x)$

409 $\exists y \forall x [\varphi(x) \vee \psi(y)]$

414 $\forall x \exists y \varphi(x)$

410 $\forall x \exists y [\varphi(x) \vee \psi(y)]$

415 $\varphi(x) \vee \psi(y)$

411 $\exists y \forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(y)]$

è equivalente, in tutti i modelli, ad una delle seguenti. Si dica quale.

$\forall x \varphi(x) \qquad \forall x \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y) \qquad \forall x \varphi(x) \rightarrow \forall y \psi(y)$

$\exists y \varphi(x) \qquad \exists y \varphi(x) \wedge \forall x \psi(y) \qquad \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$

$\varphi(x) \qquad \forall x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y) \qquad \exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$

$\psi(y) \qquad \exists y \varphi(x) \vee \forall x \psi(y) \qquad \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall y \psi(y)$

Esercizi 416 – 423

Dire se le seguenti formule sono vere nei modelli rappresentati qui sotto

416 $\forall x \exists y r(x, y)$

419 $\forall x \exists y [r(x, y) \wedge r(y, y)]$

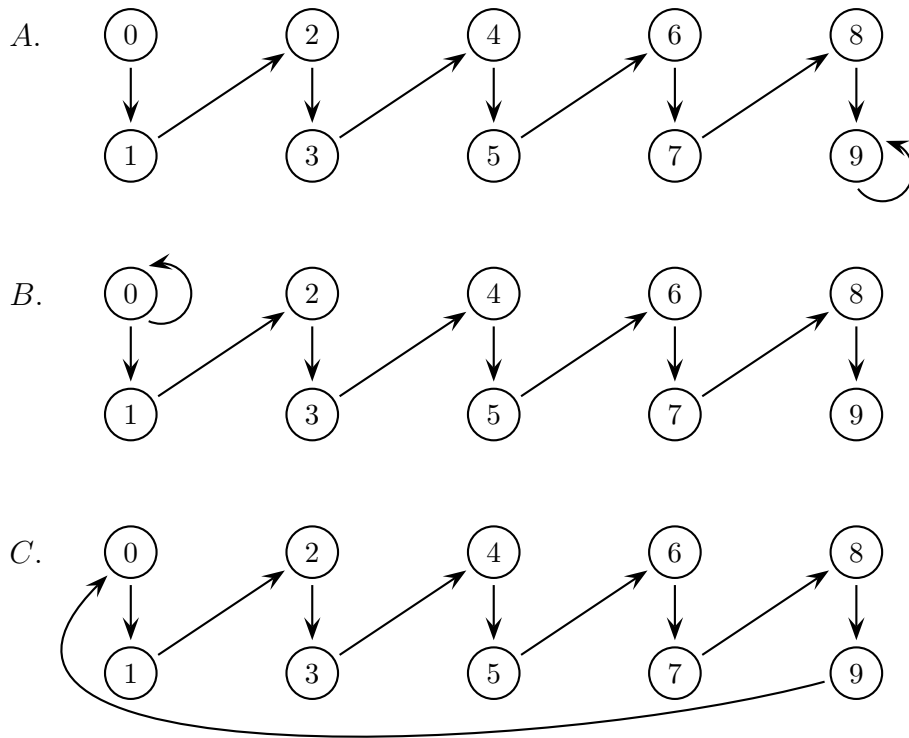
417 $\forall x \exists y r(y, x)$

420 $\exists x y [r(x, y) \wedge r(y, x)]$

418 $\exists y \forall x r(x, y)$

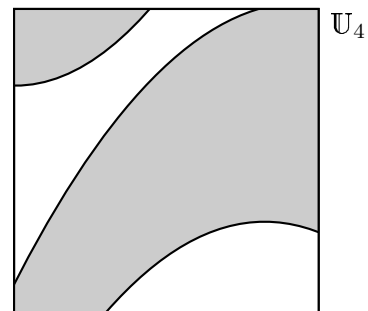
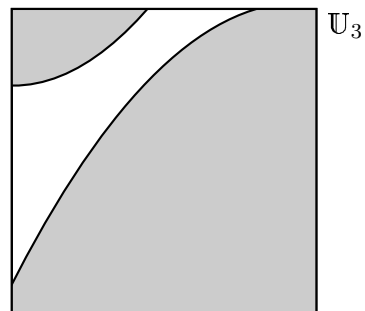
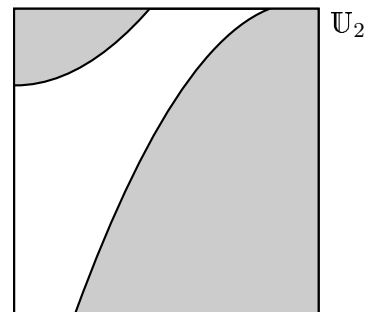
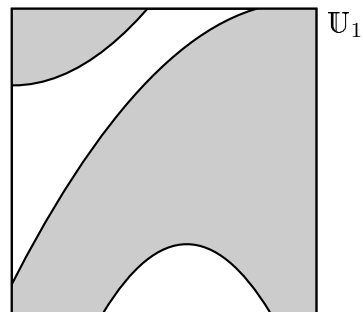
421 $\forall x \exists y, z [r(x, y) \wedge r(x, z)]$

I modelli sono del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 9 ed R è la relazione disegnata in figura:



Esercizi 422 – 424

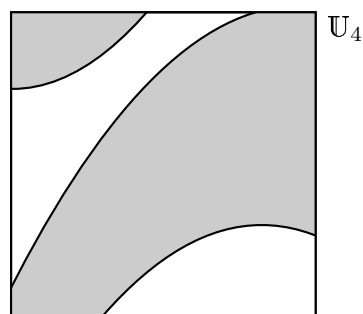
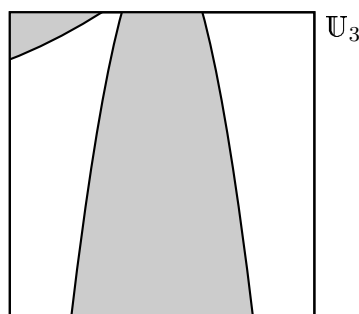
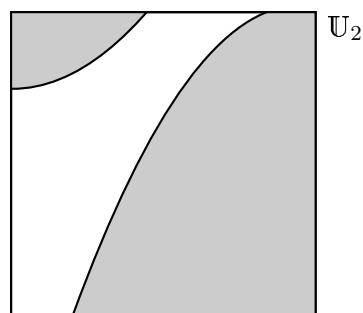
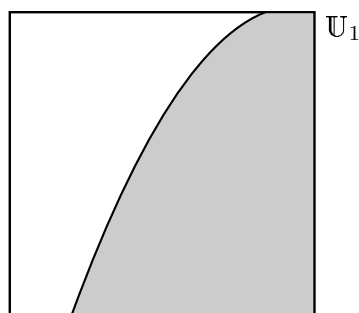
Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0, 1)$. La sig-natura contiene un predicato binario r che è interpretato nella regione grigia in figura.



Si scriva una formula che sia

422 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_2$ **424** vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_4$ **423** vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_3$ **Esercizi 425 – 426**

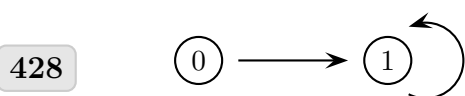
Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0,1)$. La segnatura contiene un predicato binario r che è interpretato nella regione grigia in figura.



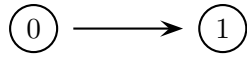
Si scriva una formula che sia

425 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_2$ **427** vera in $\mathbb{U}_4$ e falsa in $\mathbb{U}_3$ **426** vera in $\mathbb{U}_4$ e falsa in $\mathbb{U}_2$ **Esercizi 428 – 431**

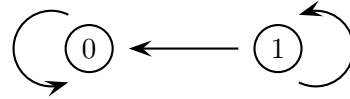
Il linguaggio contiene solo il predicato binario r . Rappresentiamo qui sotto quattro modelli $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U} = \{0,1\}$. Per ognuno di questi quattro modelli si scriva una formula senza parametri vera nel modello e falsa negli altri tre.



429



431



430



8. Sostituzioni di variabili

Sebbene sembri assolutamente intuitivo che

$$\exists x \varphi(x) \iff \exists y \varphi(y),$$

questa equivalenza vale solo se alcune condizioni sono soddisfatte.

La cosa è molto semplice ed ha un analogo anche in programmazione. Chiamare X o Y la variabile usata come indice in un ciclo *for* è in principio indifferente. Ma se decidessimo di sostituire “alla cieca” la variabile X usata come indice del ciclo con la variabile Y potremmo incorrere in problemi nel caso questa Y fosse stata usata anche come indice in qualche ciclo *for* più interno.

Un fenomeno simile può verificarsi anche nella logica del prim’ordine. Fissiamo un linguaggio che contiene un predicato ternario $a(x, y, z)$ per il grafo dell’addizione. Per chiarezza scriveremo $x + y = z$ al posto di $a(x, y, z)$ e $x + y \neq z$ al posto di $\neg a(x, y, z)$. Come modello prendiamo $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$. Come formula $\varphi(x)$ consideriamo $\forall y (x + y \neq 0)$. La formula $\exists x \varphi(x)$ è vera, infatti come testimone di $\exists x$ si può prendere, per esempio 1: $\forall y (1 + y \neq 0)$ è vera perchè l’equazione $1 + y = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$. Invece la formula $\exists y \varphi(y)$ è falsa. Infatti $\exists y \forall y (y + y \neq 0)$ è equivalente a $\forall y (y + y \neq 0)$ che afferma che $2y = 0$ non ha soluzioni, ma 0 è una soluzione in $\mathbb{N}$.

Nel controesempio costruito qui sopra la variabile y viene sostituita alla variabile x che occorre all’interno del raggio di azione del quantificatore $\exists y$. Questa “interferenza” è la ragione del fallimento dell’equivalenza.

Se escludiamo la possibilità di “interferenze” tra variabili libere e variabili vincolate allora l’equivalenza qui sopra vale.

Esercizi 432 – 435

Sia L un linguaggio che contiene, tra l’altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{U}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell’ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi. Dire se le seguenti formule sono equivalenti in $\mathcal{U}$ alla formula $\forall x \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]$.

432 $\forall x \exists y z [x < y < z \wedge \sigma(z)]$

434 $\forall x \exists y z [z < x < y \wedge \sigma(z)]$

433 $\forall x \exists y z [x < z < y \wedge \sigma(z)]$

435 $\forall x \exists y z [y < x < z \wedge \sigma(z)]$

Esercizi 436 – 437

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{N}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi. Dire se le seguenti formule sono

- A. false, qualsiasi sia $\sigma(x)$,
- B. vere solo se $\forall x \sigma(x)$,
- C. vere solo se $\forall x \neg \sigma(x)$,
- D. vere solo se $\forall x \sigma(x) \vee \neg \exists x \sigma(x)$,
- E. vere solo se $\neg \forall x \sigma(x) \wedge \exists x \sigma(x)$.

436 $\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \exists y [x < y \wedge \neg \sigma(y)]]$

437 $\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]]$

Esercizi 438 – 441

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $\leq$. Fissiamo un modello che ha come dominio $\mathbb{N}$ e che interpreta $\leq$ nell'ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula arbitraria e denotiamo con S l'insieme definito da $\sigma(x)$. La verità delle seguenti formule

438 $\exists x [\sigma(x) \wedge \forall y [\sigma(y) \rightarrow y \leq x]]$

439 $\exists x [\sigma(x) \wedge \forall y [x \leq y \rightarrow \sigma(y)]]$

440 $\forall x \exists y [x \leq y \wedge \sigma(y)]$

441 $\forall x \exists y [x \leq y \rightarrow \sigma(y)]$

$$442 \quad \exists x \forall y [x \leq y \rightarrow \sigma(y)]$$

$$443 \quad \exists x \forall y [\sigma(y) \rightarrow x \leq y]$$

è equivalente, per ogni formula $\sigma(x)$, ad una delle seguenti affermazioni. Dire quale.

- A. S contiene un numero finito di elementi.
- B. $S \neq \emptyset$ e contiene un numero finito di elementi.
- C. $\neg S$ contiene un numero finito di elementi.
- D. $\neg S \neq \emptyset$ e contiene un numero finito di elementi.
- E. $S = \mathbb{N}$
- F. $0 = 1$
- G. $0 = 0$
- H. S contiene infiniti elementi
- I. $S \neq \emptyset$

Esercizi 444 – 446

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{U}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi non vuota in $\mathcal{U}$. Siano A e B le seguenti affermazioni:

- A. $\mathcal{U} \models \forall x \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]$
- B. $\mathcal{U} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]]$

Dire se le seguenti affermazioni valgono per qualsiasi formula $\sigma(x)$:

$$444 \quad \text{se } A \text{ allora } B$$

$$445 \quad \text{se } B \text{ allora } A$$

Esercizi 446 – 448

Il linguaggio L contiene un solo simbolo di relazione binaria $\subseteq$. Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ ha come dominio l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e che interpreta $\subseteq$ nella relazione *essere sottoinsieme di*. Scrivere le seguenti formule:

446 $\varphi_0(x)$ soddisfatta soltanto dall'insieme vuoto.

447 $\varphi_1(x)$ soddisfatta soltanto dall'insieme $\mathbb{N}$.

448 $\varepsilon(x, y)$ vera sse $x = y$ è un singoletto. Dal prossimo capitolo assumeremo sempre la presenza del simbolo di uguaglianza. In questo caso non è necessario.

449 $\psi(x)$ vera sse x è un singoletto.

450 $\sigma(x, y)$ vera sse $x = \mathbb{N} \setminus y$.

451 $\alpha(x, y, z)$ vera sse $x = y \cup z$.

452 $\beta(x, y, z)$ vera sse $x = y \cap z$.

Capitolo 10

L'uguaglianza

L'uguaglianza è uno dei simboli più frequentemente usati in matematica. Per formalizzarlo nella logica del prim'ordine si sarebbe tentati di introdurre un simbolo $=$ di relazione binaria. In effetti, dal punto di vista sintattico, non c'è alcuna differenza tra la relazione di uguaglianza $=$ e un'altra relazione come per esempio la relazione $<$ sui numeri naturali.

Ma in matematica si usa convenire che ogni oggetto sia uguale solo a se stesso. Noi vogliamo rispettare questa tradizione. Quindi dobbiamo fissare a priori ed in tutti i modelli l'interpretazione del simbolo $=$, questa è sempre e dovunque la diagonale del dominio (intesa come relazione binaria).

Per questa ragione si usa considerare l'uguaglianza come un connettivo logico (quindi non soggetto all'interpretazione di un modello), non come un simbolo del linguaggio.

1. Le formule e la verità

Il linguaggio è come nel capitolo precedente le regole di costruzione sono quelle già viste, ora aggiungiamo un nuovo tipo di formula atomica:

♣ se x e y sono variabili allora $x = y$ è una formula (atomica);

Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ (i modelli sono come nel capitolo precedente) le formule atomiche con parametri sono definite così:

♠ se t ed s sono elementi di $V \cup \mathbb{U}$ (cioè variabili o parametri) allora $t = s$ è una formula atomica *con parametri*,

Alla definizione di verità data nel capitolo precedente aggiungiamo la seguente clausula:

$a = b$ è vera sse a e b sono lo stesso elemento di $\mathbb{U}$.

2. Esistono almeno due soluzioni

Fissiamo una formula arbitraria $\varphi(x)$. È possibile scrivere una formula del prim'ordine

che vale in tutti e solo i modelli in cui $\varphi(x)$ ha almeno due soluzioni. Si noti che la formula

$$\exists x y [\varphi(x) \wedge \varphi(y)].$$

non afferma questo. Infatti, poichè nulla vieta ad $\exists x$ ed $\exists y$ di avere lo stesso testimone, la formula qui sopra è semplicemente equivalente a $\exists x \varphi(x)$.

Per ottenere il risultato desiderato bisogna richiedere esplicitamente che $x \neq y$. La formula cercata è quindi:

$$\exists x y [\varphi(x) \wedge \varphi(y) \wedge x \neq y].$$

Questa formula è vera se e solo se $\varphi(x)$ ha almeno due soluzioni.

3. Esiste un'unica soluzione

Fissiamo una formula arbitraria $\varphi(x)$. È possibile scrivere una formula del prim'ordine che è vera in tutti e soli i modelli dove $\varphi(x)$ ha un'unica soluzione. Per fare ciò dobbiamo dire che $\varphi(x)$ ha almeno una soluzione e che non ne ha due:

$$\exists x \varphi(x) \wedge \neg \exists x y [\varphi(x) \wedge \varphi(y)]$$

Un altro modo per dire che $\varphi(x)$ ha esattamente una soluzione è:

$$\exists x [\varphi(x) \wedge \forall z [\varphi(z) \rightarrow x = z]].$$

Infatti, se $\mathcal{U}$ è un modello che rende vera la formula qui sopra allora esiste un $a \in \mathcal{U}$ tale che

$$\mathcal{U} \models \varphi(a) \wedge \forall z [\varphi(z) \rightarrow a = z].$$

Quindi a è una soluzione di $\varphi(x)$. Verifichiamo che $\varphi(x)$ non ha altre soluzioni: poichè

$$\mathcal{U} \models \forall z [\varphi(z) \rightarrow a = z],$$

allora per un qualsiasi $b \in \mathcal{U}$ avremo

$$\mathcal{U} \models \varphi(b) \rightarrow a = b.$$

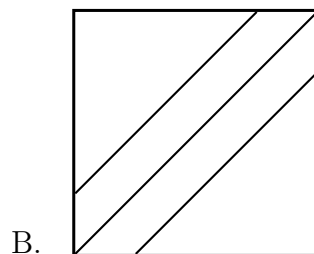
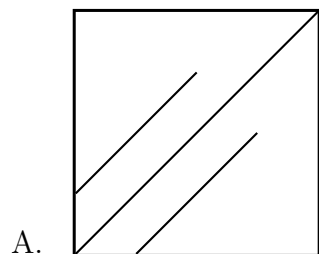
Quindi ogni soluzione b di $\varphi(x)$ non può che essere uguale ad a stesso.

Esercizi 453 – 457

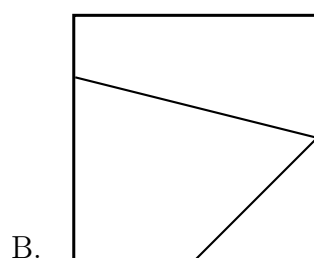
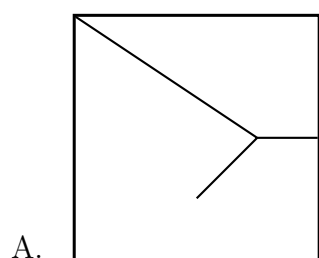
Il linguaggio contiene solo il predicato binario r . Consideriamo modelli del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$ ed R è una delle relazioni binarie rappresentate qui sotto. (I punti in relazione sono quelli appartenenti ai segmenti in figura,

cornice esclusa.) Per le seguenti coppie di modelli si scriva, se possibile, una formula senza parametri vera in A e falsa in B. (Attenzione: in qualche caso una tale formula potrebbe non esistere.)

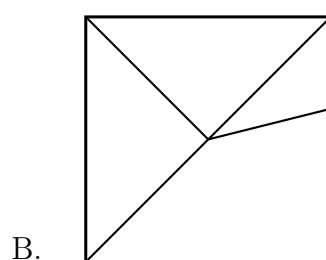
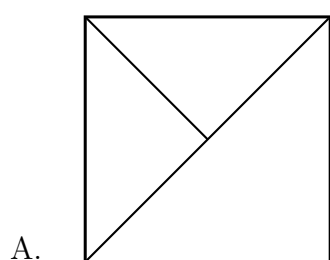
453



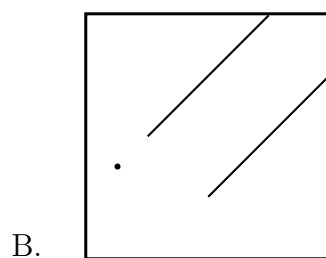
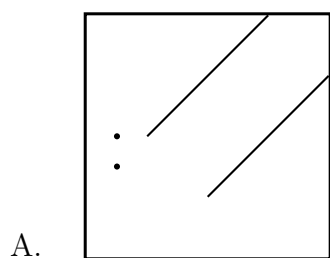
454



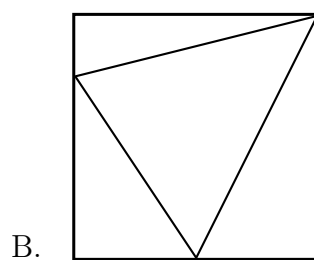
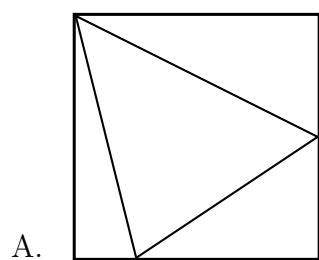
455



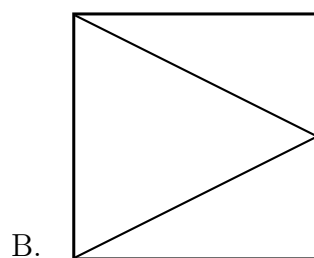
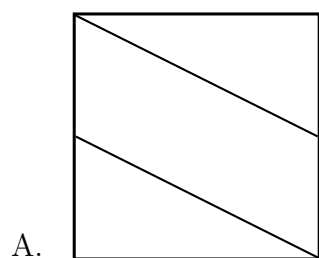
456



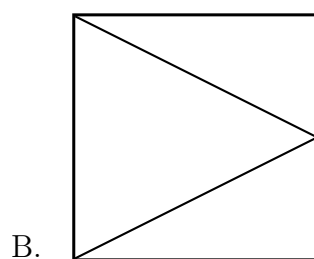
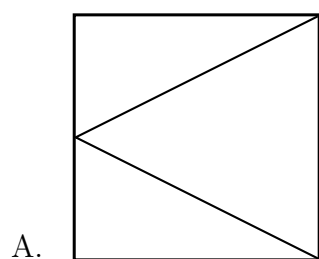
457



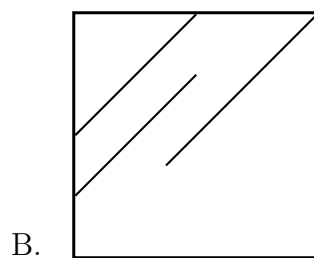
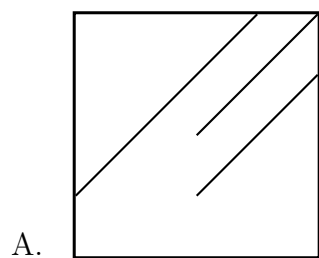
458



459



460

**Esercizi 461 – 465**

Dire se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o altro.

461 $\forall x \exists y x = y$

463 $\forall x x = x$

462 $\exists y \forall x x = y$

464 $\forall x x \neq x$

465 $\exists x \, x \neq x$

Esercizi 466 – 484

La verità delle seguenti formule dipende al più dalla cardinalità (cioè il numero di elementi) del modello. Si dica in quali modelli le formule sono vere.

466 $\exists x \, (x = x)$

467 $\forall x \, (x = x)$

468 $\exists x \, y \, (x = y)$

469 $\forall x \, y \, (x = y)$

470 $\exists x \, y \, (x \neq y)$

471 $\forall x \, y \, (x \neq y)$

472 $\forall x \, \exists y \, (x = y)$

473 $\forall x \, \exists y \, (x \neq y)$

474 $\exists x \, \forall y \, (x = y)$

475 $\exists x \, \forall y \, (x \neq y)$

476 $\forall x \, \exists y \, z \, [x \neq y \wedge y \neq z]$

477 $\exists x \, y \, \forall z \, [x = z \vee y = z]$

478 $\exists x \, y \, \forall z \, [x = z \wedge y = z]$

479 $\exists x \, y \, \forall z \, [x = z \vee y = z]$

480 $\exists x \, y \, \forall z \, [x = z \wedge y = z]$

481 $\exists x \, y \, [x \neq y \wedge \forall z \, [x = z \vee y = z]]$

482 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x = z \wedge y = z]]$

483 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x \neq z \vee y \neq z]]$

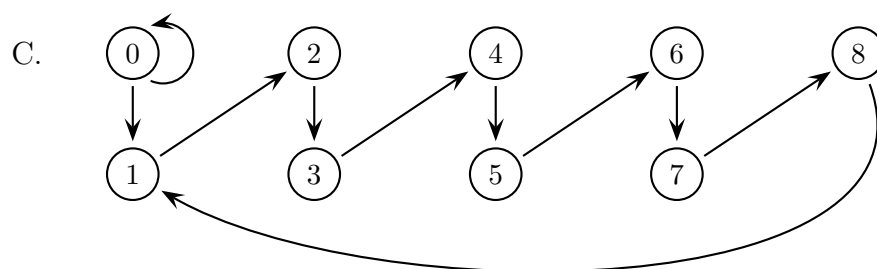
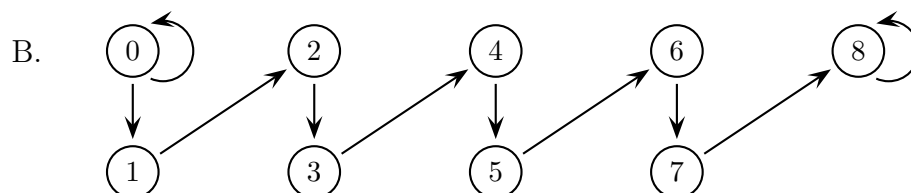
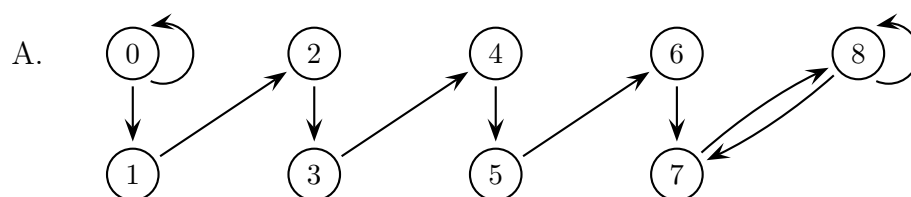
484 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x \neq z \wedge y \neq z]]$

Esercizi 485 – 486

I modelli sono del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 9 ed R è la relazione disegnata in figura. Scrivere una formula:

485 vera in A e falsa in B

486 vera in C e falsa in B



Capitolo 11

I termini

Le formule senza parametri dei linguaggi introdotti finora non hanno la possibilità di menzionare oggetti dell'universo. Questa limitazione verrà tolta aggiungendo al linguaggio dei simboli di costante: questi stanno per determinati elementi dell'universo; a differenza dei parametri, il significato delle costanti (cioè, la loro interpretazione nel modello) non è fissata a priori.

Aggiungeremo al linguaggio anche dei simboli che stanno per funzioni che mappano elementi dell'universo in altri elementi dell'universo. Questo completa la nostra graduale introduzione dei linguaggi del prim'ordine.

1. Funzioni e costanti

Il linguaggio L consiste ora di tre insiemi disgiunti

- L_p chiamato insieme dei **(simboli per) predicati**;
- L_f chiamato insieme dei **(simboli per) funzioni**;
- L_c chiamato insieme dei **(simboli per) costanti**.

Gli insiemi L_p ed L_f sono a loro volta unione di infiniti insiemi disgiunti:

- $L_{p,n}$ detto insieme dei simboli per predicati n -ari,
- $L_{f,n}$ detto insieme dei simboli per funzioni n -arie.

Naturalmente, ognuno di questi insiemi, o anche tutti, potrebbero essere vuoti. In quasi tutti gli esempi si useranno solo simboli unari o binari (cioè $n = 1, 2$).

2. I modelli

Fissiamo un linguaggio L . Un modello consiste di:

- ◆ universo $\mathbb{U}$, e
- ◆ l'assegnazione $p \rightsquigarrow P$ di un qualche sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{U}^n$ ad ogni simbolo di predicato n -ario.

- ◆ l'assegnazione $f \rightsquigarrow F$ di una qualche funzione totale $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ad ogni simbolo di funzione n -aria.
- ◆ l'assegnazione $c \rightsquigarrow a$ di un qualche elemento $a \in \mathbb{U}$ ad ogni simbolo di costante.

3. I termini

Fissato un linguaggio L i termini vengono costruiti con le seguenti regole.

- ♣ la variabile x è un termine;
- ♣ ogni costante è un termine;
- ♣ se $t_1, \dots, t_n$ sono termini ed f è un simbolo di funzione n -ario allora $f t_1, \dots, t_n$ è un termine.

I termini con parametri sono definiti allo stesso modo ma aggiungendo la seguente regola

- ♣ ogni elemento $a \in \mathbb{U}$ è un termine.

Dove $\mathbb{U}$ è il dominio di un modello.

A volte, per aiutare la lettura, scriveremo $f(t_1, \dots, t_n)$ al posto di $f t_1 \dots t_n$. Le parentesi non sono comunque necessarie. Scriveremo $t(x_1, \dots, x_n)$ per enfatizzare che $x_1, \dots, x_n$ sono tutte le variabili che possono occorrere nel termine t . Se f è una funzione unaria abbrevieremo ff scrivendo f^2 ed in generale scriveremo f^n per la sequenza $f \dots f$ di lunghezza n .

A volte, nel caso di funzioni binarie, si preferisce scrivere xfy invece di fxy . Questa si chiama **notazione infissa**. Per esempio, si usa sempre scrivere $x + y$ e $x \cdot y$ invece di $+(x, y)$ e $\cdot(x, y)$.

4. Le formule

Fissiamo anche un linguaggio L ed un insieme infinito di variabile V . Le formule si costruiscono a partire dalle formule atomiche usando gli usuali connettivi. Le regole di costruzione sono quelle usuali, le formule atomiche sono le seguenti:

- ♣ se p è un predicato n -ario e $t_1, \dots, t_n$ sono termini allora $pt_1, \dots, t_n$ è una formula;
- ♣ se t ed s sono due termini allora $t = s$ è una formula.

Le formule con parametri sono costruite allo stesso modo usando termini con parametri.

5. La semantica dei termini

Fissiamo un modello. I termini verranno interpretati come funzioni: quelle che si ottengono componendo le funzioni del modello nell'ordine specificato nella sintassi del termine.

Cominciamo però col definire l'interpretazione dei termini chiusi. Sia t un termine chiuso,

- ◆ se t è atomico: cioè un parametro b o una costante c , allora l'interpretazione di t è nel primo caso b stesso, nel secondo caso l'elemento del dominio in cui la costante c viene interpretata;
- ◆ se t è del tipo $f s$, dove s è un termine ed f è un simbolo di funzione, allora l'interpretazione di t è $F(b)$ dove b è l'interpretazione di s e F è la funzione che il modello associa ad f .

L'interpretazione di un termine $t(x)$ qualsiasi (non necessariamente chiuso) è la funzione da $\mathbb{U}$ in $\mathbb{U}$ che mappa ogni elemento a nell'interpretazione del termine (chiuso) $t(a)$.

6. La semantica delle formule

Fissiamo un linguaggio ed un modello. Ad ogni formula atomica *chiusa* con parametri in $\mathbb{U}$ assegnamo un valore di verità come segue

$p t_1, \dots, t_n$ è vera se la tupla composta dall'interpretazione dei termini $t_1, \dots, t_n$ appartiene alla relazione P (quella in cui il modello interpreta p), falsa altrimenti;

$t = s$ è vera se i due termini t ed s sono interpretati nello stesso elemento, falsa altrimenti;

Si ricordi che questa definizione è limitata alle formule chiuse. In questo caso i termini $t_1, \dots, t_n$, t ed s sono chiusi, quindi ha senso parlare di interpretazione nel modello.

7. Leggi logiche

Per ogni formula $\varphi(x)$ e ogni termine $t(x)$ si ha:

$$\exists x \varphi(tx) \implies \exists x \varphi(x), \quad \text{e, dualmente,}$$

$$\forall x \varphi(x) \implies \forall x \varphi(tx).$$

(Queste leggi includono il caso in cui tx sia un termine chiuso come per esempio una costante c .)

8. Un non esempio

È chiaro che le conseguenze logiche qui sopra non possono essere rovesciate,

$$\begin{aligned}\exists x \varphi(x) &\not\Rightarrow \exists x \varphi(tx), \quad \text{e} \\ \forall x \varphi(tx) &\not\Rightarrow \forall x \varphi(x).\end{aligned}$$

Il seguente è un controesempio alla seconda conseguenza. Supponiamo che L contenga un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di predicato p unario. Sia $\mathcal{U}$ il modello con dominio $\mathbb{N}$, che interpreta f con la funzione successore e p con l'insieme dei numeri positivi. Allora $\forall x p(x)$ è falsa mentre $\forall x p(fx)$ è vera.

Esercizi 487 – 490

Fissiamo linguaggio $L = \{p, f, c\}$ dove p è un predicato unario, f una funzione unaria, e c una costante. Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ con dominio $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri pari} \qquad f \rightsquigarrow \text{la funzione } x \mapsto x^3 \qquad c \rightsquigarrow 2.$$

Valutare le seguenti formule in $\mathcal{U}$.

487 $\forall x p(f^2x)$

489 $\exists x fx = c$

488 $\exists x [x \neq c \wedge fx = x]$

490 $fc = c$

Esercizi 491 – 495

Come sopra ma nel modello con dominio $\mathbb{Z}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri positivi} \qquad f \rightsquigarrow \text{la funzione } x \mapsto x^3 \qquad c \rightsquigarrow 0.$$

491 $\forall x p(f^2x)$

494 $\forall x [x \neq c \rightarrow fx \neq c]$

492 $\exists x [x \neq c \wedge fx = x]$

495 $fc = c$

493 $\exists x fx = c$

Esercizi 496 – 502

Come sopra ma nel modello con dominio $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$p \rightsquigarrow$ i numeri pari $f \rightsquigarrow$ la funzione $x \mapsto x + 1$ $c \rightsquigarrow 0$.

496 $p(fc)$

500 $\forall x [\neg p(fx) \rightarrow p(x)]$

497 $\exists x fx = c$

501 $\forall x p(f^2x)$

498 $\forall x fx \neq c$

502 $\forall x [p(x) \leftrightarrow p(f^2x)]$

499 $\forall x [p(x) \rightarrow \neg p(fx)]$

Esercizi 503 – 505

Sia L un linguaggio con un predicato p e due simboli di costante c_1, c_2 . Si scriva una formula φ tale che $\langle \mathcal{U}, P, a_1, a_2 \rangle$ modella φ se e solo se

503 $a_1, a_2 \in P$

506 $P \subseteq \{a_1, a_2\}$

504 $P = \{a_1, a_2\}$

507 $\{a_1, a_2\} \subseteq P$

505 $\{a_1, a_2\} \subsetneq P$

508 $\{a_1, a_2\} \cap P \neq \emptyset$

Esercizi 509 – 511

Il linguaggio contiene una funzione binaria $+$. Sia $\mathcal{N}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $+$ nell'addizione. Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Dire se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$ (per qualsiasi sia la formula $\varphi(x)$).

509 $\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x + 1)$

512 $\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x y \varphi(x + y)$

510 $\forall x \varphi(x + 1) \rightarrow \forall x \varphi(x + 2)$

513 $\forall x [\varphi(x) \rightarrow \forall y \varphi(x + y)]$

511 $\forall x y \varphi(x + y) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

514 $\forall x [\forall y \varphi(x + y) \rightarrow \varphi(x)]$

Esercizi 515 – 519

Sia f un simbolo di funzione e sia F la sua interpretazione nella struttura $\mathcal{U}$. Sia

$\varphi(x)$ una formula arbitraria. Delle seguenti formule si dica se sono sempre vere o se valgono assumendo F iniettiva, suriettiva, o costante (si dica quale di queste ipotesi è sufficiente).

515 $\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x \varphi(fx)$

517 $\forall x, y [\varphi(fx) \leftrightarrow \varphi(fy)]$

516 $\forall x \varphi(fx) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

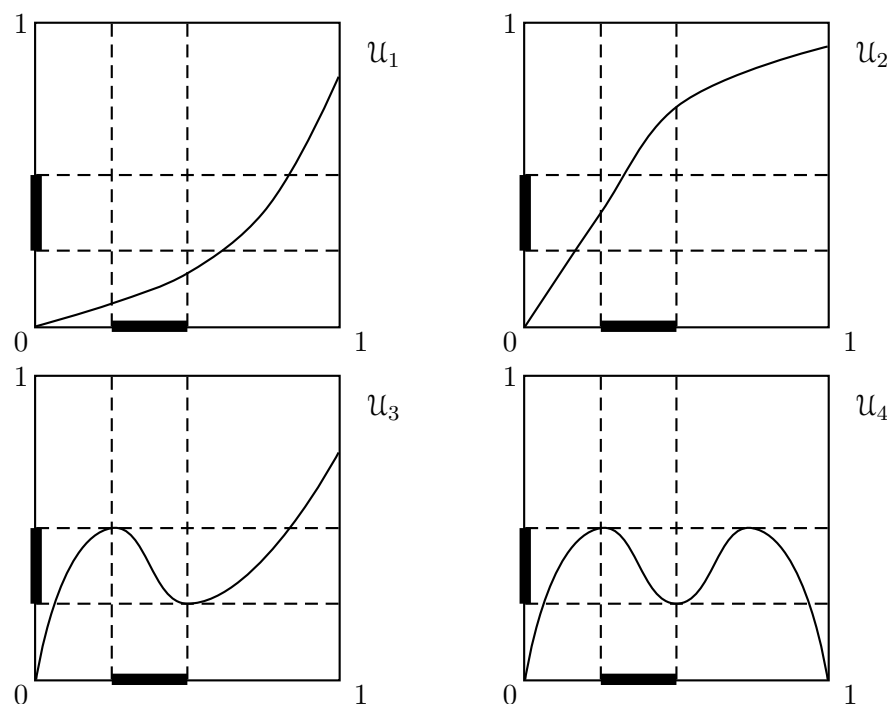
Per le seguenti domande si assuma anche che $\varphi(x)$ abbia un'unica soluzione.

518 $\forall x, y [\varphi(fx) \wedge \varphi(fy) \rightarrow x = y]$

519 $\exists x \varphi(fx) \leftrightarrow \forall x \varphi(fx)$

Esercizi 520 – 531

Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0, 1)$. La segnatura contiene un simbolo di funzione unaria f ed un predicato unario r . Dell'interpretazione di f rappresentiamo il grafo. Rappresentiamo l'interpretazione di r sia sull'asse delle ascisse che delle ordinate.



520 $\exists x_1 x_2 [fx_1 = fx_2 \wedge x_1 \neq x_2]$

521 $\forall x \exists y [fx = fy \wedge x \neq y]$

522 $\exists x fx = x$

523 $\forall x \exists y \, fx = y$

524 $\forall x \exists y \, fy = x$

525 $\forall x \, rfx$

526 $\exists x \, rfx$

527 $\forall y \left[ry \leftrightarrow \exists x [rx \wedge fx = y] \right]$

528 $\forall x [rx \rightarrow fx \neq x]$

529 $\exists x [rx \wedge fx \neq x]$

530 $\exists x_1 x_2 [fx_1 = fx_2 \wedge rx_1 \wedge \neg rx_2]$

531 $\forall x_1 x_2 [rx_1 \wedge rx_2 \wedge x_1 \neq x_2 \rightarrow fx_1 \neq fx_2]$

Esercizi 532 – 533

Sia L un linguaggio con due predicati p e q ed un simbolo di funzione f . Si scriva una formula φ tale che $\langle \mathbb{U}, P, Q, F \rangle$ modella φ se e solo se

532 $\text{img } F \subseteq P \cup Q$

533 $\text{img } F|_Q \subseteq P$

Esercizi 534 – 535

Sia L un linguaggio con due simboli di funzione f e g . Si scriva una formula φ tale che $\langle \mathbb{U}, F, G \rangle$ modella φ se e solo se

534 $F = G^2$

535 $F \circ G = \text{id}_{\mathbb{U}}$

Esercizi 536 – 541

Supponiamo che L contenga una funzione unaria f e due predicati unari p e q . Denotiamo con $\langle \mathbb{U}, F, P, Q \rangle$ un generico modello. Dire a quale affermazione corrisponde la verità delle seguenti formule

$$536 \quad \forall x [p(x) \rightarrow q(fx)]$$

$$539 \quad \forall x [q(x) \rightarrow p(x) \wedge p(fx)]$$

$$537 \quad \forall x p(fx)$$

$$540 \quad \forall x p(x)$$

$$538 \quad \forall x [q(x) \wedge p(fx)]$$

$$541 \quad \forall x [p(x) \wedge q(x) \rightarrow p(fx)]$$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$$F[P] \subseteq Q$$

$$\text{img } F \subseteq P$$

$$F[Q] \subseteq P \text{ e } Q \subseteq P.$$

$$P \subseteq \text{img } F$$

$$\text{dom } F = P$$

Nessuna di queste

9. Formalizzare proprietà delle funzioni

Fissiamo un linguaggio dove f è un simbolo di funzione unaria. Sia $\mathcal{U}$ un modello che interpreta f nella funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$. La seguente formula è vera se e solo se F è iniettiva:

$$\forall x y [x \neq y \longrightarrow f(x) \neq f(y)]$$

La seguente formula è vera se e solo se F è suriettiva:

$$\forall y \exists x f(x) = y$$

Sia A un insieme definito dalla formula $\alpha(x)$. Allora

F è la relazione definita dalla formula $fx = y$;

$F^{-1}[A]$ è l'insieme definito dalla formula $\alpha(fx)$;

$F[A]$ è l'insieme definito dalla formula $\exists x [y=fx \wedge \alpha(x)]$

10. Esempi

Vediamo come la logica del prim'ordine può aiutare a semplificare la verifica di alcune proprietà che altrimenti non sarebbero immediate. Vogliamo sapere se valgono le seguenti uguaglianze:

$$F[P \cup Q] \stackrel{?}{=} F[P] \cup F[Q]$$

$$F[P \cap Q] \stackrel{?}{=} F[P] \cap F[Q]$$

Trasformeremo il problema nella verifica di un'equivalenza logica. Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, f\}$ dove p e q sono predicati unari ed f è una funzione unaria.

Pensiamo P , Q , ed F come l'interpretazione di p , q , ed f in un generico modello. In questo modello gli insiemi $F[P \cup Q]$ e $F[P \cap Q]$ sono definiti dalle formule

$$\exists y [x=fy \wedge (py \vee qy)] \quad \text{e} \quad \exists y [x=fy \wedge py \wedge qy].$$

Gli insiemi $F[P]$ e $F[Q]$ sono definiti dalle formule

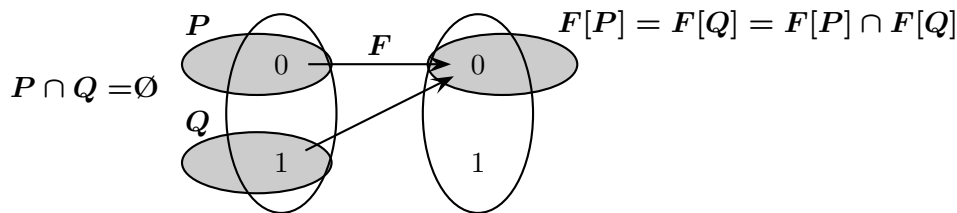
$$\exists y [x=fy \wedge py] \quad \text{e} \quad \exists y [x=fy \wedge qy].$$

Quindi le domande qui sopra si traducono nelle seguenti:

$$\exists y [x=fy \wedge (py \vee qy)] \stackrel{?}{\iff} \exists y [x=fy \wedge py] \vee \exists y [x=fy \wedge qy]$$

$$\exists y [x=fy \wedge py \wedge qy] \stackrel{?}{\iff} \exists y [x=fy \wedge py] \wedge \exists y [x=fy \wedge qy]$$

Ricordando che il quantificatore esistenziale distribuisce sulla disgiunzione, è immediato verificare che la risposta alla prima domanda è affermativa. È altrettanto facile confutare la seconda identità: per soddisfare la formula di destra P e Q devono essere non disgiunti mentre la formula di sinistra non richiede questo. Un controesempio è quindi facile da costruire, basta un universo con due elementi:



Osserviamo che, se si assume che F è iniettiva, allora anche la seconda identità risulta valida. Infatti, la formula di sinistra è equivalente a:

$$\exists y z [x=fy \wedge fy=fz \wedge py \wedge qz]$$

ma, se F è iniettiva, $fy = fz$ è equivalente a $y = z$. Quindi la si può riscrivere

$$\exists y z [x=fy \wedge y=z \wedge py \wedge qz].$$

Questa è chiaramente equivalente alla formula di destra.

11. Esempi

Siano A e B due insiemi definiti dalle formule $\alpha(x)$ e, rispettivamente, $\beta(x)$. Sia f un simbolo di funzione unaria e supponiamo che $\mathcal{U} : f \rightsquigarrow F$. La seguente formula afferma $A \subseteq F^{-1}[B]$.

$$\forall x [\alpha(x) \longrightarrow \beta(f(x))]$$

La seguente formula afferma invece che $B \subseteq F[A]$

$$\forall y \left[\beta(y) \longrightarrow \exists x \left[\alpha(x) \wedge f(x) = y \right] \right]$$

La seguente formula vale sse $F|_A$ è iniettiva:

$$\forall x, y \left[\alpha(x) \wedge \alpha(y) \wedge x \neq y \longrightarrow f(x) \neq f(y) \right].$$

Esercizi 542 – 547

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, f\}$ dove r è un predicato unario ed f è un simbolo di funzione unaria. Sia $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ un modello. Si scrivano formule che formalizzino le seguenti affermazioni (cioè formule la cui verità in $\mathcal{U}$ equivale alle seguenti affermazioni):

542 $F|_R$ è una funzione suriettiva.

543 $F|_R = \text{id}_R$.

544 $F|_R$ è una funzione iniettiva.

545 $F|_R$ è una funzione costante.

546 $R \subseteq \text{img } F$

547 $\text{img } F \subseteq R$

Esercizi 548 – 553

Dire quale extra ipotesi è necessaria per rendere vere le seguenti affermazioni; si scelga l'ipotesi più debole combinando le seguenti proprietà: totale, suriettiva, iniettiva. (Si può anche rispondere: non serve alcuna ipotesi.)

548 se $A \subseteq B$ allora $F^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[B]$

549 se $A \subseteq B$ allora $F[A] \subseteq F[B]$

550 se $F^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[B]$ allora $A \subseteq B$

551 se $F[A] \subseteq F[B]$ allora $A \subseteq B$

552 $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$

553 $F^{-1}[A \cup B] = F^{-1}[A] \cup F^{-1}[B]$

12. Esempi

Sia L un linguaggio contenente un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di funzione binaria r . Sia $\mathcal{U}$ una struttura e sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ l'interpretazione di f in $\mathcal{U}$. Supponiamo che $\mathcal{U}$ interpreti il predicato r con il grafo della funzione F . Avremo dunque:

$$\mathcal{U} \models \forall x y [r(x, y) \leftrightarrow f(x) = y]$$

Ogni formula ha anche un sinonimo dove al posto del simbolo di funzione f si usa il simbolo di relazione r . Per esempio, la formula $\varphi(fx)$ è, in $\mathcal{U}$, perfettamente equivalente a

$$\exists y [r(x, y) \wedge \varphi(y)].$$

Ma questa non è l'unica possibilità: $\varphi(fx)$ è anche equivalente (in $\mathcal{U}$) a

$$\forall y [r(x, y) \rightarrow \varphi(y)].$$

Esercizi 554 – 557

Sia L un linguaggio contenente un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di funzione binaria r . Sia $\mathcal{U}$ una struttura e sia F l'interpretazione di f . Supponiamo che $\mathcal{U}$ interpreti r con il grafo della funzione F . Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Senza usare il simbolo f , si scriva una formula che affermi:

554 vale $\varphi(f^2x)$

556 F è iniettiva

555 F è suriettiva

557 F è costante

Esercizi 558 – 561

Sia L un linguaggio contenente un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di costante c . Sia $\mathcal{U}$ una struttura e sia F l'interpretazione di f . Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Si scriva una formula che affermi

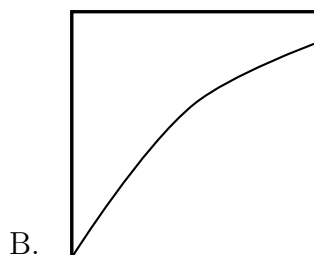
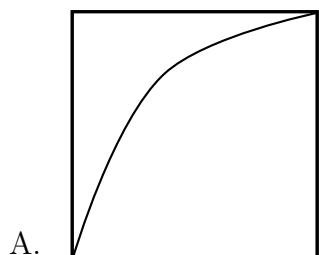
558 $\varphi(a)$ vale per ogni $a \in F^{-1}[c]$

559 $\varphi(a)$ vale per qualche $a \in F^{-1}[c]$

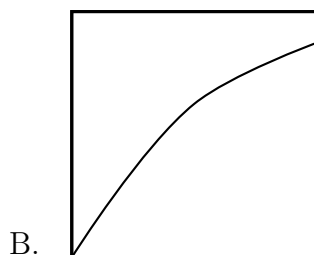
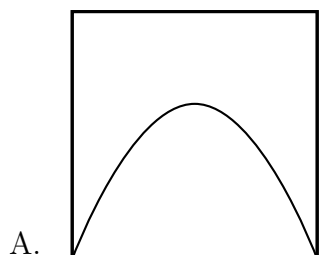
Esercizi 560 – 562

Il linguaggio contiene solo il simbolo f per funzione unaria. Consideriamo le coppie di modelli $\langle \mathbb{U}, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva, se esiste, una formula senza parametri vera in A e falsa in B per le seguenti coppie di modelli.

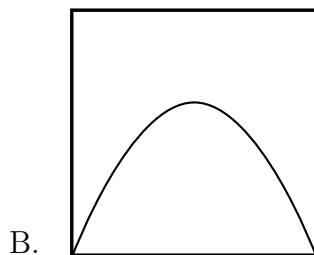
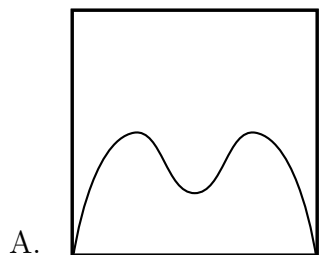
560



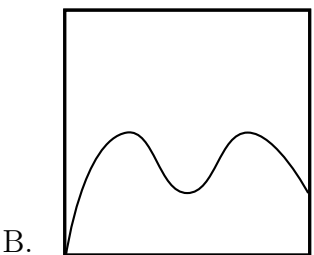
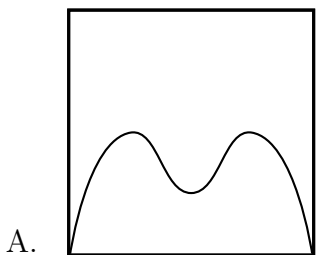
561



562

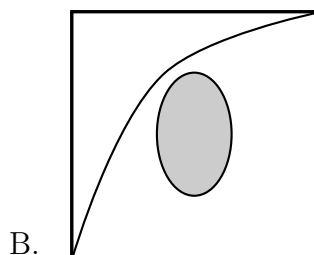
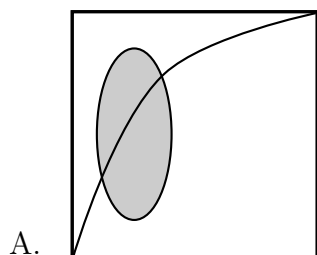
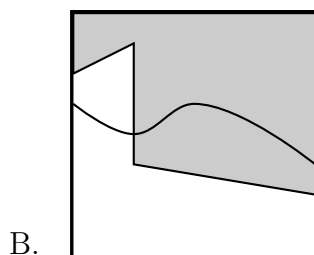
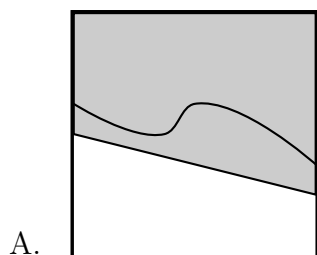
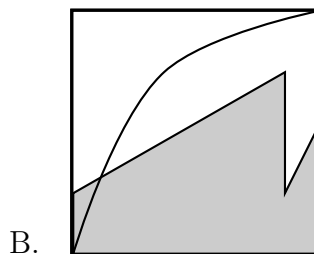
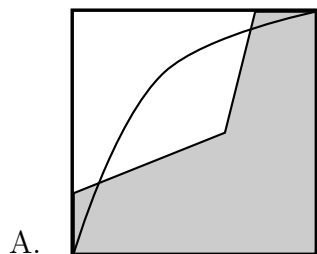
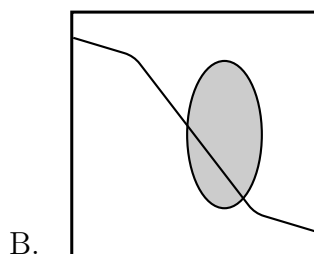
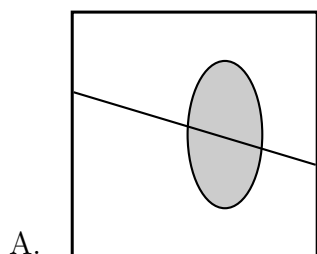


563

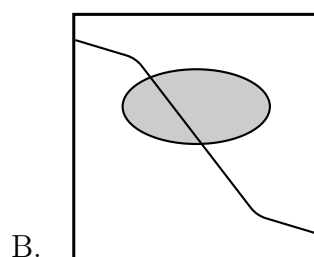
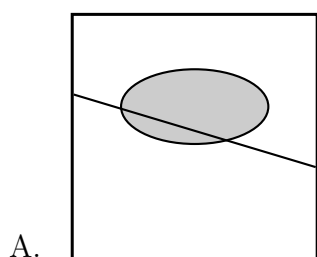


Esercizi 564 – 569

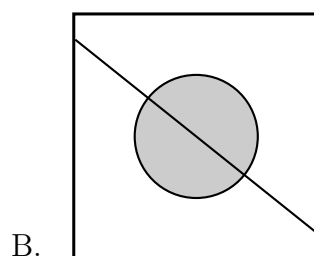
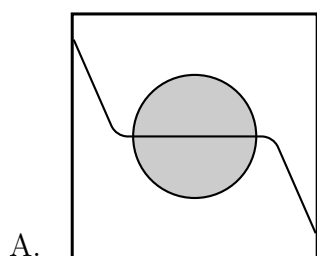
Il linguaggio contiene solo il predicato binario r ed un simbolo f per funzione unaria. Consideriamo le coppie di modelli $\langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, la relazione R è l'area evidenziata, e della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva, se esiste, una formula senza parametri vera in A e falsa in B per le seguenti coppie di modelli.

564**565****566****567**

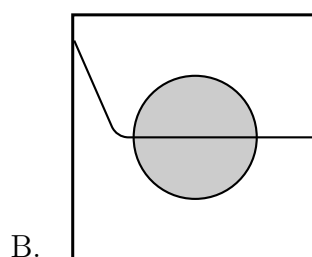
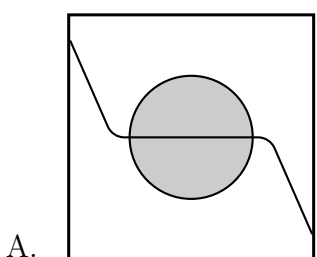
568



569

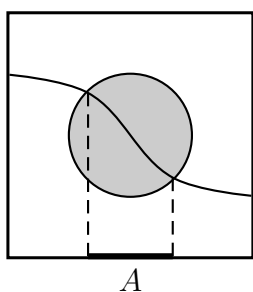


570

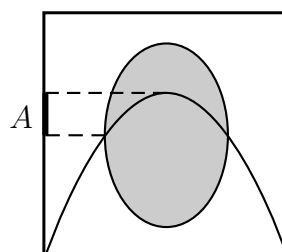
**Esercizi 571 – 574**

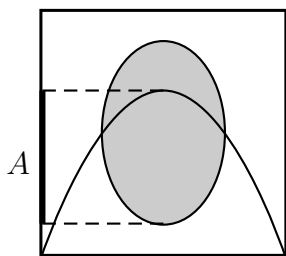
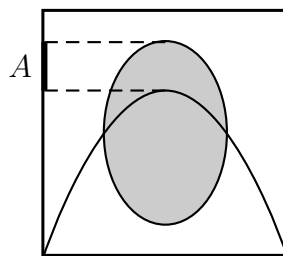
Il linguaggio contiene solo il predicato binario r ed un simbolo f per funzione unaria. Consideriamo i modelli $\langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva una formula che definisce l'insieme A in figura.

571



572



573**574**

Capitolo 12

L'induzione

In questo capitolo introdurremo due strutture che giocano un ruolo fondamentale nella logica e nell'informatica: il modello standard dell'aritmetica e gli alberi binari.

1. Il modello standard dell'aritmetica

Il linguaggio dell'aritmetica contiene due simboli di costante, indicati con 0 ed 1, due simboli di funzione binaria $+$ e $\cdot$, ed un simbolo di relazione binaria $<$. Il modello standard dell'aritmetica $\mathcal{N}$ è la struttura con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta la costante 0 nello 0 di $\mathbb{N}$ e 1 nell'1 di $\mathbb{N}$ (per comodità si usano gli stessi simboli per gli elementi del linguaggio e per gli elementi di $\mathbb{N}$, ma a rigore si tratta di cose diverse); $\mathcal{N}$ interpreta $+$ e $\cdot$, nell'usuale somma e moltiplicazione dei numeri naturali. Il simbolo $<$ viene interpretato nell'usuale ordine dei numeri naturali.

Esercizi 575 – 578

Sia $\mathcal{N}$ il modello standard dell'aritmetica. Si scriva una formula $\varphi(x)$ (casus quo, $\varphi(x, y)$) che in $\mathcal{N}$ definisca

575 l'insieme dei numeri pari,

576 l'insieme dei multipli di, 3

577 l'insieme dei numeri primi,

578 l'insieme dei numeri che sono somma di due quadrati,

579 l'insieme delle coppie il cui secondo elemento è multiplo del primo.

2. L'induzione

Negli esercizi di questo capitolo incontreremo molte formule della forma $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(tx)]$ più in generale $\forall x [\sigma(sx) \rightarrow \sigma(tx)]$. La più semplice formula di questo tipo è la seguente:

$$(\#) \quad \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)]$$

Se immaginiamo il quantificatore universale come una congiunzione infinita otteniamo:

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} [\sigma(i) \rightarrow \sigma(i+1)]$$

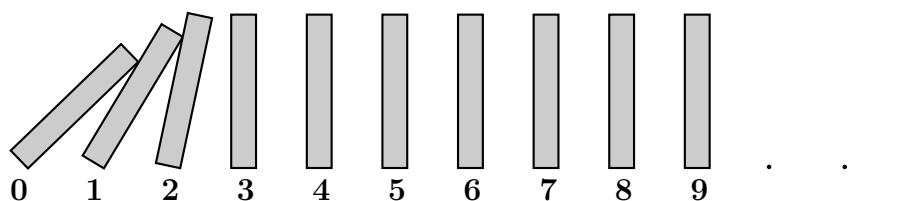
Per quanto visto nel paragrafo 13 del capitolo 16, da questa congiunzione segue $\sigma(h) \rightarrow \sigma(k)$ per qualsiasi $h \leq k$. In particolare $\sigma(0) \rightarrow \sigma(k)$ per ogni k . Avremo dunque che dalla formula $(\#)$ qui sopra segue $\sigma(0) \rightarrow \forall x \sigma(x)$. Riassumendo avremo che la seguente formula vale in $\mathcal{N}$ per qualsiasi sia $\sigma(x)$:

$$\sigma(0) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)] \rightarrow \forall x \sigma(x)$$

Questo si chiama **principio di induzione**.

3. Effetto domino

Un'immagine a volte associata al principio di induzione è quella di una successione di pezzi di domino messi in piedi in equilibrio precario, distanti tra loro meno della loro altezza. Così se un pezzo cade verso destra fa cadere verso destra quello adiacente. Se cade il primo, fa cadere il secondo, che fa cadere il terzo, e tutti cadono.



Esercizi 580 – 585

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere in $\mathcal{N}$.

580 $\sigma(0) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

584 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)]$

581 $\sigma(1) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

585 $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x)]$

582 $\sigma(1) \rightarrow \forall x \sigma(x+1)$

586 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x)$

583 $\sigma(2) \rightarrow \forall x \sigma(2x)$

587 $\forall x \sigma(2x) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

Esercizi 588 – 593

Come nell'esercizio precedente ma si assuma che

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x+1) \rightarrow \sigma(x)].$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere in $\mathcal{N}$.

588 $\sigma(0) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

591 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x+1)$

589 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \sigma(0)$

592 $\forall x \sigma(2x) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

590 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x)$

593 $\forall x \sigma(3x) \rightarrow \forall x \sigma(2x)$

Esercizi 594 – 604

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che

$$\mathcal{N} \models \forall x \neg [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+1)],$$

Dire, se possibile, quali sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ definiti dalle seguenti formule?

594 $\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(1)$

599 $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+2)$

595 $\sigma(1) \leftrightarrow \sigma(2)$

600 $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x^2)$

596 $\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(2)$

601 $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(2x)$

597 $\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(x)$

602 $\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(2x)$

598 $\sigma(1) \leftrightarrow \sigma(x)$

603 $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(3x)$

604 $\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(3x)$

605 $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(6x)$

Suggerimento: ci sono due possibilità, $\sigma(x)$ definisce l'insieme dei numeri pari (indichiamolo con P), o $\sigma(x)$ definisce l'insieme dei numeri dispari (indichiamolo con D). Si osservi anche che la formula $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(y)$ è vera sse $|x - y|$ è pari.

Esercizi 606 – 611

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che,

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)],$$

Si dica se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$.

606 $\sigma(0) \rightarrow \sigma(8)$

609 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \sigma(2)$

607 $\sigma(1) \rightarrow \sigma(8)$

610 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(8x)]$

608 $\sigma(3) \rightarrow \sigma(8)$

611 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(6x)]$

Esercizi 612 – 619

Per le seguenti formule $\sigma(x)$ dire se in $\mathcal{N}$ vale $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x + 2)]$ ed altrimenti dire qual'è il minimo x per cui $\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x + 2)$ non vale.

612 $5 < x$

617 $\exists z 2z = x$

613 $x < 5$

618 $\exists z 3z = x$

614 $x = 0$

619 $\exists z 4z = x$

615 $x = 1$

620 $\exists z 2z + 1 = x$

616 $x = 2$

621 $\exists z 3z + 2 = x$

Esercizi 622 – 625

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica.

622 Si elenchino tutte, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x + 2)].$$

623 Si elenchino tutte, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(3) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

624 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+100)] ?$$

625 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(3) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+1)] ?$$

Esercizi 626 – 628

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica e sia n un arbitrario numero positivo.

626 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$[\sigma(n) \leftrightarrow \sigma(0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

627 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(0) \wedge [\sigma(2n) \rightarrow \sigma(1)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

628 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(0) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+n)].$$

Esercizi 629 – 632

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica e sia n un arbitrario numero positivo.

629 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(2n) \wedge \sigma(1) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

630 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(2n) \wedge \sigma(2n+3) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

631 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x \sigma(x + 3n) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x + 3)].$$

632 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x [n^2 \leq x \rightarrow \sigma(x)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x + n)].$$

Esercizi 633 – 639

Nel modello standard dell'aritmetica, fissiamo un generico numero n . Dire quante sono (in funzione di n) gli insiemi definiti da una qualche formula $\sigma(x)$ che soddisfa $\forall x \sigma(6n + x)$ e tale che

633 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x + 1)]$

634 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x + 2)]$

635 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x + 3)]$

636 $\forall x [\sigma(x + 1) \rightarrow \sigma(x + 3)]$

637 $\forall x [\sigma(x + 2) \rightarrow \sigma(x + 3)]$

638 $\forall x [\sigma(x + 3) \rightarrow \sigma(x + 3)]$

639 $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(2x + 2)]$

Esercizi 640 – 643

Consideriamo l'insieme dei modelli $\langle \mathbb{N}, F \rangle$ tali che rendono vera la formula

$$\forall x [f(x) \leq f(x + 1) \leq f(x) + 2].$$

Di questi modelli si dica quanti rendono vere le seguenti formule (Qui n è un intero maggiore di 2, la risposta va espressa in funzione di n):

640 $f(0) = 0 \wedge \forall x [f(x + n) = f(x + n + 1)]$

641 $f(0) = 5 \wedge \forall x [f(x + n) = f(x + n + 1)]$

642 $\forall x f(x+n) = 1$

643 $\forall x f(x+n) = 2$

Esercizi 644 – 645

Consideriamo l'insieme dei modelli $\langle \mathbb{N}, F \rangle$ tali che rendono vera la formula

$$\forall x [f(x) \leq f(x+1) + 1 \leq f(x) + 2].$$

644 Si dica, in funzione di n , quanti sono possibili m , per cui la formula $f(0) = n \wedge f(n) = m$ è consistente.

645 Si dica quanti modelli rendono vere la seguenti formula
$$f(1) = n \wedge \forall x [f(x+n) = f(x+n+1)]$$

Esercizi 646 – 651

Sia L il linguaggio dell'aritmetica e sia $\mathcal{N}$ il modello standard. Sia $\sigma(x)$ una formula tale che,

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)],$$

Dire se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$:

646 $\forall x y [\sigma(xy) \rightarrow \sigma(2xy)]$

647 $\forall x y [\sigma(xy) \rightarrow \sigma(4xy)]$

648 $\forall x y [\sigma(x) \wedge \sigma(y) \rightarrow \sigma(4xy)]$

649 $\forall x y [\sigma(x) \wedge \sigma(y) \rightarrow \sigma(2x+2y)]$

Esercizi 650 – 653

Si scrivano tutte le formule $\psi(x)$ tali che nel modello standard dell'aritmetica valga:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x+2)] \quad \text{e} \quad \forall x [\psi(x+1) \rightarrow \varphi(x)].$$

Per $\varphi(x)$ si prendano le seguenti formule (la risposta *nessuna* è tra le possibili):

650 $\top$ **652** $\exists z \ 2z = x$ **651** $\perp$ **653** $4 \leq x$ **Esercizi 654 – 658**

Consideriamo gli insiemi $S \subseteq \mathbb{Q}$ tali che

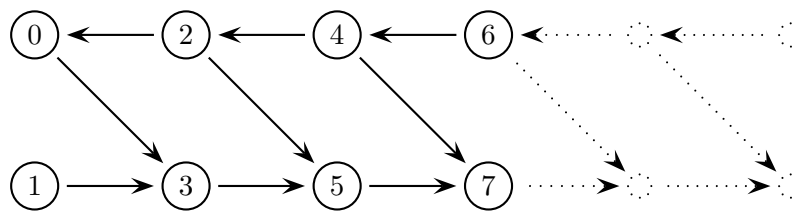
$$\forall x, y \ [x \in S \wedge y \in S \rightarrow x - y \in S].$$

654 Si elenchino tutte i possibili insiemi tali che $0 \notin S$?**655** Qual'è il più piccolo insieme S non vuoto ?**656** Qual'è il più piccolo insieme S che contiene 1 ?**657** Qual'è il più piccolo insieme S che contiene $1/2$?**658** Si dia un esempio infinito tale che $1 \notin S$.**Esercizi 659 – 662**

Consideriamo gli insiemi S come sopra. Si risponda alle seguenti domande e si dia, in caso di risposta negativa, un controesempio.

659 E vero che $\forall x \ [x \in S \rightarrow 2x \in S]$?**660** E vero che $\forall x \ [x \in S \rightarrow 2x + 1 \in S]$?**661** Assumendo $1 \in S$, è vero che $\forall x \ [x \in S \rightarrow 4x + 1 \in S]$?**662** Assumendo $1/2 \in S$, è vero che $\forall x \ [x \in S \rightarrow x/2 \in S]$?**Esercizi 663 – 670**

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Per ciascuna delle formule $\alpha(x)$ qui sotto. Dire se nel modello standard vale

$$\exists x \alpha(x) \quad \wedge \quad \forall x y [\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y)]$$

663 $\exists z \, 2z = x$

667 $x > 2$

664 $x \neq 1$

668 $x > 1$

665 $\exists z \, 2z + 1 = x$

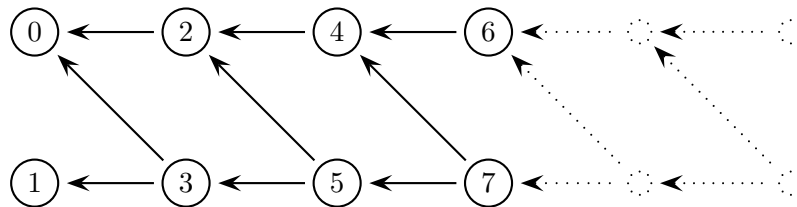
669 $x \neq x$

666 $x > 4$

670 $x > 4 \quad \wedge \quad \exists z \, 2z + 1 = x$

Esercizi 671 – 676

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Sia $\alpha(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che, nel modello standard valga

$$\exists x \alpha(x) \quad \wedge \quad \forall x y [\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y)]$$

Quali delle seguenti formule sono vere:

671 $\alpha(5) \rightarrow \alpha(0)$

674 $\forall x \alpha(2x + 1) \rightarrow \forall x \alpha(2x)$

672 $\alpha(0) \vee \alpha(1)$

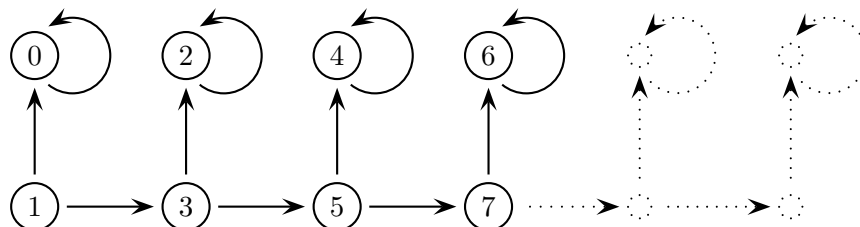
675 $\exists x \alpha(2x + 1)$

673 $\forall x \alpha(2x) \rightarrow \forall x \alpha(2x + 1)$

676 $\exists x \alpha(2x)$

Esercizi 677 – 680

Come sopra, ma ora supponiamo che la relazione definita da $\sigma(x, y)$ sia quella rappresentata nel seguente diagramma:



677 $\exists x \alpha(2x)$

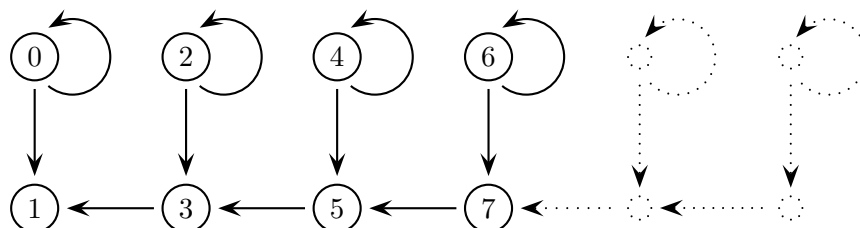
679 $\alpha(1) \rightarrow \forall x \alpha(x)$

678 $\exists x \alpha(2x + 1)$

680 $\alpha(0) \rightarrow \forall x \alpha(x)$

Esercizi 681 – 684

Come sopra, ma ora supponiamo che la relazione definita da $\sigma(x, y)$ sia quella rappresentata nel seguente diagramma:



681 $\alpha(1)$

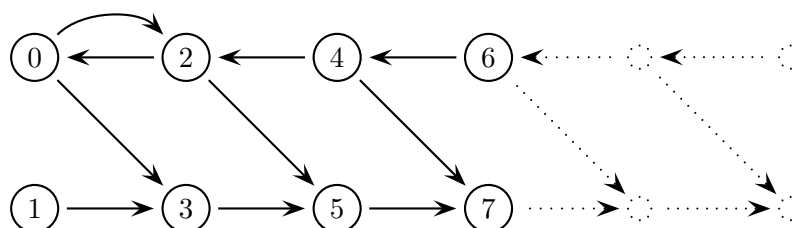
683 $\exists x \alpha(2x)$

682 $\alpha(0)$

684 $\exists x y [\alpha(x) \wedge \alpha(y) \wedge x \neq y]$

Esercizi 685 – 692

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



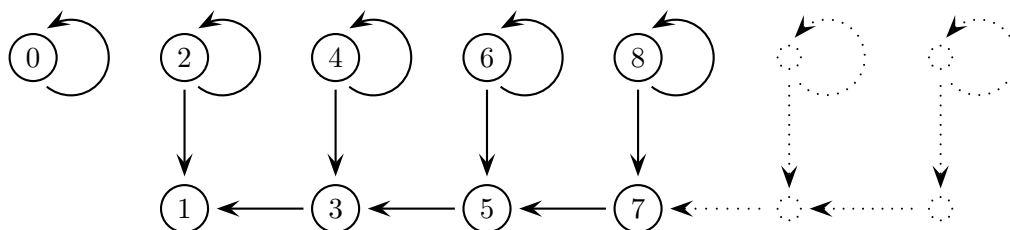
Consideriamo la classe degli insiemi A definiti da una qualche formula $\alpha(x)$ che soddisfa:

$$\forall x \left[\alpha(x) \rightarrow \exists y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y)] \right]$$

- 685** Qual'è il più piccolo di questi insiemi ?
- 686** Qual'è il più grande di questi insiemi ?
- 687** Qual'è il più piccolo insieme A contenente 0 ?
- 688** Qual'è il più piccolo insieme A contenente 1 ?
- 689** Qual'è il più piccolo insieme A contenente 1 e 0 ?
- 690** Esiste un insieme A contenente 2 ma non 0 ?
- 691** Qual'è il più piccolo insieme A contenente 8 ?
- 692** Qual'è il più piccolo insieme A contenente 7 e 8 ?

Esercizi 693 – 696

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Si descrivano gli insiemi che possono essere definiti da una qualche formula $\alpha(x)$ che soddisfa:

- 693** $\forall x y \left[\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y) \right]$
- 694** $\forall x y \left[\alpha(y) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(x) \right]$

$$695 \quad \forall x \left[\exists y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y)] \rightarrow \alpha(x) \right]$$

$$696 \quad \forall x \left[\alpha(x) \rightarrow \exists y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y)] \right]$$

1. I sottoinsiemi di $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. I sottoinsiemi di $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Gli insiemi del tipo $\{2x + 1 : 2x + 1 < n \text{ per qualche } n \in A \cup B\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1) e B una qualsiasi insieme in (2).
4. Gli insiemi del tipo $\{2x : 2x < n \text{ per qualche } n \in A \cup B\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1) e B una qualsiasi insieme in (2).
5. Gli insiemi del tipo $A \cup \{x : x > n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1).
6. Gli insiemi del tipo $B \cup \{x : x > n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (2).

4. Gli insiemi di parole

Veniamo ora ad un tipo di struttura che occorre molto di frequente in informatica. Sia Σ un insieme qualunque (ma in quasi tutti gli esempi sarà un insieme finito). Una **parola** (o **stringa**) di **alfabeto** Σ è una sequenza finita di lunghezza arbitraria di elementi di Σ . Formalmente, una **sequenza finita** è una funzione parziale

$$w : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$$

tale che $\text{dom } w = \{0, 1, \dots, n-1\}$ per un qualche n . Questo n è chiamato lunghezza della parola w e viene denotato con $\text{lh } w$ oppure anche con $|w|$ (si noti che coincide con la cardinalità del grafo della funzione w). Quando $n = 0$ allora $\text{dom } w = \emptyset$. Spesso le sequenze finite vengono definite enumerando alcuni elementi dell'alfabeto Σ , per esempio scrivendo $w = a_0 \dots a_{n-1}$, intenderemo la sequenza:

$$0 \xrightarrow{w} a_0, \quad 1 \xrightarrow{w} a_1, \quad \dots, \quad n-1 \xrightarrow{w} a_{n-1}$$

Formalmente questa notazione è ambigua perchè confonde la sequenze di lunghezza uno con gli elementi di Σ . In pratica però il rischio è limitato perchè il contesto aiuta sempre a disambiguare.

L'insieme delle parole di alfabeto Σ è spesso denotato con Σ^* oppure con il simbolo $\Sigma^{<\omega}$. Il primo simbolo è più frequentemente usato dagli informatici il secondo dai logici, che usano il simbolo Σ^ω per denotare l'insieme delle sequenze di lunghezza infinita.

L'alfabeto più usato è l'insieme $\{0, 1\}$ che in logica viene anche denotato con 2 . Spesso infatti un numero naturale n viene usato per denotare l'insieme $\{0, \dots, n-1\}$ dei suoi predecessori.

L'operazione fondamentale definita tra le parole è la **concatenazione**: date due parole w e v la parola $w \cdot v$ è sequenza di lunghezza $\text{lh } w + \text{lh } v$ ottenuta prefissando v con w :

$$w \cdot v \quad : \quad n \mapsto \begin{cases} w(n) & \text{se } n < \text{lh } w, \\ v(n) & \text{se } \text{lh } w \leq n < \text{lh } v, \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Spesso il simbolo $\cdot$ viene omissso e si scrive semplicemente wv .

Dato un alfabeto Σ definiamo quindi un linguaggio L_Σ con

- il simbolo di costante $\emptyset$,
- un simbolo di costante per ogni elemento di Σ (denoteremo queste costanti con gli stessi simboli usati per denotare gli elementi di Σ ma è bene ricordare che si tratta di oggetti diversi),
- un simbolo $\cdot$ di funzione binaria,
- un simbolo $\sqsubseteq$ di relazione binaria.

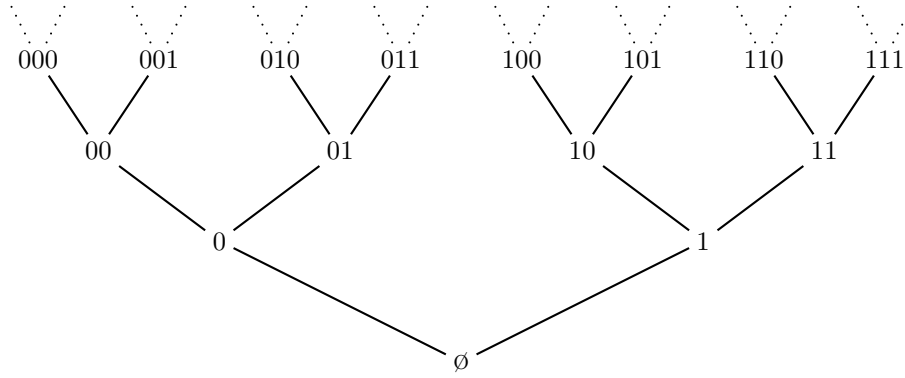
Il simbolo $\cdot$ si usa con notazione infissa ed è spesso omissso. Definiamo anche una struttura $\mathcal{W}_\Sigma$ con dominio $\Sigma^{<\omega}$ dove:

- $\emptyset$ è interpretato nella stringa vuota,
- le altre costanti (quelle che corrispondono a elementi di Σ) sono interpretate nelle corrispondenti parole di lunghezza 1,
- il simbolo $\cdot$ è interpretato nell'operazione di concatenazione,
- un simbolo $\sqsubseteq$ è interpretato nella relazione *essere un prefisso di*.

Si noti che $v \sqsubseteq w$ vale se e solo se $\exists x \, vx = w$, la relazione è dunque definibile e non è strettamente necessario introdurla come primitiva

5. Gli alberi binari

L'insieme $2^{<\omega}$ delle parole sull'alfabeto $\{0, 1\}$ è un esempio particolarmente importante. Queste insieme viene spesso rappresentato come un **albero binario**:



ogni sequenza in $2^{<\omega}$ corrisponde ad un nodo dell'albero binario. Sia $\sigma(x)$ una formula tale che:

$$\mathcal{W}_2 \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x0) \wedge \sigma(x1)]$$

allora è facile concludere che:

$$\mathcal{W}_2 \models \sigma(\emptyset) \rightarrow \forall x \sigma(x).$$

Questa è la forma che il principio di induzione in $\mathcal{W}_2$.

Esercizi 697 – 704

Sia $\mathcal{U}$ un modello che espande la struttura $\mathcal{W}_2$ definita qui sopra. Si dica a cosa è equivalente la verità in $\mathcal{U}$ di ciascuna delle seguenti formule:

697 $\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$

698 $\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$

699 $\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$

700 $\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$

701 $\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$

702 $\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$

703 $\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$

704 $\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

- A. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero pari di 0.
- B. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero dispari di 0.
- C. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero pari di 1.
- D. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero dispari di 1.
- E. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole di lunghezza pari.
- F. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole di lunghezza dispari.
- G. $\sigma(x)$ definisce $\emptyset$
- H. $\sigma(x)$ definisce $2^{<\omega}$

Relazioni binarie

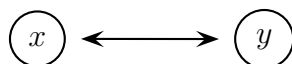
In questo capitolo introdurremo e commenteremo brevemente alcune proprietà notevoli delle relazioni binarie. Per più chiarezza, tradurremo ogni definizione anche nella logica del prim'ordine. Per brevità, e per migliorare la leggibilità, scriveremo direttamente $x R y$ invece di introdurre prima un predicato binario $r(x, y)$ e poi un'interpretazione $r \rightsquigarrow R$.

1. La simmetria

Una relazione si dice **simmetrica** se $x R y$ è equivalente a $y R x$ per ogni coppia $\langle x, y \rangle$. In notazione formale:

$$\forall x, y \left[x R y \rightarrow y R x \right]$$

Pensando al diagramma: una relazione è simmetrica se ogni freccia del diagramma è del tipo “bidirezionale”:



2. L'antisimmetria

Una relazione si dice **antisimmetrica** se per ogni $x, y \in \mathbb{U}$ distinti, non si ha mai contemporaneamente $x R y$ e $y R x$. In notazione formale:

$$\forall x, y \left[x \neq y \rightarrow \neg [x R y R x] \right],$$

ovvero

$$\forall x, y \left[x R y R x \rightarrow x = y \right].$$

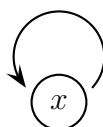
Va notato che l'antisimmetria non è la negazione della simmetria ! Una relazione potrebbe essere nè simmetrica nè antisimmetrica. Simmetria e antisimmetria non sono nemmeno mutualmente esclusive: tutte le relazioni che sono sottoinsiemi della diagonale di $\mathbb{U}$, sono sia simmetriche che antisimmetriche.

3. La riflessività

Una relazione R su $\mathbb{U}$ si dice **riflessiva** se la coppia $\langle x, x \rangle$ appartiene ad R per ogni elemento x di $\mathbb{U}$. In altre parole, una relazione su $\mathbb{U}$ è riflessiva se contiene la diagonale di $\mathbb{U}$. In notazione formale, R è riflessiva se:

$$\forall x \, x R x$$

Tradotto graficamente: una relazione è riflessiva se da ogni nodo parte una freccia che punta sul nodo stesso:



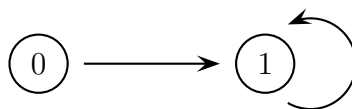
Una relazione R su $\mathbb{U}$ è anche una relazione su un qualsiasi altro universo $\mathbb{V}$ che contiene $\mathbb{U}$. È facile osservare che la simmetria di R non dipende dall'universo: R è simmetrica su $\mathbb{U}$ sse R è simmetrica su $\mathbb{V}$. Lo stesso vale per l'antisimmetria. Invece una relazione che è riflessiva su $\mathbb{U}$ non è sicuramente riflessiva su nessun universo $\mathbb{V}$ che contiene propriamente $\mathbb{U}$.

4. L'irriflessività

Una relazione si dice **irriflessiva** se non contiene nessuna coppia del tipo $\langle x, x \rangle$. In notazione formale:

$$\forall x \, \neg x R x$$

Si noti che l'irriflessività non è la negazione della riflessività. Se il dominio $\mathbb{U}$ è non vuoto allora riflessività e irriflessività sono mutualmente esclusive. Esistono relazioni che non sono nè riflessive nè irriflessive: è sufficiente contenere *qualche* coppia del tipo $\langle x, x \rangle$ ma non contenere *tutte* le coppie del tipo $\langle x, x \rangle$. Per esempio, la relazione rappresentata dal seguente diagramma non è nè riflessiva nè irriflessiva:



5. Tournaments

Una relazione si dice **totale** o **completa** se per ogni due distinti $x, y \in \mathbb{U}$, vale $x R y$ o $y R x$. In notazione formale:

$$\forall x, y \, [x \neq y \rightarrow x R y \vee y R x].$$

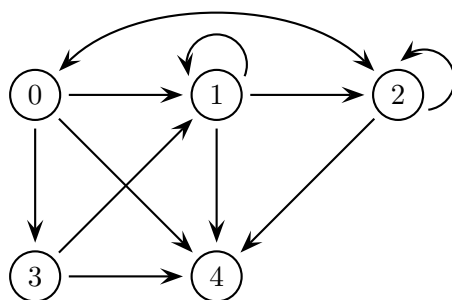
Ovvero, pensando al diagramma della relazione, ogni coppia di nodi è sempre congiunta da (almeno) una freccia.

Una relazione che è simultaneamente

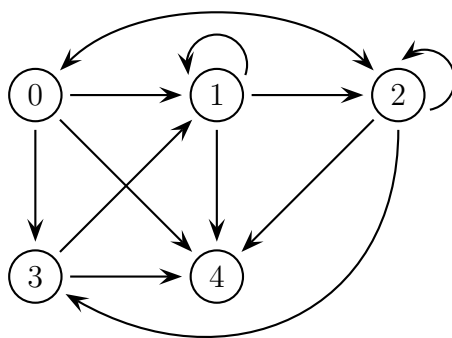
- irreflessiva,
- antisimmetrica, e
- completa,

è detta un **torneo** o **tournament** (si immagini $a R b$ come l'esito di una partita di un torneo: *la squadra a vince la squadra b*).

Per esempio, la relazione rappresentata dal seguente diagramma non è completa:



Aggiungendo però una freccia (in una direzione qualsiasi) tra 2 e 3 otteniamo una relazione completa:



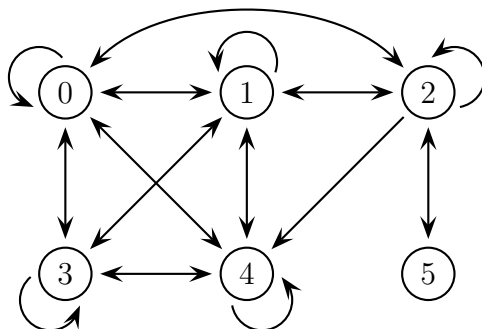
Queste relazioni non sono nè simmetriche nè antisimmetriche. Togliendo la coppia $\langle 0, 2 \rangle$ (o, alternativamente, la coppia $\langle 2, 0 \rangle$) si ottiene una relazione antisimmetrica. Eliminando anche le coppie $\langle 1, 1 \rangle$ e $\langle 2, 2 \rangle$, la seconda relazione diventa un torneo.

6. Le clique

Un insieme A è detto essere una **clique** della relazione R se $A^2 \subseteq R$. N.B. Qualcuno invece chiama *clique* di R la sottorelazione A^2 . Il contesto generalmente previene qualsiasi ambiguità. Un sottoinsieme di una clique è ovviamente anche una clique. Una clique si dice **massimale** se non è sottoinsieme proprio di un'altra clique.

7. Esempi

Gli insiemi $\{0, 1, 2\}$ e $\{0, 1, 3, 4\}$ sono clique massimali della relazione rappresentata dal seguente diagramma.



Notiamo anche che l'insieme $\{1, 2, 4\}$ non è una clique perchè manca $\langle 4, 2 \rangle$ mentre $\{2, 5\}$ non è una clique perchè manca $\langle 5, 5 \rangle$.

La formula $x \leq y$ definisce su $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ una relazione riflessiva e antisimmetrica. La formula $x < y$ definisce invece una relazione irreflessiva e antisimmetrica.

Consideriamo la relazione su $\mathbb{N}$

$$\left\{ \langle x, y \rangle : y \text{ è un multiplo di } x \right\}$$

dove per: y è *multiplo di* x , intendiamo che $\exists z (xz = y)$ valutata nei numeri naturali. Questa relazione è riflessiva: ogni numero è multiplo di se stesso (si prenda 1 come testimone di $\exists z$ qui sopra). Chiaramente non è nè simmetrica. Mostriamo che invece è antisimmetrica. Supponiamo di avere contemporaneamente $x = ny$ e $y = mx$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$. Mostriamo che $x = y$. Da $x = ny$ e $y = mx$ segue che $x = nm x$. Se $x \neq 0$ otteniamo che $n = m = 1$ e quindi $x = y$. Se invece $x = 0$ allora da $y = mx$ segue che $y = 0$, quindi anche in questo caso possiamo concludere $x = y$.

Consideriamo ora la relazione su $\mathbb{Z}$

$$\left\{ \langle x, y \rangle : x - y \text{ è un multiplo di } 7 \right\}$$

dove per: $x - y$ è *multiplo di* 7, intendiamo che $\exists z (7z = x - y)$ vale nei numeri interi. Questa relazione è riflessiva e simmetrica.

La relazione su $\mathbb{Q}$

$$\left\{ \langle x, y \rangle : x - y \in \mathbb{Z} \right\}$$

è riflessiva e simmetrica.

La relazione su $\mathbb{R}$

$$\left\{ \langle x, y \rangle \quad : \quad (x - y)^2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

è riflessiva e simmetrica.

Esercizi 705 – 711

Fissiamo un universo $\mathbb{U}$ non vuoto. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni coppia di insiemi A e B entrambi non vuoti ed in caso contrario fornire un controesempio.

705 Se $A^2 \cup B^2$ è riflessiva allora $A \cap B = \emptyset$.

706 Se $A^2 \cup B^2$ è riflessiva allora $A \cup B = \mathbb{U}$.

707 Se $A \times B$ è simmetrica allora $A = B$.

708 Se $A \times B$ è completa allora $A = B = \mathbb{U}$.

709 Se $A^2 \cup B^2$ è simmetrica.

710 $(A \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times B) = A \times B$.

711 Se si omette l'ipotesi $A \neq \emptyset \neq B$, una delle risposte qui sopra cambia. Quale?

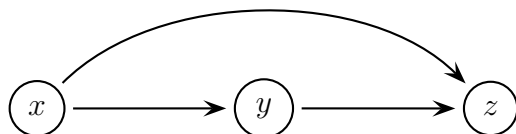
La transitività

1. La definizione

Una relazione si dice **transitiva** se per ogni tre elementi del dominio x , y e z tali che $x R y R z$ si ha che $x R z$. Graficamente: se per tre nodi x , y , e z esistono le due frecce:



allora deve esistere anche una terza freccia che collega direttamente il nodo x al nodo z :



In notazione formale:

$$\forall x, y, z \left[x R y R z \rightarrow x R z \right]$$

Le relazioni transitive sono anche chiamate **preordini**.

2. Osservazione

Si noti che gli elementi x , y , e x nella formula qui sopra non devono necessariamente essere distinti. Quindi se R è transitiva e vale $x R y R x$ allora avremo che $x R x$ e, poichè da $x R y R x$ segue $y R x R y$, avremo anche $y R y$. Graficamente: se R è transitiva e dai due nodi x , y partono le due frecce:



allora esistono altre due altre frecce che collegano i nodi x ed y con se stessi:

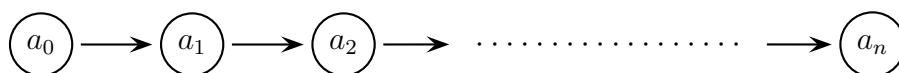


3. I cammini

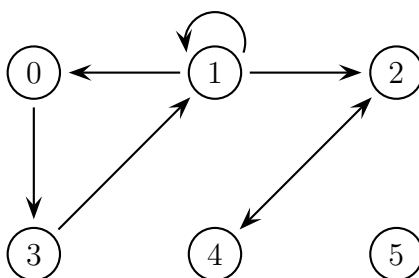
Un **cammino** di lunghezza n in R è una sequenza $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ di elementi del dominio tali che:

$$a_0 R a_1 R a_2 R \dots R a_n$$

Graficamente:



Se i nodi $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono distinti il cammino si dice **proprio** altrimenti si dice **improprio**. Per esempio consideriamo la relazione su $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ rappresentata nel seguente diagramma:

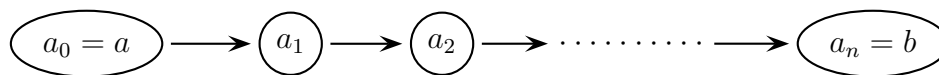


Le tre sequenze $\langle 3, 1, 1, 2 \rangle$, $\langle 3, 1, 0, 3 \rangle$, e $\langle 3, 1, 2, 4 \rangle$ sono cammini di lunghezza tre. I primi due sono impropri il terzo è un cammino proprio. Un cammino di lunghezza 0, cioè un nodo solo, è detto un cammino **banale**.

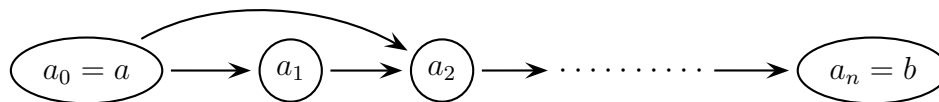
Spesso nell'indicare un cammino ometteremo le parentesi angolari.

4. La relazione di raggiungibilità

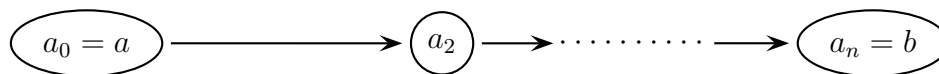
Diremo che b è **raggiungibile** in R dal nodo a se esiste un cammino non banale $a_0, a_1, \dots, a_n$ di R con $a_0 = a$ ed $a_n = b$. È immediato verificare che se R è transitiva allora b è raggiungibile da a sse aRb . Infatti se aRb allora il cammino è banalmente a, b . Supponiamo che $a_0, a_1, \dots, a_n$ sia un cammino da a a b . Esistono quindi le seguenti frecce:



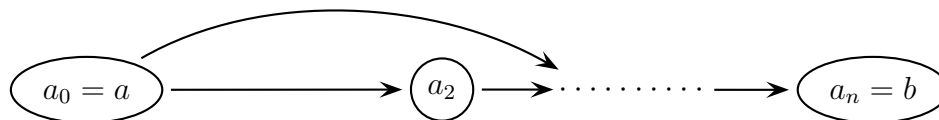
Per la transitività $a_0 R a_2$, quindi esiste anche una freccia da a ad a_2 :



Quindi anche omettendo a_1 , la sequenza $a_0, a_2, \dots, a_n$ rimane un cammino:



Di nuovo per la transitività esiste una freccia che connette a_0 direttamente con a_3 . Quindi omettendo a_2 , la sequenza $a_0, a_3, \dots, a_n$ rimane un cammino:



Quindi possiamo omettere anche il nodo a_2 e continuando in questo modo, arriviamo a concludere che a_0, a_n è un cammino:



Quindi che $a R b$.

5. La chiusura transitiva

Chiameremo **chiusura transitiva** di R la relazione

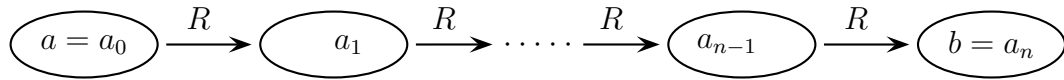
$$T(R) = \left\{ \langle a, b \rangle : b \text{ è raggiungibile in } R \text{ da } a \right\}$$

È immediato verificare che $T(R)$ è una relazione transitiva: se b è raggiungibile da a ed a è raggiungibile da c allora concatenando i cammino da c ad a con quello da a a b otteniamo un cammino da c a b . Quindi b è raggiungibile da c .

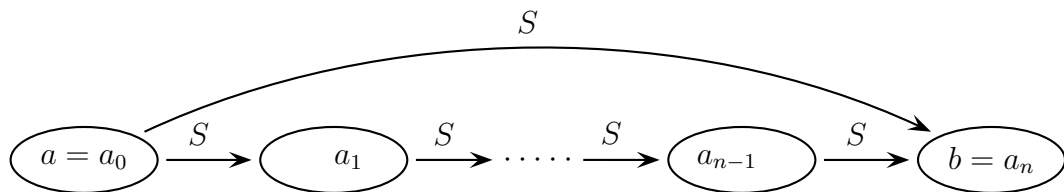
Dalla discussione nel paragrafo precedente è chiaro anche che se R è transitiva allora $T(R) = R$.

La chiusura transitiva soddisfa anche la seguente importante proprietà: se S è una qualsiasi relazione transitiva che contiene R allora S contiene anche $T(R)$.

Per verificare quest'asserzione dobbiamo mostrare che per ogni coppia $\langle a, b \rangle$ se $aT(R)b$ allora aSb . Supponiamo quindi che $aT(R)b$. Allora esiste un cammino $a_0, a_1, \dots, a_n$ in R che congiunge a con b :



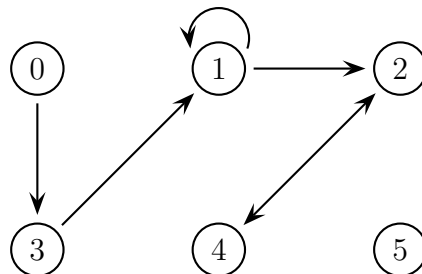
poichè S contiene R questa stessa sequenza di nodi sarà anche un cammino di S , quindi, poichè S è transitiva:



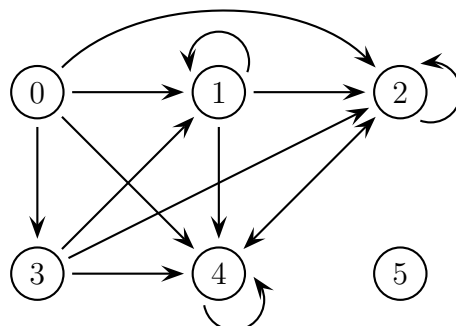
Concludiamo che aSb , come volevasi dimostrare.

6. Esempio

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia R la relazione con il seguente diagramma:



Il diagramma della chiusura transitiva di R è:



7. Chiusura

Vediamo un altro modo per definire la chiusura transitiva, più elegante e, in un certo senso, più generale poichè altri tipi di *chiusure* possono essere definiti con una definizione simile.

Definiamo $C(R)$ essere la **minima (nel senso dell'inclusione)** relazione transitiva che contiene R . Qui *minima nel senso dell'inclusione* significa che per ogni altra relazione transitiva S si ha

$$R \subseteq S \implies C(R) \subseteq S.$$

Vogliamo verificare che $C(R) = T(R)$ denoteremo la chiusura transitiva di R definita nel paragrafo precedente tramite la relazione di raggiungibilità e scriveremo $C(R)$ per quella definita qui sopra. Vogliamo mostrare che $T(R) = C(R)$. La verifica di questa uguaglianza si divide in due parti:

- $T(R) \subseteq C(R)$ segue da quanto verificato nel paragrafo precedente: $T(R)$ è contenuta in ogni relazione transitiva contenente R . Ma $C(R)$ è, per definizione, una relazione transitiva.
- $C(R) \subseteq T(R)$ segue dal fatto che $T(R)$ è una relazione transitiva che contiene R . Per la definizione qui sopra, tali relazioni contengono anche $C(R)$.

8. Esempio

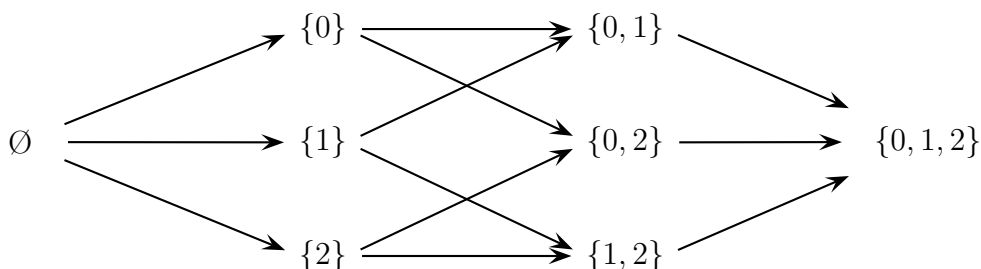
Prendiamo come universo l'insieme dei sottoinsiemi di $\{0, 1, 2\}$. La relazione

$$R : \{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \}$$

è ovviamente transitiva. La relazione R è la chiusura transitiva della relazione S così definita:

$$S : \{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| = 1 \}$$

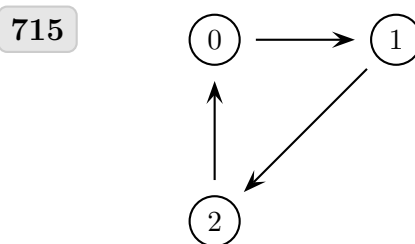
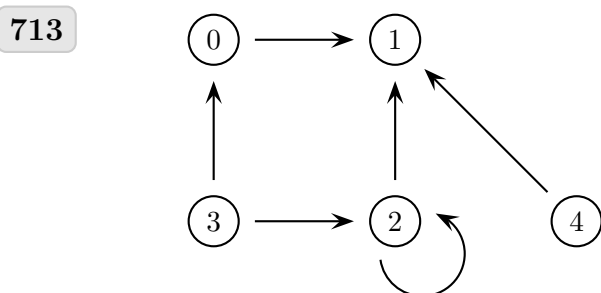
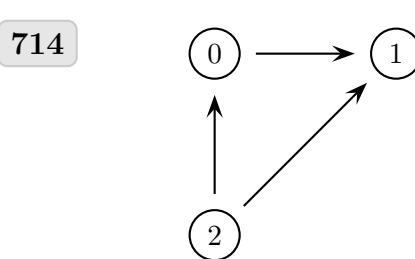
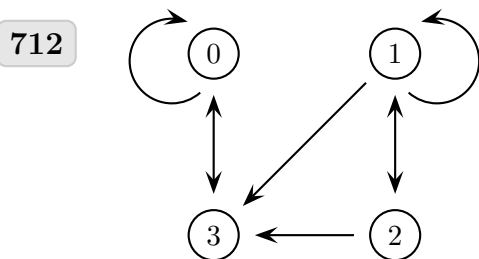
dove $|a|$ sta per la **cardinalità** (cioè il numero di elementi) dell'insieme a . La relazione S è rappresentata nella figura qui sotto:



Prendiamo le stesse definizioni di R ed S ma interpretiamole nell'universo che contiene *tutti* i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. È tradizione denotare questo insieme con il simbolo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (la lettera P sta per *parti*, un sinonimo di *sottoinsiemi*). In questo caso R non è più la chiusura transitiva di S , infatti non esiste nessun percorso (finito!) che congiunge $\emptyset$ a $\mathbb{N}$.

Esercizi 712 – 715

I seguenti diagrammi rappresentano delle relazioni binarie. Se ne disegni la chiusura transitiva.



Esercizi 716 – 720

Quali delle seguenti relazioni sono transitive?

716 $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : x \leq y \}$

717 $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : y \text{ è un multiplo di } x \}$

718 $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ è un multiplo di } 7 \}$

719 $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Q}^2 : x - y \in \mathbb{Z} \}$

$$\mathbf{720} \quad \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x - y)^2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Esercizi 721 – 724

Fissiamo come universo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sia

$$S := \{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| = 1 \},$$

$$R := \{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| = 2 \}.$$

si scriva la chiusura transitiva di

$$\mathbf{721} \quad S$$

$$\mathbf{723} \quad S \cup R$$

$$\mathbf{722} \quad R$$

$$\mathbf{724} \quad S \cap R$$

Esercizi 725 – 730

Sia $\varphi(x, y)$ una formula arbitraria dell'aritmetica. Sono le relazioni definite dalle seguenti formule transitive?

$$\mathbf{725} \quad \forall z [\varphi(x, z) \rightarrow \varphi(y, z)]$$

$$\mathbf{729} \quad \varphi(x, 0) \rightarrow \varphi(y, 0)$$

$$\mathbf{726} \quad \forall z [\varphi(x, 2z) \rightarrow \varphi(y, 2z)]$$

$$\mathbf{730} \quad \varphi(y, y) \rightarrow \varphi(x, x)$$

$$\mathbf{727} \quad \exists z [\varphi(x, z) \rightarrow \varphi(y, z)]$$

$$\mathbf{731} \quad \varphi(x, x) \wedge \varphi(y, y)$$

$$\mathbf{728} \quad \exists z \varphi(x, z) \rightarrow \exists z \varphi(y, z)$$

$$\mathbf{732} \quad \varphi(x, x) \vee \varphi(y, y)$$

Esercizi 733 – 734

Sia R una relazione binaria su $\mathbb{U}$ e sia S la relazione definita dalla formula $\exists z [x R z \wedge z R y]$. Si scelga tra queste possibilità

$$S = \emptyset$$

$$R \subseteq S$$

$$R \cap S = \mathbb{U}$$

$$S = \mathbb{U}$$

$$S \subseteq R$$

$$R \cup S = \mathbb{U}$$

una valida conseguenza delle seguenti affermazioni:

733 R è transitiva $\implies$ **734** R è riflessiva $\implies$ **Esercizi 735 – 739**

Siano R ed S due relazioni transitive. È la relazione definita dalla seguente formula transitiva? In caso contrario si dia un controesempio.

735 $\exists z [x R z \wedge z S y]$ **738** $\forall z [z R x \leftrightarrow z S y]$ **736** $\exists z [x R z \wedge y S z]$ **739** $\forall z [x R z \leftrightarrow z S y]$ **737** $\forall z [x R z \leftrightarrow y S z]$ **Esercizi 740 – 741**

Fissiamo come universo $\mathbb{Z}$. Denotiamo con P l'insieme degli interi pari e con D l'insieme degli interi dispari. Qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni

740 $P \times D$ **741** $(P \times D) \cup (D \times P)$ **Esercizi 742 – 747**

L'universo è $\mathbb{R}$. Si dica qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:

742 $\{\langle x, y \rangle : 0 < |x - y| < 2\}$ **745** $\{\langle x, y \rangle : x = -y\}$ **743** $\{\langle x, y \rangle : 0 < |x - y|\}$ **746** $\{\langle x, y \rangle : 0 \neq |x - y|\}$ **744** $\{\langle x, y \rangle : 1 < |x - y|\}$ **747** $\{\langle x, y \rangle : x = -|y|\}$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

 $\mathbb{R}^2$ $\{\langle x, y \rangle : x \leq y\}$ $\{\langle x, y \rangle : x \neq y\}$ $\{\langle x, y \rangle : x = y\}$ $\{\langle x, y \rangle : 1 < |x - y|\}$ $\{\langle x, y \rangle : 0 < |x - y|\}$ $\{\langle x, y \rangle : x < y\}$ $\{\langle x, y \rangle : x = -y\}$

$$\left\{ \langle x, y \rangle : |x| = |y| \right\}$$

$$\left\{ \langle x, y \rangle : x = -|y| \right\}$$

Esercizi 748 – 750

L'universo è $\mathbb{R}$. Si dica qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:

748 $\left\{ \langle x, y \rangle : 1 = xy \right\}$

750 $\left\{ \langle x, y \rangle : 1 < xy \right\}$

749 $\left\{ \langle x, y \rangle : xy < 0 \right\}$

Questa si può esprimere come unione o differenza di due delle seguenti relazioni:

$$A = (\mathbb{R}^+)^2$$

$$B = (\mathbb{R}^-)^2$$

$$C = \left\{ \langle x, y \rangle : x = y \neq 0 \right\}$$

$$D = \left\{ \langle x, y \rangle : x = y^{-1} \right\}$$

$$E = \left\{ \langle x, y \rangle : xy = 0 \right\}$$

$$F = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$

$$G = \mathbb{R}^2$$

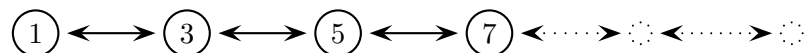
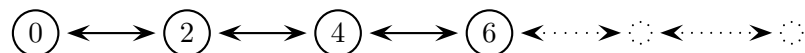
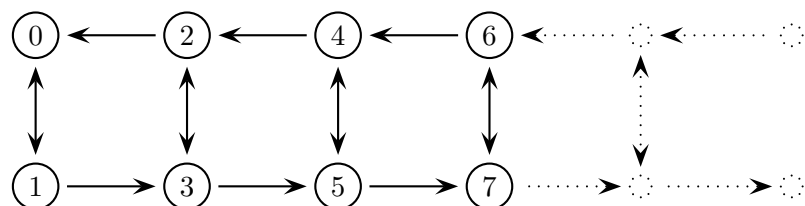
$$H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$$

$$I = \left\{ \langle x, y \rangle : x = y \right\}$$

$$L = \left\{ \langle x, y \rangle : x = -y \right\}$$

Esercizi 751 – 752

Scrivere una formula nel linguaggio dell'aritmetica che definisce la chiusura transitiva delle relazioni su $\mathbb{N}$ rappresentate nei seguente diagrammi.

751**752**

9. Gli ordini

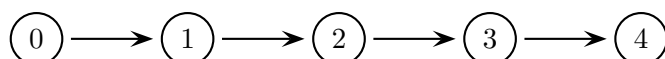
Ricordiamo che una relazione transitiva è anche chiamata un **preordine**. Se la relazione è anche antisimmetrica e riflessiva allora viene chiamata un **ordine debole**. Se è antisimmetrica e irreflessiva allora viene chiamata un **ordine stretto**. Spesso si dice semplicemente *ordine* lasciando al lettore il compito di distinguere. La differenza tra ordini stretti ed ordini deboli non è profonda: ad un ordine stretto è naturalmente associato l'ordine debole che si ottiene aggiungendo la diagonale di $\mathbb{U}$ e viceversa ad ogni ordine debole è associato l'ordine forte che si ottiene sottraendo la diagonale di $\mathbb{U}$.

Spesso per denotare gli ordini invece delle lettere si usa la notazione infissa ed il simbolo $<$ o variazioni di questo: $\subset$, $\prec$, $\triangleleft$, $\sqsubset$. Il significato di questi simboli generalmente non è costante ma dipende dal contesto o viene definito di volta in volta. Per denotare i corrispondenti ordini deboli si usano generalmente i corrispondenti simboli $\subseteq$, $\preceq$, $\trianglelefteq$, $\sqsubseteq$.

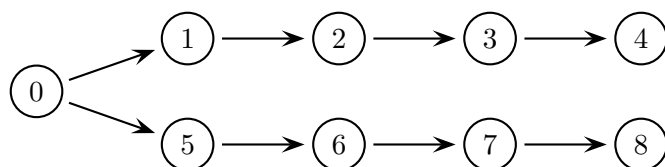
Se $<$ è un ordine e a e b sono tali che $a < b$ o $b < a$ allora diremo che a e b sono **comparabili** altrimenti diremo che sono **incomparabili**. Si noti che, fissato un ordinamento, due elementi dell'universo non sono necessariamente comparabili. Nell'esempio appena visto $\{0\}$ e $\{1\}$ sono incomparabili. Se due qualsiasi elementi sono comparabili, cioè se la relazione è completa, allora l'ordine si dice **totale** o **lineare** se no si dice **parziale**. Gli esempi più familiari di ordini lineari sono gli ordinamenti usuali di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. L'ordine $\sqsubset$ sulle stringhe binarie è un ordine parziale (lo abbiamo introdotto nel paragrafo 5 del capitolo 12).

Per chiarezza grafica rappresentiamo gli ordini finiti disegnando solo le frecce la cui chiusura transitiva generano l'ordine.

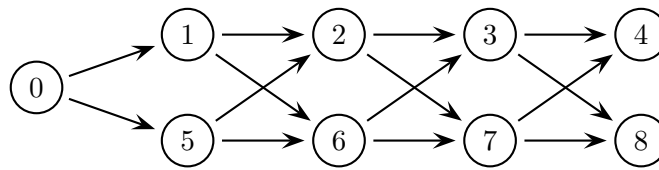
La chiusura transitiva della seguente relazione è un ordine lineare.



La chiusura transitiva della seguente relazione è un ordine parziale (per esempio, 4 e 8 non sono comparabili).



Questo è un altro esempio di ordine parziale (estende l'ordine del esempio precedente):



10. Un po' di terminologia

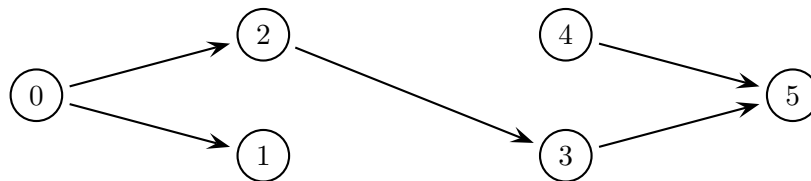
Sia $<$ una relazione di ordine $\mathbb{U}$. Sia B un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{U}$ e sia a un elemento di $\mathbb{U}$. Diremo che a è un

minorante di B se $\forall x \in B \quad a \leq x$,

minimo di B se a è un minorante ed $a \in B$,

elemento minimale di B se $a \in B$ e $\neg \exists x \in B \quad x < a$.

Per apprezzare la differenza tra minimo ed elemento minimale bisogna considerare ordini non lineari: sugli ordini totali le due nozioni coincidono. Si consideri, per esempio, l'ordine $\preceq$ che si ottiene dalla chiusura transitiva della relazione su $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ in figura:



L'elemento 0 è un minorante dell'insieme $\mathbb{U} \setminus \{4\}$ ma non è un minimo di $\mathbb{U}$ perchè $0 \not\preceq 4$. Lo 0 è semplicemente un elemento minimale di $\mathbb{U}$. Anche il nodo 4 è un elemento minimale di $\mathbb{U}$.

A ciascuna delle nozioni introdotte qui sopra ne corrisponde una simmetrica che si ottiene semplicemente rovesciando l'ordine. Diremo che a è un

maggiorante di B se $\forall x \in B \quad x \leq a$,

massimo di B se a è un maggiorante ed $a \in B$,

elemento massimale di B se $a \in B$ e $\neg \exists x \in B \quad a < x$.

Un insieme si dice **limitato superiormente** se ha un maggiorante, se ha un minorante diremo che è **limitato inferiormente**. Se ha sia un maggiorante che un minorante diremo che è **limitato** tout court.

Se $B_{\min}$ è l'insieme dei minoranti di B e $B_{\max}$ l'insieme dei maggioranti, allora diremo che a è un

estremo inferiore di B se a è il massimo di $B_{\min}$.

estremo superiore di B se a è il minimo di $B_{\max}$.

Sia $<$ l'ordine usuale sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri < 2 . Allora B non ha un massimo. L'estremo superiore di B è 2. In $\mathbb{R}$ tutti gli insiemi limitati hanno un estremo superiore ed inferiore ma questo è ben lungi dall'essere vero in generale. Sia per esempio $<$ l'ordine usuale sull'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Sia

$$B := \{x : x^2 < 2\}$$

L'insieme $B \subseteq \mathbb{Q}$ non ha nè estremo superiore pur essendo limitato superiormente. Questo stesso insieme B , pensato però come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ha $\sqrt{2}$ come estremo superiore.

Esercizi 753 – 754

Sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ una funzione totale. Consideriamo F come una relazione su $\mathbb{U}$. Quali delle seguenti affermazioni

$$\begin{array}{lll} F = \text{id}_{\mathbb{U}} & F^2 = F^{-1} & F \text{ è iniettiva} \\ F^2 = \text{id}_{\mathbb{U}} & F^2 = F & F \text{ è costante} \end{array}$$

è equivalente a

753 F è transitiva

755 F è riflessiva

754 F è simmetrica

11. Ordini densi e discreti

Un ordine $<$ si dice **denso** se esiste almeno una coppia tale che $a < b$ e per ogni coppia a, b si ha

$$a < b \rightarrow \exists x \ a < x < b.$$

L'esempio più semplice di ordine denso è l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Siano a ed x elementi di un insieme ordinato. Diremo che x è un

immediato predecessore di a se $x < a \wedge \neg \exists z \ x < z < a$,

immediato successore di a se $a < x \wedge \neg \exists z \ a < z < x$.

Un ordine $<$ si dice **discreto** se ogni elemento a che non è massimale ha un immediato successore e ogni elemento che non è minimale ha un immediato predecessore. In notazione formale:

$$\exists x \, x < a \rightarrow \exists x \, [x < a \wedge \neg \exists z \, x < z < a]$$

e

$$\exists x \, a < x \rightarrow \exists x \, [a < x \wedge \neg \exists z \, a < z < x]$$

L'ordine di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Z}$ sono ordini discreti. L'ordine usuale sull'insieme

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

è un ordine discreto. Aggiungendo a questo insieme lo 0 l'ordine diventa è nò denso nò discreto (l'elemento 0 non ha successori immediati).

Esercizi 756 – 757

Definiamo su un ordine $\prec$ su $\mathbb{Q}^2$ come segue

$$\langle a_1, a_2 \rangle \prec \langle b_1, b_2 \rangle \iff \begin{cases} a_1 < a_2 & \text{se } a_1 \neq a_2 \\ b_1 < b_2 & \text{se } a_1 = a_2. \end{cases}$$

756 È questo un ordine totale? (In caso contrario dare un esempio di due elementi di $\mathbb{Q}^2$ che non sono comparabili.)

757 È questo un ordine denso?

Esercizi 758 – 761

Sia $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione con dominio di definizione $\mathbb{R}^+$ che mappa $x \mapsto \log x$. Sia $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che mappa $x \mapsto 2^x$. Degli insiemi $\text{img } L$ e $\text{img } E$ dire, se esiste, qual'è

758 Il massimo.

760 L'estremo superiore.

759 Il minimo.

761 L'estremo inferiore.

Esercizi 762 – 765

Sia $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che mappa $x \mapsto \sin x$. Dell'insieme $\text{img } S$ dire, se esiste, qual'è

762 Il massimo.**764** L'estremo superiore.**763** Il minimo.**765** L'estremo inferiore.**Esercizi 766 – 769**

Fissiamo un linguaggio con un simbolo di funzione unaria f ed un modello che interpreta f nella funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$. Si scriva una formula $\varphi(x)$ che affermi

766 x è il massimo di $\text{img } F$.**767** x è il minimo di $\text{img } F$.**768** x è l'estremo superiore di $\text{img } F$.**769** x è l'estremo inferiore di $\text{img } F$.

Le relazioni di equivalenza

1. La definizione

Una relazione R su $\mathbb{U}$ si dice essere una **relazione di equivalenza** se è:

- riflessiva;
- simmetrica; e
- transitiva.

A volte per brevità al posto di *relazione di equivalenza* si dice semplicemente **equivalenza** o anche **congruenza**.

2. L'intuizione

Il significato della parola *uguale* nel linguaggio naturale è ben diverso dal significato che questa parola ha in matematica: in matematica ogni oggetto è uguale solo a se stesso. Invece *uguale* nel linguaggio naturale, approssima abbastanza bene il significato che la parola *equivalente* ha in contesti formali.

Esempio. Di fronte ad una scatola di matite colorate, per *due matite uguali* generalmente si intende *due matite dello stesso colore*. Formalmente possiamo immaginare di aver definito la relazione *avere lo stesso colore* sull'insieme delle matite della scatola. Questa è chiaramente una relazione di equivalenza. La parola *uguali* può quindi essere interpretata con il concetto formale di *equivalenti*.

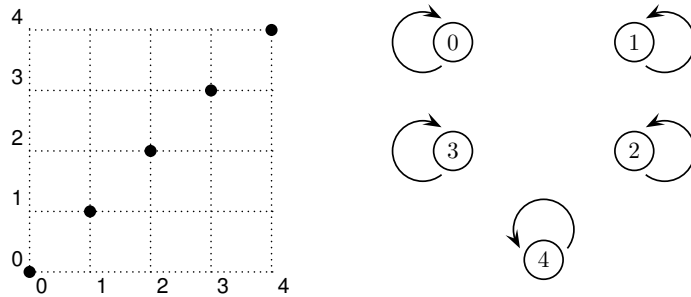
Nella vita quotidiana la particolare relazione di equivalenza da intendersi per la parola *uguale* dipende dal contesto ed è non poche volte fonte di ambiguità. Così, di fronte ad una scatola di matite, per *uguale* uno potrebbe intendere non solo *avere lo stesso colore* ma anche *essere della stessa marca*, o invece semplicemente *avere la stessa lunghezza*.

3. Le due relazioni banali

Fissiamo un universo $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e consideriamo la relazione:

$$\{\langle x, y \rangle : x = y\}$$

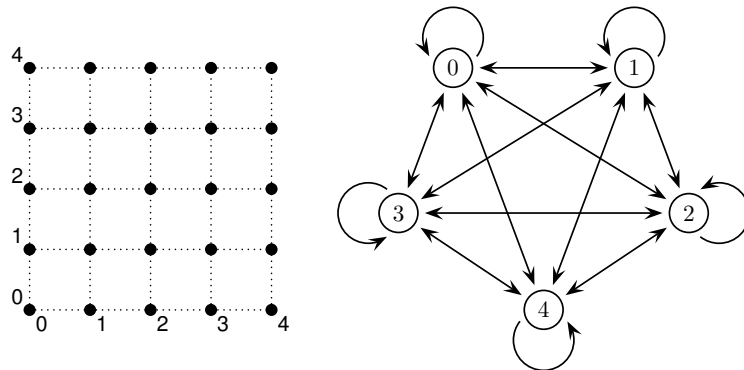
Questa è chiamata la **diagonale** di $\mathbb{U}$. Ogni relazione di equivalenza su $\mathbb{U}$, in quanto riflessiva, contiene la diagonale. La diagonale è quindi la più piccola relazione di equivalenza possibile. Rappresentiamo la relazione sul piano cartesiano e come diagramma:



Sullo stesso universo, consideriamo ora la relazione:

$$\{\langle x, y \rangle : \top\}$$

Rappresentata sul piano cartesiano e come diagramma:



4. Alcuni semplici esempi

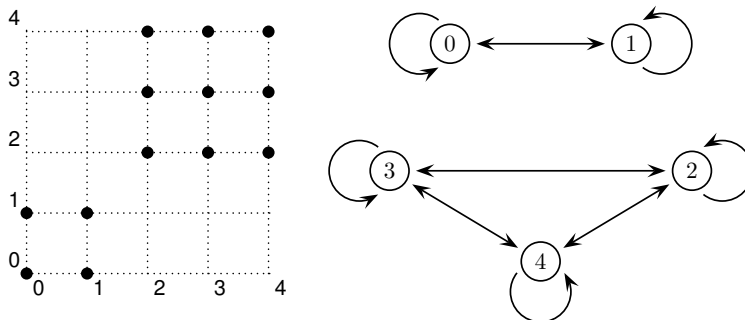
Il prossimo esempio pur semplicissimo, non è banale. Sia $\mathbb{U}$ come sopra e fissiamo $P = \{0, 1\}$. Consideriamo l'insieme delle coppie $\langle x, y \rangle$ tali che x ed y sono entrambi in P o entrambi in $\neg P$.

$$\{\langle x, y \rangle : x, y \in P \text{ o } x, y \notin P\}$$

Ovvero, posto $T = \neg P$ la relazione si può scrivere sinteticamente come:

$$P^2 \cup T^2.$$

Rappresentata sul piano cartesiano e come diagramma:



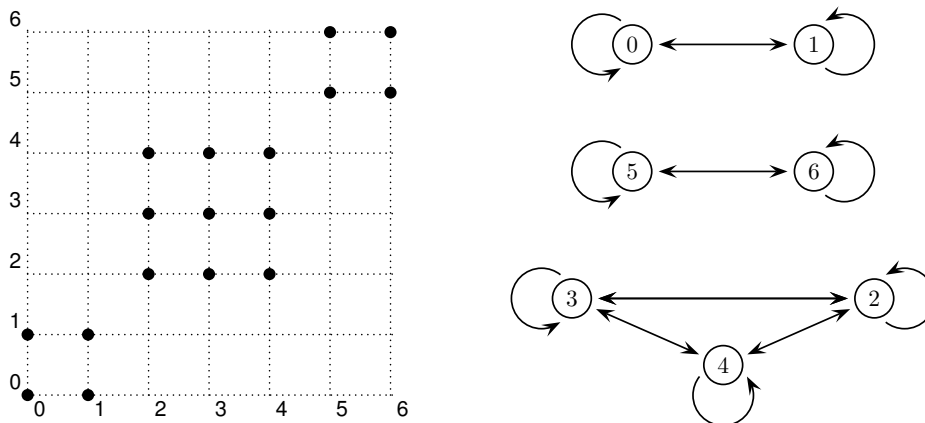
Generalizziamo leggermente l'esempio precedente. Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sia $P = \{0, 1\}$ e $Q = \{5, 6\}$. Consideriamo l'insieme delle coppie $\langle x, y \rangle$ tali che valga una delle seguenti condizioni:

- x ed y sono entrambi in P
- x ed y entrambi in Q
- x ed y sono entrambi in $\neg(P \cup Q)$.

Posto $T = \neg(P \cup Q)$ la relazione si può scrivere sinteticamente come:

$$P^2 \cup Q^2 \cup T^2,$$

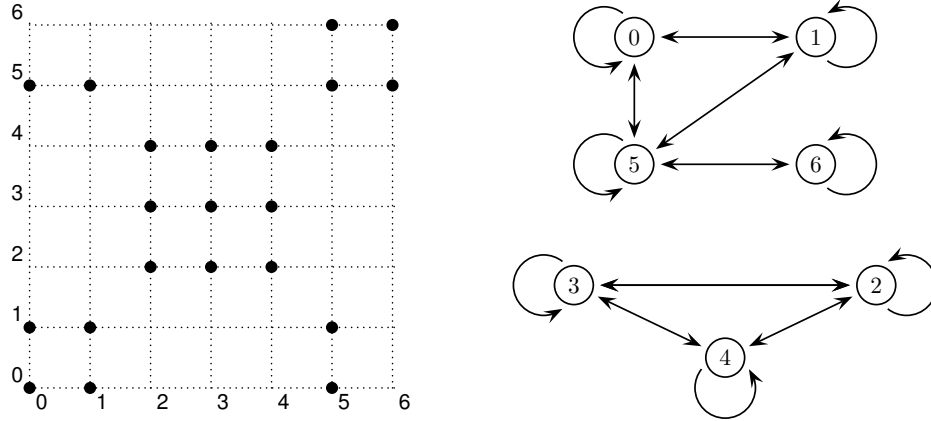
cioè come l'unione di 3 clique tra loro sconnesse. Se rappresentiamo questa relazione sul piano cartesiano e come diagramma otteniamo:



5. Osservazione.

Nell'esempio precedente è essenziale che P e Q siano disgiunti. Se fissiamo $P =$

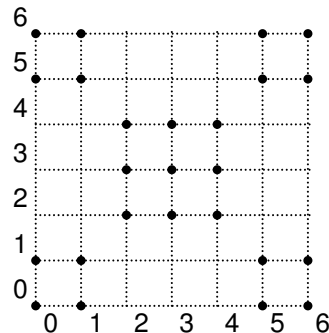
$\{0, 1, 5\}$ e $Q = \{5, 6\}$ e come sopra $T = \neg(P \cup Q)$, la relazione $P^2 \cup Q^2 \cup T^2$ non è più di equivalenza. Come si vede immediatamente dal diagramma, fallisce la transitività (mancano, per esempio, le frecce tra 1 e 6).



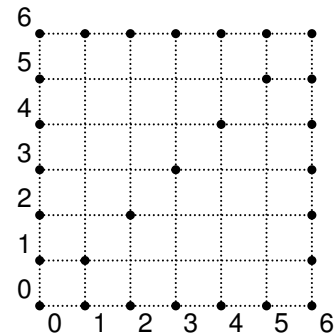
Esercizi 770 – 771

Dire se le relazioni rappresentate nei seguenti diagrammi sono equivalenze.

770



771



6. Le partizioni

Le due relazioni di equivalenza presentate nel paragrafo 4 mettono in luce un fenomeno generale: le relazioni di equivalenza sono unione di clique disgiunte.

Sia $\mathcal{P}$ una collezione di insiemi (sottoinsiemi di $\mathbb{U}$). Se $\mathcal{P}$ è finito, diciamo $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$, allora l'unione degli insiemi in $\mathcal{P}$ può essere denotata come di consueto con

$$A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

quando $\mathcal{P}$ è infinito dovremo usare una notazione più generale, scriveremo:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A$$

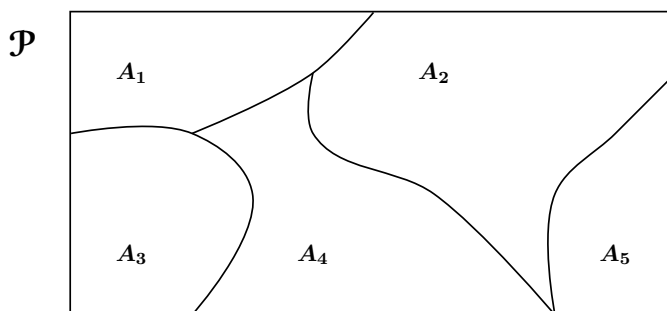
Diremo che $\mathcal{P}$ **ricopre** $\mathbb{U}$ (o che è un **ricoprimento** di $\mathbb{U}$) se ogni elemento di $\mathbb{U}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{P}$. Ovvero se

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = \mathbb{U}$$

Una **partizione** di $\mathbb{U}$ è una collezione $\mathcal{P}$ di insiemi tale che:

- nessun elemento di $\mathcal{P}$ è vuoto;
- gli elementi di $\mathcal{P}$ sono tra loro disgiunti; e
- $\mathcal{P}$ ricopre $\mathbb{U}$.

Abbiamo appena visto due esempi di partizione: nel primo $\{P, T\}$ e nel secondo $\{P, Q, T\}$. L'immagine mentale associata ad una partizione è quella di un tassellamento dell'universo, come una sorta di "carta geografica":



Esercizi 772 – 777

Dire se i seguenti insiemi sono partizioni di $\mathbb{Q}$.

772 $\left\{ \{x, x^2\} : x \in \mathbb{Q} \right\}$

775 $\left\{ \{x^2\} : x \in \mathbb{Q} \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^- \right\}$

773 $\left\{ \{x^2\} : x \in \mathbb{Q} \right\}$

776 $\left\{ \{-|x|, |x|\} : x \in \mathbb{Q} \right\}$

774 $\left\{ \{|x|\} : x \in \mathbb{Q} \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^- \right\}$

777 $\left\{ [n, n+1) : n \in \mathbb{Z} \right\}$

7. Da partizioni ad equivalenze

Ad ogni partizione è associata in modo canonico una relazione di equivalenza: la relazione le cui clique massimali sono gli insiemi della partizione.

Vediamo la costruzione in dettaglio. Definiamo:

$$E_{\mathcal{P}} := \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A^2.$$

Questa relazione contiene tutte le frecce possibili che non attraversano le “linee di confine” tra gli elementi della partizione.

Verifichiamo che se $\mathcal{P}$ è una partizione allora $E_{\mathcal{P}}$ è una relazione di equivalenza. Dobbiamo verificare: riflessività, simmetria e transitività di $E_{\mathcal{P}}$.

Riflessività. Sia $a \in \mathbb{U}$ arbitrario. Poichè $\mathcal{P}$ ricopre $\mathbb{U}$ avremo che $a \in A$ per qualche $A \in \mathcal{P}$. Allora $\langle a, a \rangle \in A^2 \subseteq E_{\mathcal{P}}$.

Simmetria. Ovvio.

Transitività. Se $a E_{\mathcal{P}} b E_{\mathcal{P}} c$ allora per qualche $A, B \in \mathcal{P}$ avremo che $\langle a, b \rangle \in A^2$ e $\langle b, c \rangle \in B^2$. Segue che b appartiene sia ad A che a B . Siccome due elementi distinti di una partizione sono disgiunti, non può che essere che $A = B$. Allora a e c appartengono allo stesso elemento della partizione e quindi $a E_{\mathcal{P}} c$.

8. Le classi di equivalenza

Sia E una relazione di equivalenza su $\mathbb{U}$ e sia $a \in \mathbb{U}$. Definiamo l'insieme

$$[a]_E := \{x : a R x\},$$

che chiameremo **classe di equivalenza** dell'elemento a . La classe di equivalenza è quindi l'insieme degli elementi che sono in relazione con a . Quando la relazione E è chiara dal contesto, scriveremo semplicemente $[a]$.

Vediamo un paio di proprietà cruciali delle classi di equivalenza. Prima di tutto si osservi che per la riflessività di R :

$$a \in [a]$$

vale per ogni a .

Ora dimostriamo che per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbb{U}$ i seguenti quattro fatti solo tra loro equivalenti:

$$[a] = [b], \quad a \in [b], \quad a R b, \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset,$$

Il modo più efficiente per verificare una lunga serie di equivalenze è di procedere in circolo dimostrando un solo verso delle implicazioni:

$$\begin{array}{ccc}
[a] = [b] & \implies & a \in [b] \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
a R b & \iff & [a] \cap [b] \neq \emptyset.
\end{array}$$

Questo è sufficiente infatti, poichè la sequenza di implicazioni si chiude, da una direzione si ottiene ‘gratis’ anche la direzione inversa. Cominciando dalla prima implicazione in alto e procedendo nel senso delle frecce dimostriamo queste quattro implicazioni. La prima e la seconda implicazione sono immediate se si tiene presente che $a \in [a]$. Per dimostrare la terza si osservi che se esiste un x che appartiene ad entrambe $[a]$ e $[b]$ allora $x R a$ e $x R b$. Per simmetria e transitività otteniamo $a R b$. L’ultima implicazione segue pure dalla transitività e simmetria di R , infatti, se $a R b$ allora per ogni x avremo: $x R a$ sse $x R b$. Quindi per definizione di classe di equivalenza $x \in [a]$ sse $x \in [b]$ ovvero $[a] = [b]$.

9. Da equivalenze a partizioni

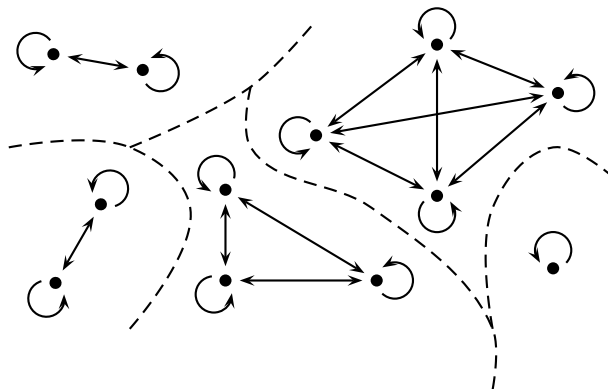
La costruzione di una relazione di equivalenza a partire da una partizione può essere rovesciata. Infatti, ad ogni relazione di equivalenza è associata in modo canonico una partizione: questa è la partizione i cui elementi sono le classi di equivalenza.

Vediamo la costruzione in dettaglio. Fissiamo una relazione di equivalenza E su $\mathbb{U}$. Come osservato qui sopra, $a \in [a]$ per ogni $a \in \mathbb{U}$. Segue quindi che le classi di equivalenza non sono mai insiemi vuoti e che le classi di equivalenza ricoprono $\mathbb{U}$ (ogni elemento a appartiene a qualche classe di equivalenza). Nel paragrafo precedente abbiamo anche verificato che

$$[a] = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

Segue che le classi di equivalenza sono disgiunte. Quindi le classi di equivalenza formano una partizione di $\mathbb{U}$. Chiameremo questa partizione $\mathcal{P}_E$.

Per esempio, è chiaro che la relazione di equivalenza rappresentata qui sotto ha 5 classi e che queste formano una partizione del dominio.



10. Chiudere il cerchio

Nei precedenti paragrafi abbiamo mostrato che ad ogni partizione $\mathcal{P}$ è associata una relazione di equivalenza $E_{\mathcal{P}}$ e viceversa ad ogni relazione di equivalenza E è associata una partizione $\mathcal{P}_E$. È naturale chiedersi quale sia la partizione associata a $E_{\mathcal{P}}$ e quale relazione sia associata $\mathcal{P}_E$. La buona notizia è che il cerchio si chiude, ovvero che

$$E_{\mathcal{P}_E} = E \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

Verifichiamo la prima di queste due uguaglianze. La relazione di equivalenza associata a $\mathcal{P}_E$ non è nient'altro che E stessa. Infatti:

$$E_{\mathcal{P}_E} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_E} A^2 = \bigcup_{a \in \mathbb{U}} [a]_E^2 = E$$

Verifichiamo la seconda uguaglianza. La partizione associata a $E_{\mathcal{P}}$ non è nient'altro che $\mathcal{P}$ stessa. La partizione associata a $E_{\mathcal{P}}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di E . Osserviamo che per ogni a

$$[a]_{E_{\mathcal{P}}} = A$$

dove A è quell'unico elemento di $\mathcal{P}$ cui a appartiene. Quindi le classi di equivalenza di $E_{\mathcal{P}}$ sono esattamente gli elementi di $\mathcal{P}$.

11. Esempi

Sia $L = \{p, q, r\}$ un linguaggio proposizionale e sia $\mathbb{U}$ l'insieme delle formule proposizionali del linguaggio L . Definiamo una relazione su $\mathbb{U}$:

$$R := \left\{ \langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \leftrightarrow \psi \text{ è una tautologia} \right\}$$

La relazione R è una relazione di equivalenza.

Esercizi 778 – 779

La relazione su $\mathbb{Z}$ definita dalle seguenti formule è un'equivalenza? In caso affermativo si scriva la partizione associata.

778 $\exists z (zx = y) \wedge \exists z (x = zy)$

779 $\exists z (x - y = 2z)$

Esercizi 780 – 781

La relazione su $\mathbb{Q}$ definita dalle seguenti formule è un'equivalenza? In caso affermativo si scriva la partizione associata.

780 $\exists z (zx = y) \wedge \exists z (x = zy)$

781 $\exists z (x - y = 2z)$

12. Da funzioni ad equivalenze

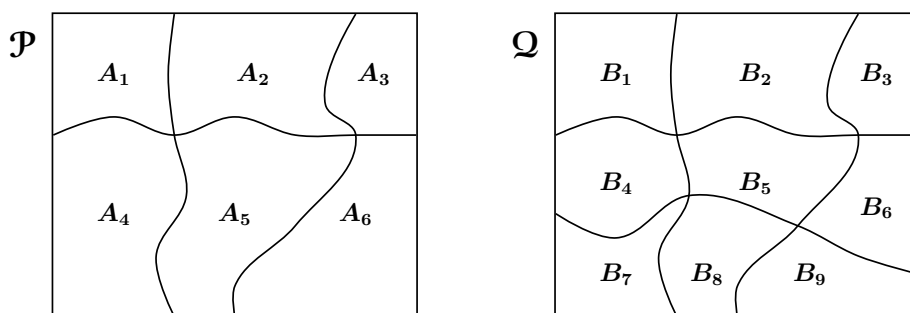
Ad ogni funzione è naturalmente associata una relazione di equivalenza. Sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ una funzione totale. Definiamo la relazione

$$\left\{ \langle a, b \rangle : F(a) = F(b) \right\}.$$

Questa è una relazione di equivalenza. Se la funzione è iniettiva questa relazione è la diagonale. Le classi di equivalenza di questa relazione sono gli insiemi del tipo $F^{-1}[a]$ per un qualche $a \in \mathbb{U}$.

13. Raffinamento di una partizione

Cominciamo con un esempio. Consideriamo le due partizioni rappresentate qui sotto:



Gli elementi di $\mathcal{P}$ sono unione di elementi di $\mathcal{Q}$, precisamente, abbiamo che:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 & A_2 &= B_2 & A_3 &= B_3 \\ A_4 &= B_4 \cup B_7 & A_5 &= B_5 \cup B_8 & A_6 &= B_6 \cup B_9 \end{aligned}$$

In generale, diremo che una partizione $\mathcal{Q}$ è più **sottile** o più **fine** di $\mathcal{P}$ ovvero che $\mathcal{Q}$ è un **raffinamento** di $\mathcal{P}$ se ogni elemento $A \in \mathcal{P}$ è unione di elementi di $\mathcal{Q}$.

Prese due partizioni qualunque di $\mathbb{U}$, diciamo $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, potrebbe ben succedere che $\mathcal{P}$ non sia più sottile di $\mathcal{Q}$ ma nemmeno $\mathcal{Q}$ più sottile di $\mathcal{P}$.

Comunque, prese due partizioni qualsiasi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dello stesso insieme $\mathbb{U}$, si può sempre trovare una terza partizione che è più sottile di entrambe. Infatti, se definiamo:

$$\mathcal{B} := \left\{ A \cap B : A \in \mathcal{P} \text{ e } B \in \mathcal{Q} \text{ tali che } A \cap B \neq \emptyset \right\}$$

allora $\mathcal{B}$ è una partizione che raffina entrambe $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

14. Raffinamento di una equivalenza

Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni e siano $E_{\mathcal{P}}$ e, rispettivamente, $E_{\mathcal{Q}}$ le relazioni di equivalenza associate. È facile verificare che $\mathcal{Q}$ è un raffinamento di $\mathcal{P}$ se e solo se $E_{\mathcal{Q}} \subseteq E_{\mathcal{P}}$, ovvero se vale:

$$\forall x, y \left[x E_{\mathcal{Q}} y \longrightarrow x E_{\mathcal{P}} y \right]$$

Viceversa, è anche vero che se R ed S sono due relazioni di equivalenza e $\mathcal{P}_R$ e, rispettivamente $\mathcal{P}_S$ sono le partizioni associate allora $R \subseteq S$ se e solo se $\mathcal{P}_R$ è più sottile di $\mathcal{P}_S$.

15. Esempio

Fissiamo un linguaggio proposizionale L e sia $\mathbb{U}$ l'insieme delle formule proposizionali. Per ogni formula θ possiamo definire una relazione di equivalenza su $\mathbb{U}$:

$$R_{\theta} := \left\{ \langle \varphi, \psi \rangle : \theta \implies \varphi \leftrightarrow \psi \right\}.$$

Notiamo anche che se $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ allora $R_{\theta_2} \subseteq R_{\theta_1}$. Quindi R_{θ_2} è un raffinamento di R_{θ_1} .

16. Esempio

Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ ed un insieme di formule $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$. Sia E la relazione su $\mathbb{U}$ definita dalla formula

$$\bigwedge_{i=1}^n \left[\varphi_i(x) \leftrightarrow \varphi_i(y) \right].$$

Non è difficile convincersi che E è una relazione di equivalenza. Infatti, per ogni i la relazione

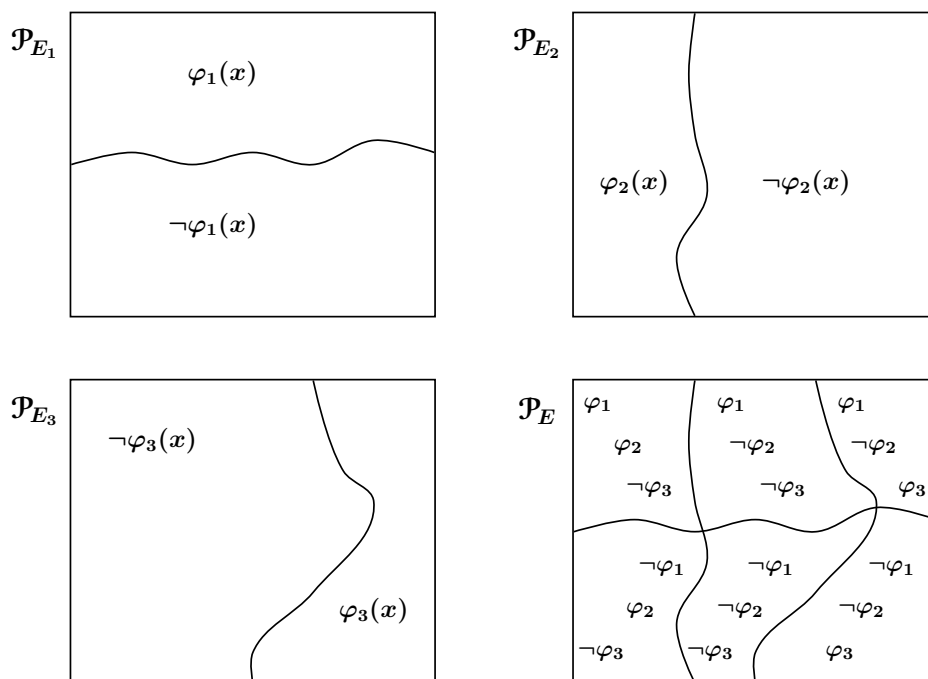
$$E_i := \left\{ \langle a, b \rangle : \varphi_i(a) \leftrightarrow \varphi_i(b) \right\}$$

è una relazione di equivalenza. Poichè

$$E = \bigcap_{i=1}^n E_i,$$

l'equivalenza E è un raffinamento di tutte le relazioni E_i .

L'immagine che associamo a ciascuna delle relazioni E_i è quella di una *bipartizione* dell'universo; la relazione E si ottiene sovrapponendo tutte queste bipartizioni. Per esempio se $n = 3$:

**Esercizi 782 – 784**

Sia $\varphi(x, y)$ una formula qualsiasi e sia c una costante del linguaggio. Fissiamo un modello arbitrario con dominio $\mathbb{U}$. Si dica se le seguenti formule definiscono delle relazioni di equivalenza su $\mathbb{U}$.

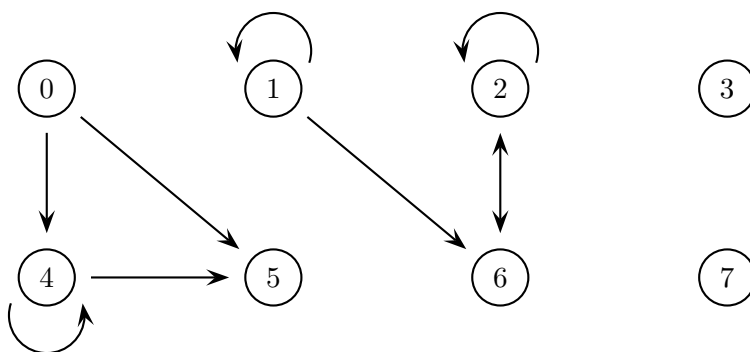
782 $\forall z [\varphi(a, z) \leftrightarrow \varphi(b, z)]$

784 $\varphi(a, c) \leftrightarrow \varphi(b, c)$

783 $\exists z [\varphi(a, z) \leftrightarrow \varphi(b, z)]$

Esercizi 785 – 788

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, r\}$ dove p è un predicato unario ed r un predicato binario. Fissiamo una struttura $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 7 ed R è la relazione rappresentata in figura:



La seguente formula definisce su $\mathbb{U}$ una relazione di equivalenza E :

$$\forall z [r(z, x) \leftrightarrow r(z, y)].$$

Si scrivano le seguenti classi di equivalenza:

785 $[4]_E =$

787 $[0]_E =$

786 $[5]_E =$

788 $[2]_E =$

Esercizi 789 – 790

Fissiamo come dominio $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

789 Si scrivano tutte le partizioni che contengono l'insieme $A = \{0, 1, 4\}$.

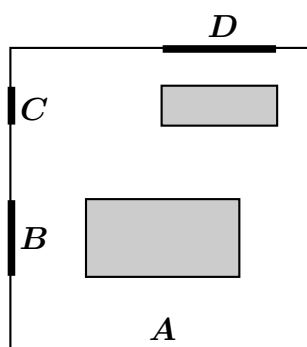
790 Quante sono le partizioni che raffinano $\{\{0, 1, 2\}, \{3, 4\}\}$?

Esercizi 791 – 792

Fissiamo un modello con dominio l'intervallo $\mathbb{U} = (0, 1)$. Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme rappresentato dall'area grigia nella figura qui sotto. Siano A, B, C , e D i sottoinsiemi di $\mathbb{U}$ rappresentati in figura. Si calcoli qual'è la partizione di $\mathbb{U}$ associata alla relazione di equivalenza definita dalla formula:

791 $\forall z [\alpha(x, z) \leftrightarrow \alpha(y, z)]$

792 $\forall z [\alpha(z, x) \leftrightarrow \alpha(z, y)]$

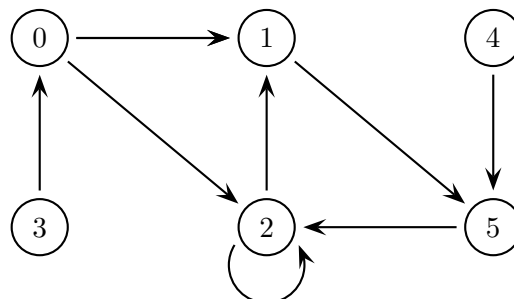


Esercizi 793 – 794

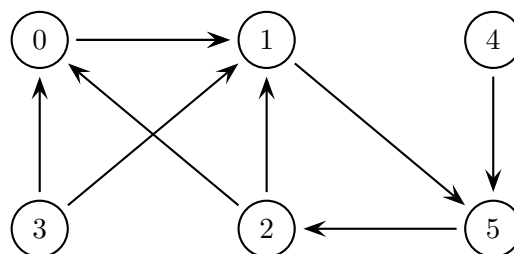
Si scriva (o si disegni) la partizione associata alla relazione di equivalenza:

$$E := \left\{ \langle x, y \rangle : \forall z (x R z \leftrightarrow y R z) \right\}$$

793 Dove R è la relazione in figura.



794 Dove R è la relazione in figura.



Esercizi 795 – 797

Sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ una funzione totale e sia E una relazione di equivalenza su $\mathbb{U}$. Definiamo

$$R := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) E F(b) \right\}$$

795 Sotto quale ipotesi R è una relazione di equivalenza?

- | | |
|---------------------|---------------------|
| A. nessun'ipotesi | B. F è iniettiva |
| C. F è suriettiva | D. F è biiettiva. |

Si scelga l'ipotesi più debole.

796 È sempre vero che $E \subseteq R$?

797 È sempre vero che $R \subseteq E$?

Esercizi 798 – 800

Siano $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ e $G : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ due funzioni totali. Le tre relazioni qui sotto sono delle equivalenze (questo lo diamo per noto),

$$R := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) = F(b) \right\}$$

$$S := \left\{ \langle a, b \rangle : F^2(a) = F^2(b) \right\}$$

$$E := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) R F(b) \right\}$$

si dica se le seguenti affermazioni sono vere. In caso contrario si dia un controesempio.

798 $E \subseteq S.$

799 $S \subseteq E.$

800 È vero che $R = S$ implica $F^2 = F$?

Esercizi 801 – 805

L'universo è $\mathbb{R}$. Sia F la funzione che mappa $x \mapsto x^2$ e definiamo la relazione di equivalenza:

$$E = \left\{ \langle x, y \rangle : F(x) = F(y) \right\}.$$

801 Quale dei seguenti insiemi è la partizione associata ad E ?

A. $\{\mathbb{R}\}$

B. $\{\mathbb{R} \setminus \{0\}, \{0\}\}$

C. $\{\mathbb{R}^-, \{0\}, \mathbb{R}^+\}$

D. $\{\{x^2\} : x \in \mathbb{R}\}$

E. $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$

F. $\{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}\}$

Si dica a cosa sono uguali le seguenti classi di equivalenza:

802 $[0]_E =$

803 $[+1]_E =$

804 $[-1]_E =$

805 $[\sqrt{2}]_E =$

Soluzioni degli esercizi

Capitolo 1	<i>Gli insiemi</i>	183
Capitolo 2	<i>Operazioni booleane</i>	185
Capitolo 3	<i>Le relazioni</i>	191
Capitolo 4	<i>Le funzioni</i>	195
Capitolo 5	<i>I linguaggi del prim'ordine</i>	199
Capitolo 6	<i>Le strutture</i>	201
Capitolo 7	<i>La logica proposizionale</i>	205
Capitolo 8	<i>I quantificatori</i>	225
Capitolo 9	<i>Più variabili in azione</i>	239
Capitolo 10	<i>L'uguaglianza</i>	253
Capitolo 11	<i>I termini</i>	259
Capitolo 12	<i>L'induzione</i>	273
Capitolo 13	<i>Relazioni binarie</i>	287
Capitolo 14	<i>La transitività</i>	289
Capitolo 15	<i>Le relazioni di equivalenza</i>	297

Soluzioni degli esercizi del capitolo 1

Gli insiemi

Nessun esercizio

Soluzioni degli esercizi del capitolo 2

Operazioni booleane

Esercizi 1 – 24

Si inserisca alla destra del simbolo di uguaglianza una delle seguenti espressioni:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{U} & P & \neg P & P \cup Q & P \setminus Q \\ \emptyset & Q & \neg Q & P \cap Q & P \triangle Q \end{array}$$

in modo da ottenere un'identità.

1	$P \setminus P =$	$\emptyset$	13	$P \setminus \neg P =$	P
2	$P \setminus \mathbb{U} =$	$\emptyset$	14	$\neg P \cup P =$	$\mathbb{U}$
3	$P \setminus \emptyset =$	P	15	$\neg P \cap P =$	$\emptyset$
4	$\emptyset \setminus P =$	$\emptyset$	16	$\neg P \cup \mathbb{U} =$	$\mathbb{U}$
5	$P \triangle \emptyset =$	P	17	$\neg P \cap \mathbb{U} =$	$\neg P$
6	$P \triangle \mathbb{U} =$	$\neg P$	18	$P \setminus (P \setminus Q) =$	$P \cap Q$
7	$\neg \emptyset =$	$\mathbb{U}$	19	$Q \setminus (P \cup Q) =$	$\emptyset$
8	$\neg \mathbb{U} =$	$\emptyset$	20	$(P \setminus Q) \setminus P =$	$\emptyset$
9	$P \setminus \neg Q =$	$P \cap Q$	21	$P \setminus (Q \setminus P) =$	P
10	$(P \setminus Q) \cup Q =$	$P \cup Q$	22	$Q \triangle \neg \emptyset =$	$\neg Q$
11	$(P \triangle Q) \cup Q =$	$P \cup Q$	23	$\neg Q \triangle \neg P =$	$P \triangle Q$
12	$P \triangle \neg P =$	$\mathbb{U}$	24	$\neg (Q \triangle \neg P) =$	$P \triangle Q$

Esercizi 25 – 28

Dire se le seguenti sono identità ed in caso contrario dare un controesempio (si prenda come universo $\mathbb{N}$).

25	$P \triangle \neg Q = \neg P \triangle Q$	Si
-----------	---	-----------

26	$P \setminus Q = Q \setminus P$	No
-----------	---------------------------------	-----------

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$.

Ma anche qualsiasi altra coppia di insiemi P, Q tale che $Q \neq P$.

27	$(P \cup Q) \setminus Q = P$	No
-----------	------------------------------	-----------

Controesempio: $P = \mathbb{N}, Q = \mathbb{N}$.

Ma anche qualsiasi altra coppia P, Q di insiemi non disgiunti.

28	$Q \triangle Q = P \triangle P$	Si
-----------	---------------------------------	-----------

Esercizi 29 – 34

Si inserisca una delle seguenti espressioni: $\emptyset, \mathbb{U}, P, \neg P, Q, \neg Q, P \cup Q, \neg(P \cup Q)$ in modo da ottenere un'uguaglianza che vale *per ogni* coppia P e Q di insiemi *disgiunti*.

29	$P \setminus Q =$	P	32	$Q \cup \neg P =$	$\neg P$
-----------	-------------------	-----	-----------	-------------------	----------

30	$P \triangle Q =$	$P \cup Q$	33	$(Q \cup P) \setminus P =$	Q
-----------	-------------------	------------	-----------	----------------------------	-----

31	$Q \cap \neg P =$	Q	34	$\neg Q \cup \neg P =$	$\mathbb{U}$
-----------	-------------------	-----	-----------	------------------------	--------------

Esercizi 35 – 39

Si inserisca una delle seguenti espressioni: $\emptyset, \mathbb{U}, P, \neg P, Q, Q \setminus P$ così da ottenere un'uguaglianza vera *per ogni* coppia di insiemi P e Q *tali che* $P \subseteq Q$.

35	$P \setminus Q =$	$\emptyset$	38	$Q \cap \neg P =$	$Q \setminus P$
-----------	-------------------	-------------	-----------	-------------------	-----------------

36	$P \triangle Q =$	$Q \setminus P$	39	$Q \cup \neg P =$	$\mathbb{U}$
-----------	-------------------	-----------------	-----------	-------------------	--------------

37	$\neg Q \cap P =$	$\emptyset$			
-----------	-------------------	-------------	--	--	--

Esercizi 40 – 45

Sia $\mathbb{U}$ un universo non vuoto. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere *per ogni* coppia di insiemi P e Q tali che $P \triangle Q = \mathbb{U}$. In caso contrario si dia un controesempio.

40 $P \not\subseteq Q$

No

Controesempio: $P = \emptyset$, $Q = \mathbb{U}$.

Si osservi che una coppia di insiemi P, Q soddisfa alle ipotesi se e solo se $P \cap Q = \emptyset$ e $P \cup Q = \mathbb{U}$. L'unico caso in cui $P \not\subseteq Q$ non vale è quando $P = \emptyset$.

41 $Q \cap P = \emptyset$

Si

42 $Q \cup P = \mathbb{U}$

Si

43 $P \setminus Q = \emptyset$

Si

44 $\neg P = Q$

Si

45 $Q \neq P$

Si

Esercizi 46 – 51

Sia $\mathbb{U}$ un universo qualsiasi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere *per ogni* coppia di insiemi P e Q tali che $P \subsetneq Q$. In caso contrario si dia un controesempio.

46 $P \subseteq Q$

Si

49 $Q \setminus P \neq \emptyset$

Si

47 $Q \cap P \neq Q$

Si

50 $\mathbb{U} \neq \emptyset$

Si

48 $Q \cap P = P$

Si

51 $P \setminus Q \neq Q \setminus P$

Si

Esercizi 52 – 58

Le seguenti affermazioni

$$\begin{array}{cccc} P = \emptyset & P \not\subseteq Q & P \triangle Q = \mathbb{U} & P \neq Q \\ \neg P \neq \emptyset & Q \subseteq P & P \setminus Q = \emptyset & P \cap Q = \emptyset \end{array}$$

sono equivalenti (in ogni universo, e per ogni coppia di insiemi P e Q) ad una di queste altre, dire quale.

52 $(P \cup Q) \setminus P = Q$

$P \cap Q = \emptyset$

53 $P \subsetneq \mathbb{U}$

$\neg P \neq \emptyset$

54 $P \setminus (P \setminus Q) \neq P$

$P \not\subseteq Q$

55 $P = \neg Q$

$P \triangle Q = \mathbb{U}$

56 $P \cup Q = P$

$Q \subseteq P$

57 $P \subseteq Q$

$P \setminus Q = \emptyset$

58 $P \cap \neg P = P$

$P = \emptyset$

59 $P \triangle Q \neq \emptyset$

$P \neq Q$

Esercizi 60 – 71

Si scriva alla destra del simbolo $\iff$ una delle seguenti affermazioni

$$\begin{array}{ccccc} P = \emptyset & P = \mathbb{U} & P \subseteq Q & P \cap Q = \emptyset & P = Q = \emptyset \\ P = \emptyset & Q = \mathbb{U} & Q \subseteq P & P \cup Q = \mathbb{U} & P = Q = \mathbb{U} \end{array}$$

in modo da ottenere una equivalenza valida.

60 $P \triangle Q = P \cup Q \iff$

$P \cap Q = \emptyset$

61 $P \setminus Q = \emptyset \iff$

$P \subseteq Q$

62 $P \triangle Q = P \setminus Q \iff$

$Q \subseteq P$

63 $P \cup \neg Q = \mathbb{U} \iff$

$Q \subseteq P$

64 $P \cap \neg Q = \emptyset \iff$

$P \subseteq Q$

65 $P \cup Q = Q \iff$

$P \subseteq Q$

66 $P \triangle Q = Q \iff$

$P = \emptyset$

67 $P \triangle Q = \neg Q \iff$

$P = \mathbb{U}$

68 $P \setminus Q = Q \setminus P \iff$

$P = Q = \emptyset$

69 $P \cap Q = \mathbb{U} \iff$

$P = Q = \mathbb{U}$

70 $P \setminus Q = P \iff$

$P \cap Q = \emptyset$

71 $P \setminus Q = Q \iff$

$P = Q = \emptyset$

Esercizi 72 – 74

Si scrivano tutte le implicazioni che valgono tra le seguenti affermazioni.

72
$$\begin{array}{ll} P = \emptyset & P \subseteq Q \\ Q = \emptyset & Q \not\subseteq P \end{array}$$

$P = \emptyset \implies P \subseteq Q$

73
$$\begin{array}{ll} P = Q & P \setminus Q = P \\ P = \emptyset & Q \subseteq P \end{array}$$

$P = \emptyset \implies P \setminus Q = P$

$P = Q \implies Q \subseteq P$

74
$$\begin{array}{ll} P = Q & P \cup Q = \emptyset \\ P = \mathbb{U} & Q \subseteq \neg P \end{array}$$

$P \cup Q = \emptyset \implies P = Q$

$P \cup Q = \emptyset \implies Q \subseteq \neg P$

Esercizi 75 – 79

Si dica qual'è la più piccola algebra booleana su $\mathbb{N}$ che contiene (nelle risposte sono indicati solo gli insiemi che serve aggiungere a quelli dati):

75 Gli insiemi $\{0\}$ e $\{1\}$.

$\emptyset$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\{0, 1\}$	$\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

76 L'insieme dei numeri pari P . $\emptyset, \mathbb{N} \setminus P, \mathbb{N}$

77 Tutti gli insiemi $A \subseteq P$. $\emptyset$ ed ogni A tale che $\mathbb{N} \setminus P \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$

78 Tutti i singoletti di $\mathbb{N}$. A e $\mathbb{N} \setminus A$ per ogni A finito

79 Tutte le coppie non ordinate di $\mathbb{N}$. Come sopra

Infatti tutti i singoletti si possono ottenere come intersezione di due coppie non ordinate, viceversa coppia non ordinata è unione di due singoletti.

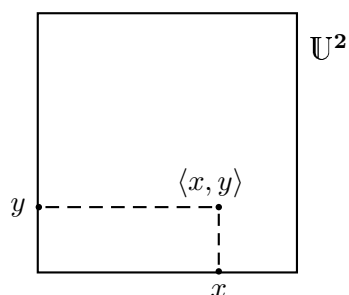
I **singoletti** di $\mathbb{N}$ sono gli insiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che contengono solo un elemento. Le **coppie non ordinate** sono gli insiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che contengono esattamente due elementi.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 3

Le relazioni

Esercizi 80 – 89

Fissiamo un modello in cui il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$. Rappresentiamo $\mathbb{U}^2$ come un quadrato, ogni punto di questo quadrato corrisponde ad una coppia



Dire quale delle figure qui sotto rappresentano i seguenti insiemi (l'area che appartiene all'insieme è colorata; gli insiemi P e Q sono rappresentati dai segmenti in grassetto nell'asse orizzontale e verticale).

80 $P \times Q$

B

81 $Q \times P$

H

82 $P \times \mathbb{U}$

D

83 $Q \times \mathbb{U}$

E

84 $\mathbb{U} \times P$

F

85 $\mathbb{U} \times Q$

C

86 $(P \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times Q)$

B

87 $(P \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times Q)$

A

88 $(P \times Q) \cap \mathbb{U}$

G

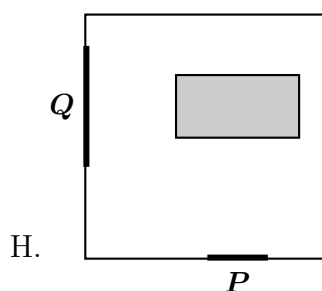
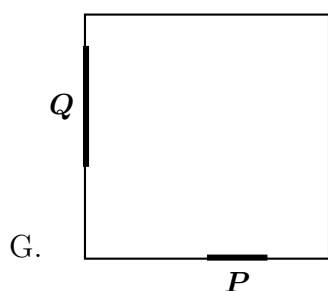
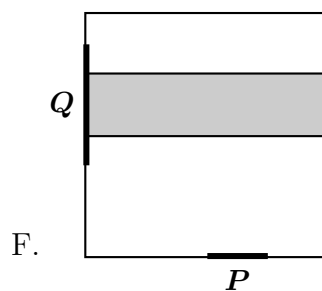
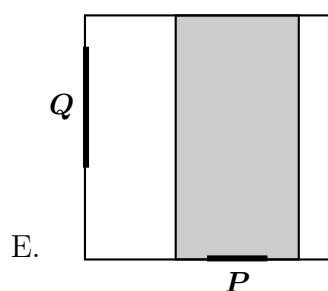
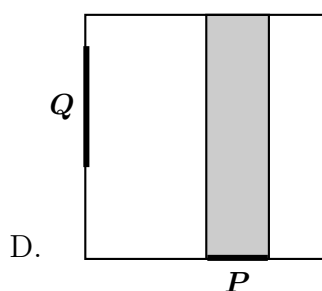
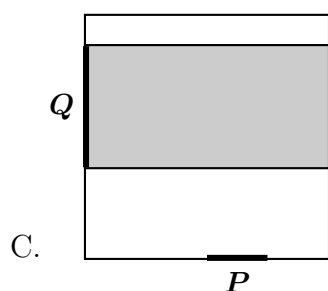
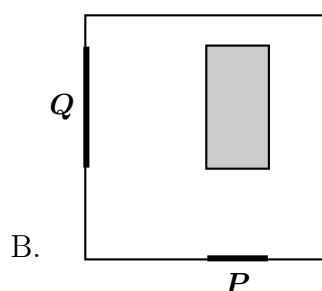
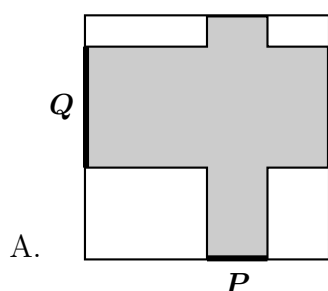
L'insieme di sinistra contiene coppie di elemnti di $\mathbb{U}$. L'intersezione con $\mathbb{U}$ con può che essere vuota.

89

$$\mathbb{U} \times P \cap \mathbb{U} \times Q$$

F

In generale, quest'insieme coincide con $\mathbb{U} \times (P \cap Q)$. Poichè in questo caso abbiamo anche $P \subseteq Q$, otteniamo $\mathbb{U} \times P$.



Esercizi 90 – 93

Si completino le seguenti espressioni così che valgano per ogni coppia di insiemi A e B entrambi diversi da $\mathbb{U}$. Si scelga tra le seguenti possibilità:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}^2 & B^2 & (A \cap B) \times \mathbb{U} \\ A^2 & A \times B & (A \cup B) \times \mathbb{U} \end{array}$$

90 $(A \times \mathbb{U}) \cap (B \times \mathbb{U}) =$ $(A \cap B) \times \mathbb{U}$

91 $(A \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times B) =$ $A \times B$

92 $(A \times \mathbb{U}) \cup (B \times \mathbb{U}) =$ $(A \cup B) \times \mathbb{U}$

93 $(A \times \mathbb{U}) \cup (\mathbb{U} \times B) \supseteq$ $A \times B$

Esercizi 94 – 98

Si dica quali ipotesi tra

- | | |
|--------------------------------------|--------------------|
| 1. $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ | 3. $A \subseteq B$ |
| 2. $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$ | 4. $B \subseteq A$ |

implicano le seguenti:

94 $A^2 \cup B^2 = (A \cup B)^2$ 1,2,3,4

95 $A^2 \subseteq B^2$ 2,3

96 $A \times B = A \cup B$ 2

97 $A \times B = \emptyset$ 1,2

Il prodotto cartesiano è vuoto sse uno dei fattori è vuoto.

98 $A \times B = B \times A$ 1,2

Quest'uguaglianza è vera solo se $A = B$ o se uno dei due insiemi è vuoto (in questo caso si ottiene $\emptyset = \emptyset$).

99 $B \subseteq A \times B$ 2

L'inclusione è vera solo se l'insieme B è vuoto.

100

$$A \subseteq A \times B$$

2

L'inclusione è vera solo se l'insieme A è vuoto.

101

$$A \times B \subseteq A$$

1,2

Se almeno uno degli insiemi A e B è vuoto, allora $A \times B$ è vuoto. L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme.

102

$$A \times B \subseteq B$$

1,2

Idem.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 4

Le funzioni

Esercizi 103 – 106

Sia $\mathbb{U}$ un arbitrario universo non vuoto. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ed in caso contrario dare un controesempio.

103 $F[\emptyset] = \emptyset$

Si

105 $F[\mathbb{U}] = \text{img } F$

Si

104 $F^{-1}[\emptyset] = \emptyset$

Si

106 $F^{-1}[\mathbb{U}] = \text{dom } F$

Si

Esercizi 107 – 110

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3\}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ ed in caso contrario dare un controesempio.

107 $F = F^{-1} \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

No

Controesempio: $F = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$

108 $F^2 = F^{-1} \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

No

Controesempio: $F = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

109 $F^2 = F \implies F = \text{id}_{\mathbb{U}}.$

No

Controesempio: $F = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

110 $F^2 = G^2 \implies F = G.$

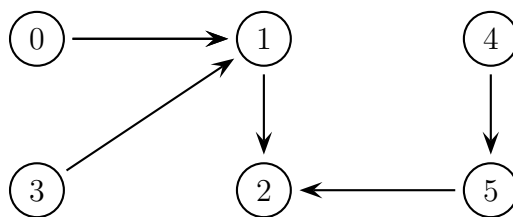
No

Controesempio: $F = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

$G = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$

Esercizi 111 – 113

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ la funzione il cui grafo è rappresentato nel seguente diagramma.



111 è $F|_{\{1,2,4,5\}}$ è iniettiva?

No

Sia 1 che 5 vengono mappati nel 2.

112 è $F|_{\{1,2,4,5\}}$ è suriettiva?

No

La funzione F non è suriettiva, a fortiori, la sua restrizione non potrà esserlo.

113 Si scriva $\text{img } F$, $\text{img } F^2$, ed $\text{img } F^3$.

$\{1, 2, 5\}$, $\{2\}$, $\emptyset$

Si osservi che nel grafo in figura non ci sono tre frecce consecutive. Si può subito concludere che $F^3 = \emptyset$.

Esercizi 114 – 115

Siano F e G due funzioni tali che $F^2 = G^2 = \text{id}_{\mathbb{U}}$. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio. (Per gli eventuali controesempi è sufficiente considerare $\mathbb{U} = \{0, 1, 2\}$.):

114 $(F \circ G)^{-1} = F \circ G$

No

Controesempio: $F : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2 \mapsto 1$

$G : 0 \mapsto 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 2$

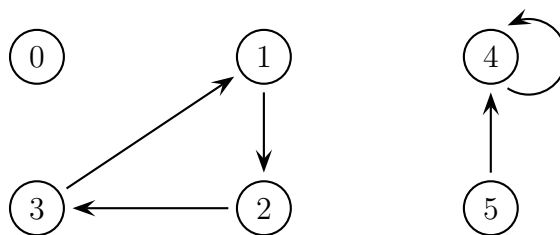
Si osservi che dalle ipotesi segue che sia F che G sono le inverse di se stesse. Allora $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1} = G \circ F$. Quindi un controesempio è dato da qualsiasi coppia di funzioni che soddisfa alle ipotesi ma non commuta.

115 $(F \circ G)^{-1} = G \circ F$

Si

Esercizi 116 – 119

Sia $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ la funzione il cui grafo è rappresentato nel seguente diagramma.



Per i seguenti valori di V dire

- A. $V = \{1, 2, 3\}$ B. $V = \{0, 1, 2, 3\}$
C. $V = \{1, 2, 3, 4\}$ D. $V = \mathbb{U}$

se le seguenti affermazioni sono vere:

116 $F[V] \subseteq V$

A sì, B sì, C sì, D sì

117 $F|_V = F$

A no, B no, C no, D sì

118 $V \subseteq F[V]$

A sì, B no, C sì, D no

119 $F|_V$ è iniettiva

A sì, B sì, C sì, D no

Esercizi 120 – 121

Sia F una funzione biiettiva e sia A un insieme. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio.

120 $F|_A$ è sempre iniettiva.

Si

121 $F|_A$ è suriettiva sse $A = \mathbb{U}$.

Si

Esercizi 122 – 126

Siano F e G due funzioni qualsiasi. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario si dia un controesempio.

122 Se $F \circ G$ è iniettiva allora F e G sono iniettive.

Si

123 Se $F \circ G$ è suriettiva allora F e G sono suriettive.

No

Controesempio: $F : x \mapsto x + 1$

$$G : x \mapsto x \div 1$$

124 Se F e G sono suriettive allora $F \circ G$ è suriettiva.

Si

125 Se F non è totale allora $F \circ G$ non è totale.

Si

126 Se G non è totale allora $F \circ G$ non è totale.

Si

Soluzioni degli esercizi del capitolo 5

I linguaggi del prim'ordine

Nessun esercizio

Soluzioni degli esercizi del capitolo 6

Le strutture

Esercizi 127 – 130

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dei seguenti insiemi dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, coincidono con l'insieme definito dalla formula $px \leftrightarrow qx$? In caso contrario dare un controesempio.

127 $\neg[Q \triangle P]$

Si

129 $Q \triangle \neg P$

Si

128 $[P \cap Q] \cup [\neg P \cap \neg Q]$

Si

130 $\neg Q \triangle P$

Si

Esercizi 131 – 136

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Delle seguenti formule dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, definiscono l'insieme $Q \triangle \neg P$. In caso contrario dare un controesempio.

131 $px \rightarrow qx$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$

Ma anche qualsiasi altra coppia P, Q tale che $Q \setminus P \neq \emptyset$.

132 $\neg px \rightarrow qx$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}, Q = \emptyset$

Ma anche qualsiasi altra coppia P, Q tale che $Q \triangle P \neq \emptyset$ oppure tali che $Q \cup P \neq \mathbb{N}$.

133 $\neg px \vee qx$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$

Vedi sopra: $\neg px \vee qx$ è equivalente a $px \rightarrow qx$.

134 $px \leftrightarrow qx$

Si

135 $\neg px \leftrightarrow \neg qx$

Si

136 $px \oplus \neg qx$

Si

Esercizi 137 – 139

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Delle seguenti formule dire se, in ogni modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$, definiscono l'insieme $\neg P \triangle \neg Q$. In caso contrario dare un controesempio.

137 $px \rightarrow qx$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}, Q = \emptyset$

138 $\neg px \rightarrow \neg qx$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$

139 $\neg px \vee \neg qx$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$

Esercizi 140 – 143

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Scrivere una formula che in ogni modello $\langle \mathbb{U}, P, Q, R \rangle$ è soddisfatta da tutti e soli gli elementi appartenenti a:

140 uno degli insiemi P, Q , ed R .

$$[px \oplus qx \oplus rx] \wedge \neg[px \wedge qx \wedge rx]$$

141 due degli insiemi P, Q , ed R .

$$\neg[px \oplus qx \oplus rx] \wedge [px \vee qx \vee rx]$$

È conveniente utilizzare il fatto che la formula $p \oplus q \oplus r$ è vera quando tutte o una sola delle formule p, q ed r sono vere.

Esercizi 142 – 147

Il linguaggio è $L = \{p, q\}$. Fissiamo un generico modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$. Si dica quali sono gli insiemi definiti dalle seguenti formule:

142 $[\neg px \rightarrow qx] \vee px$

 $P \cup Q$

Questa formula definisce l'insieme $(\neg\neg P \vee Q) \vee Q$. Il risultato si ottiene semplificando.

143 $[px \leftrightarrow qx] \vee [px \oplus qx]$

 $\mathbb{U}$

Questa formula definisce l'insieme $\neg(P \triangle Q) \cup (P \triangle Q)$ che è equivalente ad $\mathbb{U}$.

144 $[px \oplus qx] \vee \neg[px \rightarrow qx]$

$P \triangle Q$

Questa formula definisce l'insieme $(P \triangle Q) \cup \neg(\neg P \cup Q)$. Usando deMorgan da $\neg(\neg P \cup Q)$ otteniamo $P \cap \neg Q$, cioè $P \setminus Q$. da Il risultato si ottiene ricordando che la differenza simmetrica di P e Q è l'unione di $P \setminus Q$ e $Q \setminus P$.

145 $[\neg px \rightarrow qx] \vee qx$

$P \cup Q$

Vedi esercizio 142

146 $[\neg qx \rightarrow px] \vee qx$

$\mathbb{U}$

Vedi esercizio 142

147 $\neg[px \rightarrow qx] \wedge [px \oplus qx]$

$P \setminus Q$

Vedi esercizio 144

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$\mathbb{U}$	P	$\neg P$	$P \cup Q$	$P \setminus Q$	$Q \triangle P$
$\emptyset$	Q	$\neg Q$	$P \cap Q$	$Q \setminus P$	$\neg Q \triangle P$

Esercizi 148 – 153

Ognuna delle formule elencate qui sotto definisce, in tutti i modelli tali che $P \subseteq Q$, uno dei seguenti insiemi,

$\mathbb{U}$	$\neg P$	$\neg P \cap Q$
$\emptyset$	$\neg Q$	$\neg P \cup Q$
P	Q	$\neg Q \triangle P$

si dica quale.

148 $p(x) \wedge q(x)$

P

In generale, questa formula definisce $P \cap Q$. Poichè si assume $P \subseteq Q$, il risultato è P .

149 $p(x) \vee q(x)$

Q

In generale, questa formula definisce $P \cup Q$. Poichè si assume $P \subseteq Q$, il risultato è Q .

150 $\neg q(x) \vee \neg p(x)$

$\neg P$

Questa formula definisce $\neg P \cup \neg Q$ che, usando deMorgan, è equivalente a $\neg(P \cap Q)$. Se si assume $P \subseteq Q$, il risultato è $\neg P$.

151 $q(x) \oplus p(x)$

$\neg P \cap Q$

Questa formula definisce $P \triangle Q$ che è equivalente a $(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$. Se $P \subseteq Q$ allora $P \setminus Q$ è vuoto. Il risultato si ottiene notando che, in generale, $Q \setminus P$ è equivalente a $\neg P \cap Q$.

152 $p(x) \wedge \neg q(x)$

$\emptyset$

Questa formula definisce $P \cap \neg Q$ che è equivalente a $P \setminus Q$. Se $P \subseteq Q$ allora $P \setminus Q$ è vuoto.

153 $q(x) \rightarrow p(x)$

$\neg Q \triangle P$

La formula $q(x) \rightarrow p(x)$ è equivalente a $\neg q(x) \vee p(x)$, quindi definisce $\neg Q \cup P$. Se $P \subseteq Q$ allora P e $\neg Q$ sono disgiunti. la diffetrenza simmetrica coincide, in questo caso, con l'unione.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 7

La logica proposizionale

Esercizi 154 – 159

Sia $\varphi(p, q) := p \wedge q \rightarrow p$ e sia $\psi(p) := \neg p$. Si scrivano esplicitamente le seguenti formule:

154	$\varphi(q, p)$	$q \wedge p \rightarrow q$
155	$\varphi(\top, r)$	$r \wedge \top \rightarrow r$
156	$\varphi(p, \psi(p))$	$p \wedge \neg p \rightarrow p$
157	$\psi(\varphi(r, q))$	$\neg[r \wedge q \rightarrow r]$
158	$\varphi(\varphi(p, q), q)$	$[p \wedge q \rightarrow p] \wedge q \rightarrow [p \wedge q \rightarrow p]$
159	$\psi(\neg\psi(p))$	$\neg\neg\neg p$

Esercizi 160 – 163

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono tautologie ed in caso contrario dare un controesempio, cioè un modello dove le formule sono false.

160	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$	Si
161	$\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$ Controesempio: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$	No
162	$p \oplus q \rightarrow p \vee q$	Si
163	$p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$ Controesempio: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$	No

Esercizi 164 – 167

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono consistenti ed in caso favorevole dare un esempio di modello dove le formule sono vere.

164 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ No

Esempio: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$
Anche l'esempio $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$.

165 $\neg[p \wedge q \rightarrow p \vee q]$ No

166 $p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$ Si

Esempio: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$
Anche gli esempi $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle$.

167 $\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$ Si

Esempio: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle$
Anche l'esempio $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$.

Esercizi 168 – 171

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Quanti modelli hanno le seguenti formule? E quanti ne hanno se invece poniamo $L = \{p, q, r, s, v\}$?

168 $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ 2, 16

Dalla tavola di verità

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{v}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{v}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$

costatiamo che questa formula ha 2 modelli: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. La risposta alla seconda domanda si ottiene dalla prima moltiplicando per $2^3 = 8$.

169 $\neg[p \vee q \rightarrow p \wedge q]$ 2, 16

Questa formula è la negazione della precedente. Quindi nel linguaggio $\{p, q\}$ i modelli sono: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle$.

170 $\neg[p \wedge q \rightarrow p \vee q]$

0, 0

Questa formula è una contraddizione: non ha alcun modello.

171 $p \oplus q \leftrightarrow p \vee q$

3, 24

Dalla tavola di verità

p	q	$p \oplus q$	$p \vee q$
f	f	f	f
f	v	v	v
v	f	v	v
v	v	f	v

costatiamo che questa formula ha 3 modelli. La risposta alla seconda domanda si ottiene dalla prima moltiplicando per $2^3 = 8$.

Esercizi 172 – 173

Quante sono, a meno di equivalenza logica

172 le formule $\varphi(p, q)$ che implicano $p \oplus q$?

4

La formula $\varphi(p, q)$ in tutti i modelli in cui $p \oplus q$ negli altri modelli può avere un qualsiasi valore di verità. La sua tavola di verità ha quindi la forma (scriviamo w, x, y, z per valori di verità per ora ignoti)

p	q	$\varphi(p, q)$	$\rightarrow$	$p \oplus q$
f	f	w	$\neg w$	f
f	v	x	v	v
v	f	y	v	v
v	v	z	$\neg z$	f

Quindi, se vogliamo che l'implicazione sia una tautologia, dev'essere $w = z = f$ mentre x ed y possono essere arbitrari. La risposta è quindi 2^2

173 le formule tali che $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, \neg q)$?

4

La tavola di verità di $\varphi(p, q)$ ha la forma

p	q	$\varphi(p, q)$
f	f	w
f	v	x
v	f	y
v	v	z

dove w, x, y, z sono valori di verità (per ora) arbitrari. La tavola di verità di $\varphi(p, \neg q)$ dovrà avere la forma

p	q	$\varphi(p, \neg q)$
f	f	x
f	v	w
v	f	z
v	v	y

Assumendo $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, \neg q)$ otteniamo che $x = w$ e $y = z$. Rimangono quindi 2^2 possibilità.

Si noti che, grazie all'osservazione fatta nel capitolo precedente, contare le formule 'a meno di equivalenza logica' corrisponde a contare le tavole di verità.

Esercizi 174 – 178

Si inserisca alla destra del simbolo di (bi)implicazione una delle seguenti formule:

$\top$	p	$\neg p$	$p \vee q$	$p \oplus q$
$\perp$	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$

in modo da ottenere delle tautologie.

174 $p \wedge \neg p \leftrightarrow$

$\perp$

179 $\neg \perp \leftrightarrow$

$\top$

175 $p \wedge \top \leftrightarrow$

p

180 $(p \wedge q) \wedge q \leftrightarrow$

$p \wedge q$

176 $p \oplus \top \leftrightarrow$

$\neg p$

181 $r \rightarrow$

$\top$

177 $\perp \wedge p \leftrightarrow$

$\perp$

182 $r \leftarrow$

$\perp$

178 $[p \vee q] \wedge \neg[p \wedge q] \leftrightarrow$

$p \oplus q$

183 $\perp \leftarrow$

$\perp$

Esercizi 184 – 187

Si inserisca alla destra del simbolo di biimplicazione (casus quo, implicazione) una delle seguenti formule:

$\top$	p	$\neg p$	$p \vee q$	$p \oplus q$
$\perp$	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$

in modo da ottenere delle contraddizioni.

184 $p \wedge \neg p \leftrightarrow$

 $\top$

188 $\neg \perp \leftrightarrow$

 $\perp$

185 $p \wedge \top \leftrightarrow$

 $\neg p$

189 $\top \rightarrow$

 $\perp$

186 $p \oplus \top \leftrightarrow$

 p

190 $\perp \leftarrow$

 $\top$

187 $\perp \wedge p \leftrightarrow$

 $\top$ **Esercizi 191 – 194**

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, r\}$. Supponiamo che $\varphi(p, r)$ sia una tautologia. Dire, se possibile, se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni, nè tautologie nè contraddizioni.

191 $\varphi(p, p)$

Tautologia

192 $p \rightarrow \varphi(p, r)$

Tautologia

193 $\neg\varphi(\neg p, \neg r)$

Contraddizione

194 $p \wedge \varphi(p, r)$

Nè tautologia nè contraddizione

Possiamo calcolare la tavola di verità di questa formula indipendentemente da $\varphi(p, r)$ e osservare che è consistente ma che non è una tautologia:

p	r	$p \wedge \varphi(p, r)$
f	f	f
f	v	f
v	f	v
v	v	v

Esercizi 195 – 204

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, r\}$. Supponiamo che $p \rightarrow \varphi(p, r)$ sia una tautologia. Dire, se possibile, se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni, nè tautologie nè contraddizioni. (N.B. Si risponda solo nei casi in cui la risposta è indipendente dalla particolare formula $\varphi(p, r)$ nella classe descritta.)

195 $\varphi(p, r)$

Non è possibile rispondere

Non abbiamo abbastanza informazione sulla formula $\varphi(p, r)$ per rispondere

alla domanda. Quello che sappiamo della formula $\varphi(p, r)$ è riassunto nella seguente tavola di verità:

p	r	$\varphi(p, r)$
f	f	?
f	v	?
v	f	v
v	v	v

Certamente la formula $\varphi(p, r)$ non è una contraddizione, ma non sappiamo dire altro. Per esempio le formule $\top$ e $r \rightarrow p$ soddisfano alle ipotesi, la prima è una tautologia la seconda, no.

196 $\varphi(\top, r)$

Tautologia

197 $\varphi(r, r)$

Non è possibile rispondere

198 $\neg\varphi(p, r) \rightarrow \neg p$

Tautologia

Questa formula è equivalente a $p \rightarrow \varphi(p, r)$ che, per ipotesi, è una tautologia

199 $\varphi(p, r) \rightarrow \neg p$

Nè tautologia nè contraddizione

È possibile ricostruire la tavola di verità della formula in questione:

p	r	$\varphi(p, r)$	$\rightarrow$	$\neg$	p
f	f	?	v	v	
f	v	?	v	v	
v	f	v	f	f	
v	v	v	f	f	

200 $\varphi(p, r) \rightarrow r \wedge \neg p$

Nè tautologia nè contraddizione

Anche se non è possibile ricostruire completamente la tavola di verità della formula in questione, questa ci da sufficiente informazione per rispondere.

p	r	$\varphi(p, r)$	$\rightarrow$	r	$\wedge$	$\neg$	p
f	f	?	?	f	v		
f	v	?	v	v	v		
v	f	v	f	f	f		
v	v	v	f	f	f		

201 $\neg\varphi(p, r) \wedge p$

Contraddizione

Possiamo completamente determinare la tavola di verità della formula in questione.

p	r	$\neg$	$\varphi(p, r)$	$\wedge$	p
f	f	?	?		f
f	v	?	?		f
v	f	f	v		f
v	v	f	v		f

202 $\varphi(p, r) \wedge \neg p$

Non è possibile rispondere

Questo è tutto quanto possiamo sapere della tavola di verità, sappiamo soltanto che la formula in questione non è una tautologia.

p	r	$\varphi(p, r)$	$\wedge$	$\neg$	p
f	f	?	?	v	
f	v	?	?	v	
v	f	v	f	f	
v	v	v	f	f	

203 $\neg\varphi(p, r) \vee r$

Nè tautologia nè contraddizione

Anche se non è possibile ricostruire completamente la tavola di verità della formula in questione, questa ci dà sufficiente informazione per rispondere.

p	r	$\neg$	$\varphi(p, r)$	$\vee$	r
f	f	?	?	?	
f	v	?	?	v	
v	f	f	v	f	
v	v	f	v	v	

204 $\varphi(r, p) \vee \neg r$

Tautologia

Si faccia attenzione a non confondere $\varphi(r, p)$ con $\varphi(p, r)$.

p	r	$\neg$	$\varphi(r, p)$	$\vee$	$\neg$	r
f	f	?	?	v	v	
f	v	f	v	v	f	
v	f	?	?	v	v	
v	v	f	v	v	f	

Esercizi 205 – 208

Si costruiscano le tavole di verità di tutte le formule proposizionali $\varphi(p, q)$ che verificano le seguenti identità. (N.B. in alcuni casi l'identità non è soddisfatta da nessuna formula.)

205

$$\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(p, \neg q)$$

p	q	φ
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	v

La tavola di verità della formula sulla destra è nota a meno del modello $\langle v, v \rangle$:

p	q	$p \wedge q$	$\rightarrow$	$\varphi(p, \neg q)$
f	f	f	v	?
f	v	f	v	?
v	f	f	v	?
v	v	v	?	?

Assumendo valida l'identità qui sopra concludiamo che

p	q	$\varphi(p, q)$
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	?

basta solo determinare il valore di verità di $\varphi(\top, \top)$. Sostituendo $\top$ al posto di p e q nell'identità qui sopra. Otteniamo:

$$\neg\varphi(\top, \top) \iff \top \wedge \top \rightarrow \varphi(\top, \perp)$$

ovvero

$$\neg\varphi(\top, \top) \iff \varphi(\top, \perp)$$

Ma il valore di verità di $\varphi(\top, \perp)$ è noto.

206

$$\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(\neg p, q)$$

p	q	φ
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	v

207

$$\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \varphi(q, p)$$

Nessuna

Nessuna formula può verificare tale identità. Infatti, sostituendo $\top$ al posto di p e q otteniamo:

$$\neg\varphi(\top, \top) \iff \top \wedge \top \rightarrow \varphi(\top, \top)$$

ovvero

$$\neg\varphi(\top, \top) \iff \varphi(\top, \top)$$

Che non può mai essere verificato.

208 $\neg\varphi(p, q) \iff p \wedge q \rightarrow \neg\varphi(q, p)$

p	q	φ	φ
f	f	f	f
f	v	f	f
v	f	f	f
v	v	v	f

Esistono due soluzioni: l'identità non risolve il valore di $\varphi(\top, \top)$ che può quindi essere assegnato arbitrariamente.

209 $\varphi(p, q) \iff \varphi(\varphi(p, q), q) \wedge q$

p	q	φ	φ	φ
f	f	f	f	f
f	v	v	f	f
v	f	f	f	f
v	v	v	v	f

Se q è falsa allora $\varphi(p, q)$ è falsa. Esistono (solo) 4 modi per completare la tavola e possono essere esaminati uno ad uno. Uno di questi non è consistente con l'equivalenza logica data.

Esercizi 210 – 217

Si costruiscano le tavole di verità di tutte le formule proposizionali $\varphi(p, q)$ che verificano le seguenti identità. (N.B. in alcuni casi l'identità non è soddisfatta da nessuna formula.)

210 $\varphi(p, q) \iff \varphi(q, p) \vee q$

p	q	φ	φ
f	f	v	f
f	v	v	v
v	f	v	v
v	v	v	v

211 $\varphi(p, q) \iff \neg\varphi(p, q) \vee q$

Nessuna

212 $\varphi(p, q) \iff \neg\varphi(\neg p, q) \vee q$

p	q	φ	φ
f	f	v	f
f	v	v	v
v	f	f	v
v	v	v	v

213 $\varphi(p, q) \iff \neg q \leftrightarrow \varphi(p, q)$

Nessuna

214 $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, q) \wedge p \wedge q$

p	q	φ	φ
f	f	f	f
f	v	f	f
v	f	f	f
v	v	f	v

215 $\varphi(p, q) \iff \varphi(p, q) \leftrightarrow p \wedge q$

p	q	φ	φ
f	f	f	f
f	v	f	f
v	f	f	f
v	v	f	v

216 $\varphi(p, q) \iff p \wedge q$

p	q	φ
f	f	f
f	v	f
v	f	f
v	v	v

217 $p \iff \varphi(p, q) \wedge p \wedge q$

Nessuna

Esercizi 218 – 219

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Quanti modelli ha la formula $\varphi(p, q)$ se:

218 $r \rightarrow \varphi(p, q)$ ha 7 modelli.

6

La tavola di verità della formula $\varphi(p, q)$ nel linguaggio $\{p, q, r\}$ ha la seguente forma:

r	p	q	$\varphi(p, q)$
f	f	f	w
f	f	v	x
f	v	f	y
f	v	v	z
v	f	f	w
v	f	v	x
v	v	f	y
v	v	v	z

dove w, x, y, z sono dei valori di verità. Cerchiamo di costruire per quanto possibile la tavola di verità di $r \rightarrow \varphi(p, q)$.

r	p	q	r	$\rightarrow$	$\varphi(p, q)$
f	f	f	v	w	
f	f	v	v	x	
f	v	f	v	y	
f	v	v	v	z	
v	f	f	w	w	
v	f	v	x	x	
v	v	f	y	y	
v	v	v	z	z	

I primi quattro valori della tavola qui sopra sono indipendenti dalla tavola di verità di φ . Della seconda parte della tavola non può essere ricostruita completamente. Sappiamo però che coincide con la tavola di φ . Poichè $r \rightarrow \varphi(p, q)$ ha 7 modelli, possiamo concludere che in w, x, y, z occorre 3 volte v ed 1 volta f . Non sappiamo dire quali, ma possiamo comunque rispondere alla domanda: la formula $\varphi(p, q)$ ha $3 + 3$ modelli $\{p, q, r\}$.

219 $\varphi(p, q) \rightarrow r$ ha 7 modelli.

2

La tavola di verità di $\varphi(p, q) \rightarrow r$ ha la forma

r	p	q	$\varphi(p, q)$	$\rightarrow$	r
f	f	f	w	$\neg w$	f
f	f	v	x	$\neg x$	f
f	v	f	y	$\neg y$	f
f	v	v	z	$\neg z$	f
v	f	f	w	v	v
v	f	v	x	v	v
v	v	f	y	v	v
v	v	v	z	v	v

Dove $\neg w, \neg x, \neg y, \neg z$ sono gli opposti dei valori w, x, y, z . Poichè $\varphi(p, q) \rightarrow r$ ha 7 modelli, 3 dei valori $\neg w, \neg x, \neg y, \neg z$ sono v e 1 è f . Ne segue che dei valori w, x, y, z solo 1 è v . La formula $\varphi(p, q)$ ha quindi $1 + 1$ modelli nel linguaggio $\{p, q, r\}$.

Esercizi 220 – 221

Si calcoli la tavola di verità di $\varphi(p, q)$ assumendo che le seguenti formule siano tautologie

220

$$p \rightarrow \varphi(p, q) \text{ e } p \vee [\varphi(p, q) \leftrightarrow q]$$

p	q	φ
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	v

Dalla prima ipotesi segue immediatamente che $\varphi(\top, q)$ è una tautologia, quindi la tavola di verità di $\varphi(p, q)$ deve avere la forma

p	q	$\varphi(p, q)$
f	f	w
f	v	x
v	f	v
v	v	v

dove w e x sono dei valori di verità. Dalla seconda ipotesi segue che anche $\varphi(\perp, q) \leftrightarrow q$ è una tautologia, quindi

q	$\varphi(\perp, q)$	$\leftrightarrow$	q
f	w		v
v	x		v

Si ottiene che $w = f$ e $x = v$.

221

$$\varphi(p, \neg p) \text{ e } \varphi(p, q) \rightarrow q \oplus p$$

p	q	φ
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	f

Dalla prima ipotesi otteniamo la tavola di verità di $\varphi(p, q)$ deve avere la forma

p	q	$\varphi(p, q)$
f	f	w
f	v	v
v	f	v
v	v	x

per qualche valore di verità w e x. Poichè $\varphi(p, q) \rightarrow q \oplus p$ è una tautologia, la seguente tavola di verità deve risultare corretta:

p	q	$\varphi(p, q)$	$\rightarrow$	$q \oplus p$
f	f	w		f
f	v	v		v
v	f	v		v
v	v	x		f

Quindi $w = f$ e $x = f$.

Esercizi 222 – 225

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r, s\}$. Siano $\varphi(p, q)$ e $\psi(r, s)$ due formule che hanno entrambe esattamente 4 modelli (N.B.: modelli per il linguaggio L). Dire, se possibile, quanti modelli hanno le seguenti formule:

222 $\varphi(p, q) \wedge \psi(r, s)$

1

Il numero di modelli nel linguaggio L della formula $\varphi(p, q)$ è 4 volte il numero di modelli di $\varphi(p, q)$ nel linguaggio $\{q, p\}$. Quindi, nel linguaggio $\{q, p\}$ la formula $\varphi(p, q)$ ha solo un modello. Lo stesso vale per la formula $\psi(r, s)$ nel linguaggio $\{r, s\}$. I modelli che rendono vera $\varphi(p, q) \wedge \psi(r, s)$ devono rendere vere entrambe le formule $\varphi(p, q)$ e $\psi(r, s)$. Quindi esiste solo una combinazione di valori di verità per p, q, r, s che rende vere entrambe le formule.

223 $\varphi(p, q) \rightarrow \psi(r, s)$

13

Un modello che rende vera $\varphi(p, q) \wedge \psi(r, s)$ più $3 \cdot 4 = 12$ modelli che rendono vera $\neg\varphi(p, q)$.

224 $\varphi(p, q) \rightarrow \psi(p, q)$

Non è possibile rispondere

225 $\varphi(r, s)$.

4

Esercizi 226 – 233

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Sia $\varphi(p, r)$ una formula proposizionale che ha esattamente 6 modelli nel linguaggio L . Si dica quanti modelli hanno le seguenti formule.

226 $\varphi(p, r) \vee q$

7

228 $q \rightarrow \varphi(p, r)$

7

227 $\varphi(p, r) \wedge q$

3

229 $\varphi(p, r) \rightarrow q$

5

Supponiamo ora che la formula $\varphi(p, r)$ abbia 4 modelli nel linguaggio L . Quanti modelli hanno le seguenti formule?

230 $\varphi(p, r) \wedge q$

2

232 $q \rightarrow \varphi(p, r)$

6

231 $\varphi(p, r) \vee q$

6

233 $\varphi(p, r) \rightarrow q$

6

Esercizi 234 – 241

Fissiamo un linguaggio $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ dove $n \geq 1$. Si dica in funzione di n quanti sono i modelli delle seguenti formule

234	$\bigwedge_{i=1}^n p_i$	1
------------	-------------------------	---

235	$\bigwedge_{i=1}^n \neg p_i$	1
------------	------------------------------	---

La risposta è necessariamente la stessa dell'esercizio precedente.

236	$\bigvee_{i=1}^n p_i$	$2^n - 1$
------------	-----------------------	-----------

Basta usare deMorgan questa formula è la soluzione dell'esercizio precedente.

237	$\bigvee_{i=1}^n \neg p_i$	$2^n - 1$
------------	----------------------------	-----------

La risposta è necessariamente la stessa dell'esercizio 240.

238	$\bigwedge_{i=2}^n p_i$	2
------------	-------------------------	---

Simile a 234 ma ora p_1 è arbitrario.

239	$\bigvee_{i=3}^n p_i$	$2^n - 4$
------------	-----------------------	-----------

240	$p_1 \rightarrow \bigvee_{i=2}^n p_i$	$2^n - 1$
------------	---------------------------------------	-----------

Se scriviamo la formula come

$$\neg p_1 \vee \bigvee_{i=2}^n p_i$$

vediamo che la risposta deve essere la stessa che quella dell'esercizio .

241	$p_1 \rightarrow \bigwedge_{i=2}^n p_i$	$2^{n-1} + 1$
------------	---	---------------

Bisogna sommare il numero dei modelli che rendono falsa p_1 (siccome $p_2, \dots, p_n$ sono arbitrari ce ne saranno 2^{n-1}) al numero dei modelli che rendono vera

$$\neg p_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^n p_i$$

Ma di questi modelli ce n'è uno solo.

$$\text{242} \quad \bigwedge_{i=2}^n p_i \rightarrow p_1$$

$$2^n - 1$$

$$\text{243} \quad \bigvee_{i=2}^n p_i \rightarrow p_1$$

$$2^{n-1} + 1$$

$$\text{244} \quad \bigvee_{i=2}^n p_i \leftrightarrow p_1$$

$$2^{n-1}$$

Pensiamo la biimplicazione come congiunzione di due implicazioni. Come visto nell'esercizio precedente, ci sono $2^{n-1} + 1$ modelli che rendono vera l'implicazione nella direzione $\rightarrow$. Da questo numero bisogna togliere i modelli che rendono falsa l'implicazione nella direzione $\leftarrow$, ovvero i modelli di

$$\neg p_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^n \neg p_i$$

Ma di questi modelli ce n'è uno solo.

$$\text{245} \quad \bigwedge_{i=2}^n p_i \leftrightarrow p_1$$

$$2^{n-1}$$

La soluzione si ricava con un ragionamento analogo al precedente. Si può anche usare la soluzione dell'esercizio precedente osservando che è equivalente contare i modelli della formula:

$$\bigwedge_{i=2}^n \neg p_i \leftrightarrow \neg p_1$$

per deMorgan questa è equivalente a

$$\neg \bigvee_{i=2}^n p_i \leftrightarrow \neg p_1$$

e quindi alla formula dell'esercizio precedente.

$$\text{246} \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_i \rightarrow p_1]$$

$$2^{n-1} + 1$$

$$247 \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_1 \rightarrow p_i] \quad 2^{n-1} + 1$$

Questa formula si ottiene dalla precedente sostituendo $p_1, \dots, p_n$ con $\neg p_1, \dots, \neg p_n$.
Il numero dei modelli deve quindi essere lo stesso.

$$248 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_i \rightarrow p_1] \quad 2^n - 1$$

$$249 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_1 \rightarrow p_i] \quad 2^n - 1$$

$$250 \quad \bigwedge_{i=2}^n [p_i \leftrightarrow p_1] \quad 2$$

$$251 \quad \bigvee_{i=2}^n [p_i \leftrightarrow p_1] \quad 2^n - 2$$

Esercizi 252 – 257

Fissiamo un linguaggio $L = \{p_1, \dots, p_n\}$ dove $n \geq 3$. Si dica quanti modelli hanno le seguenti formule. La risposta va espressa in funzione di n . In qualche formula compare il parametro m : un arbitrario numero tale che $1 \leq m \leq n$. In questo caso la risposta va espressa in funzione anche di m .

$$252 \quad \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}] \quad 2$$

$$253 \quad p_m \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}] \quad 1$$

$$254 \quad p_m \vee \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \leftrightarrow p_{i+1}] \quad 2^{n-1} + 1$$

$$255 \quad \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}] \quad n + 1$$

Per esempio per $n = 7$, i modelli sono della forma

f	f	f	f	f	f	f
v	f	f	f	f	f	f
v	v	f	f	f	f	f
v	v	v	f	f	f	f
v	v	v	v	f	f	f
v	v	v	v	v	f	f
v	v	v	v	v	v	f
v	v	v	v	v	v	v

$$\mathbf{256} \quad [p_n \rightarrow p_1] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}]$$

2

Infatti i soli modelli sono $\langle f, f, f, \dots, f \rangle$ e $\langle v, v, v, \dots, v \rangle$.

$$\mathbf{257} \quad [p_m \rightarrow p_1] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} [p_i \rightarrow p_{i+1}]$$

 $n - m + 2$

Per esempio per $n = 7$ ed $m = 3$, i modelli sono della forma

f	f	f	f	f	f	f
v	v	v	f	f	f	f
v	v	v	v	f	f	f
v	v	v	v	v	f	f
v	v	v	v	v	v	f
v	v	v	v	v	v	v

Esercizi 258 – 263

Per risolvere i seguenti esercizi occorre conoscere alcune famose formule ricorsive che generalmente non appartengono al bagaglio culturale dello studente della scuola superiore.

$$\mathbf{258} \quad \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \vee p_{i+1}]$$

 $F(n+2)$

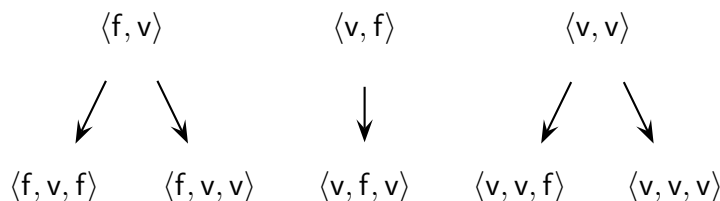
La soluzione si esprime facilmente usando la sequenza di Fibonacci che qui indichiamo con $F(n)$. Le sequenze di valori di verità dove f non occorre due volte consecutive sono modelli della formula. Viceversa ogni modello di questa formula deve essere una sequenza di questo tipo (se nella sequenza occorrono due f consecutivi questa non può essere modello della formula qui sopra). Per esempio, nel caso $n = 2$, ci sono 3 modelli e nel caso $n = 3$ ci sono 5 modelli.

$$\langle f, v \rangle \qquad \langle v, f \rangle \qquad \langle v, v \rangle$$

nel caso $n = 3$, i modelli,

$$\langle f, v, f \rangle \quad \langle f, v, v \rangle \quad \langle v, f, v \rangle \quad \langle v, v, f \rangle \quad \langle v, v, v \rangle$$

Osserviamo che i modelli per $n = 3$ possono essere ottenuti dai modelli con $n = 2$ aggiungendo a destra f e/o v . Per non ottenere una doppia occorrenza di f , possiamo aggiungere f solo se il modello termina per v ; invece v può essere sempre aggiunto:



L'osservazione fatta qui sopra è valida in generale. Cerchiamo di sfruttarla per calcolare il numero di modelli. Sia $M(n)$ il numero dei modelli in funzione di n . Conviene contare separatamente i modelli tali che $p_n \rightsquigarrow v$ e quelli tali che $p_n \rightsquigarrow f$. Supponiamo allora che $M(n) = M_v(n) + M_f(n)$ dove $M_v(n)$ è il numero dei modelli del primo tipo e $M_f(n)$ il numero dei modelli del secondo tipo. Possiamo estendere un modello del primo tipo su n lettere proposizionali ad un modello su $n + 1$ lettere proposizionali in due modi: stipulando che $p_n \rightsquigarrow v$ o $p_n \rightsquigarrow f$. Un modello del secondo tipo può essere esteso in un solo modo: stipulando $p_n \rightsquigarrow f$. Quindi avremo che:

$$\begin{aligned}
 M_v(n+1) &= M_f(n) + M_v(n) = M(n) \\
 M_f(n+1) &= M_v(n)
 \end{aligned}$$

Queste stesse relazioni, sostituendo $n + 1$ ad n diventano:

$$\begin{aligned}
 M_v(n+2) &= M(n+1) \\
 M_f(n+2) &= M_v(n+1)
 \end{aligned}$$

Combinando il tutto otteniamo:

$$M(n+2) = M(n+1) + M(n)$$

Riconosciamo la formula ricorsiva soddisfatta dalla sequenza di Fibonacci $F(n)$. Poichè $M(2) = 3 = F(4)$ ed $M(3) = 5 = F(5)$ avremo che, in generale, $M(n) = F(n+2)$.

259

$$[p_1 \vee p_2] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \vee p_{i+1} \rightarrow p_{i+1} \vee p_{i+2}]$$

$F(n+2)$

Osserviamo che questa formula è equivalente a quella dell'esercizio precedente.

260

$$p_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-2} [p_i \rightarrow p_{i+1} \vee p_{i+2}]$$

 $F(n+1)$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 8

I quantificatori

Esercizi 261 – 265

Per ognuna le formule $\varphi(x)$ elencate qui sotto, si scriva $\varphi(a)$, dove a è un generico parametro.

261 $p(x) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(x)]$

$p(a) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(a)]$

262 $p(x) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(a)]$

$p(a) \rightarrow [\forall x q(x) \vee p(a)]$

263 $\exists x [p(x) \wedge [\forall x q(x) \vee p(x)]]$

$\exists x [p(x) \wedge [\forall x q(x) \vee p(x)]]$

264 $p(c) \wedge [\forall x q(x) \vee p(x)]$

$p(c) \wedge [\forall x q(x) \vee p(a)]$

265 $\exists x p(x) \wedge [\forall x q(a) \vee p(x)]$

$\exists x p(x) \wedge [\forall x q(a) \vee p(a)]$

Esercizi 266 – 269

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Scrivere una formula chiusa φ tale che il modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ renda vera φ se e solo se:

266 P e Q sono disgiunti;

$\neg \exists x [px \wedge qx]$

267 $\mathbb{U}$ è l'unione di P e Q ;

$\forall x [px \vee qx]$

268 $P \subsetneq Q$;

$\forall x [px \rightarrow qx] \wedge \exists x [\neg px \wedge qx]$

269 P è il complemento di Q .

$\forall x [px \leftrightarrow \neg qx]$

Esercizi 270 – 273

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Scrivere una formula chiusa φ tale che il modello $\langle \mathbb{N}, P, Q, R \rangle$ renda vera φ se e solo se:

270	R è l'unione di P e Q ;	$\forall x [rx \leftrightarrow px \vee qx]$
271	$P \cap Q \subseteq R$;	$\forall x [px \wedge qx \rightarrow rx]$
272	nessun elemento di R appartiene a $P \cap Q$.	$\forall x [rx \rightarrow \neg[px \wedge qx]]$
273	R è l'unione di P e Q ;	$\forall x [rx \leftrightarrow px \vee qx]$

Esercizi 274 – 283

Fissiamo il linguaggio $L = \{p, q\}$. Limitiamoci a considerare la classe di modelli $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tali che

$$P \triangle Q = \{x : 3 \leq x\}, \quad \{0, 1, 4\} \subseteq Q.$$

Per ognuna delle seguenti formule si dica se questa è vera o falsa in *ogni* modello della classe o se invece può essere vera o falsa a seconda del modello. In questo caso si dia un modello che la rende vera ed uno che la rende falsa.

274	$\neg p(4)$	Vera
275	$p(3)$	Dipende dal modello
	Esempio: vera se $P = \{0, 1, 2, 3\}$, $Q = \mathbb{N} \setminus \{3\}$, falsa se $P = \{0, 1, 2\}$, $Q = \mathbb{N}$.	
276	$\exists x [p(x) \wedge q(x)]$	Vera
277	$\exists x [\neg q(x) \wedge \neg p(x)]$	Dipende dal modello
	Esempio: vera in $P = \{0, 1\}$, $Q = \mathbb{N} \setminus \{2\}$, falsa in $P = \{0, 1, 2\}$, $Q = \mathbb{N}$.	
278	$\forall x [q(x) \vee p(x)]$	Dipende dal modello
	Esempio: vera in $P = \{0, 1, 2\}$, $Q = \mathbb{N}$, falsa in $P = \{0, 1\}$, $Q = \mathbb{N} \setminus \{2\}$.	
	osserviamo che questa formula è la negazione della precedente	
279	$p(2) \wedge \forall x q(x)$	Falsa

280 $\exists x [p(x) \oplus q(x)]$

Vera

281 $\forall x p(x)$

Falsa

282 $\forall x [p(x) \oplus q(x)]$

Falsa

283 $\forall x [p(x) \rightarrow p(x) \oplus q(x)]$

Falsa

Esercizi 284 – 293

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q, r\}$. Dire se le seguenti formule sono vere *in ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q, R \rangle$ tale che

$$P \cup Q = \mathbb{N}, \quad R = \{0, 1\}, \quad R \subseteq P.$$

In caso contrario dare un controesempio.

284 $\neg p(3)$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

285 $\neg \exists x [\neg p(x) \wedge q(x)]$

No

Controesempio: $P = \{0, 1\}$, $Q = \mathbb{N}$

286 $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$

No

Controesempio: $P = \{0, 1\}$, $Q = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

287 $\forall x [r(x) \rightarrow \neg q(x)]$

No

Controesempio: $Q = \mathbb{N}$

288 $q(0)$

No

Controesempio: $Q = \mathbb{N}$

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra che rende vere le formula seguenti. In caso affermativo si dia un esempio.

289 $\forall x \neg q(x)$

Si

Esempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

290 $\forall x q(x)$ Si

Esempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

291 $\neg \exists x [p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)]$ Si

Esempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

292 $\forall x [p(x) \rightarrow r(x)]$ Si

Esempio: $P = \{0, 1\}$, $Q = \mathbb{N}$

293 $\neg q(2)$ Si

Esempio: $P = \{0, 1, 2\}$, $Q = \mathbb{N} \setminus \{2\}$

Esercizi 294 – 304

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se le seguenti formule sono vere *in ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tale che $\neg P \subseteq Q$. In caso contrario dare un controesempio.

294 $\forall x \neg p(x)$ No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

295 $\forall x [p(x) \vee q(x)]$ Si

296 $\neg \forall x [q(x) \wedge p(x)]$ No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

297 $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$ No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

298 $\exists x q(x) \vee \exists x p(x)$ Si

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra che rende vere le formule seguenti. In caso affermativo si dia un esempio.

299 $\forall x \neg p(x)$ Si

Esempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$

300 $\forall x \neg p(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

No

301 $\exists x q(x) \wedge \exists x \neg q(x)$

Si

Esempio: $P = \mathbb{N}, Q = \{0\}$

302 $\forall x [p(x) \wedge q(x)]$

Si

Esempio: $P = \mathbb{N}, Q = \mathbb{N}$

303 $\neg \exists x [q(x) \wedge p(x)]$

Si

Esempio: $P = \mathbb{N}, Q = \emptyset$

304 $\exists x [q(x) \oplus p(x)]$

Si

Esempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{N}$

Esercizi 305 – 314

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$ ed un universo $\mathbb{U}$. Dire se le seguenti formule sono vere *in ogni* modello $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ tale che $Q \subseteq \neg P$. In caso contrario dare un controesempio.

305 $\forall x \neg q(x)$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \mathbb{U}$

306 $\neg \exists x [q(x) \wedge p(x)]$

Si

307 $\forall x [p(x) \rightarrow \neg q(x)]$

Si

308 $\forall x [q(x) \vee p(x)]$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$

309 $\neg \exists x [p(x) \leftrightarrow q(x)]$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$

Ora invece dire se le seguenti formule sono vere *in qualche* modello come sopra. In caso affermativo dare un esempio.

- | | | |
|------------|---|----|
| 310 | $\forall x \neg q(x)$
Esempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$ | Si |
| 311 | $\exists x [q(x) \wedge p(x)]$ | No |
| 312 | $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$
Esempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$ | Si |
| 313 | $\forall x [q(x) \vee p(x)]$
Esempio: $P = \emptyset, Q = U$ | Si |
| 314 | $\neg \exists x [p(x) \leftrightarrow q(x)]$
Esempio: $P = \emptyset, Q = U$ | Si |

Esercizi 315 – 325

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, s\}$. Dire se le seguenti affermazioni valgono *in ogni* modello $\mathcal{U} = \langle U, R, S \rangle$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists x [s(x) \leftrightarrow r(x)]$$

In caso contrario dare un controesempio.

- | | | |
|------------|---|--------------------------------|
| 315 | $S = R$
L'ipotesi su $\mathcal{U}$ è equivalente alla condizione $S \triangle R \neq U$ ovvero, che R non è il complemento di S . Esistono quindi innumerevoli controesempi. | $R = \{0\}, S = \emptyset$ |
| 316 | $S \triangle R \neq U$ | Si |
| 317 | $\neg S \neq R$ | Si |
| 318 | $S \neq R$ | $R = \emptyset, S = \emptyset$ |
| 319 | $S \triangle R \neq \{0\}$ | $R = \{0\}, S = \emptyset$ |

Ora invece dire se *esistono* modelli $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists x \neg [s(x) \rightarrow r(x)]$$

e che rendono vere le seguenti affermazioni. In caso affermativo dare un esempio.

320 $S = \emptyset$

No

L'ipotesi dice che $S \setminus R \neq \emptyset$, ovvero che $S \not\subseteq R$. Verificato questo, le seguenti risposte sono ovvie.

321 $R = \mathbb{U}$

No

322 $S \triangle R \neq \mathbb{N}$

Si

Esempio: $R = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S = \{0, 1\}$

323 $S = R$

No

324 $R \subseteq S$

No

Esercizi 325 – 333

Consideriamo un linguaggio $L = \{r, s\}$ e i modelli del tipo $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ dove $R \not\subseteq S$. Si dica quali sono gli insiemi definiti dalle seguenti formule:

325 $r(x) \wedge s(x) \rightarrow \forall x [r(x) \rightarrow s(x)]$

$\neg(R \cap S)$

Possiamo sostituire $\perp$ al posto di $\forall x [r(x) \rightarrow s(x)]$ perchè per ipotesi $R \not\subseteq S$.

326 $r(x) \wedge s(x) \wedge \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

$\emptyset$

Possiamo sostituire $\perp$ al posto di $\forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$ perchè dalle ipotesi segue che $R \neq S$.

327 $r(x) \vee s(x) \rightarrow \forall x s(x)$

$\neg(R \cup S)$

Possiamo sostituire $\perp$ al posto di $\forall x s(x)$ perchè dalle ipotesi segue che $S \neq \mathbb{U}$.

328 $r(x) \rightarrow [s(x) \rightarrow \exists x r(x)]$

$\mathbb{U}$

Possiamo sostituire $\top$ al posto di $\exists x s(x)$ perchè dalle ipotesi segue che $R \neq \emptyset$.

Ora invece supponiamo che $R \cap S = \emptyset$

329 $[r(x) \vee s(x)] \wedge \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$ $\emptyset$

La formula $\forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$ afferma che $R = S$. Se è falsa, allora l'intera formula è falsa. Se è vera allora, poichè per ipotesi $R \cap S = \emptyset$, entrambi R ed S sono vuoti, quindi $r(x) \vee s(x)$ definisce il vuoto.

330 $r(x) \vee [s(x) \wedge \forall x r(x)]$ R

Se $\forall x r(x)$ è vera allora la formula definisce $R = \mathbb{U}$. Se $\forall x r(x)$ è falsa allora allora la formula definisce R .

Come sopra ma si assuma che $R \cap S \neq \emptyset$

331 $s(x) \wedge [\forall x r(x) \rightarrow r(x)]$ S

332 $r(x) \vee s(x) \rightarrow \forall x \neg s(x)$ $\neg(R \cup S)$

333 $r(x) \vee [\forall x r(x) \rightarrow s(x)]$ U

Esercizi 334 – 350

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se *in ogni* modello $\langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ le seguenti formule definiscono l'insieme $\neg Q \triangle P$. In caso contrario dare un controesempio.

334 $\exists x [q(x) \vee p(x)] \rightarrow [q(x) \leftrightarrow p(x)]$ Si

Nel caso in cui $P \cup Q \neq \emptyset$ la formula in questione è equivalente a $q(x) \leftrightarrow p(x)$ e definisce quindi $\neg Q \triangle P$. Nel caso sia P che Q sono vuoti, la formula in questione è sempre vera, e $\neg Q \triangle P = \mathbb{N}$.

335 $[q(x) \leftrightarrow p(x)] \wedge \exists x q(x)$ No

Controesempio: $Q = P = \emptyset$ Nel caso in cui $Q \neq \emptyset$ la formula in questione è equivalente a $q(x) \leftrightarrow p(x)$ e definisce quindi $\neg Q \triangle P$. Ma nel caso in cui Q è vuoto, la formula in questione è sempre falsa, mentre $\neg Q \triangle P = \mathbb{N} \triangle P = \neg P$. Come controesempio è sufficiente porre $Q = \emptyset$ e scegliere $P \neq \mathbb{N}$.

336 $q(x) \leftrightarrow [p(x) \wedge \exists x q(x)]$

No

Controesempio: $Q = \emptyset, P = \mathbb{N}$

Di nuovo, il caso problematico è quello in cui Q è vuoto, la formula in questione diventa equivalente a $\neg q(x)$ e, poiché $q(x)$ è sempre falso, definisce $\mathbb{N}$. Come controesempio è sufficiente porre $Q = \emptyset$ e scegliere P in modo tale che $\mathbb{N} \triangle P \neq \mathbb{N}$.

337 $\exists x [\neg q(x) \oplus p(x)]$

No

Controesempio: $Q = \{0\}, P = \mathbb{N}$

Si noti che qui la risposta è *ovviamente no*, infatti la formula in questione è chiusa e quindi può definire solo l'insieme vuoto (se falsa) o tutto l'universo (se vera). La formula dice che $\neg Q \triangle P$ è non vuoto. Per un controesempio è sufficiente trovare P e Q tali che $\neg Q \triangle P$ sia non vuoto ma non sia tutto $\mathbb{N}$.

338 $\forall x [\neg q(x) \oplus p(x)]$

No

Controesempio: $Q = \{0\}, P = \mathbb{N}$

Anche qui, come sopra, la risposta è: *ovviamente no*. La formula dice che $\neg Q \triangle P$ è tutto $\mathbb{N}$. Per un controesempio è sufficiente trovare P e Q tali che $\neg Q \triangle P$ non sia tutto $\mathbb{N}$ ma non sia nemmeno vuoto.

Come sopra ma per l'insieme $\neg Q \triangle \neg P$ e le formule:

339 $\exists x [q(x) \vee p(x)] \rightarrow [q(x) \oplus p(x)]$

No

Controesempio: $P = \emptyset, Q = \emptyset$

Si noti prima di tutto che $\neg Q \triangle \neg P = Q \triangle P$. Nel caso in cui $P \cup Q \neq \emptyset$ la formula in questione è equivalente a $q(x) \oplus p(x)$ e definisce quindi $Q \triangle P$. Ma nel caso sia P che Q sono vuoti, la formula in questione è sempre vera e definisce quindi $\mathbb{N}$ mentre $Q \triangle P = \emptyset$.

340 $[q(x) \oplus p(x)] \wedge \exists x q(x)$

No

Controesempio: $Q = P = \emptyset$

Nel caso in cui $Q \neq \emptyset$ la formula in questione è equivalente a $q(x) \oplus p(x)$ e definisce quindi $Q \triangle P$. Ma nel caso in cui Q è vuoto, la formula in questione è sempre falsa, mentre $Q \triangle P = P$. Come controesempio è sufficiente porre $Q = \emptyset$ e scegliere $P \neq \emptyset$.

341 $[q(x) \leftrightarrow p(x)] \rightarrow \forall x q(x)$

No

Controesempio: $Q = P = \mathbb{N}$

Nel caso in cui $Q \neq \mathbb{N}$ la formula in questione è equivalente a $q(x) \oplus p(x)$ e definisce quindi $Q \triangle P$. Ma nel caso in cui $Q = \mathbb{N}$, la formula in questione è sempre vera, mentre $Q \triangle P = \neg P$. Come controesempio è sufficiente porre $Q = \mathbb{N}$ e scegliere $P \neq \emptyset$.

342 $p(x) \oplus [q(x) \vee \forall x q(x)]$ Si

Anche qui il caso $Q \neq \mathbb{N}$ non dà problemi. Quando $Q = \mathbb{N}$ e la formula in questione è equivalente a $\neg p(x)$ e definisce quindi $\neg P$. Ma se $Q = \mathbb{N}$ avremo anche $Q \triangle P = \neg P$.

343 $p(x) \oplus [q(x) \wedge \exists x q(x)]$ Si

344 $\exists x [q(x) \oplus p(x)]$ No

Controesempio: $Q = \{0\}$, $P = \mathbb{N}$

345 $\forall x [\neg q(x) \oplus \neg p(x)]$ No

Controesempio: $Q = \{0\}$, $P = \mathbb{N}$

Come sopra ma per l'insieme $P \setminus Q$ e le formule:

346 $\neg \forall x [q(x) \leftrightarrow p(x)] \wedge \neg [p(x) \rightarrow q(x)]$ Si

347 $p(x) \wedge \neg q(x) \wedge \exists x p(x)$ Si

348 $p(x) \wedge \neg q(x) \wedge \neg \forall x q(x)$ Si

349 $\neg [p(x) \rightarrow q(x)] \wedge \forall x p(x)$ No

Controesempio: $P = \{0\}$, $Q = \{1\}$

350 $p(x) \wedge \neg [q(x) \wedge \exists x [p(x) \wedge q(x)]]$ Si

Esercizi 351 – 354

Il linguaggio contiene due simboli di predicati unari p e q . Si considerino le strutture del tipo $\langle \mathbb{U}, P, Q \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è un qualsiasi universo.

351 Si scriva una formula che definisce P se $P \subseteq Q$, $\emptyset$ altrimenti.

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)] \wedge p(x)$$

352 Si scriva una formula che definisce P se $P \subseteq Q$, $\mathbb{U}$ altrimenti.

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)] \vee p(x)$$

353 Si scriva una formula che definisce $P \cup Q$ se quest'insieme è non vuoto, $\mathbb{U}$ altrimenti.

$$\neg \exists x [p(x) \vee q(x)] \vee p(x) \vee q(x)$$

354 Qual'è l'insieme definito da $\neg \exists x p(x) \vee q(x)$?

Q se $P \neq \emptyset$

$\mathbb{U}$ se $P = \emptyset$

Esercizi 355 – 362

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, q\}$. Dire se *in tutti* i modelli $\mathcal{U} = \langle \mathbb{N}, P, Q \rangle$ tali che

$$\mathcal{U} \models \forall x \neg [\neg p(x) \wedge q(x)]$$

le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario dare un controesempio:

355 $P = Q$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

356 $P \subseteq Q$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

357 $Q \subseteq P$

Si

358 $Q \cap P = \emptyset$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

Ora invece dire se *esiste* un modello come sopra tale che

359 $P = Q$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

360 $P \subseteq Q$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

361 $Q \subseteq P$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{N}$

362 $Q \cap P = \emptyset$

No

Controesempio: $P = \mathbb{N}$, $Q = \emptyset$

In caso affermativo dare un esempio.

Esercizi 363 – 366

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, s\}$. Sia $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, S \rangle$ un modello. Si dica a cosa equivale la verità in $\mathcal{U}$ delle seguenti formule:

363 $\forall x \neg [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

$R = \neg S$

364 $\neg \exists x \neg [r(x) \rightarrow s(x)]$

$R \subseteq S$

365 $\neg \forall x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

$R \neq S$

366 $\neg \exists x [r(x) \leftrightarrow s(x)]$

$R = \neg S$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$R = S$

$R \neq S$

$R = \neg S$

$R \neq \neg S$,

$R \subseteq S$

$S \subseteq R$

$R \not\subseteq S$

$S \not\subseteq R$

Esercizi 367 – 369

Dire se le seguenti affermazioni sono vere ed in caso contrario dare un controesempio (per i controesempi è sufficiente prendere un linguaggio con un solo simbolo p e come modello $\langle \mathbb{U}, P \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è un dominio con almeno due elementi mentre P è un singoletto.):

367 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

Si

$$\exists x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$$

368 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

No

Controesempio: $\varphi(x) = \top$, $\psi(x) = p(x)$

$$\exists x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$$

369 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

No

Controesempio: $\varphi(x) = p(x)$, $\varphi(x) = \perp$

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$$

370 Per ogni coppia di formule $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si ha:

No

Controesempio: $\varphi(x) = p(x)$, $\psi(x) = p(x)$

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \iff \exists x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)$$

Esercizi 371 – 372

Il linguaggio contiene (almeno) il simbolo di relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{R}$ un modello con dominio i numeri reali $\mathbb{R}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale. Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due formule qualsiasi e sia $\theta(x)$ una formula tale che (in notazione informale):

$$\theta(x) \leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x > 0 \\ \psi(x) & \text{se } x < 0 \\ \top & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si dica a cosa sono equivalenti le seguenti formule. Si scelga tra $x = 0$, $x \neq 0$, $\top$, $\perp$, e $\theta(x)$.

371 $[x > 0 \rightarrow \varphi(x)] \vee [x < 0 \rightarrow \psi(x)]$.

$\top$

372 $[x > 0 \rightarrow \varphi(x)] \wedge [x < 0 \rightarrow \psi(x)]$.

$\theta(x)$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 9

Più variabili in azione

Esercizi 373 – 380

Fissiamo un modello in cui il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$. Per i seguenti valori di $\theta(x, y)$ dire quale delle figure qui sotto rappresenta l'insieme $\{ \langle x, y \rangle : \theta(x, y) \}$.

373 $\varphi(x) \wedge \psi(y)$

B

377 $\varphi(x) \wedge \neg\psi(y)$

C

374 $\varphi(x) \vee \psi(y)$

A

378 $\varphi(x) \oplus \psi(y)$

F

375 $\varphi(x) \rightarrow \psi(y)$

D

379 $\varphi(x)$

H

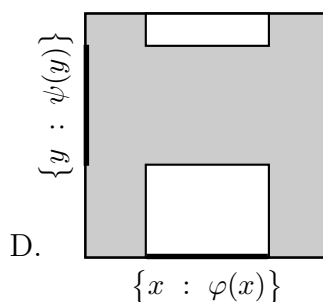
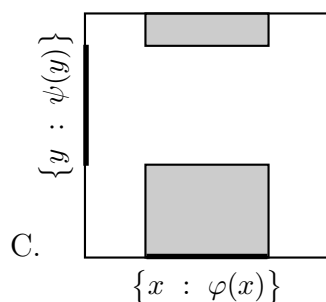
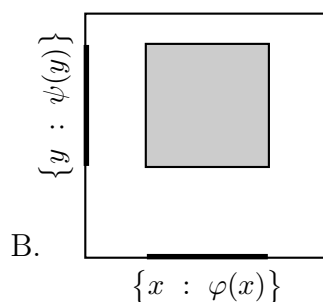
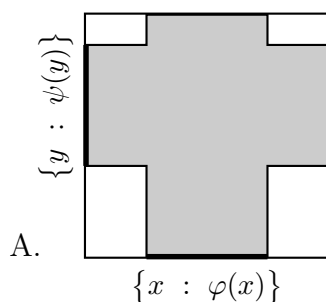
376 $\varphi(x) \leftrightarrow \psi(y)$

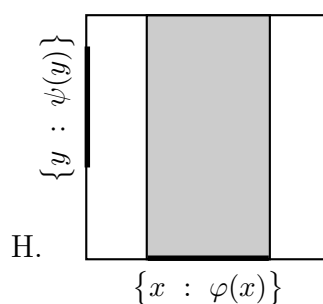
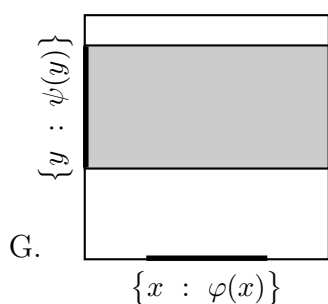
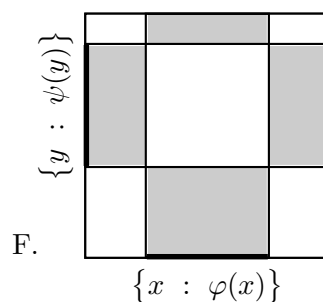
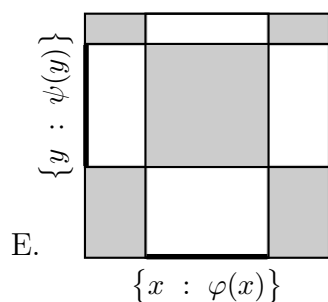
E

380 $\psi(y)$

G

L'insieme $\mathbb{U}^2$ è rappresentato come un quadrato nel modo usuale. Gli insiemi definiti da $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono rappresentati da segmenti in grassetto nell'asse orizzontale e verticale. L'area che appartiene all'insieme definito dalle formule $\theta(x, y)$ qui sotto è colorata in grigio.





Esercizi 381 – 386

Il modello è come nell'esercizio precedente. Sia $\delta(x, y)$ una formula vera se $4(x - y)^2 \leq 1$. Sia $\sigma(x)$ una formula vera se $2 \leq 4x \leq 3$. Per i seguenti valori di $\theta(x, y)$ dire quale delle figure qui sotto rappresentano gli insiemi definiti da $\theta(x, y)$.

381 $\sigma(x)$

D

385 $\delta(x, y)$

C

382 $\sigma(y)$

A

386 $\delta(y, x)$

C

383 $\sigma(0)$

B

387 $\delta(x, x)$

F

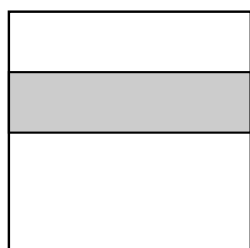
384 $\sigma(1)$

F

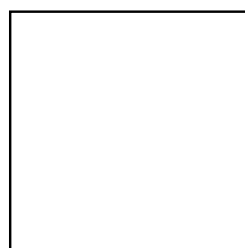
388 $\delta(y, y)$

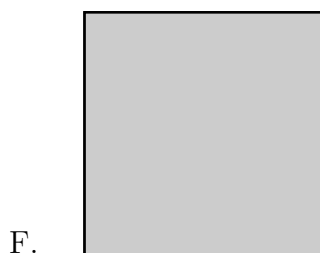
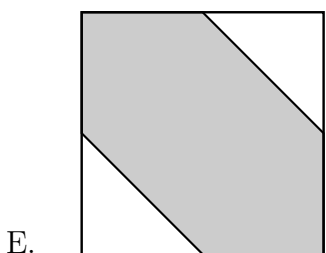
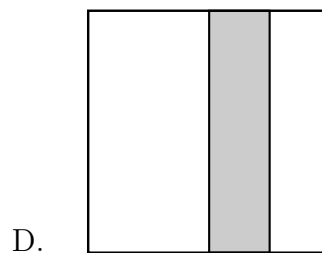
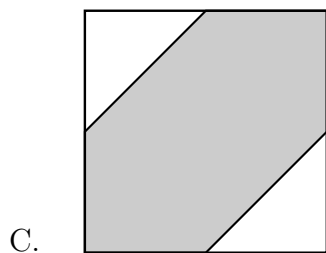
F

A.



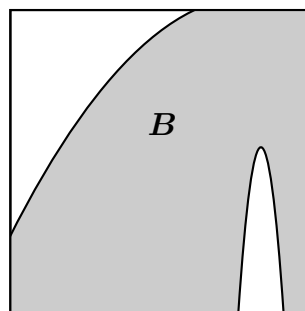
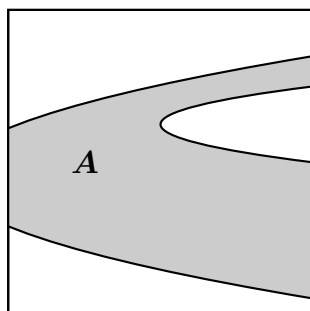
B.





Esercizi 389 – 398

Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme A rappresentato nell'area grigia della figura qui sotto. Sia $\beta(x, y)$ la formula che definisce l'insieme B . Dire se le seguenti formule sono vere:



389 $\forall x \exists y \alpha(x, y)$

Si

393 $\exists x \forall y \alpha(y, x)$

Si

390 $\forall x \exists y \beta(x, y)$

Si

394 $\exists x \forall y \beta(y, x)$

No

391 $\exists x \forall y \alpha(x, y)$

No

395 $\forall x \alpha(x, x)$

No

392 $\exists x \forall y \beta(x, y)$

Si

396 $\forall x \beta(x, x)$

Si

397 $\exists y \alpha(y, y)$

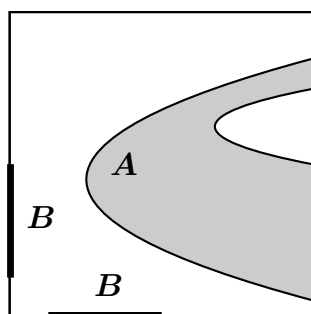
Si

398 $\exists y \beta(y, y)$

Si

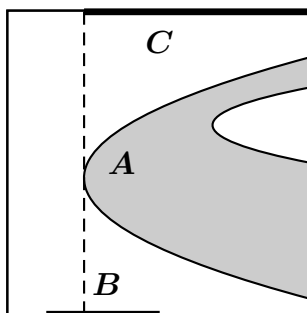
Esercizi 399 – 406

Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme $A \subseteq \mathbb{U}^2$ rappresentato nell'area grigia della figura qui sotto. Sia $\beta(x)$ la formula che definisce l'insieme $B \subseteq \mathbb{U}$ che, per comodità, rappresentiamo sia sulle ordinate che sulle ascisse. Dire se le seguenti formule sono vere:

**399** $\forall x [\beta(x) \rightarrow \exists y \alpha(x, y)]$

No

Rappresentiamo l'insieme C definito da $\exists y \alpha(x, y)$. Questo è la proiezione di A sulla prima coordinata:



La formula dice che $B \subseteq C$.

400 $\exists x [\beta(x) \wedge \exists y \alpha(x, y)]$

Si

Questa formula dice che $B \cap C \neq \emptyset$.

401 $\forall x [\forall y \alpha(x, y) \rightarrow \beta(x)]$

Si

Questa formula dice che $\emptyset \subseteq B$. Infatti $\forall y \alpha(x, y)$ definisce l'insieme vuoto.

402 $\forall x \exists y [\alpha(x, y) \rightarrow \beta(x)]$

Si

Questa formula è equivalente alla precedente.

403 $\exists x [\beta(x) \wedge \forall y \alpha(x, y)]$

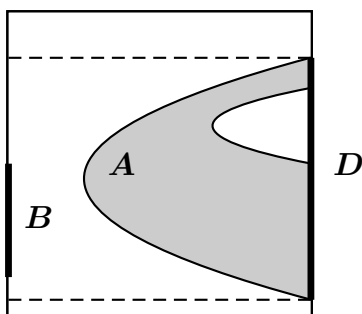
No

Questa formula dice che $\emptyset \cap B \neq \emptyset$.

404 $\forall y [\beta(y) \rightarrow \exists x \alpha(x, y)]$

Si

Rappresentiamo l'insieme D definito da $\exists x \alpha(x, y)$. Questo è la proiezione di A sulla prima coordinata:



La formula dice che $B \subseteq D$.

405 $\exists y [\beta(y) \wedge \exists x \alpha(x, y)]$

Si

Questa formula dice che $B \cap D \neq \emptyset$.

406 $\exists y [\beta(y) \wedge \forall x \alpha(x, y)]$

No

Questa formula dice che $B \cap \emptyset \neq \emptyset$. Infatti $\forall x \alpha(x, y)$ definisce l'insieme vuoto.

Esercizi 407 – 414

Ciascuna di queste formule

407 $\exists y \forall x [\varphi(x) \wedge \psi(y)]$

$\forall x \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y)$

408 $\forall x \exists y [\varphi(x) \wedge \psi(y)]$

$\forall x \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y)$

409 $\exists y \forall x [\varphi(x) \vee \psi(y)]$

$\forall x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)$

410	$\forall x \exists y [\varphi(x) \vee \psi(y)]$	$\forall x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)$
411	$\exists y \forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(y)]$	$\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$
412	$\forall x \exists y [\varphi(x) \rightarrow \psi(y)]$	$\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$
413	$\exists y \forall x \varphi(x)$	$\forall x \varphi(x)$
414	$\forall x \exists y \varphi(x)$	$\forall x \varphi(x)$
415	$\varphi(x) \vee \psi(y)$	$\exists y \varphi(x) \vee \forall x \psi(y)$

è equivalente, in tutti i modelli, ad una delle seguenti. Si dica quale.

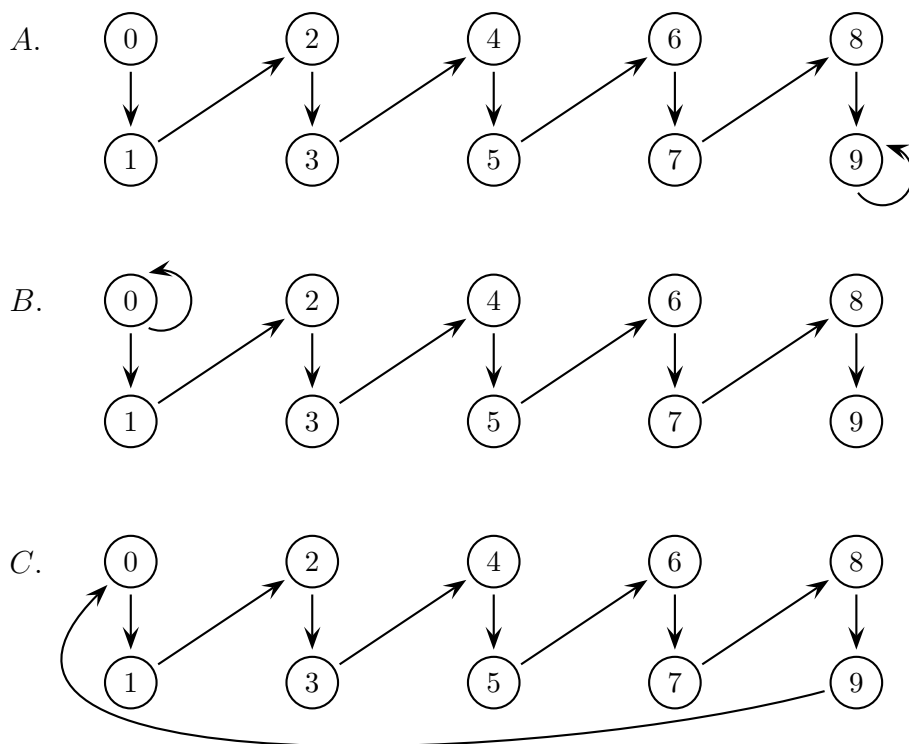
$\forall x \varphi(x)$	$\forall x \varphi(x) \wedge \exists y \psi(y)$	$\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall y \psi(y)$
$\exists y \varphi(x)$	$\exists y \varphi(x) \wedge \forall x \psi(y)$	$\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$
$\varphi(x)$	$\forall x \varphi(x) \vee \exists y \psi(y)$	$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \psi(y)$
$\psi(y)$	$\exists y \varphi(x) \vee \forall x \psi(y)$	$\exists x \varphi(x) \rightarrow \forall y \psi(y)$

Esercizi 416 – 423

Dire se le seguenti formule sono vere nei modelli rappresentati qui sotto

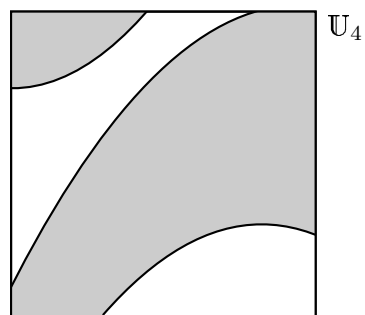
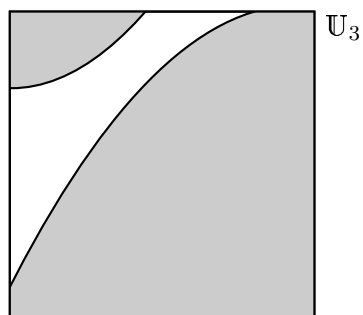
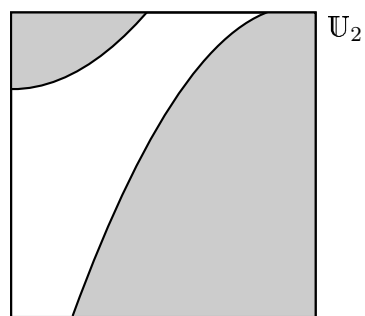
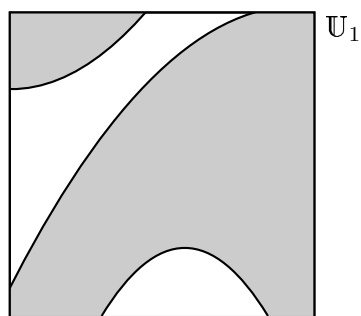
416	$\forall x \exists y r(x, y)$	Vera in A e C
417	$\forall x \exists y r(y, x)$	Vera in B e C
418	$\exists y \forall x r(x, y)$	Falsa in tutti e tre i modelli
419	$\forall x \exists y [r(x, y) \wedge r(y, y)]$	Falsa in tutti e tre i modelli
420	$\exists x y [r(x, y) \wedge r(y, x)]$	Vera in A e B
421	$\forall x \exists y, z [r(x, y) \wedge r(x, z)]$	Vera in A e C

I modelli sono del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 9 ed R è la relazione disegnata in figura:



Esercizi 422 – 424

Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0,1)$. La sig-natura contiene un predicato binario r che è interpretato nella regione grigia in figura.

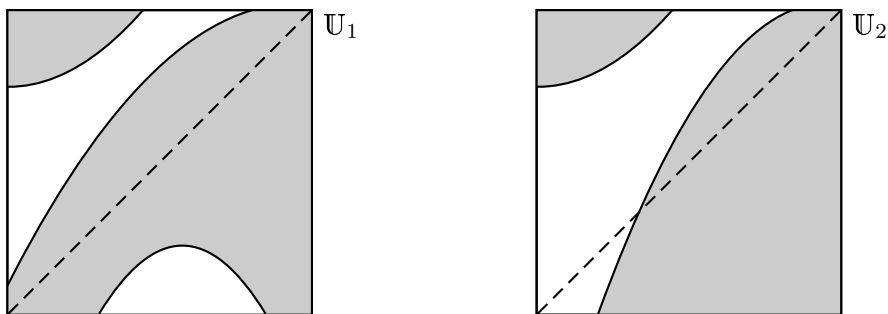


Si scriva una formula che sia

422 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_2$

$\forall x r(x, x)$

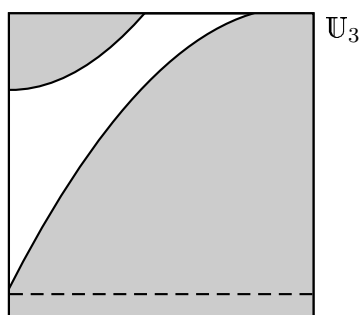
In $\mathbb{U}_1$ la relazione è riflessiva (contiene la diagonale) in $\mathbb{U}_2$ no:



423 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_3$

$\neg \exists y \forall x r(x, y)$

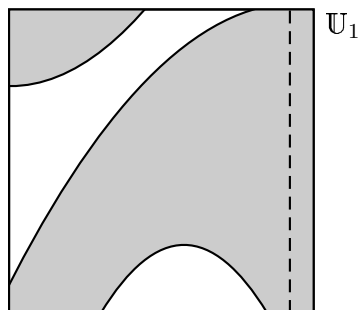
In $\mathbb{U}_3$ la relazione contiene una retta parallela alle ascisse in $\mathbb{U}_1$ no:



424 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_4$

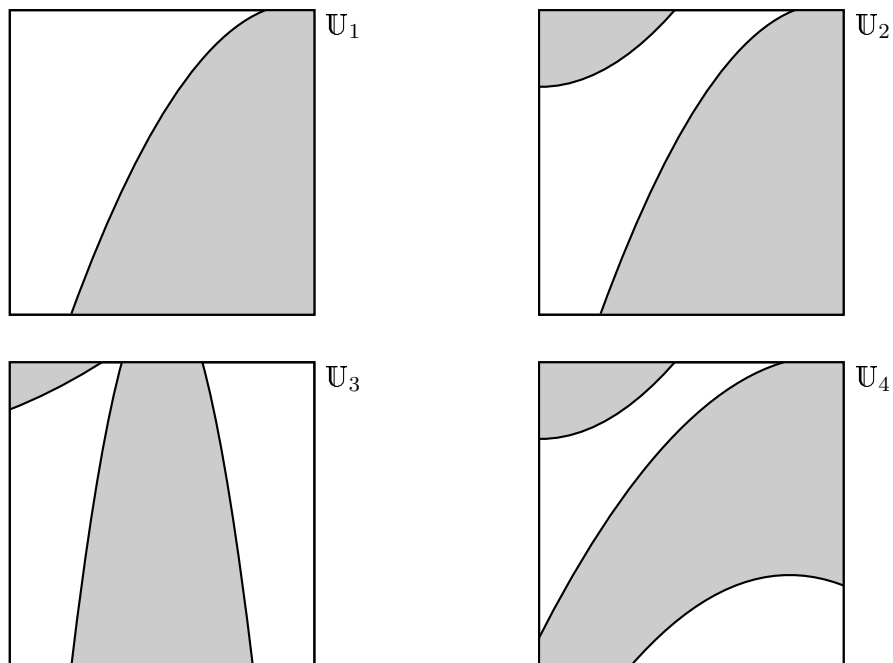
$\exists x \forall y r(x, y)$

In $\mathbb{U}_1$ la relazione contiene una retta parallela alle ordinate in $\mathbb{U}_4$ no:



Esercizi 425 – 426

Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0, 1)$. La sigatura contiene un predicato binario r che è interpretato nella regione grigia in figura.



Si scriva una formula che sia

425 vera in $\mathbb{U}_1$ e falsa in $\mathbb{U}_2$

$\exists x \forall y \neg r(x, y)$

426 vera in $\mathbb{U}_4$ e falsa in $\mathbb{U}_2$

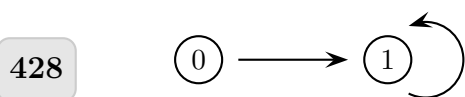
$\forall x \exists y \neg r(x, y)$

427 vera in $\mathbb{U}_4$ e falsa in $\mathbb{U}_3$

$\forall x \exists y r(x, y)$

Esercizi 428 – 431

Il linguaggio contiene solo il predicato binario r . Rappresentiamo qui sotto quattro modelli $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U} = \{0, 1\}$. Per ognuno di questi quattro modelli si scriva una formula senza parametri vera nel modello e falsa negli altri tre.



$\forall x \exists y r(x, y) \wedge \exists x \neg r(x, x)$

429 $\textcircled{0} \longrightarrow \textcircled{1}$ $\neg \exists x r(x, x)$

430 $\textcircled{0} \quad \textcircled{1} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$ $\exists x \forall y [\neg r(x, y) \wedge \neg r(y, x)]$

431 $\textcircled{0} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \longleftarrow \textcircled{1} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$ $\forall x r(x, x)$

Esercizi 432 – 435

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{U}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi. Dire se le seguenti formule sono equivalenti in $\mathcal{U}$ alla formula $\forall x \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]$.

432 $\forall x \exists y z [x < y < z \wedge \sigma(z)]$ **Si**

433 $\forall x \exists y z [x < z < y \wedge \sigma(z)]$ **Si**

434 $\forall x \exists y z [z < x < y \wedge \sigma(z)]$ **No**

435 $\forall x \exists y z [y < x < z \wedge \sigma(z)]$ **No**

Esercizi 436 – 437

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{N}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi. Dire se le seguenti formule sono

- A. false, qualsiasi sia $\sigma(x)$,
- B. vere solo se $\forall x \sigma(x)$,
- C. vere solo se $\forall x \neg \sigma(x)$,
- D. vere solo se $\forall x \sigma(x) \vee \neg \exists x \sigma(x)$,
- E. vere solo se $\neg \forall x \sigma(x) \wedge \exists x \sigma(x)$.

436 $\forall x \left[\sigma(x) \leftrightarrow \exists y \left[x < y \wedge \neg \sigma(y) \right] \right]$

A

437 $\forall x \left[\sigma(x) \leftrightarrow \exists y \left[x < y \wedge \sigma(y) \right] \right]$

D

Esercizi 438 – 441

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $\leq$. Fissiamo un modello che ha come dominio $\mathbb{N}$ e che interpreta $\leq$ nell'ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula arbitraria e denotiamo con S l'insieme definito da $\sigma(x)$. La verità delle seguenti formule

438 $\exists x \left[\sigma(x) \wedge \forall y \left[\sigma(y) \rightarrow y \leq x \right] \right]$

B

439 $\exists x \left[\sigma(x) \wedge \forall y \left[x \leq y \rightarrow \sigma(y) \right] \right]$

C

440 $\forall x \exists y \left[x \leq y \wedge \sigma(y) \right]$

H

441 $\forall x \exists y \left[x \leq y \rightarrow \sigma(y) \right]$

I

442 $\exists x \forall y \left[x \leq y \rightarrow \sigma(y) \right]$

C

443 $\exists x \forall y \left[\sigma(y) \rightarrow x \leq y \right]$

G

è equivalente, per ogni formula $\sigma(x)$, ad una delle seguenti affermazioni. Dire quale.

- A. S contiene un numero finito di elementi.
- B. $S \neq \emptyset$ e contiene un numero finito di elementi.
- C. $\neg S$ contiene un numero finito di elementi.
- D. $\neg S \neq \emptyset$ e contiene un numero finito di elementi.
- E. $S = \mathbb{N}$
- F. $0 = 1$
- G. $0 = 0$

H. S contiene infiniti elementi

I. $S \neq \emptyset$

Esercizi 444 – 446

Sia L un linguaggio che contiene, tra l'altro, la relazione binaria $<$. Sia $\mathcal{U}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $<$ nell'ordine usuale dei numeri naturali. Sia $\sigma(x)$ una formula qualsiasi non vuota in $\mathcal{U}$. Siano A e B le seguenti affermazioni:

A. $\mathcal{U} \models \forall x \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]$

B. $\mathcal{U} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \exists y [x < y \wedge \sigma(y)]]$

Dire se le seguenti affermazioni valgono per qualsiasi formula $\sigma(x)$:

444 se A allora B

Si

445 se B allora A

Si

Attenzione: questa implicazione vale solo perchè abbiamo assunto $\mathcal{U} \models \exists x \sigma(x)$.

Esercizi 446 – 448

Il linguaggio L contiene un solo simbolo di relazione binaria $\subseteq$. Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ ha come dominio l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e che interpreta $\subseteq$ nella relazione *essere sottoinsieme di*. Scrivere le seguenti formule:

446 $\varphi_0(x)$ soddisfatta soltanto dall'insieme vuoto.

$\forall y \ x \subseteq y$

447 $\varphi_1(x)$ soddisfatta soltanto dall'insieme $\mathbb{N}$.

$\forall y \ y \subseteq x$

448 $\varepsilon(x, y)$ vera sse $x = y$ è un singoletto.

$y \subseteq x \wedge x \subseteq y$

Dal prossimo capitolo assumeremo sempre la presenza del simbolo di uguaglianza. In questo caso non è necessario.

449 $\psi(x)$ vera sse x è un singoletto.

$\forall y [y \subseteq x \rightarrow [\varepsilon(x, y) \vee \varphi_0(x)]]$

450 $\sigma(x, y)$ vera sse $x = \mathbb{N} \setminus y$.

$\forall z [\psi(z) \rightarrow [z \subseteq x \oplus z \subseteq y]]$

451 $\alpha(x, y, z)$ vera sse $x = y \cup z$.

$$\forall u [\psi(u) \rightarrow [u \subseteq y \vee u \subseteq z]]$$

452 $\beta(x, y, z)$ vera sse $x = y \cap z$.

$$\forall u [\psi(u) \rightarrow [u \subseteq y \wedge u \subseteq z]]$$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 10

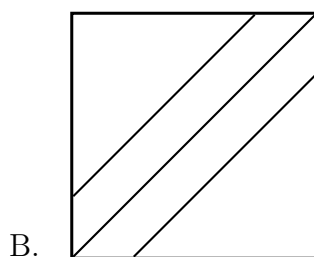
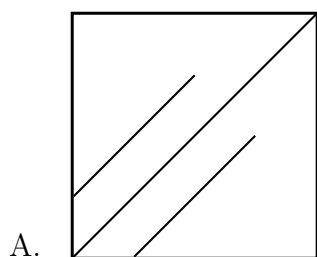
L'uguaglianza

Esercizi 453 – 457

Il linguaggio contiene solo il predicato binario r . Consideriamo modelli del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$ ed R è una delle relazioni binarie rappresentate qui sotto. (I punti in relazione sono quelli appartenenti ai segmenti in figura, cornice esclusa.) Per le seguenti coppie di modelli si scriva, se possibile, una formula senza parametri vera in A e falsa in B. (Attenzione: in qualche caso una tale formula potrebbe non esistere.)

453

$$\exists x \neg \exists y_1 y_2 [r(x, y_1) \wedge r(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2]$$



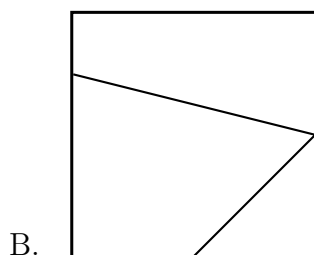
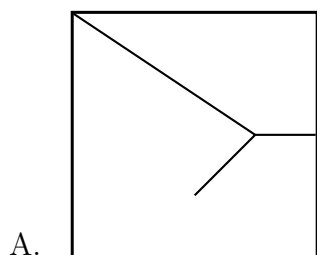
La risposta ha la forma $\exists x \neg \varphi(x)$ dove

$$\varphi(x) = \exists y_1 y_2 [r(x, y_1) \wedge r(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2].$$

La formula $\varphi(x)$ dice che esistono due punti (distinti) con ascissa x .

454

$$\exists y x_1 x_2 [r(x_1, y) \wedge r(x_2, y) \wedge x_1 \neq x_2]$$



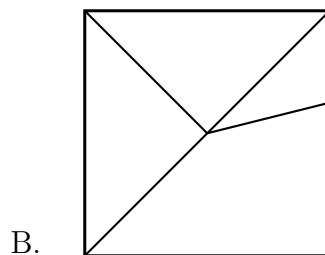
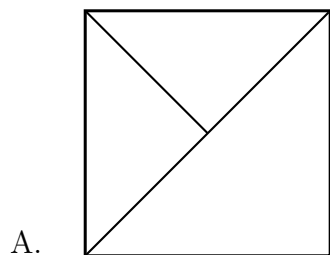
La risposta ha la forma $\exists y \psi(y)$ dove

$$\psi(y) = \exists x_1 x_2 [r(x_1, y) \wedge r(x_2, y) \wedge x_1 \neq x_2].$$

La formula $\psi(y)$ dice che esistono due punti (distinti) con ordinata y .

455

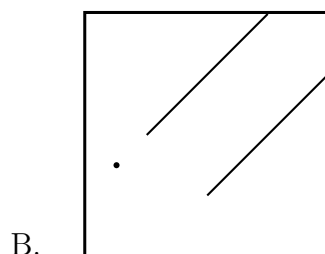
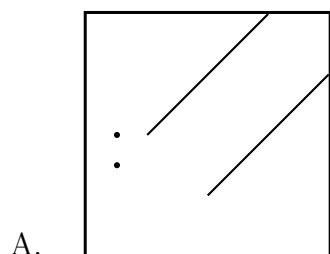
$$\exists x_1 x_2 [\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge x_1 \neq x_2]$$



Questa formula dice che c'è più di un ascissa che soddisfa $\varphi(x)$. (Dove $\varphi(x)$ è quella definita nell'esercizio 453.)

456

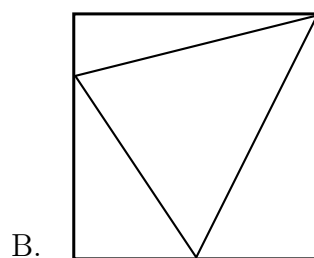
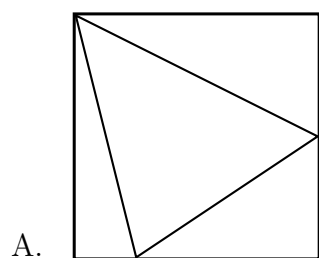
$$\exists x y_1 y_2 [r(x, y_1) \wedge r(x, y_2) \wedge y_1 \neq y_2 \wedge \neg r(y_1, x) \wedge \neg r(y_2, x)]$$



La prima relazione non è simmetrica a causa di due punti, la seconda a causa di un solo punto.

457

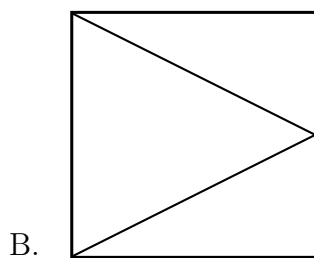
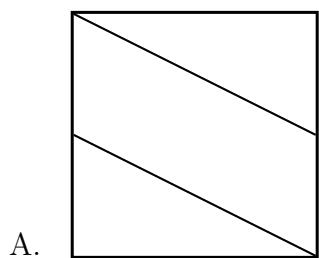
$$\exists x y [r(x, x) \wedge r(y, y) \wedge x \neq y]$$



La diagonale interseca la figura di destra in un due punti e la figura di sinistra in un solo punto.

458

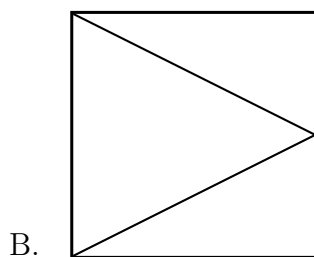
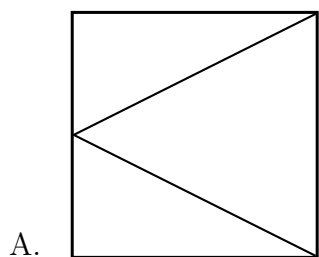
$$\exists x y [r(x, x) \wedge r(y, y) \wedge x \neq y]$$



La risposta è la stessa che nell'esercizio precedente.

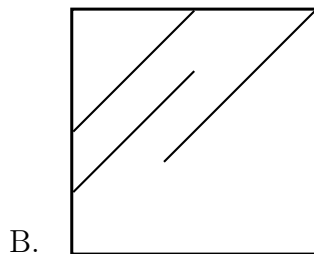
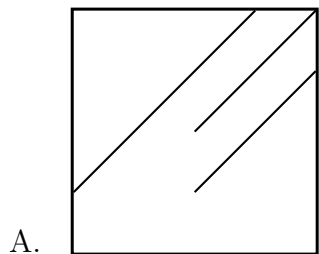
459

Non esiste



460

$\exists x \forall y [r(x, y) \rightarrow x = y]$



Per un qualche x l'unico punto con ascissa x è sulla diagonale.

Esercizi 461 – 465

Dire se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o altro.

461

$\forall x \exists y x = y$

Tautologia

462

$\exists y \forall x x = y$

Nè tautologia nè contraddizione

È vera nei modelli con un solo elemento, falsa in tutti gli altri.

463 $\forall x \ x = x$

Tautologia

464 $\forall x \ x \neq x$

Contraddizione

Questo perchè abbiamo escluso modelli con dominio vuoto. In un modello con dominio vuoto tutte le affermazioni universali sono vere, per la mancanza di possibili controesempi.

465 $\exists x \ x \neq x$

Contraddizione

Esercizi 466 – 484

La verità delle seguenti formule dipende al più dalla cardinalità (cioè il numero di elementi) del modello. Si dica in quali modelli le formule sono vere.

466 $\exists x \ (x = x)$

Tautologia

Avessimo ammesso modelli con dominio vuoto, avremmo dovuto dire: tutti i modelli non vuoti.

467 $\forall x \ (x = x)$

Tautologia

468 $\exists x \ y \ (x = y)$

Tautologia

Questo perchè abbiamo escluso modelli con dominio vuoto.

469 $\forall x \ y \ (x = y)$ Modelli di cardinalità ≤ 1 470 $\exists x \ y \ (x \neq y)$ Modelli di cardinalità ≥ 2 471 $\forall x \ y \ (x \neq y)$

Contraddizione

472 $\forall x \ \exists y \ (x = y)$

Tautologia

473 $\forall x \ \exists y \ (x \neq y)$ Modelli di cardinalità ≥ 2

Avessimo ammesso i modelli con dominio vuoto, anche questi avrebbe reso la formula vera.

474 $\exists x \ \forall y \ (x = y)$

Modelli di cardinalità 1

475 $\exists x \forall y (x \neq y)$

Nessun modello

Si noti che se $x = y$ la disegualianza non può essere soddisfatta.**476** $\forall x \exists y z [x \neq y \wedge y \neq z]$ Modelli di cardinalità ≥ 2 Si noti che è consistente assumere $x = z$. (Vale anche qui l'osservazione sui modelli vuoti.)**477** $\exists x y \forall z [x = z \vee y = z]$

Modelli di cardinalità 1 o 2

Si noti che è consistente assumere $x = y$.**478** $\exists x y \forall z [x = z \wedge y = z]$

Modelli di cardinalità 1.

Non si può far'altro che assumere $x = y$.**479** $\exists x y \forall z [x = z \vee y = z]$

Modelli di cardinalità 1 o 2

480 $\exists x y \forall z [x = z \wedge y = z]$

Contraddizione

481 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x = z \vee y = z]]$

Modelli di cardinalità 2

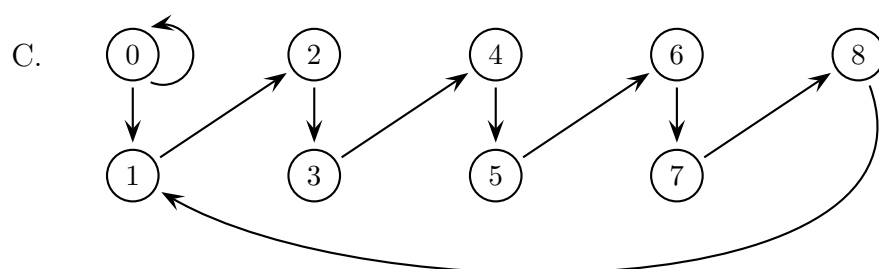
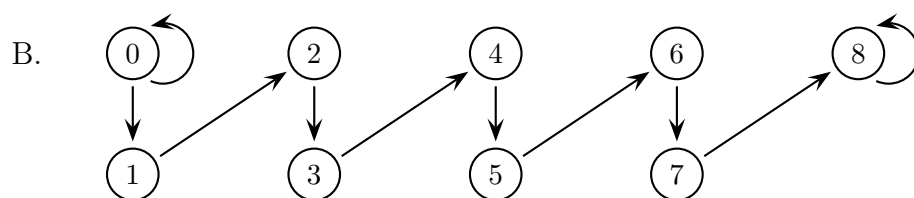
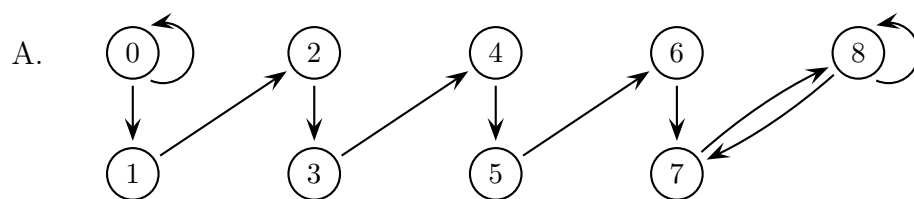
482 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x = z \wedge y = z]]$

Contraddizione

483 $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x \neq z \vee y \neq z]]$ Modelli di cardinalità ≥ 2 Il congiunto di destra è ridondante: segue da $x \neq y$.**484** $\exists x y [x \neq y \wedge \forall z [x \neq z \wedge y \neq z]]$

Contraddizione

Esercizi 485 – 486I modelli sono del tipo $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 9 ed R è la relazione disegnata in figura. Scrivere una formula:**485** vera in A e falsa in B $\exists x y [x \neq y \wedge r(x, y) \wedge r(y, x)]$ **486** vera in C e falsa in B $\forall x \exists y [x \neq y \wedge r(x, y)]$ Ma anche $\neg \exists x y [x \neq y \wedge r(x, x) \wedge r(y, y)]$



Soluzioni degli esercizi del capitolo 11

I termini

Esercizi 487 – 490

Fissiamo linguaggio $L = \{p, f, c\}$ dove p è un predicato unario, f una funzione unaria, e c una costante. Fissiamo un modello $\mathcal{U}$ con dominio $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri pari} \qquad f \rightsquigarrow \text{la funzione } x \mapsto x^3 \qquad c \rightsquigarrow 2.$$

Valutare le seguenti formule in $\mathcal{U}$.

487 $\forall x \, p(f^2x)$

f

489 $\exists x \, fx = c$

f

488 $\exists x [x \neq c \wedge fx = x]$

v

490 $fc = c$

f

Esercizi 491 – 495

Come sopra ma nel modello con dominio $\mathbb{Z}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri positivi} \qquad f \rightsquigarrow \text{la funzione } x \mapsto x^3 \qquad c \rightsquigarrow 0.$$

491 $\forall x \, p(f^2x)$

v

494 $\forall x [x \neq c \rightarrow fx \neq c]$

v

492 $\exists x [x \neq c \wedge fx = x]$

v

495 $fc = c$

v

493 $\exists x \, fx = c$

v

Esercizi 496 – 502

Come sopra ma nel modello con dominio $\mathbb{N}$ ed interpretazione

$$p \rightsquigarrow \text{i numeri pari} \qquad f \rightsquigarrow \text{la funzione } x \mapsto x + 1 \qquad c \rightsquigarrow 0.$$

496 $p(fc)$

f

499 $\forall x [p(x) \rightarrow \neg p(fx)]$

v

497 $\exists x \, fx = c$

f

500 $\forall x [\neg p(fx) \rightarrow p(x)]$

v

498 $\forall x \, fx \neq c$

v

501 $\forall x p(f^2x)$

f

502 $\forall x [p(x) \leftrightarrow p(f^2x)]$

v

Esercizi 503 – 505

Sia L un linguaggio con un predicato p e due simboli di costante c_1, c_2 . Si scriva una formula φ tale che $\langle U, P, a_1, a_2 \rangle$ modella φ se e solo se

503 $a_1, a_2 \in P$

$p(c_1) \wedge p(c_2)$

504 $P = \{a_1, a_2\}$

$\forall x [p(x) \leftrightarrow c_1 = x \vee c_2 = x]$

505 $\{a_1, a_2\} \subsetneq P$

$p(c_1) \wedge p(c_2) \wedge \exists x [p(x) \wedge c_1 \neq x \wedge c_2 \neq x]$

506 $P \subseteq \{a_1, a_2\}$

$\forall x [p(x) \rightarrow c_1 \neq x \wedge c_2 \neq x]$

507 $\{a_1, a_2\} \subseteq P$

$p(c_1) \wedge p(c_2)$

508 $\{a_1, a_2\} \cap P \neq \emptyset$

$p(c_1) \vee p(c_2)$

Esercizi 509 – 511

Il linguaggio contiene una funzione binaria $+$. Sia $\mathcal{N}$ un modello con dominio $\mathbb{N}$ che interpreta $+$ nell'addizione. Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Dire se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$ (per qualsiasi sia la formula $\varphi(x)$).

509 $\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x+1)$

Si

510 $\forall x \varphi(x+1) \rightarrow \forall x \varphi(x+2)$

Si

511 $\forall x y \varphi(x+y) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

Si

512 $\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x y \varphi(x+y)$

Si

513 $\forall x [\varphi(x) \rightarrow \forall y \varphi(x+y)]$

No

514 $\forall x [\forall y \varphi(x+y) \rightarrow \varphi(x)]$

Si

Esercizi 515 – 519

Sia f un simbolo di funzione e sia F la sua interpretazione nella struttura $\mathcal{U}$. Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Delle seguenti formule si dica se sono sempre vere o se valgono assumendo F iniettiva, suriettiva, o costante (si dica quale di queste ipotesi è sufficiente).

515 $\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x \varphi(fx)$

 F è suriettiva

Sia a il testimone di $\exists x \varphi(x)$, se F è suriettiva esiste almeno un b tale che $F(b) = a$. Questo b è un testimone di $\exists x \varphi(fx)$.

516 $\forall x \varphi(fx) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

 F è suriettiva

Questa segue dalla precedente.

517 $\forall x, y [\varphi(fx) \leftrightarrow \varphi(fy)]$

 F è costante

Per le seguenti domande si assuma anche che $\varphi(x)$ abbia un'unica soluzione.

518 $\forall x, y [\varphi(fx) \wedge \varphi(fy) \rightarrow x = y]$

 F è iniettiva

Se Fa ed Fb soddisfano entrambi $\varphi(x)$ allora $Fa = Fb$ (perchè $\varphi(x)$ ha un'unica soluzione). Se F è iniettiva allora $Fa = Fb$ implica $a = b$.

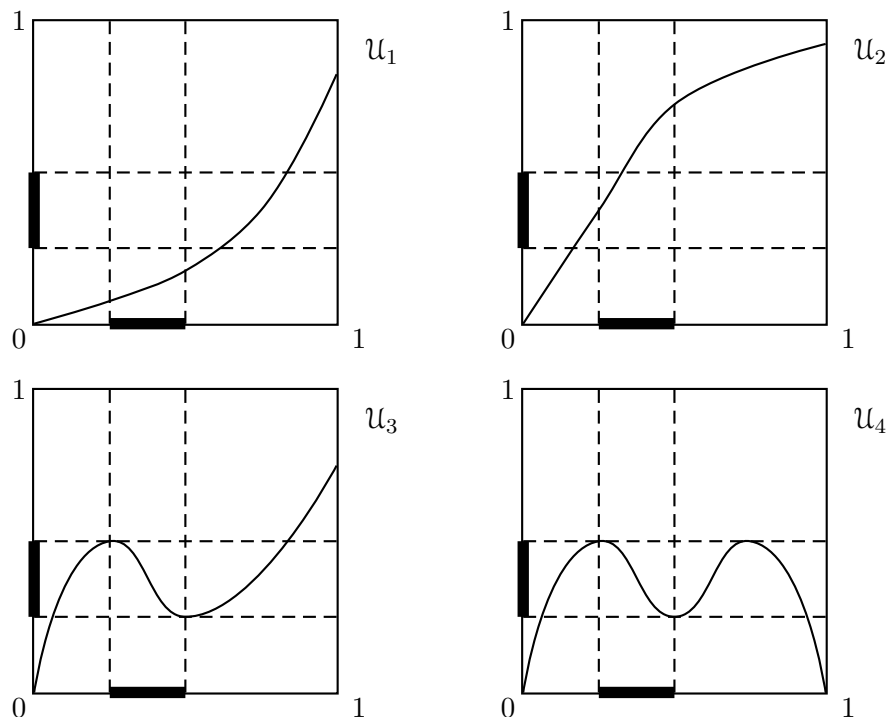
519 $\exists x \varphi(fx) \leftrightarrow \forall x \varphi(fx)$

 F è costante

Per ipotesi, $\varphi(x)$ ha un'unica soluzione, chiamiamola a . La formula qui sopra asserisce $\exists x fx = a \leftrightarrow \forall x fx = a$. Se F è costante questa formula vale.

Esercizi 520 – 531

Le strutture descritte qui sotto hanno come dominio l'intervallo reale $(0, 1)$. La signatura contiene un simbolo di funzione unaria f ed un predicato unario r . Dell'interpretazione di f rappresentiamo il grafo. Rappresentiamo l'interpretazione di r sia sull'asse delle ascisse che delle ordinate.



520 $\exists x_1 x_2 [fx_1 = fx_2 \wedge x_1 \neq x_2]$

u_3, u_4

521 $\forall x \exists y [fx = fy \wedge x \neq y]$

u_4

522 $\exists x fx = x$

u_2, u_3, u_4

523 $\forall x \exists y fx = y$

Tutte

524 $\forall x \exists y fy = x$

Nessuna

525 $\forall x rfx$

Nessuna

526 $\exists x rfx$

Tutte

527 $\forall y [ry \leftrightarrow \exists x [rx \wedge fx = y]]$

u_3, u_4

528 $\forall x [rx \rightarrow fx \neq x]$

u_1, u_2

529 $\exists x [rx \wedge fx \neq x]$

u_3, u_4

530 $\exists x_1 x_2 [fx_1 = fx_2 \wedge rx_1 \wedge \neg rx_2]$

u_3, u_4

531 $\forall x_1 x_2 [rx_1 \wedge rx_2 \wedge x_1 \neq x_2 \rightarrow fx_1 \neq fx_2]$

Tutte

Esercizi 532 – 533

Sia L un linguaggio con due predicati p e q ed un simbolo di funzione f . Si scriva una formula φ tale che $\langle \mathbb{U}, P, Q, F \rangle$ modella φ se e solo se

532 $\text{img } F \subseteq P \cup Q$

$\forall x [p(fx) \vee q(fx)]$

533 $\text{img } F|_Q \subseteq P$

$\forall x [q(x) \rightarrow p(fx)]$

Esercizi 534 – 535

Sia L un linguaggio con due simboli di funzione f e g . Si scriva una formula φ tale che $\langle \mathbb{U}, F, G \rangle$ modella φ se e solo se

534 $F = G^2$

$\forall x f^2x = gx$

535 $F \circ G = \text{id}_{\mathbb{U}}$

$\forall x fgx = x$

Esercizi 536 – 541

Supponiamo che L contenga una funzione unaria f e due predicati unari p e q . Denotiamo con $\langle \mathbb{U}, F, P, Q \rangle$ un generico modello. Dire a quale affermazione corrisponde la verità delle seguenti formule

536 $\forall x [p(x) \rightarrow q(fx)]$

$F[P] \subseteq Q$

537 $\forall x p(fx)$

$\text{img } F \subseteq P$

538 $\forall x [q(x) \wedge p(fx)]$

Nessuna di queste

539 $\forall x [q(x) \rightarrow p(x) \wedge p(fx)]$

$F[Q] \subseteq P$ e $Q \subseteq P$

540 $\forall x p(x)$

$\text{dom } F = P$

541 $\forall x [p(x) \wedge q(x) \rightarrow p(fx)]$

Nessuna di queste

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$$\begin{array}{lll} F[P] \subseteq Q & \text{img } F \subseteq P & F[Q] \subseteq P \text{ e } Q \subseteq P. \\ P \subseteq \text{img } F & \text{dom } F = P & \text{Nessuna di queste} \end{array}$$

Esercizi 542 – 547

Fissiamo un linguaggio $L = \{r, f\}$ dove r è un predicato unario ed f è un simbolo di funzione unaria. Sia $\mathcal{U} = \langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ un modello. Si scrivano formule che formalizzino le seguenti affermazioni (cioè formule la cui verità in $\mathcal{U}$ equivale alle seguenti affermazioni):

542 $F|_R$ è una funzione suriettiva.

$$\forall y \exists x [rx \wedge fx = y]$$

543 $F|_R = \text{id}_R$.

$$\forall x [rx \rightarrow fx = x]$$

544 $F|_R$ è una funzione iniettiva.

$$\forall x, y [rx \wedge ry \wedge fx = fy \rightarrow x = y]$$

545 $F|_R$ è una funzione costante.

$$\forall x \exists y [rx \rightarrow fx = y]$$

546 $R \subseteq \text{img } F$

$$\forall y [ry \rightarrow \exists x fx = y]$$

547 $\text{img } F \subseteq R$

$$\forall x rfx$$

Esercizi 548 – 553

Dire quale extra ipotesi è necessaria per rendere vere le seguenti affermazioni; si scelga l'ipotesi più debole combinando le seguenti proprietà: totale, suriettiva, iniettiva. (Si può anche rispondere: non serve alcuna ipotesi.)

548 se $A \subseteq B$ allora $F^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[B]$

Nessuna

549 se $A \subseteq B$ allora $F[A] \subseteq F[B]$

Nessuna

550 se $F^{-1}[A] \subseteq F^{-1}[B]$ allora $A \subseteq B$

Suriettiva

551 se $F[A] \subseteq F[B]$ allora $A \subseteq B$

Totale e iniettiva

552 $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$

Nessuna

553 $F^{-1}[A \cup B] = F^{-1}[A] \cup F^{-1}[B]$

Nessuna

Esercizi 554 – 557

Sia L un linguaggio contenente un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di funzione binaria r . Sia $\mathcal{U}$ una struttura e sia F l'interpretazione di f . Supponiamo che $\mathcal{U}$ interpreti r con il grafo della funzione F . Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Senza usare il simbolo f , si scriva una formula che afferma:

554 vale $\varphi(f^2x)$

$\exists y z [r(x, y) \wedge r(y, z) \wedge \varphi(z)]$

555 F è suriettiva

$\forall y \exists x r(x, y)$

556 F è iniettiva

$\forall x y_1 y_2 [r(x, y_1) \wedge r(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2]$

557 F è costante

$\exists y \forall x r(x, y)$

Esercizi 558 – 561

Sia L un linguaggio contenente un simbolo di funzione unaria f ed un simbolo di costante c . Sia $\mathcal{U}$ una struttura e sia F l'interpretazione di f . Sia $\varphi(x)$ una formula arbitraria. Si scriva una formula che afferma

558 $\varphi(a)$ vale per ogni $a \in F^{-1}[c]$

$\forall x [fx = c \rightarrow \varphi(x)]$

559 $\varphi(a)$ vale per qualche $a \in F^{-1}[c]$

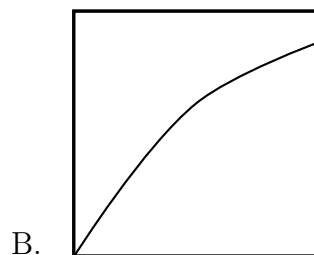
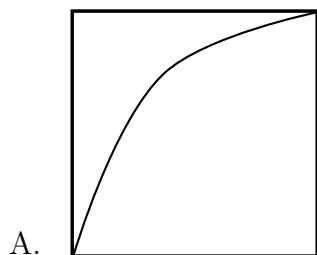
$\exists x [fx = c \wedge \varphi(x)]$

Esercizi 560 – 562

Il linguaggio contiene solo il simbolo f per funzione unaria. Consideriamo le coppie di modelli $\langle \mathbb{U}, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva, se esiste, una formula senza parametri vera in A e falsa in B per le seguenti coppie di modelli.

560

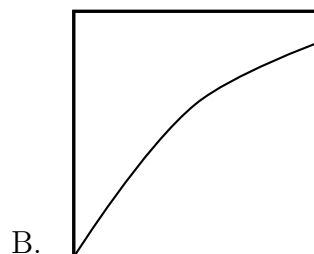
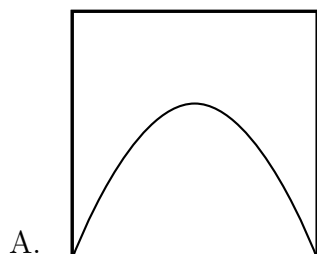
$$\forall y \exists x f x = y$$



La funzione in A è suriettiva quella in B no.

561

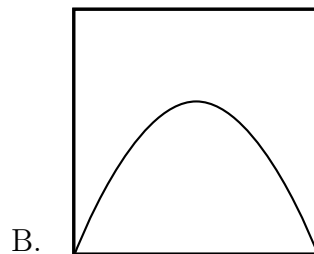
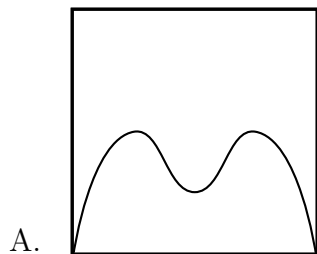
$$\exists x_1 x_2 [f x_1 = f x_2 \wedge x_1 \neq x_2]$$



La funzione in B è iniettiva quella in A no.

562

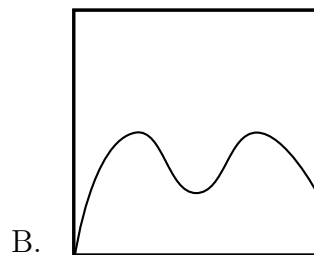
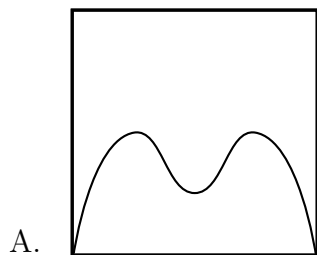
$$\exists x_1 x_2 x_3 [f x_1 = f x_2 = f x_3 \wedge x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1]$$



In A esistono tre punti su cui F ha lo stesso valore, in B al più due.

563

$$\exists x_1 \forall x_2 [f x_1 = f x_2 \rightarrow x_1 = x_2]$$



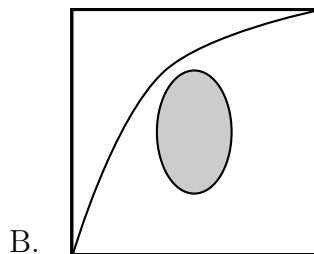
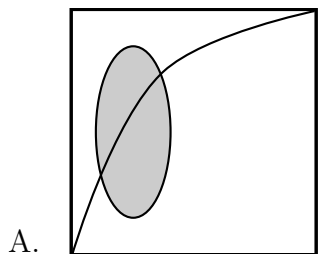
In B esiste un elemento di $\text{img } F$ che è immagine di un unico punto.

Esercizi 564 – 569

Il linguaggio contiene solo il predicato binario r ed un simbolo f per funzione unaria. Consideriamo le coppie di modelli $\langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, la relazione R è l'area evidenziata, e della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva, se esiste, una formula senza parametri vera in A e falsa in B per le seguenti coppie di modelli.

564

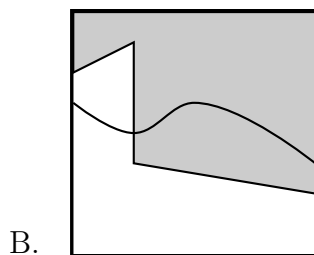
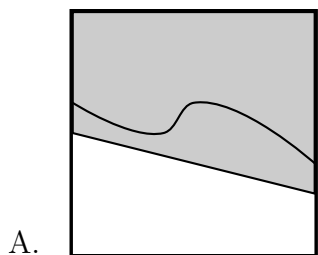
$$\exists x y [fx = y \wedge r(x, y)]$$



La formula dice che il grafo della funzione F interseca R .

565

$$\forall x r(x, f(x))$$

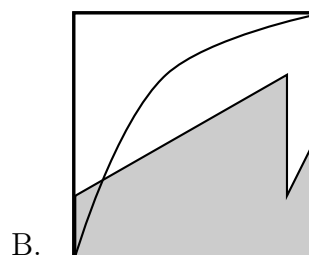
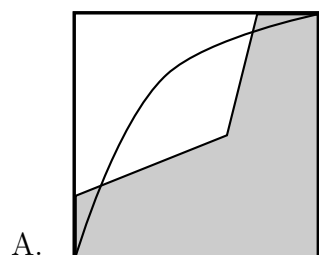


Questa formula dice che il grafo della funzione F è contenuto in R . Una formula equivalente

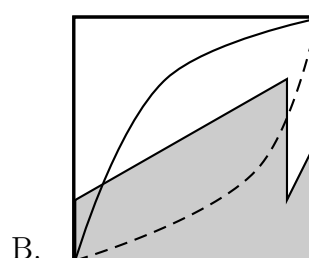
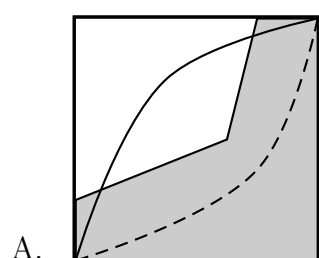
$$\forall x y [fx = y \rightarrow r(x, y)].$$

566

$$\forall x y [fx = y \rightarrow r(y, x)]$$



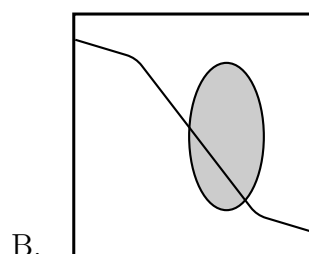
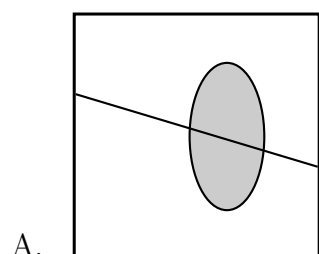
Del grafo della funzione F si prenda l'immagine simmetrica rispetto alla diagonale:



Nel modello di sinistra questa è contenuta in R nel modello di destra no.

567

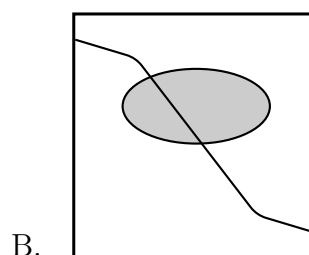
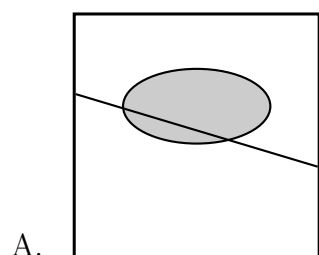
$$\forall z \exists x r(x, fz)$$



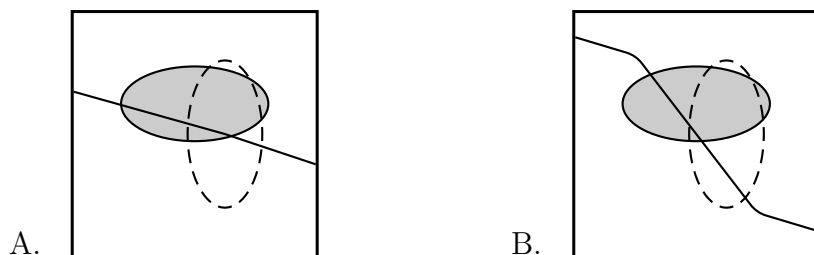
La formula dice che tutti gli $y \in \text{img } F$ soddisfano $\exists x r(x, y)$.

568

$$\forall z \exists y r(fz, y)$$



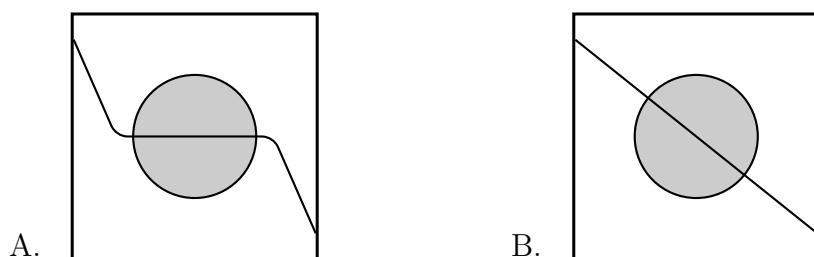
Se riflettiamo l'immagine di R sulla diagonale, otteniamo la stessa relazione dell'esercizio precedente:



Usiamo quindi la stessa formula con le coordinate invertite.

569

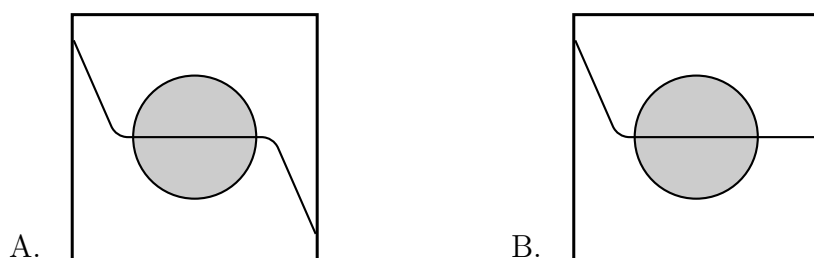
$$\forall x_1 x_2 [\exists y r(x_1, y) \wedge \exists y r(x_2, y) \rightarrow f x_1 = f x_2]$$



All'interno dell'intervallo definito da $\exists y r(x, y)$ la funzione F è costante.

570

$$\forall y [\exists x r(x, y) \rightarrow \exists x f x = y]$$



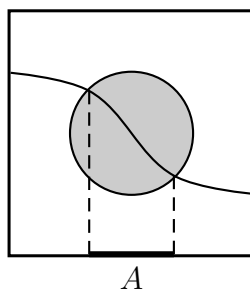
Questa formula dice che l'insieme definito da $\exists x r(x, y)$ è un sottoinsieme di $\text{img } F$.

Esercizi 571 – 574

Il linguaggio contiene solo il predicato binario r ed un simbolo f per funzione unaria. Consideriamo i modelli $\langle \mathbb{U}, R, F \rangle$ rappresentati qui sotto. Il dominio $\mathbb{U}$ è l'intervallo reale $(0, 1)$, della funzione F abbiamo rappresentato il grafo. Si scriva una formula che definisce l'insieme A in figura.

571

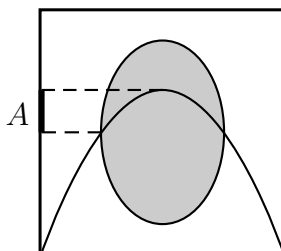
$$\exists y [fx = y \wedge r(x, y)]$$



L'insieme A è la proiezione sull'asse delle ascisse dell'intersezione di F ed R .

572

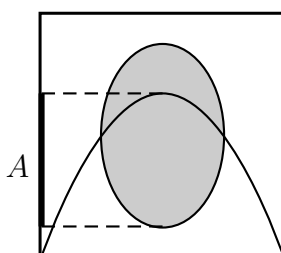
$$\exists x [fx = y \wedge r(x, y)]$$



L'insieme A è la proiezione sull'asse delle ordinate dell'intersezione di F ed R .

573

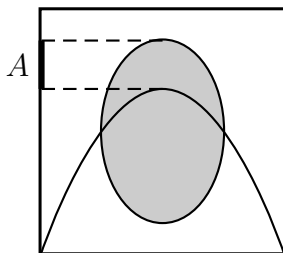
$$\exists x fx = y \wedge \exists x r(x, y)$$



L'insieme A è l'intersezione delle proiezioni di F ed R sull'asse delle ordinate.

574

$$\exists x r(x, y) \wedge \neg \exists x f x = y$$



Soluzioni degli esercizi del capitolo 12

L'induzione

Esercizi 575 – 578

Sia $\mathcal{N}$ il modello standard dell'aritmetica. Si scriva una formula $\varphi(x)$ (casus quo, $\varphi(x, y)$) che in $\mathcal{N}$ definisca

575 l'insieme dei numeri pari,

$$\exists y \ 2y = x$$

576 l'insieme dei multipli di, 3

$$\exists y \ 3y = x$$

577 l'insieme dei numeri primi,

$$\neg \exists y \ z \ [z \neq 1 \neq y \wedge yz = x]$$

578 l'insieme dei numeri che sono somma di due quadrati,

$$\exists y, z \ x = y^2 + z^2$$

579 l'insieme delle coppie il cui secondo elemento è multiplo del primo

$$\exists z \ xz = y$$

Esercizi 580 – 585

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere in $\mathcal{N}$.

580 $\sigma(0) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

Si

584 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)]$

Si

581 $\sigma(1) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

No

585 $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x)]$

No

582 $\sigma(1) \rightarrow \forall x \sigma(x+1)$

Si

586 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x)$

Si

583 $\sigma(2) \rightarrow \forall x \sigma(2x)$

No

587 $\forall x \sigma(2x) \rightarrow \forall x \sigma(x)$

Si

Esercizi 588 – 593

Come nell'esercizio precedente ma si assuma che

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x+1) \rightarrow \sigma(x)].$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere in $\mathcal{N}$.

588	$\sigma(0) \rightarrow \forall x \sigma(x)$	No	591	$\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x+1)$	No
589	$\exists x \sigma(x) \rightarrow \sigma(0)$	Si	592	$\forall x \sigma(2x) \rightarrow \forall x \sigma(x)$	Si
590	$\exists x \sigma(x) \rightarrow \exists x \sigma(2x)$	Si	593	$\forall x \sigma(3x) \rightarrow \forall x \sigma(2x)$	Si

Esercizi 594 – 604

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che

$$\mathcal{N} \models \forall x \neg[\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+1)],$$

Dire, se possibile, quali sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ definiti dalle seguenti formule?

594	$\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(1)$	$\emptyset$	600	$\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x^2)$	N
595	$\sigma(1) \leftrightarrow \sigma(2)$	$\emptyset$	601	$\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(2x)$	P
596	$\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(2)$	N	602	$\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(2x)$	N
597	$\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(x)$	P	603	$\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(3x)$	N
598	$\sigma(1) \leftrightarrow \sigma(x)$	D	604	$\sigma(0) \leftrightarrow \sigma(3x)$	P
599	$\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+2)$	N	605	$\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(6x)$	P

Suggerimento: ci sono due possibilità, $\sigma(x)$ definisce l'insieme dei numeri pari (indichiamolo con P), o $\sigma(x)$ definisce l'insieme dei numeri dispari (indichiamolo con D). Si osservi anche che la formula $\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(y)$ è vera sse $|x - y|$ è pari.

Esercizi 606 – 611

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che,

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)],$$

Si dica se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$.

606 $\sigma(0) \rightarrow \sigma(8)$

No

609 $\exists x \sigma(x) \rightarrow \sigma(2)$

No

607 $\sigma(1) \rightarrow \sigma(8)$

Si

610 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(8x)]$

Si

608 $\sigma(3) \rightarrow \sigma(8)$

No

611 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(6x)]$

No

Esercizi 612 – 619

Per le seguenti formule $\sigma(x)$ dire se in $\mathcal{N}$ vale $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x+2)]$ ed altrimenti dire qual'è il minimo x per cui $\sigma(2x) \rightarrow \sigma(x+2)$ non vale.

612 $5 < x$

Si

617 $\exists z 2z = x$

Si

613 $x < 5$

6

618 $\exists z 3z = x$

8

614 $x = 0$

2

619 $\exists z 4z = x$

6

615 $x = 1$

Si

620 $\exists z 2z + 1 = x$

Si

616 $x = 2$

4

621 $\exists z 3z + 2 = x$

4

L'ipotesi dice che se $\sigma(x)$ è vera per un qualche numero pari è vera anche per il successivo numero pari.

Esercizi 622 – 625

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica.

622 Si elenchino tutte, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+2)].$$

$$\perp, \top, \exists y (x=2y), \exists y (x=2y+1)$$

Si osservi che a formula $\sigma(x)$ ha lo stesso valore di verità sui pari e sui dispari.

623 Si elenchino tutte, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\sigma(3) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

$$x \geq n \text{ per } n = 0, 1, 2, 3$$

624 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+100)] ?$$

$$2^{100}$$

625 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

1

$$\sigma(3) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+1)] ?$$

Esercizi 626 – 628

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica e sia n un arbitrario numero positivo.

626 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

2

$$[\sigma(n) \leftrightarrow \sigma(0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)].$$

Precisamente $\sigma(x)$ può essere $\perp$ oppure $\top$.

627 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

1

$$\sigma(0) \wedge [\sigma(2n) \rightarrow \sigma(1)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

Infatti, poichè valgono $\sigma(0)$ e $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)]$, allora $\sigma(x)$ vale per tutti i numeri pari. Quindi anche per $\sigma(2n)$. Ma allora vale anche $\sigma(1)$ e quindi $\sigma(x)$ vale anche per tutti i numeri dispari.

628 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

 2^{n-1}

$$\sigma(0) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+n)].$$

Fissati i valori di $\sigma(x)$ per $x = 0, \dots, n-1$, la formula $\forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x+n)]$ determina il valore di $\sigma(x)$ su tutto $\mathbb{N}$. Per ipotesi $\sigma(x)$, è vera per $x = 0$ ma per $x = 1, \dots, n-1$ è arbitraria.

Esercizi 629 – 632

Sia $\sigma(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica e sia n un arbitrario numero positivo.

629 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

 n

$$\sigma(2n) \wedge \sigma(1) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

Da $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)]$ segue che se $\sigma(x)$ vale per un numero pari allora vale anche per il successivo numero pari ed inoltre che se $\sigma(x)$ vale per un numero dispari allora vale anche per il successivo numero dispari. Quindi la formula $\sigma(x)$ è determinata (a meno di equivalenza logica) dal minimo numero pari e

dal minimo numero dispari che la rendono vera. Poichè vale $\sigma(1)$ il minimo numero dispari che soddisfa $\sigma(x)$ è 1. Il minimo numero pari che soddisfa $\sigma(x)$ è un numero $\leq 2n$. Ci sono quindi n possibilità.

630 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$n^2 + n$$

$$\sigma(2n) \wedge \sigma(2n+3) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)].$$

Di nuovo $\sigma(x)$ è determinata dal minimo numero pari e dal minimo numero dispari che la rendono vera. Il primo deve essere $\leq 2n$ il secondo $\leq 2n+3$. Ci sono n possibilità per il primo e $n+1$ per il secondo. Siccome queste possibilità sono indipendenti, il risultato è $n \cdot (n+1)$.

631 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$(n+1)^3$$

$$\forall x \sigma(x+3n) \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+3)].$$

632 Quante sono, a meno di equivalenza, le formule per cui vale

$$n^n$$

$$\forall x [n^2 \leq x \rightarrow \sigma(x)] \wedge \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+n)].$$

Esercizi 633 – 639

Nel modello standard dell'aritmetica, fissiamo un generico numero n . Dire quante sono (in funzione di n) gli insiemi definiti da una qualche formula $\sigma(x)$ che soddisfa $\forall x \sigma(6n+x)$ e tale che

633 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+1)]$

$$6n+1$$

634 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+2)]$

$$(3n+1)^2$$

635 $\forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(x+3)]$

$$(2n+1)^3$$

636 $\forall x [\sigma(x+1) \rightarrow \sigma(x+3)]$

$$6n(3n+1)$$

637 $\forall x [\sigma(x+2) \rightarrow \sigma(x+3)]$

$$4(6n-2)$$

638 $\forall x [\sigma(x+3) \rightarrow \sigma(x+3)]$

$$2^{6n}$$

639 $\forall x [\sigma(2x) \rightarrow \sigma(2x+2)]$

$$2^{3n}(3n+1)$$

Esercizi 640 – 643

Consideriamo l'insieme dei modelli $\langle \mathbb{N}, F \rangle$ tali che rendono vera la formula

$$\forall x [f(x) \leq f(x+1) \leq f(x) + 2].$$

Di questi modelli si dica quanti rendono vere le seguenti formule (Qui n è un intero maggiore di 2, la risposta va espressa in funzione di n):

640 $f(0) = 0 \wedge \forall x [f(x+n) = f(x+n+1)]$

3^n

641 $f(0) = 5 \wedge \forall x [f(x+n) = f(x+n+1)]$

3^n

642 $\forall x f(x+n) = 1$

$n+1$

643 $\forall x f(x+n) = 2$

$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Esercizi 644 – 645

Consideriamo l'insieme dei modelli $\langle \mathbb{N}, F \rangle$ tali che rendono vera la formula

$$\forall x [f(x) \leq f(x+1) + 1 \leq f(x) + 2].$$

644 Si dica, in funzione di n , quanti sono possibili m , per cui la formula $f(0) = n \wedge f(n) = m$ è consistente.

$3n$

645 Si dica quanti modelli rendono vere la seguenti formula
 $f(1) = n \wedge \forall x [f(x+n) = f(x+n+1)]$

3^n

Esercizi 646 – 651

Sia L il linguaggio dell'aritmetica e sia $\mathcal{N}$ il modello standard. Sia $\sigma(x)$ una formula tale che,

$$\mathcal{N} \models \forall x [\sigma(x) \rightarrow \sigma(2x)],$$

Dire se le seguenti formule valgono in $\mathcal{N}$:

646 $\forall x y [\sigma(xy) \rightarrow \sigma(2xy)]$

Si

647 $\forall x y [\sigma(xy) \rightarrow \sigma(4xy)]$

Si

648 $\forall x y [\sigma(x) \wedge \sigma(y) \rightarrow \sigma(4xy)]$

No

649 $\forall x y [\sigma(x) \wedge \sigma(y) \rightarrow \sigma(2x + 2y)]$

No

Esercizi 650 – 653

Si scrivano tutte le formule $\psi(x)$ tali che nel modello standard dell'aritmetica valga:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x+2)] \quad \text{e} \quad \forall x [\psi(x+1) \rightarrow \varphi(x)].$$

Per $\varphi(x)$ si prendano le seguenti formule (la risposta *nessuna* è tra le possibili):

650 $\top$

$\top, \quad 1 \leq x, \quad 2 \leq x$

651 $\perp$

$\perp, \quad x = 0$

652 $\exists z \, 2z = x$

Nessuna

653 $4 \leq x$

$5 \leq x, \quad 6 \leq x, \quad x = 0 \vee 5 \leq x, \quad x = 0 \vee 6 \leq x$

Esercizi 654 – 658

Consideriamo gli insiemi $S \subseteq \mathbb{Q}$ tali che

$$\forall x, y [x \in S \wedge y \in S \rightarrow x - y \in S].$$

654 Si elenchino tutte i possibili insiemi tali che $0 \notin S$?

 $\emptyset$

655 Qual'è il più piccolo insieme S non vuoto ?

 $\{0\}$

656 Qual'è il più piccolo insieme S che contiene 1 ?

 $\mathbb{Z}$

657 Qual'è il più piccolo insieme S che contiene $1/2$?

 $\{n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$

658 Si dia un esempio infinito tale che $1 \notin S$.

 $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$

Esercizi 659 – 662

Consideriamo gli insiemi S come sopra. Si risponda alle seguenti domande e si dia, in caso di risposta negativa, un controesempio.

659 E vero che $\forall x [x \in S \rightarrow 2x \in S]$? Si

660 E vero che $\forall x [x \in S \rightarrow 2x + 1 \in S]$? No

Controesempio: $\{0\}$

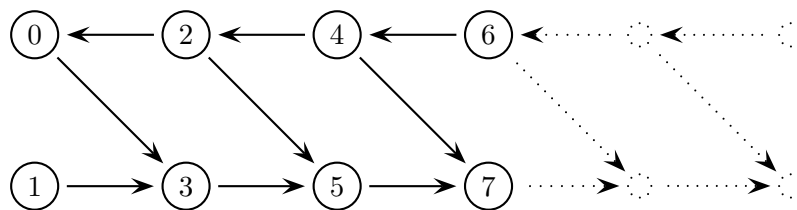
661 Assumendo $1 \in S$, è vero che $\forall x [x \in S \rightarrow 4x + 1 \in S]$? Si

662 Assumendo $1/2 \in S$, è vero che $\forall x [x \in S \rightarrow x/2 \in S]$? No

Controesempio: $\{n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ non contiene $1/4$.

Esercizi 663 – 670

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Per ciascuna delle formule $\alpha(x)$ qui sotto. Dire se nel modello standard vale

$$\exists x \alpha(x) \wedge \forall x y [\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y)]$$

663 $\exists z 2z = x$ No **667** $x > 2$ No

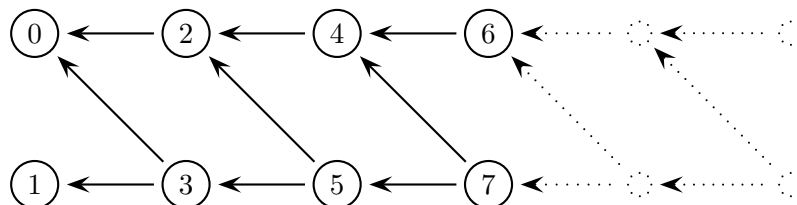
664 $x \neq 1$ Si **668** $x > 1$ No

665 $\exists z 2z + 1 = x$ Si **669** $x \neq x$ No

666 $x > 4$ No **670** $x > 4 \wedge \exists z 2z + 1 = x$ Si

Esercizi 671 – 676

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Sia $\alpha(x)$ una formula del linguaggio dell'aritmetica tale che, nel modello standard valga

$$\exists x \alpha(x) \quad \wedge \quad \forall x y [\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y)]$$

Quali delle seguenti formule sono vere:

671 $\alpha(5) \rightarrow \alpha(0)$

Si

672 $\alpha(0) \vee \alpha(1)$

Si

673 $\forall x \alpha(2x) \rightarrow \forall x \alpha(2x + 1)$

No

674 $\forall x \alpha(2x + 1) \rightarrow \forall x \alpha(2x)$

Si

675 $\exists x \alpha(2x + 1)$

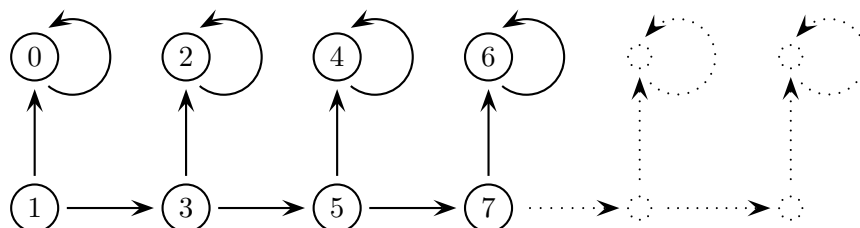
No

676 $\exists x \alpha(2x)$

No

Esercizi 677 – 680

Come sopra, ma ora supponiamo che la relazione definita da $\sigma(x, y)$ sia quella rappresentata nel seguente diagramma:



677 $\exists x \alpha(2x)$

Si

679 $\alpha(1) \rightarrow \forall x \alpha(x)$

Si

678 $\exists x \alpha(2x + 1)$

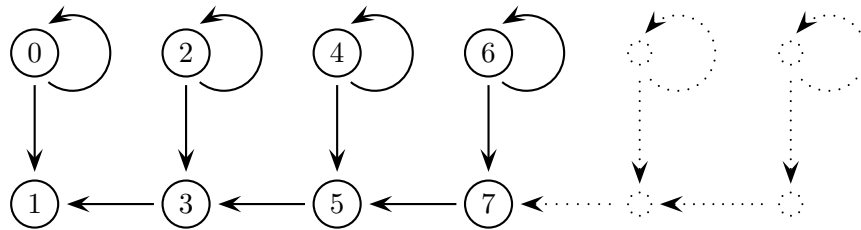
No

680 $\alpha(0) \rightarrow \forall x \alpha(x)$

No

Esercizi 681 – 684

Come sopra, ma ora supponiamo che la relazione definita da $\sigma(x, y)$ sia quella rappresentata nel seguente diagramma:



681 $\alpha(1)$

Si

683 $\exists x \alpha(2x)$

No

682 $\alpha(0)$

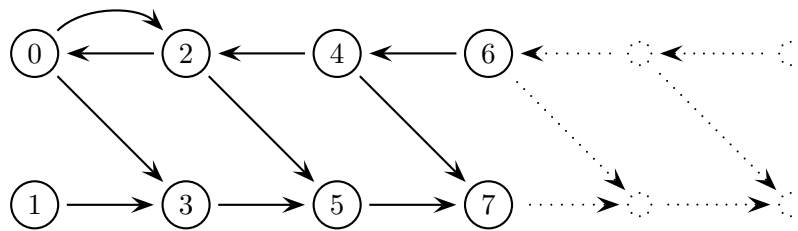
No

684 $\exists x y [\alpha(x) \wedge \alpha(y) \wedge x \neq y]$

No

Esercizi 685 – 692

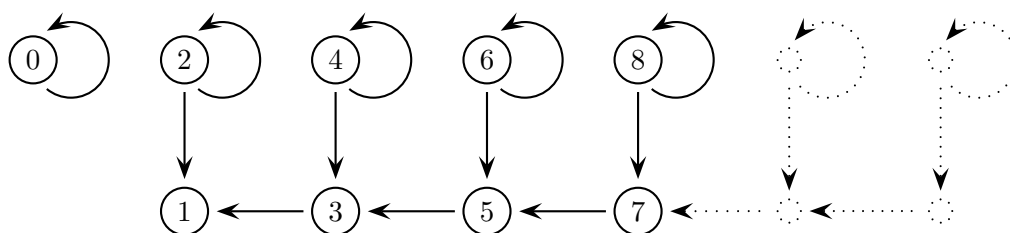
Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



- | | | |
|------------|--|--|
| 688 | Qual'è il più piccolo insieme A contenente 1 ? | $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ |
| 689 | Qual'è il più piccolo insieme A contenente 1 e 0 ? | $\{0\} \cup \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ |
| 690 | Esiste un insieme A contenente 2 ma non 0 ? | $\{2\} \cup \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ |
| 691 | Qual'è il più piccolo insieme A contenente 8 ? | $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ |
| 692 | Qual'è il più piccolo insieme A contenente 7 e 8 ? | $\{8\} \cup \{2n + 1 : n \geq 3\}$ |

Esercizi 693 – 696

Denotiamo con $\sigma(x, y)$ una formula che nel modello standard definisce la relazione rappresentata nel seguente diagramma:



Si descrivano gli insiemi che possono essere definiti da una qualche formula $\alpha(x)$ che soddisfa:

- | | | |
|------------|---|---|
| 693 | $\forall x y [\alpha(x) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(y)]$ | 3 |
| 694 | $\forall x y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y) \rightarrow \alpha(x)]$ | 5 |
| 695 | $\forall x [\exists y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y)] \rightarrow \alpha(x)]$ | 5 |
| 696 | $\forall x [\alpha(x) \rightarrow \exists y [\alpha(y) \wedge \sigma(x, y)]]$ | 1 |

1. I sottoinsiemi di $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. I sottoinsiemi di $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Gli insiemi del tipo $\{2x + 1 : 2x + 1 < n \text{ per qualche } n \in A \cup B\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1) e B un qualsiasi insieme in (2).

4. Gli insiemi del tipo $\{2x : 2x < n \text{ per qualche } n \in A \cup B\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1) e B una qualsiasi insieme in (2).
5. Gli insiemi del tipo $A \cup \{x : x > n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (1).
6. Gli insiemi del tipo $B \cup \{x : x > n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$ dove A è un qualsiasi insieme in (2).

Esercizi 697 – 704

Sia $\mathcal{U}$ un modello che espande la struttura $\mathcal{W}_2$ definita qui sopra. Si dica a cosa è equivalente la verità in $\mathcal{U}$ di ciascuna delle seguenti formule:

697	$\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$	H
698	$\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$	G
699	$\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$	C
700	$\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$	D
701	$\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$	A
702	$\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \leftrightarrow \sigma(x1)]$	B
703	$\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$	E
704	$\neg\sigma(\emptyset) \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x0)] \wedge \forall x [\sigma(x) \oplus \sigma(x1)]$	F

Si scelga tra le seguenti possibilità:

- A. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero pari di 0.
- B. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero dispari di 0.
- C. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero pari di 1.
- D. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole con un numero dispari di 1.
- E. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole di lunghezza pari.

- F. $\sigma(x)$ definisce l'insieme delle parole di lunghezza dispari.
- G. $\sigma(x)$ definisce $\emptyset$
- H. $\sigma(x)$ definisce $2^{<\omega}$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 13

Relazioni binarie

Esercizi 705 – 711

Fissiamo un universo $\mathbb{U}$ non vuoto. Dire se le seguenti affermazioni sono vere per ogni coppia di insiemi A e B entrambi non vuoti ed in caso contrario fornire un controesempio.

705 Se $A^2 \cup B^2$ è riflessiva allora $A \cap B = \emptyset$.

No

Controesempio: $A = B = \{0\}$

706 Se $A^2 \cup B^2$ è riflessiva allora $A \cup B = \mathbb{U}$.

Si

707 Se $A \times B$ è simmetrica allora $A = B$.

Si

708 Se $A \times B$ è completa allora $A = B = \mathbb{U}$.

Si

709 Se $A^2 \cup B^2$ è simmetrica.

Si

710 $(A \times \mathbb{U}) \cap (\mathbb{U} \times B) = A \times B$.

Si

711 Se si omette l'ipotesi $A \neq \emptyset \neq B$, una delle risposte qui sopra cambia. Quale?

La risposta 707 diventa: No

Controesempio: $A = \emptyset$, $B = \mathbb{U}$.

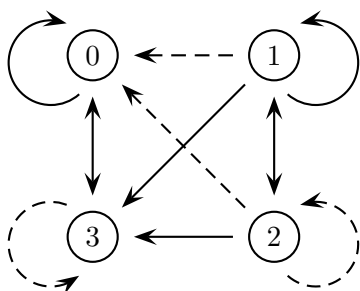
Soluzioni degli esercizi del capitolo 14

La transitività

Esercizi 712 – 715

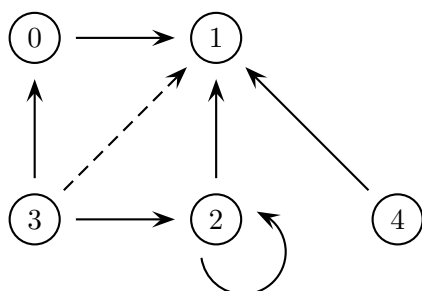
I seguenti diagrammi rappresentano delle relazioni binarie. Se ne disegni la chiusura transitiva.

712



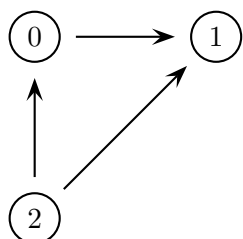
Le frecce da aggiungere sono quelle tratteggiate. Non si dimentichino le frecce riflessive sui nodi 2 e 3!

713



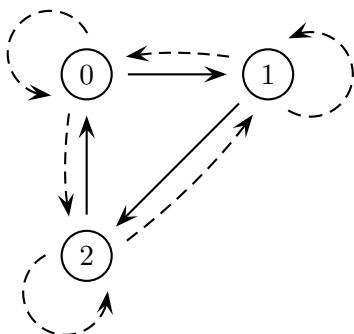
Le frecce da aggiungere sono quelle tratteggiate!

714



Non serve aggiungere alcuna freccia. La relazione R è già transitiva ed è quindi la chiusura riflessiva di se stessa.

715



Le frecce da aggiungere sono quelle tratteggiate.

Esercizi 716 – 720

Quali delle seguenti relazioni sono transitive?

716 $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : x \leq y \right\}$

Si

717 $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 : y \text{ è un multiplo di } x \right\}$

Si

718 $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 : x - y \text{ è un multiplo di } 7 \right\}$

Si

719 $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Q}^2 : x - y \in \mathbb{Z} \right\}$

Si

720 $\left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x - y)^2 \in \mathbb{Q} \right\}.$

No

Esercizi 721 – 724

Fissiamo come universo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sia

$$S := \left\{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| = 1 \right\},$$

$$R := \left\{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| = 2 \right\}.$$

si scriva la chiusura transitiva di

721 S

$$\left\{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \right\}$$

722 R

$$\left\{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \text{ e } |b \setminus a| \text{ è finito e pari} \right\}$$

723 $S \cup R$

$$\left\{ \langle a, b \rangle : a \subseteq b \right\}$$

724 $S \cap R$

 $\emptyset$ **Esercizi 725 – 730**

Sia $\varphi(x, y)$ una formula arbitraria dell'aritmetica. Sono le relazioni definite dalle seguenti formule transitive?

725 $\forall z [\varphi(x, z) \rightarrow \varphi(y, z)]$

Si

729 $\varphi(x, 0) \rightarrow \varphi(y, 0)$

Si

726 $\forall z [\varphi(x, 2z) \rightarrow \varphi(y, 2z)]$

Si

730 $\varphi(y, y) \rightarrow \varphi(x, x)$

Si

727 $\exists z [\varphi(x, z) \rightarrow \varphi(y, z)]$

No

731 $\varphi(x, x) \wedge \varphi(y, y)$

Si

728 $\exists z \varphi(x, z) \rightarrow \exists z \varphi(y, z)$

Si

732 $\varphi(x, x) \vee \varphi(y, y)$

No

Esercizi 733 – 734

Sia R una relazione binaria su $\mathbb{U}$ e sia S la relazione definita dalla formula $\exists z [x R z \wedge z R y]$. Si scelga tra queste possibilità

$S = \emptyset$

$R \subseteq S$

$R \cap S = \mathbb{U}$

$S = \mathbb{U}$

$S \subseteq R$

$R \cup S = \mathbb{U}$

una valida conseguenza delle seguenti affermazioni:

733 $R \text{ è transitiva} \implies$

$S \subseteq R$

734 $R \text{ è riflessiva} \implies$

$R \subseteq S$

Esercizi 735 – 739

Siano R ed S due relazioni transitive. È la relazione definita dalla seguente formula transitiva? In caso contrario si dia un controesempio.

735 $\exists z [x R z \wedge z S y]$

No

738 $\forall z [z R x \leftrightarrow z S y]$

Si

736 $\exists z [x R z \wedge y S z]$

No

739 $\forall z [x R z \leftrightarrow z S y]$

No

737 $\forall z [x R z \leftrightarrow y S z]$

Si

Esercizi 740 – 741

Fissiamo come universo $\mathbb{Z}$. Denotiamo con P l'insieme degli interi pari e con D l'insieme degli interi dispari. Qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni

740 $P \times D$

$P \times D$

741 $(P \times D) \cup (D \times P)$

$\mathbb{Z}^2$

Esercizi 742 – 747

L'universo è $\mathbb{R}$. Si dica qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:

$$\text{742} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 0 < |x - y| < 2 \right\} \quad \mathbb{R}^2$$

$$\text{743} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 0 < |x - y| \right\} \quad \mathbb{R}^2$$

$$\text{744} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 1 < |x - y| \right\} \quad \mathbb{R}^2$$

$$\text{745} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : x = -y \right\} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : |x| = |y| \right\}$$

$$\text{746} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 0 \neq |x - y| \right\} \quad \mathbb{R}^2$$

$$\text{747} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : x = -|y| \right\} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : |x| = -|y| \right\}$$

Si scelga tra le seguenti possibilità:

$\mathbb{R}^2$	$\left\{ \langle x, y \rangle : 1 < x - y \right\}$
$\left\{ \langle x, y \rangle : x \leq y \right\}$	$\left\{ \langle x, y \rangle : 0 < x - y \right\}$
$\left\{ \langle x, y \rangle : x \neq y \right\}$	$\left\{ \langle x, y \rangle : x < y \right\}$
$\left\{ \langle x, y \rangle : x = y \right\}$	$\left\{ \langle x, y \rangle : x = -y \right\}$
$\left\{ \langle x, y \rangle : x = y \right\}$	$\left\{ \langle x, y \rangle : x = - y \right\}$

Esercizi 748 – 750

L'universo è $\mathbb{R}$. Si dica qual'è la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:

$$\text{748} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 1 = xy \right\} \quad C \cup D \quad \text{750} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : 1 < xy \right\} \quad A \cup B$$

$$\text{749} \quad \left\{ \langle x, y \rangle : xy < 0 \right\} \quad G \setminus E$$

Questa si può esprimere come unione o differenza di due delle seguenti relazioni:

$$A = (\mathbb{R}^+)^2$$

$$B = (\mathbb{R}^-)^2$$

$$C = \{ \langle x, y \rangle : x = y \neq 0 \}$$

$$D = \{ \langle x, y \rangle : x = y^{-1} \}$$

$$E = \{ \langle x, y \rangle : xy = 0 \}$$

$$F = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$

$$G = \mathbb{R}^2$$

$$H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$$

$$I = \{ \langle x, y \rangle : x = y \}$$

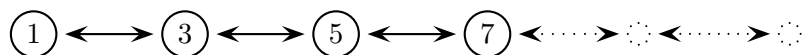
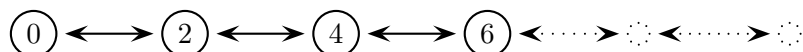
$$L = \{ \langle x, y \rangle : x = -y \}$$

Esercizi 751 – 752

Scrivere una formula nel linguaggio dell'aritmetica che definisce la chiusura transitiva delle relazioni su $\mathbb{N}$ rappresentate nei seguente diagrammi.

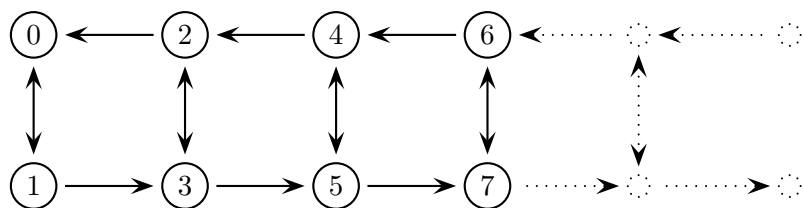
751

$$\exists z (2z = x + y)$$



752

T



Esercizi 753 – 754

Sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ una funzione totale. Consideriamo F come una relazione su $\mathbb{U}$ Quali delle seguenti affermazioni

$$\begin{array}{lll} F = \text{id}_{\mathbb{U}} & F^2 = F^{-1} & F \text{ è iniettiva} \\ F^2 = \text{id}_{\mathbb{U}} & F^2 = F & F \text{ è costante} \end{array}$$

è equivalente a

753 F è transitiva

$$F^2 = F$$

754 F è simmetrica

$$F^2 = \text{id}_{\mathbb{U}}$$

755 F è riflessiva

$$F = \text{id}_{\mathbb{U}}$$

Esercizi 756 – 757

Definiamo su un ordine $\prec$ su $\mathbb{Q}^2$ come segue

$$\langle a_1, a_2 \rangle \prec \langle b_1, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 < a_2 & \text{se } a_1 \neq a_2 \\ b_1 < b_2 & \text{se } a_1 = a_2. \end{cases}$$

756 È questo un ordine totale? (In caso contrario dare un esempio di due elementi di $\mathbb{Q}^2$ che non sono comparabili.)

Si

757 È questo un ordine denso?

Si

Esercizi 758 – 761

Sia $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione con dominio di definizione $\mathbb{R}^+$ che mappa $x \mapsto \log x$. Sia $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che mappa $x \mapsto 2^x$. Degli insiemi $\text{img } L$ e $\text{img } E$ dire, se esiste, qual'è

758 Il massimo.

Non esiste/non esiste

759 Il minimo.

Non esiste/non esiste

760 L'estremo superiore.

Non esiste/non esiste

761 L'estremo inferiore.

Non esiste/0

Esercizi 762 – 765

Sia $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che mappa $x \mapsto \sin x$. Dell'insieme $\text{img } S$ dire, se esiste, qual'è

762 Il massimo.

1

764 L'estremo superiore.

1

763 Il minimo.

-1

765 L'estremo inferiore.

-1

Esercizi 766 – 769

Fissiamo un linguaggio con un simbolo di funzione unaria f ed un modello che interpreta f nella funzione $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$. Si scriva una formula $\varphi(x)$ che affermi

766 x è il massimo di $\text{img } F$. $\exists z [fz = x \wedge \forall y fy \leq fz]$ **767** x è il minimo di $\text{img } F$. $\exists z [fz = x \wedge \forall y fz \leq fy]$ **768** x è l'estremo superiore di $\text{img } F$. $\forall y fy < x \wedge \forall z [z < x \rightarrow \neg \forall y fy < z]$ **769** x è l'estremo inferiore di $\text{img } F$. $\forall y x < fy \wedge \forall z [x < z \rightarrow \neg \forall y z < fy]$

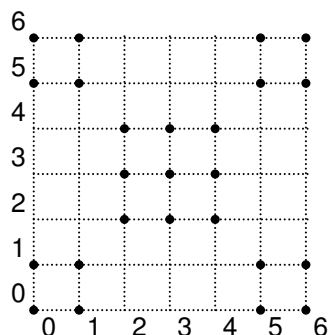
Soluzioni degli esercizi del capitolo 15

Le relazioni di equivalenza

Esercizi 770 – 771

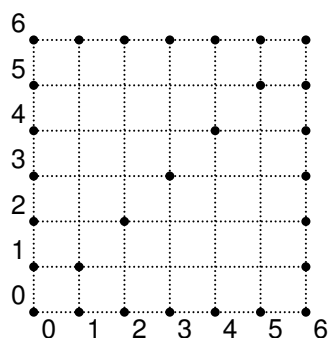
Dire se le relazioni rappresentate nei seguenti diagrammi sono equivalenze.

770



Si

771



No

Esercizi 772 – 777

Dire se i seguenti insiemi sono partizioni di $\mathbb{Q}$.

772

$$\left\{ \{x, x^2\} : x \in \mathbb{Q} \right\}$$

No

Si prenda per esempio $x = 2$ e $x = 4$. Gli elementi $\{2, 4\}$ e $\{4, 8\}$ non sono disgiunti.

773

$$\left\{ \{x^2\} : x \in \mathbb{Q} \right\}$$

No

L'unione non ricopre $\mathbb{Q}$.

774 $\{\{|x|\} : x \in \mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{R}^-\}$ Si

775 $\{\{x^2\} : x \in \mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{R}^-\}$ No

L'unione non ricopre $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{R}$ la risposta sarebbe stata affermativa.

776 $\{\{-|x|, |x|\} : x \in \mathbb{Q}\}$ Si

777 $\{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ Si

Esercizi 778 – 779

La relazione su $\mathbb{Z}$ definita dalle seguenti formule è un'equivalenza? In caso affermativo si scriva la partizione associata.

778 $\exists z (zx = y) \wedge \exists z (x = zy)$ No

La relazione non è transitiva.

779 $\exists z (x - y = 2z)$ Si

La partizione associata è $\{P, \mathbb{Z} \setminus P\}$. Dove P sta per l'insieme dei numeri pari, cioè $P = \{x : \exists z (x = 2z)\}$.

Esercizi 780 – 781

La relazione su $\mathbb{Q}$ definita dalle seguenti formule è un'equivalenza? In caso affermativo si scriva la partizione associata.

780 $\exists z (zx = y) \wedge \exists z (x = zy)$ Si

La partizione associata è $\{\{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$

781 $\exists z (x - y = 2z)$ Si

La partizione associata è $\{\mathbb{Q}\}$. Infatti qualsiasi coppia di numeri razionali appartiene alla relazione.

Esercizi 782 – 784

Sia $\varphi(x, y)$ una formula qualsiasi e sia c una costante del linguaggio. Fissiamo un modello arbitrario con dominio $\mathbb{U}$. Si dica se le seguenti formule definiscono delle relazioni di equivalenza su $\mathbb{U}$.

782 $\forall z [\varphi(a, z) \leftrightarrow \varphi(b, z)]$

Si

Si osservi che a è in relazione con b sse $\varphi(a, z)$ e $\varphi(b, z)$ definiscono lo stesso insieme.

783 $\exists z [\varphi(a, z) \leftrightarrow \varphi(b, z)]$

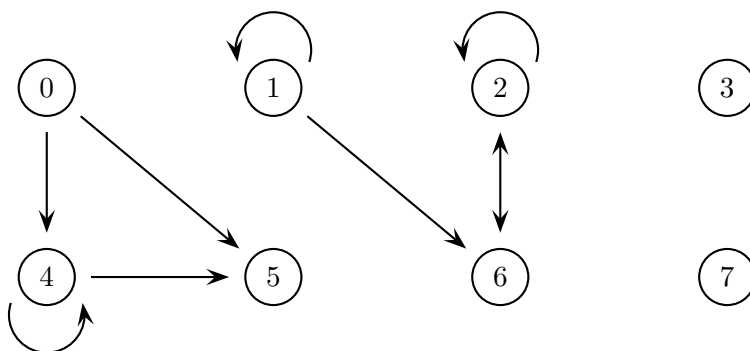
No

784 $\varphi(a, c) \leftrightarrow \varphi(b, c)$

Si

Esercizi 785 – 788

Fissiamo un linguaggio $L = \{p, r\}$ dove p è un predicato unario ed r un predicato binario. Fissiamo una struttura $\langle \mathbb{U}, R \rangle$ dove $\mathbb{U}$ è l'insieme dei numeri naturali ≤ 7 ed R è la relazione rappresentata in figura:



La seguente formula definisce su $\mathbb{U}$ una relazione di equivalenza E :

$$\forall z [r(z, x) \leftrightarrow r(z, y)].$$

Si scrivano le seguenti classi di equivalenza:

785 $[4]_E =$

$\{4, 5\}$

787 $[0]_E =$

$\{0, 3, 7\}$

786 $[5]_E =$

$\{4, 5\}$

788 $[2]_E =$

$\{2\}$

Esercizi 789 – 790

Fissiamo come dominio $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

789 Si scrivano tutte le partizioni che contengono l'insieme $A = \{0, 1, 4\}$.

$$\{A, \{2, 3\}\}, \{A, \{2\}, \{3\}\}$$

790 Quante sono le partizioni che raffinano $\{\{0, 1, 2\}, \{3, 4\}\}$?

8

Conviene considerare che esistono 4 partizioni di $\{0, 1, 2\}$ e 2 partizioni di $\{3, 4\}$. Le partizioni che raffinano $\mathcal{P}$ sono $8 = 4 \cdot 2$

Esercizi 791 – 792

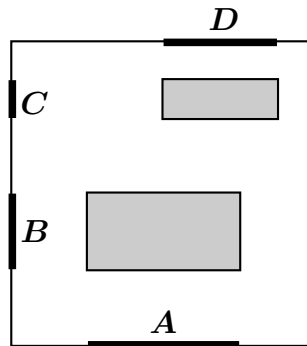
Fissiamo un modello con dominio l'intervallo $\mathbb{U} = (0, 1)$. Sia $\alpha(x, y)$ la formula che definisce l'insieme rappresentato dall'area grigia nella figura qui sotto. Siano A, B, C , e D i sottoinsiemi di $\mathbb{U}$ rappresentati in figura. Si calcoli qual'è la partizione di $\mathbb{U}$ associata alla relazione di equivalenza definita dalla formula:

791 $\forall z [\alpha(x, z) \leftrightarrow \alpha(y, z)]$

$$\{A \cap D, \neg(A \cup D), A \setminus D, D \setminus A\}$$

792 $\forall z [\alpha(z, x) \leftrightarrow \alpha(z, y)]$

$$\{B, C, \neg(B \cup C)\}$$



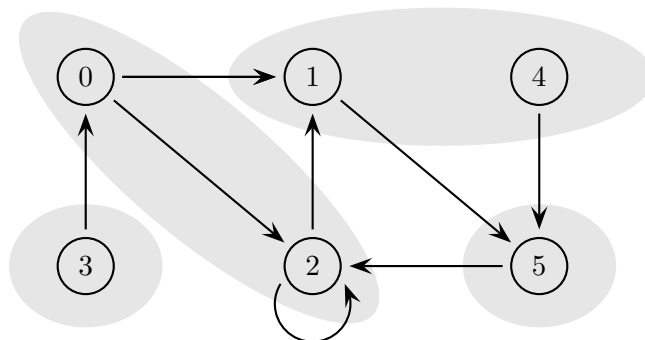
Esercizi 793 – 794

Si scriva (o si disegni) la partizione associata alla relazione di equivalenza:

$$E := \{ \langle x, y \rangle : \forall z (x R z \leftrightarrow y R z) \}$$

793 Dove R è la relazione in figura.

Le aree in grigio sono gli elementi della partizione.



La definizione di E dice che xEy sse x ed y “vedono” gli stessi elementi. Dal diagramma osserviamo che:

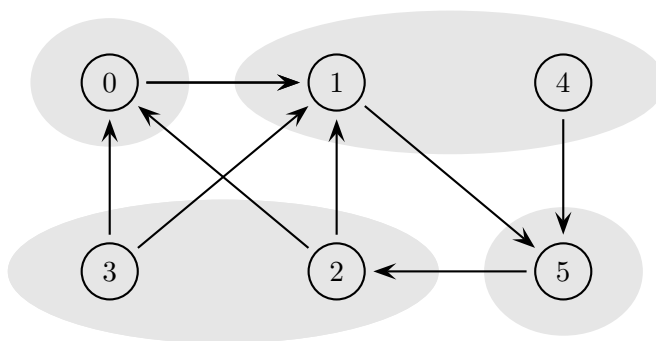
0 vede 1 e 2	1 vede 5	2 vede 1 e 2
3 vede 0	4 vede 5	5 vede 2

Quindi 0 e 2 sono tra loro equivalenti e così pure l'1 ed il 4. Il 3 ed il 5 sono equivalenti solo a se stessi.

794

Dove R è la relazione in figura.

Le aree in grigio sono gli elementi della partizione.



Dal diagramma osserviamo che:

0 vede 1	1 vede 5	2 vede 0 e 1
3 vede 0 e 1	4 vede 5	5 vede 2

Quindi il 3 ed il 2 sono tra loro equivalenti e così pure l'1 ed il 4. Lo 0 ed il 5 sono equivalenti solo a se stessi.

Esercizi 795 – 797

Sia $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ una funzione totale e sia E una relazione di equivalenza su $\mathbb{U}$. Definiamo

$$R := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) E F(b) \right\}$$

795 Sotto quale ipotesi R è una relazione di equivalenza?

A

- A. nessun'ipotesi B. F è iniettiva
C. F è suriettiva D. F è biiettiva.

Si scelga l'ipotesi più debole.

796 È sempre vero che $E \subseteq R$?

No

797 È sempre vero che $R \subseteq E$?

No

Esercizi 798 – 800

Siano $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ e $G : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ due funzioni totali. Le tre relazioni qui sotto sono delle equivalenze (questo lo diamo per noto),

$$R := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) = F(b) \right\}$$

$$S := \left\{ \langle a, b \rangle : F^2(a) = F^2(b) \right\}$$

$$E := \left\{ \langle a, b \rangle : F(a) R F(b) \right\}$$

si dica se le seguenti affermazioni sono vere. In caso contrario si dia un controesempio.

798 $E \subseteq S$.

Si

799 $S \subseteq E$.

Si

800 È vero che $R = S$ implica $F^2 = F$?

No

Controesempio: $\mathbb{U} = \mathbb{N}$, $F : x \mapsto x^2$
Qualsiasi funzione iniettiva verifica $E = S$.

Esercizi 801 – 805

L'universo è $\mathbb{R}$. Sia F la funzione che mappa $x \mapsto x^2$ e definiamo la relazione di equivalenza:

$$E = \left\{ \langle x, y \rangle : F(x) = F(y) \right\}.$$

801 Quale dei seguenti insiemi è la partizione associata ad E ?

F

A. $\{\mathbb{R}\}$

B. $\{\mathbb{R} \setminus \{0\}, \{0\}\}$

C. $\{\mathbb{R}^-, \{0\}, \mathbb{R}^+\}$

D. $\{\{x^2\} : x \in \mathbb{R}\}$

E. $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$

F. $\{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}\}$

La partizione A corrisponde alla relazione banale $\mathbb{R}^2$ dove tutto è in relazione con tutto. La partizione C corrisponde alla relazione “avere lo stesso segno”. L’insieme di destra invece non è nemmeno una partizione: non ricopre $\mathbb{R}$. La partizione E corrisponde alla diagonale di $\mathbb{R}$. La risposta giusta é F infatti due numeri reali x ed y sono equivalenti sse $x^2 = y^2$ quindi sse $|x| = |y|$. La classe di equivalenza di x è dunque $\{x, -x\}$.

Si dica a cosa sono uguali le seguenti classi di equivalenza:

802 $[0]_E =$

$\{0\}$

804 $[-1]_E =$

$\{1, -1\}$

803 $[+1]_E =$

$\{1, -1\}$

805 $[\sqrt{2}]_E =$

$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Queste risposte seguono immediatamente da quella dell’esercizio 801. Gli insiemi richiesti sono gli unici insiemi della partizione che contengono 0, 1, e -1 .

Indice analitico

A

albero
 binario, 141
 di costruzione, 47
algebra booleana, 19
antiimmagine
 di un elemento, 36
 di un insieme, 32
antisimmetrica
 relazione, 145
appartenenza, 7
associatività
 composizione di funzioni, 35
 operzioni booleane, 19

B

biattività, 30
biimplicazione, 54

C

cammino, 152
 improprio, 152
 proprio, 152
cardinalità, 155
cartesiano/a
 potenza, 21
 prodotto, 21
 quadrato, 21
chiusura
 transitiva, 153
classe di equivalenza, 170
clique, 147
 massimale, 147
codominio, 33
commutatività di funzioni, 38
completa
 relazione, 146
congruenza, 165
connettivo
 booleano, 46
 principale, 47
conseguenza logica, 58
 (proposizionale), 63
contraddizione

 (connettivo), 46
 (formula proposizionale), 63
 (formula), 57
coppia
 non ordinata, 20, 21, 189
 ordinata, 21
costante
 simbolo per, 113

D

definizione
 di un insieme, 53
deMorgan (leggi di), 13
diagonale, 166
 relazione, 22
diagramma, 23
differenza
 insiemistica, 12
 troncata, 33
differenza simmetrica, 12
disgiunzione, 46
 esclusiva, 46
dominio, 33
 di definizione, 30
 di un modello, 49

E

elementi
 incomparabili (in un ordine), 160
elemento
 di un insieme, 7
 massimale, 161
 minimale, 161
equivalenza, 165
 logica, 58
 logica (proposizionale), 63
 relazione di, 165
estensionalità, principio di, 7
estremo
 inferiore, 161
 superiore, 161
ex falso, 64

F

forma normale disgiuntiva, 65

formula, 46

atomica, 46

chiusa, 50

con parametri, 50

consistente, 57

freccia di un diagramma, 23

funzione, 29

biiettiva, 30

grafo di una, 29

identità, 35

iniettiva, 30

inversa, 36

simbolo per, 113

suriettiva, 30

totale, 30

vuota, 35

funzioni

che commutano, 38

compatibili, 31

composizioni di, 34

G

grafo di una funzione, 29

I

identità booleane, 12

immagine

di un insieme, 32

di una funzione, 30

inversa di un insieme, 32

implicazione, 54

inclusione, 8

ineare

ordine, 160

infissa, notazione, 22

insieme

finito, 20

iniettività, 30

insieme, 7

definibile, 53

elemento di un, 7

interpretazione, 49

intersezione, 11

irriflessiva

relazione, 146

L

leggi di deMorgan, 13

linguaggio, 45

dell'aritmetica, 129

logicamente equivalenti, 58

M

maggiorante, 161

mappare, 29

massimo, 161

minimo, 161

minorante, 161

modello

del prim'ordine, 49

proposizionale, 62

deMorgan (leggi di), 13

N

negazione, 46

nodo di un diagramma, 23

notazione infissa, 114, 160

numeri

interi, 7

naturali, 7

negativi, 7

positivi, 7

razionali, 7

reali, 7

O

ordine

debole, 160

denso, 162

discreto, 162

lineare, 160

parziale, 160

stretto, 160

totale, 160

P

parametro, 50

partizione, 168

potenza cartesiana, 21

predecessore (funzione), 33

predicati, 45

preordine, 151

principio

del terzo escluso, 64

di estensionalità, 7

di induzione, 130

prodotto cartesiano, 21

proposizionale

lettera, 61

logica, 61

Q

quadrato cartesiano, 21

quantificatore

esistenziale, 75

universale, 75

R

raffinamento

di una equivalenza, 174

di una partizione, 173
raggio di azione (di un quantificatore), 77
raggiungibilità (relazione di), 152
relazione
 antisimmetrica, 145
 banale, 22
 binaria, 22
 di equivalenza, 165
 di raggiungibilità, 152
 diagonale, 22
 irriflessiva, 146
 riflessiva, 146
 simmetrica, 145
 transitiva, 151
 univoca, 29
ricoprimento, 168
riflessiva
 relazione, 146

S
semantica, 49
signatura, 45
simmetrica
 relazione, 145
singoletto, 20, 189
soddisfare (una formula), 52
soluzione (di una formula), 52
sottoinsieme, 8
 proprio, 9
struttura, 49

successore (funzione), 33
suriettività, 30

T

tautologia
 (connettivo), 46
 (formula proposizionale), 63
 (formula), 57
 proposizionale, 63
tavola di verità, 51
terzium non datur, 64
torneo, 146
totale
 ordine, 160
 relazione, 146
totalità
 di una funzione, 30
tournament, 146
transitività
 dell'implicazione, 71
tupla, 21

U

unione, 11
universo
 di un modello, 49
 insiemistico, 7

V

valore di verità, 50