

Dinamica dei fluidi

Fino ad ora abbiamo parlato della statica dei fluidi, cioè dei fluidi all'equilibrio.

Il moto reale dei fluidi è estremamente complesso: noi ci occuperemo soltanto di liquidi in **moto laminare**, cioè senza turbolenze; quando un liquido si muove in questo modo i suoi strati scorrono l'uno sull'altro senza forze di attrazione reciproche (senza viscosità).

La descrizione del moto può avvenire in due modi:

metodo lagrangiano: porre un osservatore su ogni particella: tale osservatore fornisce istante per istante la posizione e la velocità della particella

metodo euleriano: porre tanti osservatori fissi (al limite uno per ogni punto dello spazio) che istante per istante forniscono la velocità (vettoriale) delle particelle che in quel momento transitano nel loro punto di osservazione.

Per descrivere in modo sintetico le informazioni fornite dagli osservatori, si introduce la cosiddetta **linea di flusso**.

La linea di flusso è tale che **punto per punto il vettore velocità è tangente alla linea di flusso** (dal punto di vista matematico si parla di **inviluppo**) e ha la sua direzione.

Nella figura a fianco è rappresentata una linea di flusso inviluppo di tutte le direzioni dei vettori velocità rilevati dagli osservatori O_1, O_2 , ecc nello stesso istante t .

In generale la linea di flusso non è una traiettoria, noi studieremo però solo i cosiddetti **moti stazionari**, per i quali coincidono le linee di flusso e le traiettorie effettivamente seguite dalle particelle.

Quando un fluido si muove di moto stazionario per gli stessi punti transiteranno successivamente particelle aventi la stessa velocità.

Si definisce **tubo di flusso** l'insieme di tutte le linee di flusso.

Nessuna linea di flusso può uscire dal tubo di flusso: se così fosse due linee si intersecherebbero e questo implicherebbe che nel punto intersezione esisterebbero due linee di flusso distinte e di conseguenza due distinte velocità per una sola particella di liquido. Nei moti stazionari linee di flusso e traiettorie coincidono: l'affermazione precedente implica allora che **nessuna particella può uscire da un tubo di flusso**.

In un tubo di flusso il numero di particelle che transitano attraverso una sezione S_1 in un tempo Δt è uguale al numero di particelle che transitano attraverso una sezione S_2 nello stesso tempo.

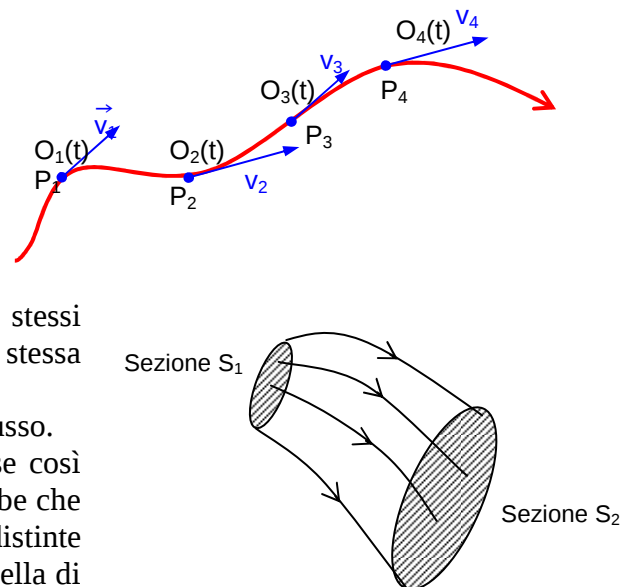
Se dalla sezione S_1 entrano n particelle allora dalla sezione S_2 dovranno uscirne n , altrimenti nel tratto $S_1 - S_2$ ci sarebbe un accumulo di particelle e un conseguente aumento di densità (mentre i liquidi sono praticamente incompressibili). Questo fatto esprime la **conservazione della massa**.

Se definiamo la **portata** come la massa di liquido che nell'unità di tempo attraversa una sezione qualsiasi del condotto la conservazione della massa equivale a dire che **la portata di un tubo di flusso è costante**.

La portata si misura in kg/s o, essendo la densità del liquido costante, anche in m³/s.

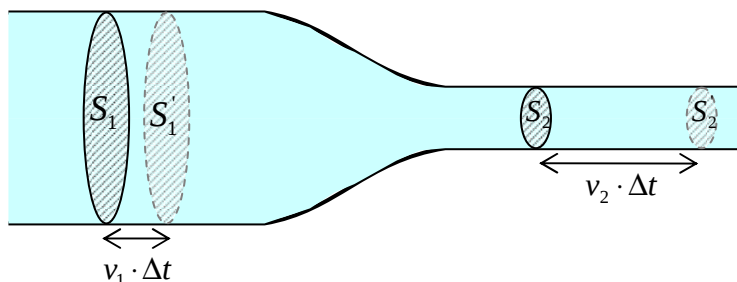
Se infatti è costante la massa che attraversa in un dato tempo una sezione del liquido è costante anche il volume:

$$\frac{m}{\Delta t} = \text{cost.} \Rightarrow \frac{d \cdot V}{\Delta t} = \text{cost.} \Rightarrow \frac{V}{\Delta t} = \text{cost.}$$



Equazione di continuità

Consideriamo un tubo di flusso la cui sezione si restringa come nella figura seguente:



Nel tempo Δt attraverso la sezione S_1 passa un volume di liquido $V_1 = S_1 v_1 \Delta t$; questo volume nella figura corrisponde ad un cilindro che ha per base la sezione S_1 e per altezza lo spazio percorso dalle particelle nel tempo Δt : $s = v \Delta t$. Nello stesso intervallo di tempo un volume di liquido $V_2 = S_2 v_2 \Delta t$ attraversa la sezione S_2 . Per l'incompressibilità del liquido i due volumi dovranno essere uguali:

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$$

La relazione ottenuta prende il nome di **equazione di continuità**:

$$S \cdot v = \text{costante} \quad \text{Equazione di continuità}$$

Quando la velocità del liquido aumenta la sezione del tubo di flusso diminuisce. Ne è un esempio evidente il tubo di flusso dell'acqua che esce dal rubinetto: l'accelerazione di gravità fa aumentare la velocità dell'acqua che cade e la sezione del tubo di flusso diminuisce visibilmente.

Quando inoltre vogliamo aumentare la velocità di un liquido dobbiamo restringerne la sezione (come si fa quando si vuole generare uno spruzzo violento con un tubo di gomma da giardino).



Problema 1:

L'acqua scorre in tubo con la velocità di 30 cm/s quando la sezione del tubo è 4 cm². quale sarà la sua velocità quando la sezione si riduce a 1 cm²?

$$\begin{array}{ll} v_1 = 30 \text{ cm/s} & v_2 = ? \\ S_1 = 4 \text{ cm}^2 & S_2 = 1 \text{ cm}^2 \end{array} \quad S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{4 \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ cm/s}}{1 \text{ cm}^2} = 120 \text{ cm/s}$$

Problema 2:

In un condotto di sezione costante scorrono 9,6 m³ di acqua ogni ora. L'acqua scorre alla velocità costante di 70 cm/s. Calcolare la sezione del condotto.

Il volume liquido che attraversa in un secondo la sezione del condotto è

$$9,6 \text{ m}^3 / 3600 \text{ s} = 2,667 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Questo valore rappresenta la portata del condotto, pari al volume $V = S v \Delta t$ dove Δt vale 1 secondo.

$$\text{Sarà quindi } S = \frac{V}{v \Delta t} = \frac{2,667 \cdot 10^{-3}}{70 \cdot 10^{-2}} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Problema 3:

Una gomma per innaffiare ha raggio pari a 2 cm. Alla fine della gomma è avvitato uno spruzzatore con 25 fori, ciascuno del diametro di 1 mm. Sapendo che l'acqua nel tubo scorre alla velocità di 0,5 m/s determinare la velocità dell'acqua quando esce dallo spruzzatore.



La sezione del tubo è $S_1 = 4\pi \text{ cm}^2$.

La sezione totale di uscita è $S_2 = 25 \cdot \pi (0,5 \text{ mm})^2 = 25 \cdot \pi (0,5 \cdot 10^{-1} \text{ cm})^2 = 25 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$

La velocità di uscita sarà $v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{4\pi \cdot 0,5 \text{ m/s}}{625\pi \cdot 10^{-3} \text{ m/s}} = 32 \text{ m/s}$

Paradosso idrodinamico

Ci chiediamo ora qual è il valore della pressione all'interno di un fluido in moto. Studiamo separatamente due casi:

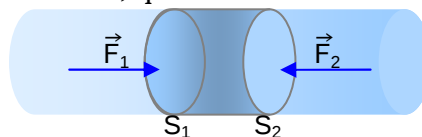
1° caso: condotto orizzontale a sezione costante

Poiché la sezione del condotto è costante anche la velocità del fluido è costante. Consideriamo un qualsiasi elemento di fluido: esso muove di m.r.u. e perciò non accelera, quindi la somma delle forze agenti su di esso è uguale a zero.

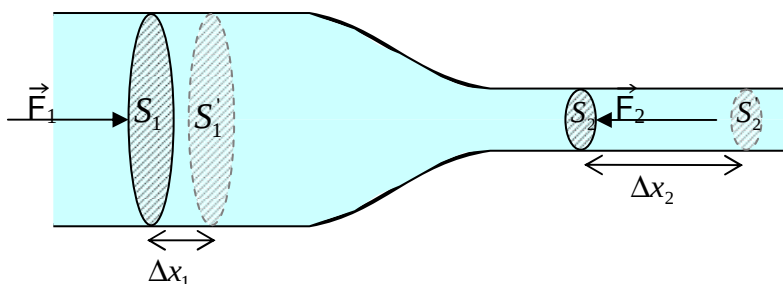
Sarà quindi $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ e, poiché la sezione è costante, anche

$$p_1 = p_2$$

In un condotto orizzontale a sezione costante la pressione è ovunque la stessa.



2° caso: condotto orizzontale a sezione variabile



Riprendiamo la situazione già esaminata precedentemente: quando il primo volumetto d'acqua avanza spinge avanti il secondo volumetto di liquido. Dall'equazione di continuità sappiamo che la velocità aumenta passando da S_1 a S_2 , e che quindi $v_2 > v_1$

Per produrre tale variazione di velocità è necessario che la forza F_1 superi la forza F_2 : $F_1 > F_2$

Per trovare il rapporto che lega la pressione alla velocità (e quindi alla sezione) usiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{tot} = \Delta E_k$$

Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori compiuti dalle forze F_1 e F_2 :

$$F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = \frac{1}{2} m_{tot} v^2 - \frac{1}{2} m_{tot} v_i^2$$

Osserviamo che ai fini della variazione di energia cinetica la massa di fluido che conta è proprio quella contenuta nel volumetto ΔV in quanto la porzione centrale (quella compresa tra S_1' e S_2) è presente sia nella porzione finale che in quella iniziale.

Scriviamo inoltre le forze F_1 e F_2 come prodotto della pressione in quel punto per la sezione su cui la forza agisce:

$$p_1 S_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 S_2 \cdot \Delta x_2 = \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_1^2$$

I prodotti $S_1 \cdot \Delta x_1$ e $S_2 \cdot \Delta x_2$ valgono entrambi ΔV , perciò possiamo scrivere:

$$\Delta V(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_1^2$$

Semplificando ΔV dopo un passaggio si ottiene:

$$p_1 + \frac{1}{2} dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} dv_2^2$$

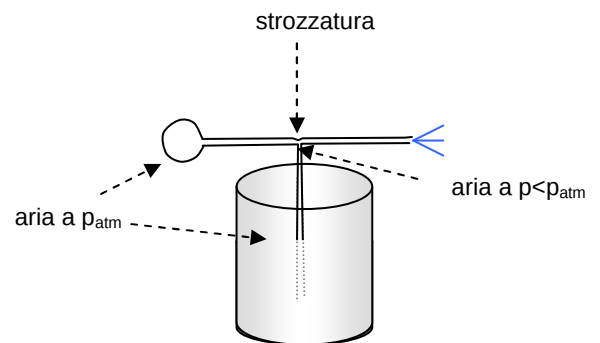
quindi in un condotto orizzontale a sezione variabile rimane costante la quantità $p + \frac{1}{2} dv^2$

Ne consegue che la pressione è minore dove la velocità è maggiore, cioè dove la sezione è minore.

Conseguenze del paradosso idrodinamico:

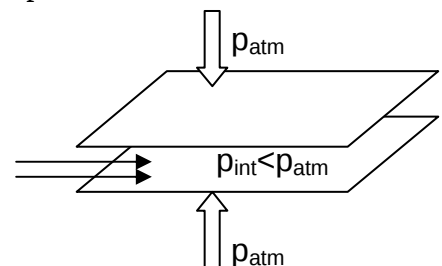
Funzionamento dello spruzzatore:

L'aria, passando nella strozzatura, aumenta la velocità e di conseguenza diminuisce la sua pressione. L'acqua dentro al tubo si trova sottoposta alla pressione atmosferica dal basso e ad una pressione minore dall'alto, quindi risale. (è lo stesso meccanismo con cui funziona l'aerosol).



Fogli che si avvicinano:

Teniamo due fogli in verticale alla distanza di un paio di centimetri poi soffiando dall'alto verso il basso nello spazio tra i due fogli: vedremo che essi si avvicinano perché sono sospinti dall'esterno verso l'interno.



Sorpasso

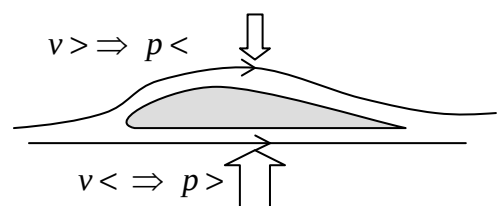
Quando un automezzo passa veloce vicino ad un altro (come un camion vicino ad un'auto o un treno vicino ad una persona) anche l'aria tra i due oggetti viene trascinata nel moto e di conseguenza ha una velocità minore che nelle regioni esterne ai due oggetti, i quali vengono perciò spinti l'uno contro l'altro.

Pallina in un getto s'aria.

Questo semplice esperimento consiste nel soffiare verso l'alto con un asciugacapelli e porre una pallina da ping pong nel getto. Si vede come la pallina non solo resta "sospesa" ma resiste anche rispetto a piccoli spostamenti.

Portanza dell'aeroplano

L'ala dell'aereo è sagomata in modo che l'aria che la percorre da sopra compie nello stesso tempo un percorso più lungo dell'aria che la percorre da sotto. A velocità minore corrisponde una pressione maggiore.



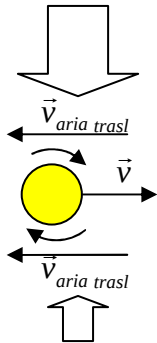
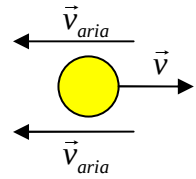
Effetto Magnus

Osserviamo innanzitutto che una pallina in moto nell'aria ferma si può studiare come se fosse una pallina fissa nell'aria in movimento (è lo stesso principio su cui si basano le simulazioni nella galleria del vento).

Come si comporta una pallina da tennis lanciata orizzontalmente?

Se viene lanciata senza rotazione percorre la consueta traiettoria parabolica.

Se la pallina viene fatta ruotare in avanti (il termine tecnico è top-spin) lo strato limite di aria aderente alla pallina, per il fenomeno della viscosità, trascina con sé gli strati d'aria adiacenti. La velocità dell'aria "che ruota" si somma settorialmente alla velocità dell'aria "che trasla", di conseguenza gli strati d'aria sotto e sopra alla pallina hanno velocità diverse (e quindi pressioni diverse).



$$v_{tot sup} = v_{aria trasl} - v_{aria rot}$$

$$v_{tot sup} < v_{tot inf} \Rightarrow p_{sup} > p_{inf}$$

$$v_{tot inf} = v_{aria trasl} + v_{aria rot}$$

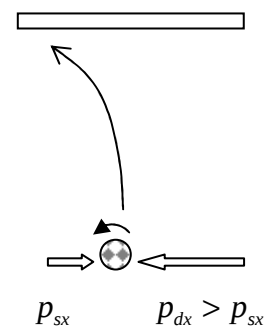
In particolare la velocità totale inferiore al di sotto della pallina è maggiore di quella sopra alla pallina. Per il paradosso idrodinamico la pressione superiore sarà quindi maggiore di quella inferiore (ricorda che a minori velocità corrispondono maggiori pressioni) e la pallina cadrà prima rispetto alla normale (e attesa) traiettoria parabolica. Analogo discorso vale per la rotazione all'indietro (back-spin) nella quale la pallina cade più avanti rispetto alla normale traiettoria parabolica.

Nella pallina da tennis la viscosità è aumentata dalla presenza dei peli sulla superficie della pallina (nel caso della pallina da golf la superficie è scabra per la presenza di buchi).

L'effetto Magnus viene applicato anche nel calcio per deviare la traiettoria verso destra o verso sinistra (nei tiri ad effetto si imprime una rotazione laterale).

Ovviamente è impossibile, per quanto detto, eseguire tiri ad effetto nel vuoto (è proprio la presenza dell'aria con le sue diverse velocità a generare l'incurvamento della traiettoria !).

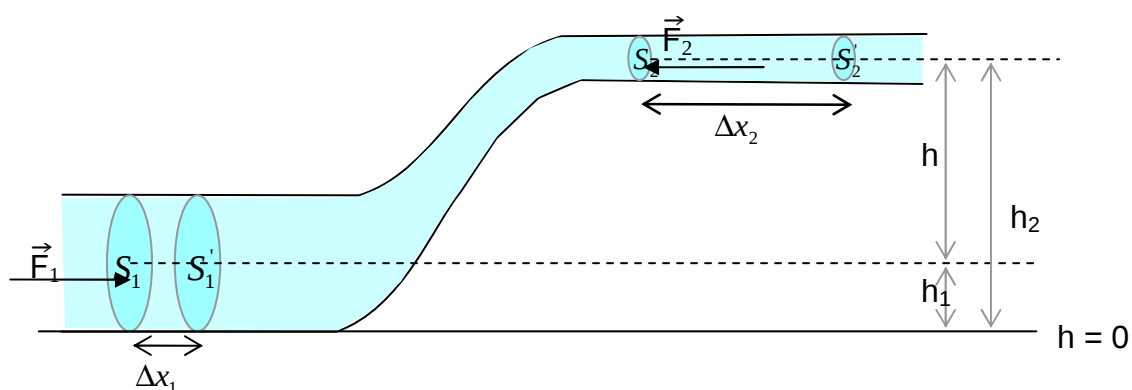
Porta di calcio vista dall'alto



Barca a vela

Anche la curva della vela, posta di taglio rispetto alla velocità del vento, permette di differenziare la velocità dell'aria sui due lati della vela e quindi di creare una differenza di pressione che spingerà la barca da una parte. L'effetto è accentuato anche dalla presenza di due vele (il fiocco e la randa) : l'aria che si incanala tra le due vele avrà velocità superiore (per l'equazione di continuità) e

3° caso: condotto non orizzontale a sezione variabile



Anche in questo caso applichiamo il teorema dell'energia cinetica $L = \Delta E_k$; rispetto al caso precedente dobbiamo contare, nel passare dalla regione 1 alla regione 2, anche il lavoro compiuto per sollevare l'acqua di un'altezza h :

$$F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 - mgh = \frac{1}{2} m_{tot} v_2^2 - \frac{1}{2} m_{tot} v_1^2$$

Come nel caso precedente possiamo contare come massa d'acqua solo la massa contenuta nel volume $\Delta V \Rightarrow m = d\Delta V$.

$$p_1 S_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 S_2 \cdot \Delta x_2 - d\Delta V gh = \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} d\Delta V \cdot v_1^2$$

Esprimendo l'altezza h come differenza delle altezze delle due sezioni (dei loro baricentri) rispetto ad un livello zero, scrivendo il prodotto della sezione per l'altezza Δx come volume ΔV e semplificando otteniamo

$$p_1 - p_2 - dg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2} d \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} d \cdot v_1^2$$

da cui $p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2} d \cdot v_1^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2} d \cdot v_2^2$. Questa relazione è nota come

$$p + dgh + \frac{1}{2} d \cdot v^2 = \text{cost.} \quad \text{teorema di Bernoulli}$$

Osserviamo che la quantità al primo membro è dimensionalmente un'energia per unità di volume. Il teorema di Bernoulli rappresenta perciò la conservazione dell'energia in un fluido in movimento. Osserviamo inoltre che:

- se il condotto è orizzontale allora $h = 0$ e l'equazione si riduce alla legge trovata nel punto precedente.
- se il condotto è a sezione costante anche la velocità è costante e la pressione è la stessa dappertutto.