

**Appunti ed esercizi
di Meccanica Razionale**

Appunti ed esercizi di Meccanica Razionale

Luciano Battaia

Versione del 27 settembre 2009

Testo composto con $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ e la classe di documento Komascript di Markus Kohm e Jens Uwe Morawski.

Le immagini sono realizzate con il pacchetto PSTricks e le sue estensioni. Molte figure sono state prima costruite usando Geogebra e poi esportate direttamente in formato PSTricks. Nessuna parte di questo testo può essere riprodotta senza il consenso scritto dell'autore.

Indice

Premessa	v
I. Teoria	1
1. Introduzione	3
2. Richiami di algebra vettoriale	5
2.1. Vettori	5
2.2. Operazioni tra vettori	6
2.3. Doppio prodotto vettoriale e prodotto misto	10
2.4. Parallelismo, perpendicolarità, complanarità	12
2.5. Scomposizione di vettori	12
2.6. Vettori applicati	13
2.7. Insiemi (o sistemi) di vettori applicati	14
2.8. Asse centrale di un sistema di vettori applicati	17
2.9. Sistemi di vettori equivalenti	18
2.10. Riduzione di un sistema di vettori applicati	19
2.11. Sistemi di vettori applicati paralleli	22
2.12. Sistemi particellari e sistemi continui	27
3. Vincoli e gradi di libertà	29
3.1. Vincoli e classificazione	29
3.2. Il vincolo di rigidità e gli angoli di Eulero	31
3.3. Rappresentazione analitica dei vincoli	32
3.4. Coordinate lagrangiane	33
3.5. Esempi	33
3.5.1. Aste rigide in moto piano variamente vincolate	35
3.5.2. Coppie di aste collegate, in un piano, mediante cerniere	38
4. Cinematica dei rigidi	41
4.1. Generalità	41
4.2. La formula di Poisson	42
4.3. Proprietà della velocità angolare	45
4.4. Moti rigidi particolari	46
4.5. Punti di vista lagrangiano ed euleriano	50
4.6. Il teorema di Mozzi	51
4.7. Moti rigidi piani	54
4.8. Il vincolo di puro rotolamento	54

5. Equazioni cardinali	57
5.1. Generalità	57
5.2. Classificazione delle forze	57
5.3. Equazioni cardinali	58
5.4. Statica dei sistemi	59
5.5. Statica dei sistemi rigidi	60
6. Lavori virtuali	65
6.1. Spostamenti	65
6.2. Spostamenti di un rigido	66
6.3. Lavoro virtuale	66
6.4. Principio delle reazioni vincolari	67
6.5. Il principio dei lavori virtuali	68
6.6. Sistemi olonomi. Componenti lagrangiane della sollecitazione	70
7. Azioni interne in un rigido all'equilibrio (Cenni)	73
7.1. Generalità	73
7.2. Sforzi normali e di taglio. Momenti torcente e flettente	74
7.3. Il caso dei rigidi piani, con carichi nel piano	75
7.4. Il caso dei rigidi piani in una dimensione, con carichi nel piano	76
7.4.1. Il caso di aste e archi "scarichi"	76
8. Operatore d'inerzia	79
8.1. Generalità	79
8.2. L'operatore di inerzia	79
8.3. La matrice di inerzia	81
8.3.1. Il caso piano	82
8.4. Ellissoide di inerzia	83
8.5. Operatore di inerzia e autovalori	84
8.6. Il caso di un rigido rettilineo	84
8.7. Ricerca di una terna principale di inerzia	85
8.8. Il teorema di Huygens-Steiner	86
9. Cenni di cinematica delle masse	89
9.1. Definizioni	89
9.2. Nuova forma delle equazioni cardinali	90
9.3. Il caso dei corpi rigidi	91
10. Sistemi conservativi	95
10.1. Campi conservativi - Energia potenziale	95
10.2. Esempi di forze conservative	96
10.3. Sollecitazioni conservative nei sistemi olonomi	97
10.4. Sollecitazioni conservative ed equilibrio	97
11. Equazioni di Lagrange	99
11.1. Relazione ed equazione simbolica della dinamica	99
11.2. Il caso dei vincoli olonomi	99
11.3. Equazioni di Lagrange	100

11.4. Energia cinetica di un sistema olonomo	101
11.5. Teorema dell'energia cinetica o delle forze vive	102
11.6. Conservazione dell'energia in sistemi olonomi	103
11.7. Macchine semplici	103
II. Esercizi	105
12. Esercizi di algebra vettoriale	107
13. Esercizi di cinematica	109
14. Esercizi di statica	121
15. Esercizi sugli sforzi interni	159
16. Esercizi di cinematica delle masse. Momenti di inerzia	165
17. Esercizi di dinamica	185
18. Suggerimenti "spiccioli" per la risoluzione dei problemi	191
18.1. Analisi cinematica, determinazione dei gradi di libertà, della velocità angolare, delle coordinate dei punti	191
18.2. Analisi dei carichi presenti e dei vincoli. Lavoro virtuale. Eventuale energia potenziale	192
18.3. Risultante e momento risultante delle forze	194
18.4. Momenti di inerzia	194
18.5. Momento delle quantità di moto di un rigido	197
18.6. Energia cinetica di un rigido	197
18.7. Equazioni di Lagrange	198
18.8. Macchine semplici	198
18.9. Equazioni cardinali	198
A. Richiami di algebra lineare	199
A.1. Funzioni lineari	199
A.2. Problema agli autovalori	200
A.3. Ricerca degli autovalori e autovettori	200
Notazioni utilizzate	203
Indicazioni bibliografiche	205
Elenco delle figure	207
Indice analitico	209

Premessa

Questi appunti contengono solo lo schema delle lezioni tenute, presso la sede di Pordenone dell'Università degli Studi di Trieste, nell'anno accademico 2007/2008 e successivi. In particolare essi non possono essere considerati un libro di testo.

Per una puntuale preparazione all'esame è indispensabile consultare anche i testi indicati in bibliografia e le indicazioni fornite dal docente durante le lezioni.

Molti dei contenuti proposti sono presi da appunti distribuiti dal prof. Giorgio Tondo che ha tenuto questo corso negli anni accademici precedenti al 2007/2008.

La lettura di un testo di Meccanica Razionale, anche se introduttivo come il presente, richiede un gran numero di prerequisiti matematici e fisici, tra cui segnaliamo esplicitamente:

- la cinematica e la dinamica del punto materiale;
- l'analisi delle funzioni reali di una variabile reale, compresa la teoria dell'integrazione secondo Riemann;
- l'analisi delle funzioni reali di due o tre variabili reali, compresa la teoria degli integrali doppi, tripli, curvilinei, superficiali;
- la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, con particolare riguardo a quelle fino al secondo ordine;
- elementi di algebra lineare: sistemi, matrici e operazioni tra matrici, cenni alla teoria degli autovalori, cenni alla teoria dell'ortogonalità;
- elementi di geometria analitica nel piano e nello spazio (in particolare coniche e cenni alle quadriche).

Sostanzialmente si tratta dei contenuti normalmente inseriti nei corsi (abituamente di primo anno) di *Analisi matematica I*, *Analisi matematica II*, *Geometria*, *Fisica generale I*. A tutto questo naturalmente si deve aggiungere la cosiddetta *Matematica di base* studiata alle scuole medie superiori.

Il contenuto di questi appunti è adatto a un corso di cinquanta ore di lezione, comprensive di esercitazioni.

Naturalmente per un corso di durata così breve occorre fare delle scelte e delle rinunce rispetto a quanto dovrebbe normalmente fare parte di un corso base di Meccanica Razionale. Tra le "omissioni" più significative segnaliamo qualche cenno di Meccanica relativa, di Meccanica dei fili e di Meccanica Hamiltoniana.

Il testo è diviso in due parti:

Parte I : Teoria

Parte II : Esercizi

La prima parte contiene un riassunto delle lezioni, la seconda parte contiene solo alcuni esercizi significativi. In molti casi gli esercizi sono accompagnati da una soluzione dettagliata e commentata, a complemento delle lezioni teoriche. In alcuni casi la soluzione è solo accennata, in altri casi sono proposti solo i testi degli esercizi.

Parte I.

Teoria

1. Introduzione

Questo corso è, sostanzialmente, un corso base di Meccanica Razionale e si prefigge lo studio dell'equilibrio e del moto di alcuni modelli (o sistemi materiali) che approssimano i sistemi fisici.

Lo studio della Meccanica è abitualmente suddiviso in:

Cinematica – studio del moto prescindendo dalle cause che lo provocano (“descrizione del movimento”).

Statica – studio dell'equilibrio sotto l'azione di determinate cause.

Dinamica – studio del moto sotto l'azione di determinate cause.

Per comodità i sistemi fisici di cui si occupa la Meccanica sono raggruppati in modelli che possono essere schematizzati come segue:

- Discreti
 - Punto materiale
 - Sistemi di punti materiali
- Continui
 - Corpi rigidi
 - Corpi deformabili

I corpi rigidi sono caratterizzati dal fatto che la distanza tra due loro punti qualsiasi non varia nel tempo; i corpi deformabili sono tutti gli altri e, in particolare ai fini di questo corso, possono essere ulteriormente suddivisi in:

- sistemi di corpi rigidi opportunamente collegati tra di loro (per esempio con cerniere);
- fili, travi e in genere altri corpi che non possono essere schematizzati come un insieme di corpi rigidi.

In questo corso tratteremo esclusivamente sistemi di punti materiali, corpi rigidi (brevemente: rigidi) e sistemi di rigidi.

Tutte le questioni di cinematica e dinamica del punto materiale si ritengono note dal precedente corso di fisica generale.

2. Richiami di algebra vettoriale

La maggior parte delle nozioni presentate in questo capitolo dovrebbero essere già note, in particolare dai corsi di geometria e fisica generale. Sono qui richiamate, con alcune estensioni che interessano esplicitamente questo corso, per completezza e per fissare le notazioni. Considerato lo scopo di questo capitolo, non sono quasi mai proposte dimostrazioni.

2.1. Vettori

Si suppone noto il concetto di *vettore*, o *vettore libero*. I vettori saranno indicati con notazioni del tipo

$$(2.1) \quad \vec{a}, \vec{v}, \vec{w}, \text{ ecc.}$$

Se A e B sono due punti dello “spazio ordinario” (lo spazio ordinario della geometria euclidea, che possiamo indicare con $\mathcal{E}_3$), e $\overrightarrow{AB}$ è il segmento orientato di primo estremo A e secondo estremo B , scriveremo, con un certo abuso di linguaggio,

$$(2.2) \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Useremo anche una comoda notazione⁽¹⁾

$$(2.3) \quad \vec{v} = B - A,$$

che potremo anche scrivere con

$$(2.4) \quad B = A + \vec{v},$$

rendendo evidente il fatto intuitivo che un vettore può essere pensato come un ente che, operando su un punto A , lo trasla⁽²⁾ in un altro punto B .

È chiaro che si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathcal{E}_3$ e l'insieme $\mathcal{V}_3$ dei vettori fissando un punto O e associando ad ogni vettore $\vec{v}$ il punto P dato da $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

Vale la cosiddetta *proprietà triangolare*: se A, B, C sono tre punti (distinti) qualsiasi,

$$(2.5) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{ovvero} \quad (B - A) = (C - A) + (B - C).$$

¹La notazione $B - A$ per indicare un segmento orientato è stata introdotta da William Rowan Hamilton (1805-1865), matematico irlandese. Si tratta di una notazione particolarmente felice e utile, come avremo modo di vedere. Qui segnaliamo solo che la scrittura di un segmento orientato come *differenza di due punti* rende evidente il diverso ruolo dei due estremi del segmento, esattamente come succede nella sottrazione ordinaria di numeri. Occorre tenere presente che da questa notazione non si può dedurre alcun concetto di somma di due punti: $B - A$ ha un ben preciso significato, nessun significato si attribuisce alla scrittura $B + A$.

²È opportuno ricordare che il nome *vettore* deriva proprio da questa proprietà: *vehere* significa infatti trasportare.

Se in $\mathcal{E}_3$ introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e indichiamo con $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ i *versori* dei tre assi coordinati, possiamo scrivere ogni vettore $\vec{v}$ come

$$(2.6) \quad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}.$$

I numeri v_1 , v_2 e v_3 (oppure v_x , v_y e v_z) sono detti *componenti* del vettore $\vec{v}$ e potremo scrivere

$$(2.7) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_x, v_y, v_z).$$

2.2. Operazioni tra vettori

In $\mathcal{V}_3$ si introducono quattro operazioni, di cui richiamiamo qui, per comodità e perché ne faremo uso continuo, solo le proprietà essenziali.

Somma tra vettori

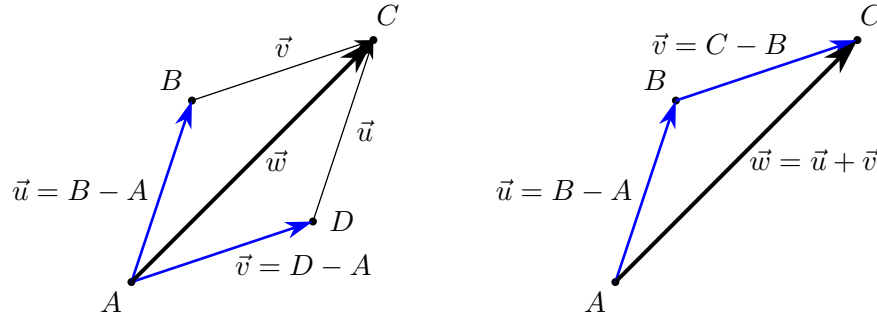


Figura 2.1. Somma di vettori: regola del parallelogramma e regola del “testa-coda”

In termini di componenti si ha

$$(2.8) \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}.$$

Prodotto per uno scalare

In termini di componenti si ha

$$(2.9) \quad \lambda\vec{v} = \lambda v_x\vec{i} + \lambda v_y\vec{j} + \lambda v_z\vec{k}.$$

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e un punto O , consideriamo i due punti $A = O + \vec{u}$ e $B = O + \vec{v}$. Si chiama *angolo* tra i due vettori l'angolo convesso (eventualmente piatto), individuato dalle semirette OA e OB .

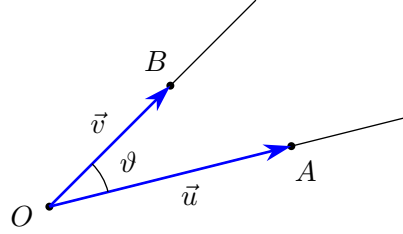


Figura 2.2. Angolo tra due vettori

Con riferimento alla figura 2.2, indichiamo con A' la proiezione ortogonale di A sulla retta OB e con B' la proiezione ortogonale di B sulla retta OA . È immediato che

- A' e B' stanno sulle semirette OB e OA rispettivamente se $\vartheta < \pi/2$;
- A' e B' coincidono con O se $\vartheta = \pi/2$
- A' e B' stanno sulle semirette opposte a OB e OA , rispettivamente, se $\vartheta > \pi/2$.

Le lunghezze dei segmenti OA' e OB' , prese con il segno $+$ o $-$ a seconda che $\vartheta < \pi/2$ oppure $\pi/2 < \vartheta \leq \pi$, si chiamano *proiezioni* di $\vec{u}$ su $\vec{v}$ (rispettivamente di $\vec{v}$ su $\vec{u}$), e si indicano con u_v e v_u rispettivamente.

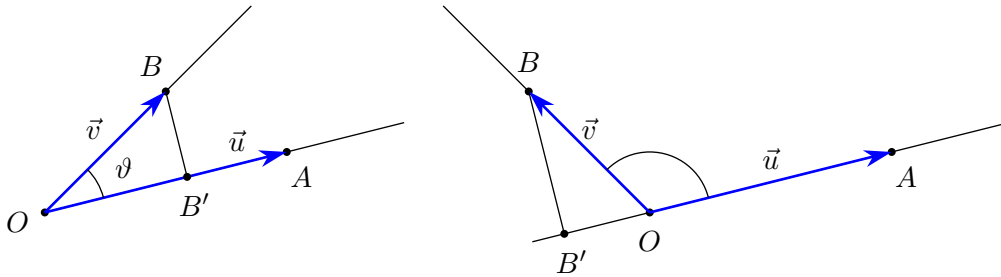


Figura 2.3. Proiezione di un vettore su un altro

Esattamente con le stesse parole si può introdurre anche il concetto di *proiezione* o *componente* di un vettore $\vec{v}$ su una *retta orientata*.

Come da tradizione, indicheremo con u_x, u_y, u_z le componenti di un vettore $\vec{u}$ sugli assi x, y, z rispettivamente.

Il *prodotto scalare* di due vettori si può definire in uno dei seguenti tre modi equivalenti:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vartheta)$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| v_u$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| u_v$.

In termini di componenti si ha

$$(2.10) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z .$$

Il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo se e soltanto se i due vettori sono *ortogonali*.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà, per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e per ogni λ :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$: proprietà commutativa;

- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$: proprietà distributiva;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (con la convenzione che un vettore nullo possa essere considerato perpendicolare a ogni altro vettore).

Il prodotto scalare fornisce un utile metodo per determinare le componenti di un vettore $\vec{v}$ qualunque:

$$(2.11) \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = (\vec{v} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k}) \vec{k}.$$

Prodotto vettoriale

In considerazione dell'importanza che l'operazione riveste per questo corso, e per fissare bene le idee, la tratteremo con un po' più di dettaglio rispetto alle precedenti.

La definizione di prodotto vettoriale non è così semplice come le altre tre operazioni introdotte nell'insieme dei vettori dello spazio e richiede l'uso di un concetto (quello di *verso orario* o *antiorario*) di non facile spiegazione formale, anche se intuitivamente evidente: la definizione che daremo è comunque adatta agli scopi di questo corso.

È molto importante segnalare subito una differenza fondamentale con le operazioni precedenti, in particolare le operazioni lineari di somma e prodotto per uno scalare: una combinazione lineare di due vettori paralleli è ancora un vettore parallelo ai dati, una combinazione lineare di due vettori è un vettore complanare ai vettori dati. Ciò significa che si potrebbe anche operare, senza cambiare nulla, in $\mathcal{V}_1$ o $\mathcal{V}_2$, anziché in $\mathcal{V}_3$. Il prodotto vettoriale è invece una operazione *intrinsecamente tridimensionale*, cioè non ha senso in $\mathcal{V}_1$ o $\mathcal{V}_2$.

Il prodotto vettoriale si può definire come segue:

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dice loro *prodotto vettoriale o esterno* il vettore $\vec{w}$, che si indica con $\vec{u} \wedge \vec{v}$, e si legge $\vec{u}$ vettore $\vec{v}$ o $\vec{u}$ esterno $\vec{v}$, definito come segue:

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli
 - il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è dato da $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \vartheta$
 - la direzione è perpendicolare sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$;
 - il verso è quello di avanzamento di una vite detorsa (cavatappi) che ruoti nel senso in cui $\vec{u}$ ruota per sovrapporsi a $\vec{v}$, compiendo il minimo angolo.

È immediato che il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è uguale all'area del parallelogramma di lati consecutivi AB e AC , dove A è un punto qualunque e $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Per quanto riguarda il verso si può anche dire, in maniera equivalente (ma sempre un po' azzardata dal punto di vista del rigore), che il verso è quello testa-piedi di un osservatore che, posto sul piano per i punti A, B, C appena considerati, veda la minima rotazione di $\vec{u}$ per sovrapporsi a $\vec{v}$ avvenire in senso antiorario, oppure ancora è il verso indicato dal pollice della mano destra se il palmo della stessa mano compie la minima rotazione che porta $\vec{u}$ a sovrapporsi a $\vec{v}$.

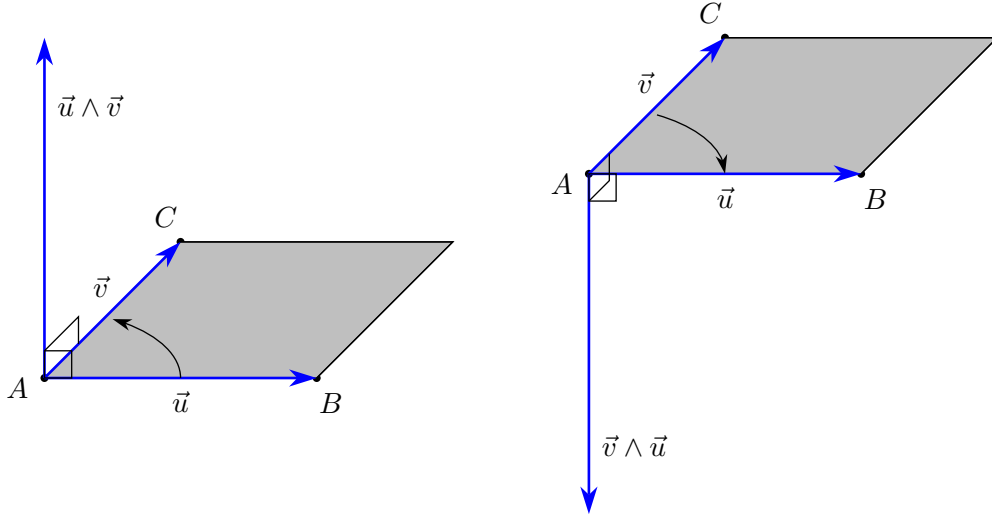


Figura 2.4. Prodotto vettoriale di due vettori

Il prodotto vettoriale di due vettori gode delle seguenti proprietà, per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e per ogni λ :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$: proprietà anticommutativa;
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$: proprietà distributiva;
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$: proprietà distributiva;
- $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$ (con la convenzione che un vettore nullo possa essere considerato parallelo a ogni altro vettore).

Si noti che l'operazione di prodotto vettoriale è un'operazione interna all'insieme $\mathcal{V}_3$: ad una coppia di vettori fa corrispondere un terzo vettore.

Si tenga presente che la notazione qui adottata per il prodotto vettoriale non è l'unica possibile. In particolare nei testi americani è più diffusa la notazione $\vec{u} \times \vec{v}$. Poiché la stessa notazione è invece usata a volte per il prodotto scalare di due vettori, riteniamo meglio evitarla del tutto, a scanso di equivoci. In ogni caso, leggendo un testo, è sempre bene controllare le notazioni usate, o consultando l'apposita tabella (se presente), oppure controllando le convenzioni usate in occasione del primo uso di un simbolo.

È molto importante prestare attenzione al fatto che il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, per cui, a esempio, dati tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, in generale

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

La non associatività del prodotto vettoriale risulta chiaramente dalla figura 2.5, dove sono state evidenziate anche le coordinate dei punti, per rendere la figura stessa più leggibile.

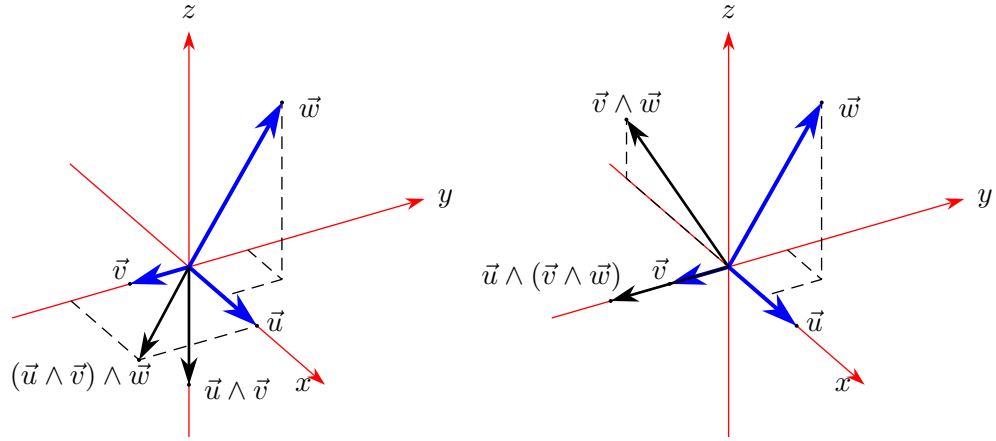


Figura 2.5. Non associatività del prodotto vettoriale di tre vettori

In termini di componenti il prodotto vettoriale si può calcolare con il seguente *determinante simbolico*:

$$(2.12) \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}.$$

2.3. Doppio prodotto vettoriale e prodotto misto

Due particolari combinazioni delle operazioni precedenti hanno grande importanza nelle applicazioni alla meccanica (e non solo).

Doppio prodotto vettoriale

Dati tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si possono considerare i due prodotti, tra loro diversi perché il prodotto vettoriale non è associativo,

$$(2.13) \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Entrambi prendono il nome di *doppio prodotto vettoriale*.

Valgono le seguenti identità, che si possono verificare per esempio utilizzando le componenti:

$$(2.14) \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}.$$

$$(2.15) \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

Esercizio

I due prodotti precedenti sono uguali se e solo se $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.

Dimostrazione. Se i due prodotti sono uguali, da (2.14) e (2.15) si deduce subito che $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$, ovvero che $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sono paralleli (ciascuno dei due è un multiplo dell'altro). Se viceversa $\vec{w}$ è parallelo a $\vec{u}$, si deduce che $\vec{w} = \lambda \vec{u}$, da cui, sempre per (2.14) e (2.15), si deduce l'identità richiesta. $\square$

Prodotto misto

Dati tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, e considerato il prodotto vettoriale, $\vec{z}$, di due dei tre, ha senso calcolare il prodotto scalare di $\vec{z}$ per il terzo vettore, per esempio $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$. In considerazione delle caratteristiche dei due prodotti, le parentesi sono inutili: nella scrittura $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ si deve eseguire prima il prodotto vettoriale e poi quello scalare, altrimenti la scrittura sarebbe priva di senso.

Si prova facilmente che il modulo del prodotto misto di tre vettori uguaglia il volume del prisma costruito sui tre vettori, come nella figura 2.6: basta solo tenere conto che il prodotto vettoriale ha per modulo l'area del parallelogramma "di base", mentre il successivo prodotto scalare (a parte il segno) rappresenta il prodotto tra questa area di base e l'altezza.

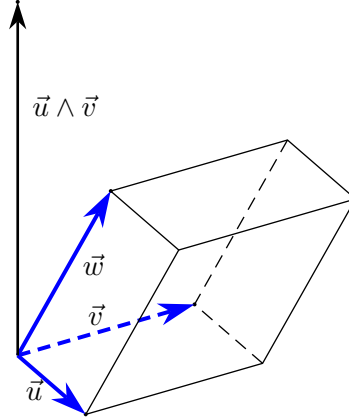


Figura 2.6. Prodotto misto di tre vettori

In termini di componenti il prodotto misto di tre vettori si può calcolare con il seguente determinante:

$$(2.16) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Tenendo conto delle proprietà dei determinanti, in particolare relativamente allo scambio di righe, si deduce subito che

$$(2.17) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w},$$

ovvero che si possono scambiare i simboli di prodotto scalare e vettoriale.

Valgono anche le seguenti proprietà:

- il modulo del prodotto misto non dipende dall'ordine in cui i vettori sono scritti, nè dall'ordine in cui si eseguono i due prodotti, ovvero

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = \dots$$

(sempre per le proprietà dei determinanti);

- il prodotto misto è nullo se e solo se i tre vettori sono complanari, con la convenzione di considerare complanari tre vettori di cui uno o più siano nulli (conseguenza o delle proprietà dei determinanti o del fatto che il prodotto misto rappresenta, a meno del segno, il volume del prisma costruito sui tre vettori).

2.4. Parallelismo, perpendicolarità, complanarità

Considerata l'importanza dei concetti di parallelismo, perpendicolarità, complanarità, richiamiamo qui le relazioni, già menzionate, che intercorrono tra essi e le operazioni tra vettori.

- Due vettori sono *paralleli* se e soltanto se il loro *prodotto vettoriale* è nullo.
- Due vettori sono *perpendicolari* se e soltanto se il loro *prodotto scalare* è nullo.
- Tre vettori sono *complanari* se e soltanto se il loro *prodotto misto* è nullo.

In tutti i casi si comprende la possibilità che uno o più dei vettori sia nullo, con la convenzione che il vettore nullo sia parallelo oppure perpendicolare a ogni altro vettore, e che sia complanare a ogni altra coppia di vettori.

2.5. Scomposizione di vettori

Nel seguito ci interesseranno alcune scomposizioni di un vettore in altri vettori aventi per somma il vettore dato.

Già la scrittura di un vettore mediante le componenti, vedi la formula (2.6), è una scomposizione di questo tipo. Ne vedremo ora alcune altre.

Scomposizione di un vettore, in un piano, secondo due direzioni non parallele dello stesso piano

Questo tipo di scomposizione è assolutamente elementare e riportiamo solo una figura per chiarezza.

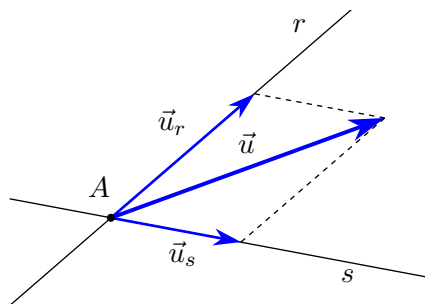


Figura 2.7. Scomposizione di un vettore secondo due rette

Scomposizione di un vettore secondo un piano e una direzione non complanare

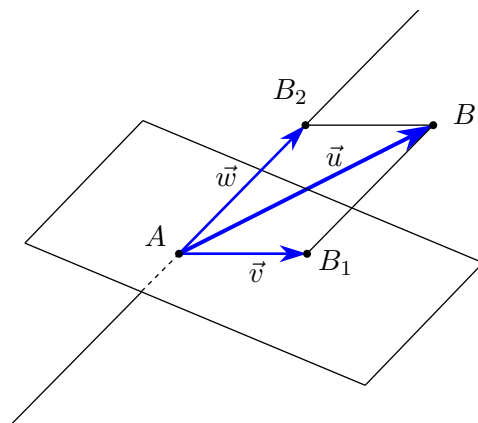


Figura 2.8. Scomposizione di un vettore secondo una direzione e un piano

Basta tirare da B la parallela alla retta data, fino a incontrare il piano in B_1 . A questo punto da B si tira la parallela ad AB_1 : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Scomposizione di un vettore secondo tre direzioni concorrenti non complanari

Si tratta in sostanza della generalizzazione della scomposizione secondo tre assi ortogonali.

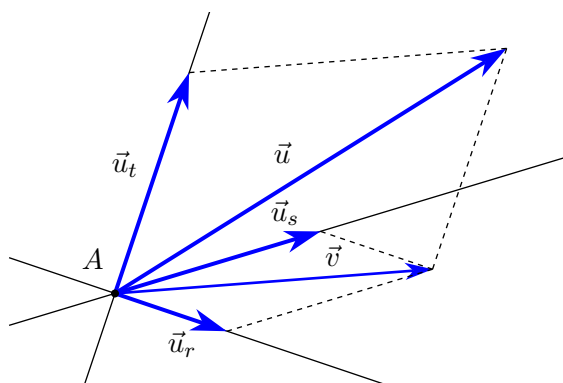


Figura 2.9. Scomposizione di un vettore secondo tre rette concorrenti

Basta scomporre il vettore $\vec{u}$ secondo una delle tre direzioni date e il piano delle altre due, e successivamente applicare la scomposizione di un vettore in un piano secondo due rette non parallele: $\vec{u} = \vec{u}_r + \vec{u}_s + \vec{u}_t$.

2.6. Vettori applicati

Un *vettore applicato* è una coppia $(A, \vec{v})$, dove A è un punto e $\vec{v}$ un vettore.

Il concetto di vettore applicato ha grande importanza in meccanica, come suggerisce l'esempio delle forze in cui bisogna ovviamente tenere conto anche del punto di applicazione, oltrechè dell'intensità, direzione e verso.

Momento di un vettore applicato rispetto a un polo O

Si chiama *momento* di un vettore applicato $(A, \vec{v})$, rispetto a un punto O detto *polo*, il vettore (libero!)

$$(2.18) \quad \vec{m}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} = (A - O) \wedge \vec{v}.$$

Nel caso che $\vec{v}$ sia una forza si parla di *momento della forza*, nel caso che $\vec{v}$ sia la quantità di moto di un punto ($m\vec{v}$), si parla di *momento della quantità di moto* o *momento angolare*.

È utile segnalare che il momento di un vettore applicato *non* è un vettore applicato, anche se, in molti casi, fa comodo pensarlo applicato nel polo rispetto a cui si calcola il momento stesso.

Vale la seguente *formula di trasporto*:

$$(2.19) \quad \vec{m}_{O'} = \vec{m}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{v} = \vec{m}_O + (O - O') \wedge \vec{v}.$$

Dimostrazione. $\vec{m}_{O'} = \overrightarrow{O'A} \wedge \vec{v} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}$, che è proprio l'uguaglianza richiesta. $\square$

Dato un vettore applicato $(A, \vec{v})$, la retta r per A e parallela a $\vec{v}$ si chiama *retta di applicazione* del vettore $\vec{v}$.

Se A' è un punto di r , si ha

$$\vec{m}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} = (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{v},$$

in quanto $\overrightarrow{A'A} \parallel \vec{v}$.

Ne segue che se si sposta un vettore lungo la sua retta di applicazione, il momento dello stesso rispetto a un punto O non varia.

Momento assiale di un vettore applicato

Sia r una retta orientata, di cui indichiamo con $\vec{e}_r$ il versore, O un punto di r e $(A, \vec{v})$ un vettore applicato. Si ha allora, detto O' un altro punto di r ,

$$\vec{m}_O \cdot \vec{e}_r = (\vec{m}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_r = \vec{m}_{O'} \cdot \vec{e}_r + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \vec{m}_{O'} \cdot \vec{e}_r,$$

in quanto il prodotto misto è nullo ($\overrightarrow{OO'}$ ed $\vec{e}_r$ sono paralleli).

Il fatto che il cambio del polo non modifichi il prodotto scalare $\vec{m}_O \cdot \vec{e}_r$ (cioè la componente di $\vec{m}_O$ nella direzione di r) ci consente di introdurre il concetto di *momento assiale* di un vettore applicato

$$(2.20) \quad m_r = \vec{m}_O \cdot \vec{e}_r,$$

dove O è un punto qualunque della retta r .

2.7. Insiemi (o sistemi) di vettori applicati

Sia $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{v}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{S}$ si dirà un *sistema di vettori applicati*.

Risultante e momento risultante

Se $\mathcal{S}$ è un sistema di vettori applicati, il vettore

$$(2.21) \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i$$

si dice *Risultante* del sistema, ed è un vettore libero.

Il vettore

$$(2.22) \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{O,i} = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \wedge \vec{v}_i$$

si dice *Momento risultante* del sistema, ed è un vettore libero. Nel seguito, quando non si darà adito a equivoci, tralasceremo dall'indicare esplicitamente gli estremi della sommatoria.

Attenzione: non si pensi al momento risultante come al momento del risultante, in quanto quest'ultima espressione è assolutamente priva di qualunque significato (poiché il risultante non è un vettore applicato, non ha alcun senso calcolarne il momento).

Anche per il momento risultante di un sistema di vettori vale una formula che lega il momento rispetto a diversi poli:

Se $\mathcal{S}$ è un sistema di vettori applicati e O, O' sono due poli, si ha

$$(2.23) \quad \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R},$$

formula analoga alla (2.19), valida per il momento di un singolo vettore.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum \vec{O'A}_i \wedge \vec{v}_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA}_i) \wedge \vec{v}_i = \\ &= \sum \vec{O'O} \wedge \vec{v}_i + \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{O'O} \wedge \sum \vec{v}_i + \vec{M}_O, \end{aligned}$$

e questa è proprio l'uguaglianza che si voleva provare. $\square$

Si noti, come conseguenza di questa formula, che per i sistemi a risultante nullo il momento risultante non dipende dal polo.

Dato un sistema di vettori applicati e una retta r , per ciascun vettore si può calcolare il momento assiale; la somma dei momenti assiali si chiama *momento assiale* del sistema di vettori applicati.

Un risultato che ci sarà utile nel seguito e che riguarda il caso di vettori concorrenti in un punto è il *Teorema di Varignon*:

Se i vettori $(A_i, \vec{v}_i)$ sono concorrenti in un punto A , il momento risultante coincide con il momento del risultante applicato in A .

Dimostrazione.

$$\vec{M}_O = \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{v}_i \stackrel{(*)}{=} \sum \vec{OA} \wedge \vec{v}_i = \vec{OA} \wedge \sum \vec{v}_i = \vec{OA} \wedge \vec{R},$$

dove il passaggio segnato con $(*)$ è legato al fatto che se sposto i vettori lungo la retta di applicazione, il momento non cambia. $\square$

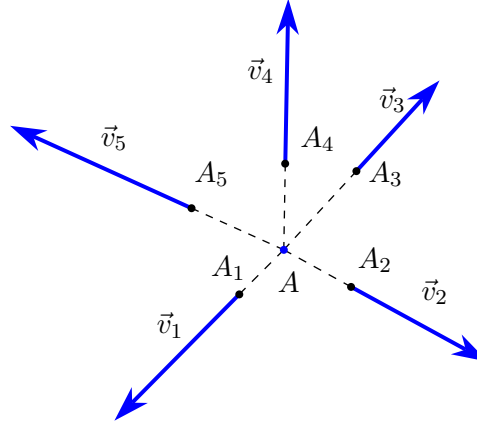


Figura 2.10. Teorema di Varignon

Coppia di forze

Un sistema costituito da due soli vettori di uguale modulo e direzione, ma con verso opposto, si dice una *coppia di vettori*, e il caso che ci interesserà in particolare sarà quello di una coppia di forze.

In questo caso $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{u}$, e quindi $\vec{R} = \vec{0}$. Per quanto riguarda il momento risultante, in base alla formula di trasporto 2.23 possiamo concludere, come già osservato, che il momento risultante della coppia non dipende dal polo.

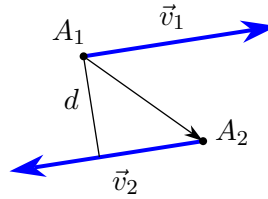


Figura 2.11. Coppia di vettori

$$\forall O, \vec{M}_O = \vec{M}_{A_1} = \overrightarrow{A_1 A_1} \wedge \vec{v}_1 + \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{v}_2 = \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{v}_2 = \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge -\vec{u} = \vec{M},$$

Il momento $\vec{M}$ è individuato dalle caratteristiche seguenti:

1. $\|\vec{M}\| = d\|\vec{u}\|$;
2. direzione: perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
3. verso: individuato dalla regola della mano destra (nel caso della figura 2.11 il verso è entrante nel foglio).

La distanza, d , tra le due rette d'azione dei vettori si chiama anche *braccio della coppia* e, se $d = 0$, la coppia si dice *di braccio nullo*. In questo caso è nullo anche il momento risultante (rispetto ad un polo arbitrario).

Trinomio invariante o invariante scalare

Se si moltiplicano ambo i membri della formula di trasporto (2.23) per $\vec{R}$ si trova

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R},$$

che si può leggere dicendo che la componente di $\vec{M}_O$ secondo la risultante $\vec{R}$ non dipende dal polo, ovvero è un invariante. Poiché la scrittura esplicita di $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ con le componenti dà luogo a un trinomio, il prodotto scalare $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ si chiama *trinomio invariante* o anche *invariante scalare* del sistema di vettori e, a causa dell'indipendenza da O , si può scrivere semplicemente $\vec{M} \cdot \vec{R}$.

2.8. Asse centrale di un sistema di vettori applicati

Consideriamo un sistema $\mathcal{S}$ di vettori a risultante non nullo ($\vec{R} \neq \vec{0}$) e sia $\vec{M}_O$ il momento risultante rispetto a un polo O , che per il momento supponiamo non parallelo a $\vec{R}$. Ha interesse notevole la scomposizione di $\vec{M}_O$ secondo la direzione di $\vec{R}$ e il piano perpendicolare a $\vec{R}$ stesso. La scomposizione è riportata nella figura 2.12 e si scrive:

$$(2.24) \quad \vec{M}_O = \vec{\mu} + \vec{N}_O,$$

dove abbiamo indicato con $\vec{\mu}$ la componente parallela a $\vec{R}$ (che, come sappiamo, non dipende da O) e con $\vec{N}_O$ quella nel piano perpendicolare (quindi perpendicolare a $\vec{\mu}$).

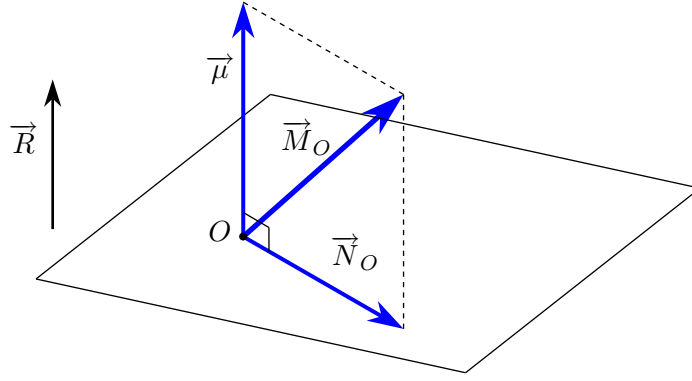


Figura 2.12. Scomposizione del momento risultante di un sistema di vettori

A scanso di equivoci segnaliamo che nella figura 2.12 il vettore $\vec{M}_O$ è stato applicato in O per pura comodità: come già detto $\vec{M}_O$ non è un vettore applicato.

Riprendiamo in esame la scomposizione di $\vec{M}_O$ e tracciamo la retta per O perpendicolare a $\vec{\mu}$ e $\vec{N}_O$. Su di essa prendiamo un punto A in modo che

$$(2.25) \quad \vec{N}_O = \vec{OA} \wedge \vec{R},$$

cioè in modo tale che il momento, rispetto a O , del risultante $\vec{R}$ applicato in A sia proprio $\vec{N}_O$. Basterà scegliere $\vec{OA}$ in modo che

$$\|\vec{OA}\| = \frac{\|\vec{N}_O\|}{\|\vec{R}\|},$$

e, naturalmente, in modo che la formula (2.25) sia corretta anche dal punto di vista del verso.

Per le note proprietà del momento, anche tutti i punti della retta a per A e parallela a $\vec{R}$ soddisfano la condizione espressa dalla formula (2.25).

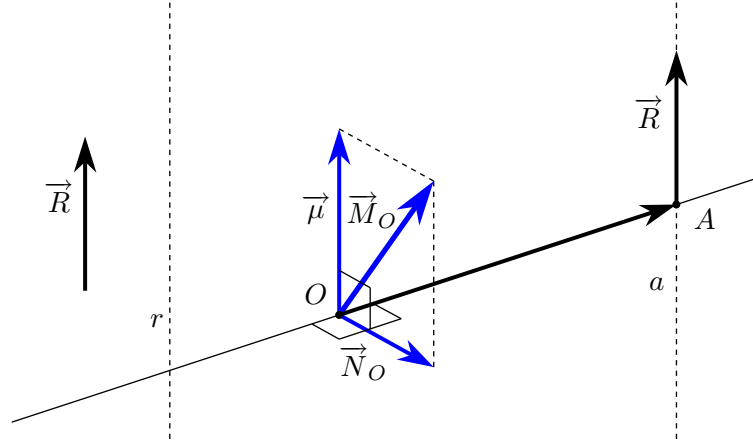


Figura 2.13. Individuazione dell'asse centrale

La retta a non dipende dalla scelta del polo O rispetto a cui si è calcolato il momento risultante. Sia infatti O' un altro polo e, in corrispondenza ad esso, determiniamo un altro punto A' come sopra indicato. Si ha, naturalmente,

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O'} &= \vec{N}_{O'} + \vec{\mu} = \vec{O'A'} \wedge \vec{R} + \vec{\mu}, \\ \vec{M}_O &= \vec{N}_O + \vec{\mu} = \vec{OA} \wedge \vec{R} + \vec{\mu},\end{aligned}$$

e anche

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}.$$

Da qui si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{O'A'} \wedge \vec{R} + \vec{\mu} &= \vec{OA} \wedge \vec{R} + \vec{\mu} + \vec{O'O} \wedge \vec{R} \Rightarrow \\ (\vec{A'O'} + \vec{O'O} + \vec{OA}) \wedge \vec{R} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{A'A} \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A'A} \parallel \vec{R} \Rightarrow A' \in a.\end{aligned}$$

Dunque la retta a dipende solo dal sistema di vettori e prende il nome di *asse centrale* del sistema stesso.

Se prendiamo O proprio sull'asse centrale otteniamo

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{R} + \vec{\mu} = \vec{\mu}$$

cioè il momento risultante rispetto a un punto dell'asse centrale è parallelo al risultante e coincide con la componente parallela al risultante del momento rispetto a un polo generico. Se ne può anche dedurre che l'asse centrale è il luogo dei punti di minimo momento risultante e anche che se per caso $\vec{M}_O$ è parallelo a $\vec{R}$, allora O è già un punto dell'asse centrale.

2.9. Sistemi di vettori equivalenti

Due sistemi di vettori applicati $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto a un polo O qualunque.

In realtà l'uguaglianza del risultante e del momento risultante rispetto a un polo O assicura l'uguaglianza del momento risultante rispetto a un polo qualunque. Sia infatti, per un dato polo O , $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$, $\vec{M}_{O,1} = \vec{M}_{O,2}$, e consideriamo un altro polo O' . Si ha

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O',1} &= \vec{M}_{O,1} + \vec{O'O} \wedge \vec{R}_1, \\ \vec{M}_{O',2} &= \vec{M}_{O,2} + \vec{O'O} \wedge \vec{R}_2.\end{aligned}$$

Da qui si deduce subito che $\vec{M}_{O',1} = \vec{M}_{O',2}$.

Operazioni elementari

Alcune operazioni eseguite su un sistema di vettori applicati non ne modificano il risultante e il momento risultante. Esse sono dette *operazioni elementari* e sono le seguenti.

1. l'aggiunta o soppressione di una o più coppie di braccio nullo;
2. la sostituzione di più vettori applicati in un punto col loro risultante applicato nello stesso punto, oppure di un vettore applicato in un punto con due o più vettori applicati nello stesso punto e aventi come risultante il vettore dato;
3. il trasporto di un vettore lungo la sua retta di applicazione.

In realtà la terza operazione è conseguenza della seconda, ma abbiamo preferito enunciarla separatamente per semplicità. Dato infatti $(A, \vec{a})$ e considerato un punto B della retta di applicazione di A , aggiungiamo la coppia di braccio nullo $(B, \vec{a}) \vee (B, -\vec{a})$, e successivamente sopprimiamo la coppia di braccio nullo $(A, \vec{a}) \vee (B, -\vec{a})$; ci resta solo il vettore $(B, \vec{a})$, che è il traslato su B del vettore $\vec{a}$.

2.10. Riduzione di un sistema di vettori applicati

Utilizzando le tre operazioni elementari sopra descritte si può ridurre un sistema di vettori applicati ad un sistema molto più semplice, senza alterare né il risultante né il momento risultante.

È molto importante tenere presente che il sistema ridotto ottenuto è equivalente a quello originario secondo la definizione data (cioè ha lo stesso risultante e lo stesso momento risultante), ma ovviamente *non è equivalente* a tutti gli effetti. Per un esempio semplice si pensi a due punti materiali collegati da una molla e non sottoposti a nessuna altra forza: il sistema di forze agenti è costituito da una coppia di braccio nullo e quindi, sopprimendo la coppia stessa, è equivalente ad un sistema in cui non agisca alcuna forza, ma naturalmente in questo caso la sola conoscenza di risultante e momento risultante non è sufficiente a trattare il problema meccanico dei due punti collegati da una molla. Come vedremo nello studio dei corpi rigidi, invece, la conoscenza di risultante e momento risultante del sistema di forze agenti è sufficiente a risolvere i problemi di equilibrio e di moto, per cui, in casi come questo, la semplificazione che si ottiene riducendo il sistema di forze originario ad uno costituito da meno vettori è di grande importanza applicativa.

Riduzione a tre vettori applicati in tre punti prefissati, non allineati

Sia dato un sistema $\mathcal{S}$ di vettori applicati e tre punti P_1 , P_2 e P_3 , non allineati. Considerato il vettore $(A_i, \vec{a}_i)$ di $\mathcal{S}$, possiamo considerare le tre rette $r: A_i P_1$, $s: A_i P_2$ e $t: A_i P_3$ e scomporre il vettore $\vec{a}_i$ secondo le tre rette (vedi la figura 2.9 nella pagina 13). Se per caso $(A_i, \vec{a}_i)$ è complanare ai tre punti dati, la scomposizione può avvenire con solo due

vettori. Trasportiamo poi i tre vettori ottenuti nei tre punti. Ripetendo l'operazione per ogni vettore del sistema e sommando poi i vettori ottenuti in P_1 , P_2 e P_3 otteniamo la riduzione richiesta.

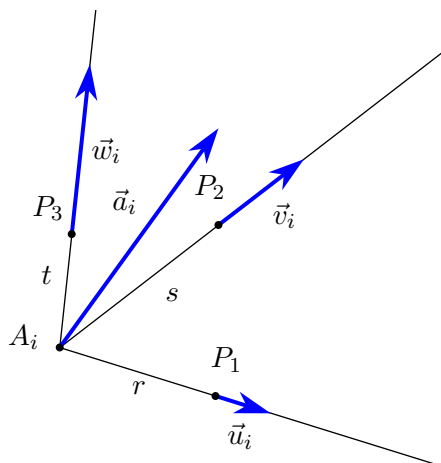


Figura 2.14. Riduzione a tre vettori

Riduzione a due vettori di cui uno in un punto prefissato

Sia dato un sistema $\mathcal{S}$ di vettori applicati e un punto P . Si può ridurre il sistema $\mathcal{S}$ preventivamente a tre vettori, di cui uno in P e due in altri punti Q ed S : $(P, \vec{v})$, $(Q, \vec{w})$ e $(S, \vec{u})$.

Se $(Q, \vec{w})$ e $(S, \vec{u})$ sono complanari, essi si possono ridurre a un unico vettore: se non sono paralleli basta trasportarli lungo la loro retta di azione fino al punto O di intersezione delle due rette e poi sommarli; se sono paralleli si può aggiungere una coppia di braccio nullo in Q ed S , sommare i due vettori che sono applicati in Q e i due che sono applicati in S e poi ripetere l'operazione di trasporto.

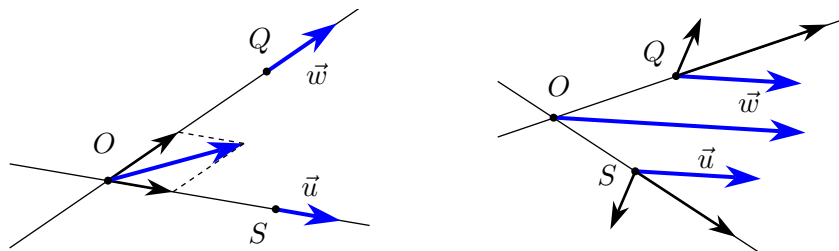


Figura 2.15. Riduzione a due vettori: caso particolare

Anche il caso che P stia sulla retta di applicazione di $(Q, \vec{w})$ oppure di $(S, \vec{u})$ si risolve banalmente, sommando $(P, \vec{v})$ con il traslato di $(Q, \vec{w})$ oppure di $(S, \vec{u})$.

Se non si verifica nessuna delle due condizioni indicate, consideriamo i piani α , individuato da P , Q e $Q + \vec{w}$ e β , individuato da P , S e $S + \vec{u}$, e indichiamo con r la loro retta di intersezione. Sia poi O un punto di r , diverso da P .

Nel piano α possiamo decomporre il vettore $(Q, \vec{w})$ secondo le rette PQ e OQ ; nel piano β possiamo decomporre il vettore $(S, \vec{u})$ secondo le due rette PS e OS . Di questi quattro vettori due si possono trasportare in P e due in O .

A questo punto in P abbiamo tre vettori che possiamo sommare, mentre in O due vettori che possiamo sempre sommare: il gioco è fatto.

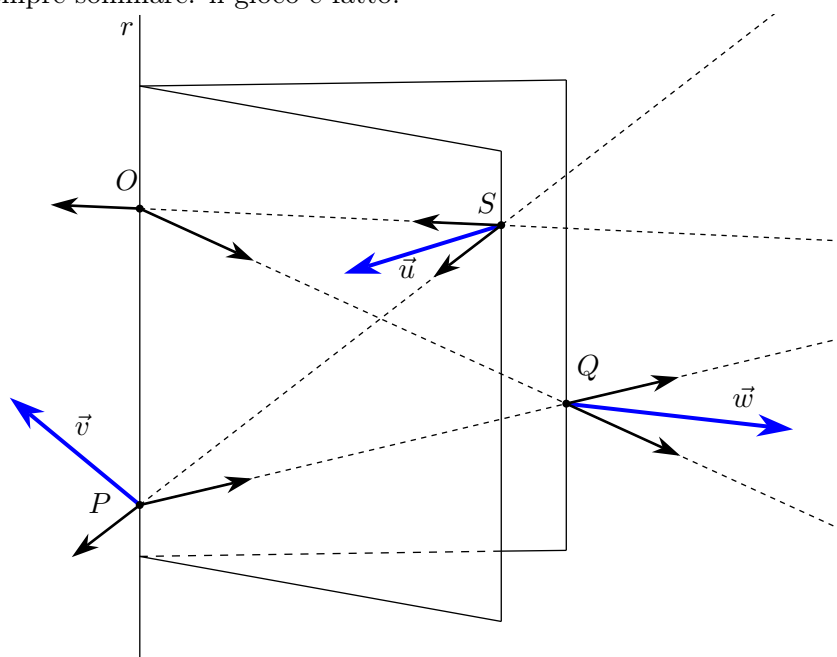


Figura 2.16. Riduzione a due vettori: caso generale

Riduzione a un vettore applicato in un punto e a una coppia

Se P è il punto dato, riduciamo preventivamente il sistema a un vettore $\vec{v}$ applicato in P e a uno, $\vec{w}$, applicato in un punto O . Appliciamo poi la coppia di braccio nullo $(P, \vec{w})$, $(P, -\vec{w})$. Se si sostituiscono i vettori $(P, \vec{v})$ e $(P, \vec{w})$ con la loro somma, si ha il risultato richiesto: il sistema è ridotto a un vettore (il risultante!) applicato in P e a una coppia. È chiaro che il momento $\vec{M}$ della coppia coincide con il momento del sistema di vettori rispetto al punto P .

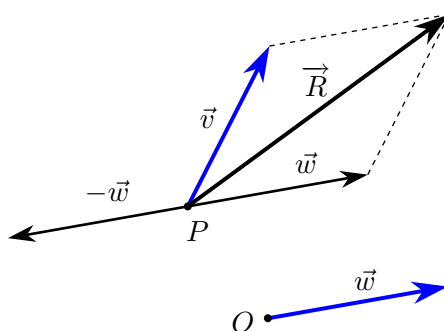


Figura 2.17. Riduzione a un vettore e a una coppia

La conclusione, molto importante per le applicazioni in particolare ai corpi rigidi, è che *un qualunque sistema S è riducibile a un sistema S' costituito dal risultante applicato in un punto P qualsiasi e da una coppia di momento uguale a $\vec{M}_P$.*

Riduzione di sistemi a trinomio invariante nullo

Ridotto un sistema $\mathcal{S}$ al solo risultante applicato in un punto P e a una coppia il cui momento $\vec{M}$ coincide col momento di $\mathcal{S}$ rispetto a P , vediamo che cosa succede se il trinomio invariante $(\vec{M} \cdot \vec{R})$ è nullo.

L'annullarsi di $\vec{M} \cdot \vec{R}$ è possibile in uno dei seguenti casi:

1. $\vec{R} = \vec{0}$: il sistema $\mathcal{S}$ è riducibile solo a una coppia;
2. $\vec{M} = \vec{0}$: il sistema è riducibile solo al risultante (che possiamo applicare in un punto qualsiasi, in particolare su un punto dell'asse centrale, per analogia col successivo caso);
3. $\vec{M} \perp \vec{R}$: se scegliamo P sull'asse centrale ne deduciamo che $\vec{M}$ (oltre a essere perpendicolare a $\vec{R}$) è anche parallelo a $\vec{R}$ (perché questa è una proprietà dell'asse centrale); questo è naturalmente possibile solo se $\vec{M} = \vec{0}$ e allora $\mathcal{S}$ è riducibile solo al risultante (applicato in un punto dell'asse centrale).

È viceversa immediato che se il sistema $\mathcal{S}$ è riducibile solo a una coppia o a un vettore, il suo trinomio invariante è nullo.

Ne possiamo concludere che *un sistema $\mathcal{S}$ è riducibile solo a una coppia o al risultante applicato in un punto dell'asse centrale se e solo se il suo trinomio invariante è nullo.*

Sistemi piani

È un sistema di vettori applicati contenuti in un piano. In questo caso ovviamente $\vec{R}$ è necessariamente parallelo al piano e, se si assume un polo O sul piano, $\vec{M}_O$ è perpendicolare al piano. Dunque il trinomio invariante è nullo.

Allora:

1. se $\vec{R} = \vec{0}$ il sistema è riducibile solo a una coppia (eventualmente a braccio nullo se anche $\vec{M} = \vec{0}$);
2. se $\vec{R} \neq \vec{0}$ il sistema è riducibile a un solo vettore applicato sull'asse centrale (ovviamente contenuta nello stesso piano dei vettori).

2.11. Sistemi di vettori applicati paralleli

Se i vettori di un sistema $\mathcal{S} = \{(A_i, \vec{a}_i)\}$ sono tutti tra di loro paralleli (è un caso di grande importanza in quanto si applica, per esempio, al caso della forza peso per un corpo non troppo esteso), il risultante è necessariamente parallelo ai vettori stessi, mentre il momento risultante rispetto a un polo O qualunque è parallelo a un piano ortogonale alla direzione comune dei vettori, e quindi è perpendicolare al risultante. Ne segue che il trinomio invariante è nullo e che il sistema è riducibile al solo risultante (applicato sull'asse centrale) o a una coppia.

Supponiamo $\vec{R} \neq \vec{0}$ e applichiamo su un punto A dell'asse centrale (necessariamente parallela ai vettori dati). Poiché il sistema è equivalente a $(\vec{R}, A)$, $\vec{M}_O$ deve coincidere con il momento del solo risultante (attenzione: questa proprietà non è valida in generale!). Dunque

$$(2.26) \quad \vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{a}_i = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}.$$

Consideriamo un sistema di coordinate $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, con l'asse z parallelo ai vettori e indichiamo con (x_A, y_A, z_A) le coordinate di A , con (x_i, y_i, z_i) quelle di A_i , con R_z e a_{iz} le uniche componenti di $\vec{R}$ e $\vec{a}_i$ rispettivamente.

Da (2.26) otteniamo

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ 0 & 0 & R_z \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ 0 & 0 & a_{iz} \end{vmatrix}.$$

Ne segue

$$x_A R_z = \sum x_i a_{iz} \quad , \quad y_A R_z = \sum y_i a_{iz}.$$

L'equazione dell'asse centrale è allora

$$(2.27) \quad x = \frac{1}{R_z} \sum x_i a_{iz} \quad , \quad y = \frac{1}{R_z} \sum y_i a_{iz}.$$

Centro di un sistema di vettori applicati paralleli

Se introduciamo un versore $\vec{e}$ parallelo ai vettori $\vec{a}_i$ avremo $\vec{a}_i = a_i \vec{e}$ (a_i è la componente di $\vec{a}_i$ secondo $\vec{e}$). Scelto ad arbitrio un punto O , consideriamo il punto C dato da

$$(2.28) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{R} \sum a_i \overrightarrow{OA_i} \quad (\vec{R} = R\vec{e} \neq \vec{0}).$$

Se si fanno ruotare tutti i vettori $\vec{a}_i$ di uno stesso angolo attorno ai loro punti di applicazione, le a_i ed R non cambiano e dunque il punto C definito da (2.28) rimane lo stesso. Se poi si prende un sistema di assi cartesiani con l'asse z parallelo ed equiverso a $\vec{e}$, allora R e a_i coincidono con R_z e a_{iz} di (2.27), dunque le coordinate di C soddisfano l'equazione dell'asse centrale o, detto in altri termini, C sta sull'asse centrale e, in base alla sua definizione si può pensare come il punto di intersezione tra l'asse centrale del sistema S e quello di un sistema S' ottenuto ruotando tutti i vettori come detto sopra. Dunque C non dipende da O , in quanto l'asse centrale è una caratteristica intrinseca di un sistema di vettori a risultante non nullo.

L'indipendenza di C da O ci autorizza a chiamare il punto C *centro del sistema di vettori applicati paralleli*.

Si noti, perché ci servirà in seguito, che in C si può pensare applicato il risultante dei vettori dati, essendo C sull'asse centrale.

Esempio

Consideriamo il caso di due soli vettori $(A_1, \vec{a}_1)$ e $(A_2, \vec{a}_2)$, distinguendo il caso che siano concordi o discordi.

$\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ concordi. Scegliamo anche l'asse concorde con essi, così come il vettore $\vec{e}$. Nella formula (2.28) allora $R = a_1 + a_2$. Se prendiamo una volta O coincidente con A_1 e una volta con A_2 otteniamo

$$\overrightarrow{A_1 C} = \frac{a_2 \overrightarrow{A_1 A_2}}{a_1 + a_2} \quad , \quad \overrightarrow{A_2 C} = \frac{a_1 \overrightarrow{A_2 A_1}}{a_1 + a_2}.$$

Dunque $\overrightarrow{A_1 C}$ e $\overrightarrow{A_2 C}$ sono paralleli ed equiversi, rispettivamente, ad $\overrightarrow{A_1 A_2}$ e $\overrightarrow{A_2 A_1}$. C sta quindi sul segmento $A_1 A_2$. Si ha inoltre

$$\frac{\overrightarrow{A_1 C}}{\overrightarrow{A_2 C}} = \frac{a_2}{a_1},$$

ovvero la distanza di C da A_1 e A_2 è inversamente proporzionale ai moduli dei due vettori. $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ **discordi** (ma non costituenti coppia, altrimenti tutto il discorso cade, non esistendo più l'asse centrale). Si può procedere come nel caso precedente (e il lettore è invitato a farlo per esercizio) e provare che ora C è esterno al segmento A_1A_2 e situato dalla parte del vettore di modulo maggiore, e vale ancora la stessa proporzione di prima. Si può provare (e lo si lascia per esercizio) che se il rapporto dei due moduli tende a 1, allora C tende all'infinito.

In coordinate cartesiane, tenendo conto che

$$\vec{R} = \sum \vec{a}_i = \sum a_i \vec{e} = \left(\sum a_i \right) \vec{e}, \text{ da cui } R = \sum a_i,$$

si ottiene

$$(2.29) \quad x_C = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad y_C = \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}, \quad z_C = \frac{\sum a_i z_i}{\sum a_i}.$$

Si noti l'analogia con la definizione di centro di massa di un sistema di punti P_i , di masse m_i :

$$(2.30) \quad x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Baricentro

Il caso di vettori applicati paralleli è particolarmente importante quando si considera un sistema, "non troppo esteso", di punti soggetti alla forza peso. In questo caso i vettori $\vec{a}_i$ sono le forze peso (parallele appunto se il corpo non è troppo esteso) e il punto C prende il nome di *baricentro* e si indica abitualmente con G (centro di gravità).

Si noti che il *baricentro non esiste* se le forze peso non possono essere considerate parallele. Si noti altresì che, invece, il concetto di centro di massa ha sempre senso. Se poi esistono entrambi, allora i due punti coincidono. Per provarlo si può osservare che se, in un sistema di vettori applicati paralleli, ogni vettore viene moltiplicato per un fattore k , il centro C non cambia. Si ha infatti:

$$\vec{OC} = \frac{\sum a_i \vec{OA}_i}{\sum a_i} = \frac{\sum k a_i \vec{OA}_i}{\sum k a_i}.$$

Per passare dal baricentro al centro di massa si può osservare che nel primo caso $a_i = m_i g$, nel secondo $a_i = m_i$.

Proprietà del baricentro

Per l'importanza che ha nelle applicazioni future occupiamoci subito un po' più in dettaglio del baricentro di un sistema di punti, facendo dunque l'ipotesi che le forze peso siano parallele (ovvero che il sistema di punti non sia troppo esteso).

Richiamiamo, per comodità, la definizione di baricentro (che coincide con quella di centro di massa nelle ipotesi in cui ci siamo posti):

$$(2.31) \quad \vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OP}_i}{\sum m_i}.$$

Segnaliamo, perché ci sarà utile in seguito, che dalla formula (2.31) si deduce la seguente

$$(2.32) \quad \sum m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

Per il baricentro valgono alcune proprietà che qui riassumiamo brevemente.

Proprietà distributiva. Se $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_1$ ha baricentro G_1 e risultante $\vec{R}_1$, mentre $\mathcal{S}_2$ ha baricentro G_2 e risultante $\vec{R}_2$, allora il baricentro G di $\mathcal{S}$ si trova come baricentro dei due vettori $\vec{R}_1$ ed $\vec{R}_2$, applicati in G_1 e G_2 .

Proprietà di simmetria materiale. Un sistema $\mathcal{S}$ ha un *piano diametrale* π , *coniugato a una direzione* s , non parallela al piano, quando a ogni punto di $\mathcal{S}$ ne fa riscontro un altro, di ugual massa, situato sulla parallela a s passante per il primo punto e alla stessa distanza da π , ma da banda opposta. Si veda un esempio nella figura 2.18 che segue.

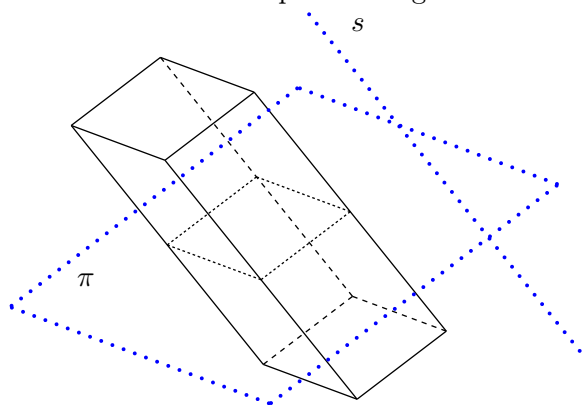


Figura 2.18. Piano diametrale coniugato a una direzione

Nel caso di sistemi piani si può parlare di retta diametrale coniugata a una direzione s . A volte si usano i nomi “piano (o retta) di simmetria materiale”.

Agli effetti del calcolo del baricentro si può affermare che se un sistema ha un piano di simmetria materiale, allora il baricentro vi appartiene.

Proprietà dell’involucro convesso. Il baricentro appartiene sempre all’involucro convesso del corpo.

Esempio

Baricentro di una lamina triangolare omogenea.

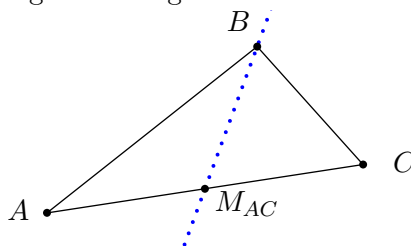


Figura 2.19. Ricerca del baricentro di una lamina triangolare omogenea

Le mediane sono assi di simmetria materiale coniugate ai rispettivi lati: G coincide con il baricentro geometrico del triangolo.

Esempio

Baricentro di una lamina omogenea a forma di quadrilatero convesso.

Usando le due diagonali possiamo dividere il quadrilatero in due triangoli in due modi diversi, ottenendo i baricentri G_1 , G_2 , G_3 , e G_4 , facilmente determinabili. Per la proprietà distributiva il baricentro G del quadrilatero deve stare sull'intersezione tra G_1G_2 e G_3G_4 .

Come esercizio si generalizzi l'esempio precedente a un poligono di n lati: basterà decomporlo, in due modi diversi, in un poligono di $n - 1$ lati e un triangolo, e poi...

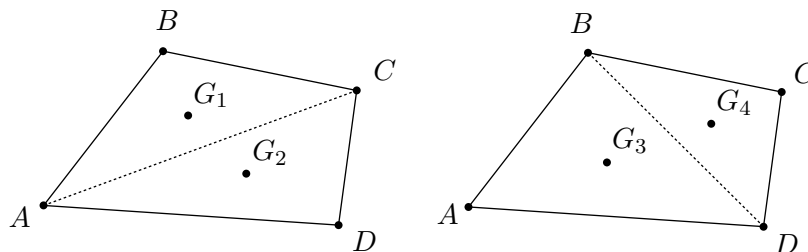


Figura 2.20. Baricentro di un quadrilatero omogeneo

Esempio

Baricentro di un tetraedro omogeneo $ABCD$.

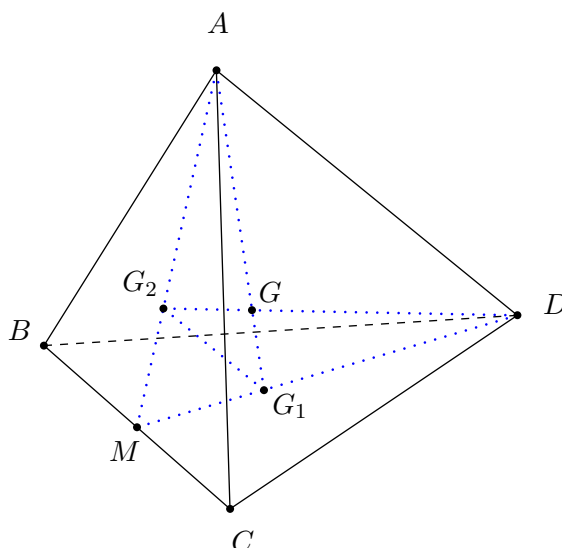


Figura 2.21. Determinazione del baricentro di un tetraedro omogeneo

I piani per uno spigolo e il punto medio del lato opposto sono palesemente piani di simmetria materiale (come il piano ADM della figura 2.21), coniugati alla direzione dello spigolo che tagliano a metà. Pertanto G appartiene all'intersezione di questi piani. Per ogni vertice, per esempio A , ne passano 3. Essi contengono, ciascuno, una delle mediane della faccia opposta, per esempio BCD . Dunque tutti tre passano per il baricentro della faccia opposta (in questo caso G_1) e quindi contengono la retta dal vertice a questo baricentro. Dunque G sta su AG_1 , e analogamente su DG_2 : questo consente di trovarlo immediatamente.

Nel triangolo MG_2G_1 , MG_2 è $1/3$ di MA , e MG_1 è $1/3$ di MD ; i due triangoli MG_2G_1 e MAD sono allora simili per avere un angolo in comune e due lati proporzionali. Allora G_2G_1 è $1/3$ di AD ed è parallelo ad AD .

La similitudine dei triangoli G_2GG_1 e AGD permette di concludere che GG_1 è la terza parte di AG . Si può concludere che G è il baricentro della sezione parallela alla base BCD , condotta a $1/4$ dell'altezza, a partire dalla base. Si completino per esercizio le poche parti mancanti della dimostrazione.

2.12. Sistemi particellari e sistemi continui

In tutto questo capitolo si è trattato sempre di sistemi “particellari” di punti. Nelle applicazioni sono di grande importanza anche i sistemi continui. La trattazione dei sistemi continui, dal punto di vista meccanico, non manifesta alcuna differenza.

Dal punto di vista matematico le grandezze “finite” che sono state utilizzate andranno sostituite con “funzioni densità” e le sommatorie andranno sostituite opportunamente con integrali.

Ci spieghiamo con un esempio, riservandoci di precisare la situazione tutte le volte che sarà necessario.

La definizione di baricentro (formula 2.31 nella pagina 24)

$$(2.31) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OP}_i}{\sum m_i},$$

andrà riscritta nel seguente modo:

$$(2.33) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\int \varrho(P) \overrightarrow{OP} d\tau}{\int \varrho(P) d\tau}$$

ove $\varrho(P)$ è la densità (lineare, superficiale o cubica) di massa, $d\tau$ è “l'elemento infinitesimo” di linea, superficie o volume, e l'integrale è esteso a tutta la regione occupata dal sistema. La quantità $\varrho(P) d\tau$ è, come si usa dire, la “massa infinitesima” “dell'elemento infinitesimo” $d\tau$.

3. Vincoli e gradi di libertà

3.1. Vincoli e classificazione

Per individuare la posizione di un punto P nello spazio fisico (assimilabile a $\mathbb{R}^3$) abbiamo bisogno di tre parametri, per esempio le sue tre coordinate cartesiane. Se consideriamo un sistema di N punti avremo bisogno in generale di $3N$ parametri, e per un corpo continuo addirittura di ∞ parametri.

Ci rendiamo però subito conto che ci possono essere, in generale, delle condizioni sui possibili valori di questi parametri. Per esempio, se nel caso di due punti “liberi” servono sei parametri, è evidente che se i due punti sono costretti a mantenere invariata la loro distanza, di parametri atti a determinare in ogni istante la loro posizione ne bastano di meno (5 come vedremo).

Definizione 3.1 (Vincolo). *Ogni “condizione restrittiva” che limita le posizioni e/o le velocità di un sistema si chiama un vincolo. Queste “condizioni restrittive” sono espresse da equazioni e/o disequazioni (anche differenziali) tra le coordinate dei punti o i parametri che servono a individuare la posizione dei sistemi di punti.*

Per quanto interessa le applicazioni ci sono varie classificazioni possibili dei vincoli: ne esamineremo qui di seguito alcune, segnalando subito che di una caratteristica importante dei vincoli (lisci o non lisci) potremo occuparci solo in seguito.

Vincoli interni ed esterni

Una prima distinzione tra i tipi di vincoli si può fare tra i *vincoli interni* e quelli *esterni*.

Sono vincoli *interni* per esempio il vincolo di rigidità, che impedisce ai punti di un sistema di variare le loro mutue distanze, e il vincolo di incomprimibilità nei liquidi.

Sono vincoli *esterni* invece quei dispositivi, in genere dovuti alla presenza di altri corpi, che impediscono ad un sistema di muoversi nel modo più generale possibile. Esempi sono quelli dell'appartenenza di un punto a una linea o a una superficie, il vincolo che costringe un corpo rigido a ruotare attorno ad un asse, oppure ad avere un punto fisso, ecc.

Vincoli olonomi e anolonomi

Una seconda distinzione, di grande importanza ai fini di questo corso, è quella tra i *vincoli olonomi* e quelli *anolonomi*.

Si dicono *olonomi* i vincoli che limitano le configurazioni accessibili da un sistema, cioè che sono esprimibili mediante equazioni o disequazioni in termini finiti coinvolgenti le coordinate dei punti o i parametri che servono a individuare la posizione dei sistemi di punti. Gli esempi sopra citati sono tutti di vincoli olonomi.

Si dicono *anolonomi* o non olonomi i vincoli la cui rappresentazione analitica non è possibile solo mediante equazioni o disequazioni in termini finiti tra i parametri che determinano la posizione del sistema, ma richiedono anche qualche relazione differenziale non ricavabile per derivazione da una relazione in termini finiti. Generalmente si tratta dei

cosiddetti “vincoli di mobilità”, che limitano le velocità che i punti di un sistema possono assumere.

Un esempio classico è il vincolo che costringe una sfera a rotolare senza strisciare su un piano. Anche il vincolo che costringe un disco a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea, mantenendosi in un piano fisso, è di questo tipo, ma, come vedremo, esso può anche essere espresso in termini finiti: si tratta di un vincolo intrinsecamente anolonomo, ma che può essere trattato come vincolo olonomo.

Vincoli bilateri e unilateri

Una ulteriore distinzione che ci interesserà nel seguito è quella tra *vincoli bilateri* (o *bilaterali*) e *vincoli unilateri* (o *unilaterali*).

Si dicono *bilateri* quei vincoli che possono essere espressi da *equazioni* coinvolgenti le coordinate dei punti o i parametri che servono a individuare la posizione dei sistemi di punti.

Si dicono *unilateri* quei vincoli che possono essere espressi da *disequazioni* coinvolgenti le coordinate dei punti o i parametri che servono a individuare la posizione dei sistemi di punti.

Nel caso di vincoli *unilateri* distinguiamo tra le posizioni in cui le disequazioni presenti sono effettivamente verificate come disuguaglianze (il vincolo è come se non ci fosse) che chiameremo posizioni (o configurazioni) *ordinarie* e le posizioni in cui almeno una delle disequazioni è verificata come equazione, posizioni che chiameremo *di confine*.

Se si ha, come esempio, un pendolo a filo (punto materiale sospeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile) e si prende un sistema di coordinate con centro nel punto di sospensione, i parametri atti a determinare la posizione del pendolo sono le tre coordinate cartesiane del punto: x, y, z . Il vincolo può essere espresso mediante una disequazione del tipo $x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$, dove l è la lunghezza del filo. In una posizione di confine si ha $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ e il vincolo stabilisce effettivamente un legame tra i tre parametri: noti due di essi si può ricavare il terzo; in una posizione ordinaria si ha $x^2 + y^2 + z^2 < l^2$ e la presenza del vincolo non permette di stabilire un legame per cui noti due dei tre parametri si possa ricavare il terzo.

Vincoli fissi e mobili

L'ultima caratteristica dei vincoli che ci interesserà è la distinzione tra *vincoli fissi* e *vincoli mobili*.

Si dicono *fissi* i vincoli nei quali il tempo non compare *esplicitamente* nelle equazioni o disequazioni che li definiscono.

Si dicono *mobili* i vincoli nei quali il tempo compare in maniera *esplicita* nelle equazioni o disequazioni che li definiscono.

Consideriamo come esempio un punto P , individuabile tramite le sue coordinate cartesiane x, y, z , vincolato ad appartenere a un piano di equazione $ax + by + cz = d$: se i coefficienti a, b, c, d sono costanti, il vincolo è fisso, se almeno uno di essi è variabile nel tempo, il vincolo sarà mobile. Più in generale se il punto è vincolato a stare su una superficie fissa, rappresentabile in coordinate cartesiane, il vincolo sarà esprimibile con una equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$, se invece è vincolato a stare su una superficie mobile, sempre rappresentabile in coordinate cartesiane, il vincolo sarà esprimibile con una equazione del tipo $f(x, y, z, t) = 0$.

È molto importante distinguere la dipendenza esplicita dal tempo dalla dipendenza implicita: è chiaro che durante il moto del punto i suoi parametri variano nel tempo. Quello che però qualifica un vincolo come mobile non è ovviamente questa dipendenza implicita dal tempo, ma solo la dipendenza esplicita dal tempo dell'equazione che esprime il vincolo.

3.2. Il vincolo di rigidità e gli angoli di Eulero

Il vincolo di rigidità gioca un ruolo essenziale in questo corso e in generale nelle applicazioni. Per lo studio del moto di un corpo sottoposto al vincolo interno di rigidità (*corpo rigido* o, brevemente, *rigido*) occorre in sostanza studiare il moto di una terna di riferimento, detta *solidale*, $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ rispetto alla terna di riferimento fissa, $\Sigma(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Per determinare la posizione di $\mathcal{S}$ rispetto a Σ occorre innanzitutto individuare, per esempio mediante le sue tre coordinate cartesiane, la posizione di O ; successivamente occorrerà determinare l'orientazione della terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ rispetto alla $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Tra le scelte più comode e più comuni per fare questo rientra quella degli *angoli di Eulero*. Per la loro individuazione possiamo supporre $\Omega \equiv O$.

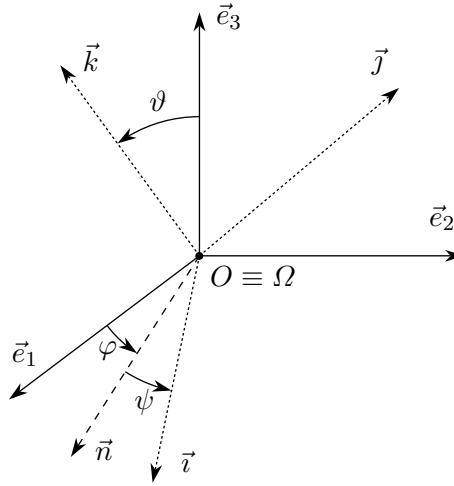


Figura 3.1. Angoli di Eulero

Cominciamo ad indicare con ϑ l'angolo, compreso tra 0 e π , tra $\vec{e}_3$ e $\vec{k}$, angolo che chiameremo *angolo di nutazione*. Il piano di $\vec{e}_3$ e $\vec{k}$ (a cui appartiene l'angolo di nutazione) prende anche il nome di *piano meridiano*. Se $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$, i piani $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (detto *piano dell'eclittica*) e $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (detto *piano equatoriale*) coincidono e l'angolo tra $\vec{e}_1$ e $\vec{i}$ permette di determinare la posizione della terna solidale. Altrimenti consideriamo l'intersezione dei due piani detti e indichiamola con n (*linea dei nodi*), orientandola definendone il versore mediante $\vec{n} = \vec{e}_3 \wedge \vec{k}$. Consideriamo poi l'angolo φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) formato da $\vec{e}_1$ ed $\vec{n}$, che chiameremo *angolo di precessione*, e l'angolo ψ ($0 \leq \psi < 2\pi$) formato da $\vec{n}$ e $\vec{i}$, che chiameremo *angolo di rotazione propria*.

I tre angoli ϑ , φ , ψ di nutazione, precessione e rotazione propria prendono il nome di angoli di Eulero e individuano univocamente l'orientazione della terna solidale (e quindi del rigido) rispetto alla terna fissa. Segnaliamo che i nomi degli angoli e dei piani intervenuti nella introduzione degli angoli di Eulero hanno origini astronomiche evidenti.

3.3. Rappresentazione analitica dei vincoli

Gli esempi proposti rendono evidente che nel caso di un sistema particellare (punti materiali) o nel caso di un sistema di corpi continui costituiti da uno o più rigidi, occorrono 3 parametri per individuare la posizione di ogni punto e 6 parametri per individuare la posizione di ogni corpo rigido: in totale un numero r di parametri, che possiamo indicare con $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$.

Ciò significa che se P è il generico punto del sistema, la sua posizione può essere espressa in funzione degli r parametri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ ed eventualmente, anche se non rientra tra le situazioni che noi considereremo, può dipendere esplicitamente dal tempo. Scriveremo brevemente:

$$(3.1) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, t).$$

Un vincolo può essere pensato sempre come un'equazione o una disequazione coinvolgente questi parametri ed eventualmente le loro derivate prime. In linea teorica si potrebbero anche considerare situazioni in cui esistono equazioni (o disequazioni) coinvolgenti anche le derivate di ordine superiore, ma una tale situazione rappresenterebbe un modello di sistema materiale non concretamente realizzabile e quindi (almeno per ora!) privo di interesse. Un vincolo di posizione (olonomo) è costituito da equazioni o disequazioni nei parametri, un vincolo di mobilità (anolonomo) è costituito da equazioni (o disequazioni) coinvolgenti anche le derivate (prime) dei parametri.

Ci occuperemo in questo corso in maniera quasi esclusiva di vincoli olonomi e bilateri: le condizioni imposte dai vincoli potranno dunque essere espresse mediante un certo numero, ν , di equazioni nei parametri ed eventualmente nel tempo (se i vincoli sono mobili):

$$(3.2) \quad \begin{cases} f_1(\xi, \xi_2, \dots, \xi_r, t) = 0 \\ f_2(\xi, \xi_2, \dots, \xi_r, t) = 0 \\ \dots \\ f_\nu(\xi, \xi_2, \dots, \xi_r, t) = 0 \end{cases}$$

Le stesse equazioni (3.2) potranno rappresentare anche situazioni di vincoli unilateri in posizione di confine.

Per evitare situazioni “patologiche” richiederemo che i vincoli soddisfino le seguenti due condizioni:

1. *compatibilità*: deve esistere almeno una configurazione possibile;
2. *indipendenza*: il rango della matrice Jacobiana

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_r} \end{pmatrix}$$

deve essere massimo.

Per esempio se un punto è vincolato ad appartenere a due piani, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, occorrerà che

1. i due piani non siano paralleli (compatibilità);
2. i due piani non siano coincidenti (altrimenti una delle due equazioni può essere eliminata e si tratterebbe di un solo vincolo anziché due).

3.4. Coordinate lagrangiane

Il numero ν di vincoli compatibili e indipendenti si chiama abitualmente *grado di vincolo*. Se $\nu = 1$ si parla di *vincolo semplice*, se $\nu = 2$ di *vincolo doppio*, e così via.

Il numero

$$(3.4) \quad g.l. = N = \max\{0, r - \nu\}$$

si chiama *grado di libertà* del sistema o anche numero dei gradi di libertà del sistema.

In sostanza un vincolo è semplice se riduce di uno i gradi di libertà, doppio se li riduce di due, e così via.

Useremo la seguente nomenclatura:

$r > \nu$ ($g.l. > 0$): sistema *ipostatico* o *labile*;

$r = \nu$ ($g.l. = 0$): sistema *isostatico*;

$r < \nu$ ($g.l. = 0$): sistema *iperstatico* (uno o più dei vincoli presenti può essere eliminato senza che il sistema diventi labile).

È chiaro che nello studio del moto di un sistema ha interesse il caso ipostatico, in cui i vincoli consentono al sistema infinite posizioni per le quali esso può passare con un movimento continuo, mentre nei problemi di statica sono interessanti (anzi spesso di notevole interesse) anche i sistemi iso o iperstatici.

Considerando il caso dei sistemi ipostatici, le (3.2) permettono, in generale, di ricavare ν parametri in funzione dei restanti $r - \nu$, oppure di esprimere tutti i parametri in funzione di $N = r - \nu$ parametri indipendenti, che indicheremo con $q_1, q_2, \dots, q_N$ e che chiameremo *coordinate lagrangiane* o *libere*.

La posizione del generico punto P del sistema può essere espressa solo in termini di queste coordinate libere:

$$(3.5) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1, q_2, \dots, q_N, t),$$

dove il tempo compare esplicitamente solo in presenza di vincoli mobili.

Nel caso dei sistemi iso o iperstatici, esiste una sola configurazione consentita e non è necessario alcun parametro libero per individuare la posizione del generico punto del sistema.

3.5. Esempi

Nelle applicazioni più comuni spesso la scelta dei parametri lagrangiani si può fare senza risolvere esplicitamente il sistema di equazioni che definiscono i vincoli, esaminando attentamente le proprietà del sistema meccanico in esame. Si noti comunque che la scelta di quali coordinate usare è largamente arbitraria e spesso una scelta al posto di un'altra può influire in maniera determinante sulla trattazione di un problema. Per esempio nel caso di un punto vincolato a stare in piano, scelto l'asse z perpendicolare al piano, si possono usare come coordinate libere le coordinate cartesiane o quelle polari ed è evidente

la semplificazione che si ha nella trattazione dei moti circolari con l'uso delle coordinate polari al posto delle cartesiane.

Proponiamo nel seguito alcuni esempi di possibili scelte, con particolare riguardo al caso di corpi rigidi in circostanze di interesse applicativo.

Punto vincolato su una curva piana di equazione cartesiana $f(x, y) = 0$

Si può scegliere come coordinata libera una delle due coordinate cartesiane, mentre l'altra è dipendente dalla prima attraverso l'equazione della curva (anche se ci possono essere difficoltà nell'esplicitare in generale una delle due coordinate in funzione dell'altra). A volte si possono operare scelte alternative, come quella di usare una opportuna parametrizzazione della curva (magari usando l'ascissa curvilinea). Se per esempio la curva è data da $x^2 + y^2 = t^2$ (circonferenza di centro l'origine e raggio t variabile nel tempo), la scelta più conveniente è quella di passare in coordinate polari: $x = t \cos \vartheta$, $y = t \sin \vartheta$ e usare ϑ come parametro libero (sistema a un solo grado di libertà).

Corpo rigido piano (lamina), vincolato a muoversi nel suo piano

È sufficiente conoscere la posizione di un suo punto, Ω e un parametro (per esempio un angolo), per fissare la sua orientazione attorno ad Ω .

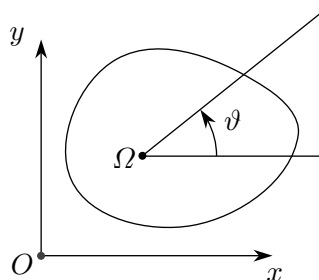


Figura 3.2. *Lamina rigida mobile in un piano*

Il sistema in questione ha tre gradi di libertà e, con la scelta indicata, le coordinate lagrangiane sono:

$$q_1 = x_\Omega, \quad q_2 = y_\Omega, \quad q_3 = \vartheta.$$

Un caso comune nelle applicazioni è quello in cui il rigido in questione si riduce ad un'asta di lunghezza l .

“Pendolo ad asta rigida”

Un sistema come questo ha due gradi di libertà. La figura 3.3 illustra una possibile scelta dei due parametri lagrangiani atti a individuare la posizione dell'asta.

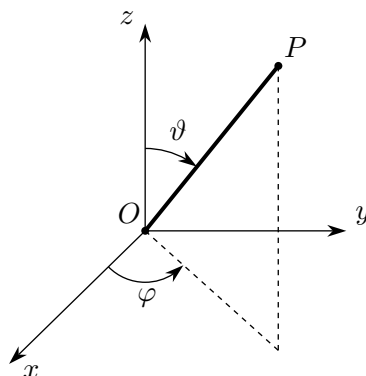


Figura 3.3. Pendolo ad asta rigida

3.5.1. Aste rigide in moto piano variamente vincolate

Un'asta rigida in moto piano ha tre gradi di libertà, come visto nel primo degli esempi riportati (figura 3.2). Nel seguito indicheremo sempre con A e B gli estremi dell'asta e considereremo varie situazioni di vincoli per l'asta stessa. Nel caso di asta libera nel piano essa ha, come detto, tre gradi di libertà. Per chiarezza supponiamo di scegliere come coordinate

$$q_1 = x_B, \quad q_2 = y_B, \quad q_3 = \vartheta.$$

Ogni ulteriore vincolo imposto all'asta si potrà tradurre in una diminuzione dei parametri lagrangiani.

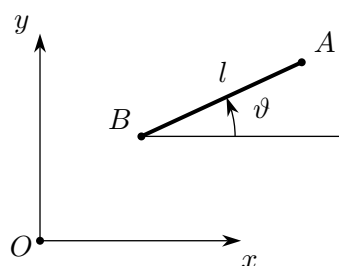


Figura 3.4. Asta rigida mobile in un piano

Asta con vincolo a carrello

Come primo esempio supponiamo che uno dei due estremi, per esempio A , sia vincolato ad appartenere a una retta r , di equazione $ax + by + c = 0$ (diremo questo tipo di vincolo “vincolo a carrello”).

Il vincolo di appartenenza si può scrivere $ax_A + by_A + c = 0$. Essendo

$$x_A = x_B + l \cos \vartheta, \quad y_A = y_B + l \sin \vartheta,$$

si ricava $a(x_B + l \cos \vartheta) + b(y_B + l \sin \vartheta) + c = 0$. Poiché uno dei due coefficienti a e b deve essere diverso da zero, da qui si può ricavare x_B o y_B , supponiamo y_B . Allora x_B e ϑ saranno libere e il sistema ha 2 gradi di libertà (ipostatico). Se il punto A dovesse stare

sopra (o sotto) la retta, avrei invece un vincolo unilatero e dovrei distinguere le posizioni ordinarie (3 gradi di libertà) da quelle di confine (2 gradi di libertà). Il vincolo in questione è un vincolo semplice.

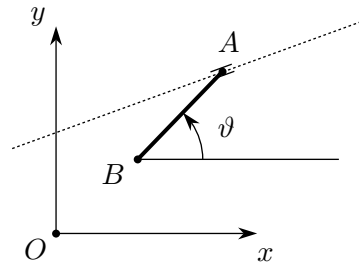


Figura 3.5. *Asta rigida con vincolo a carrello*

Asta con due vincoli a carrello

Come secondo esempio supponiamo che entrambi gli estremi A e B siano vincolati ad appartenere a due rette, per esempio i due assi cartesiani (caso della “scala appoggiata”). Scegliendo sempre gli stessi parametri, le equazioni di vincolo si possono scrivere

$$\begin{aligned}x_B &= -l \cos \vartheta \Rightarrow x_B + l \cos \vartheta = 0 \\y_B &= 0,\end{aligned}$$

e la matrice Jacobiana è

$$\begin{matrix} & x_B & y_B & \vartheta \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -l \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

che ha palesemente rango 2, cioè massimo. Il sistema ha un solo grado di libertà (sistema ipostatico, vincolo doppio).

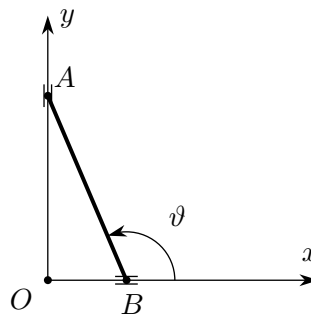


Figura 3.6. *Scala appoggiata*

Asta con un vincolo a cerniera fissa

Se uno dei due estremi dell'asta è vincolato a un punto fisso (vincolo a *cerniera fissa*), il sistema ha un solo grado di libertà ed è ancora ipostatico (vincolo doppio).

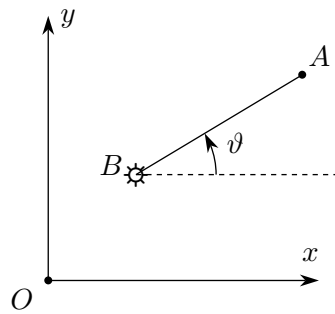


Figura 3.7. *Asta rigida con cerniera fissa*

Questo vincolo può anche essere visto come la sovrapposizione di due vincoli a carrello, per esempio su due rette perpendicolari, rendendo ancora più evidente il significato di vincolo doppio, come sovrapposizione di due vincoli semplici.

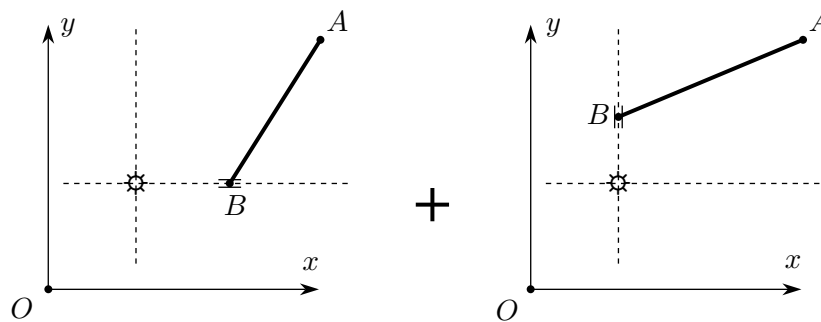


Figura 3.8. *Vincolo doppio come sovrapposizione di due vincoli semplici*

Asta con incastro

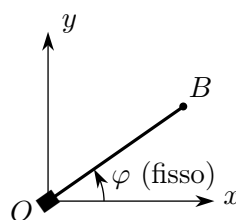
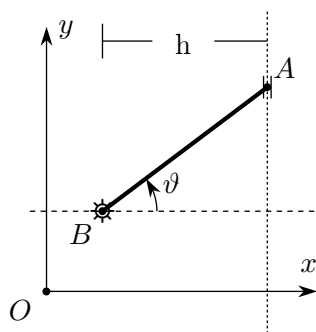


Figura 3.9. *Vincolo ad incastro*

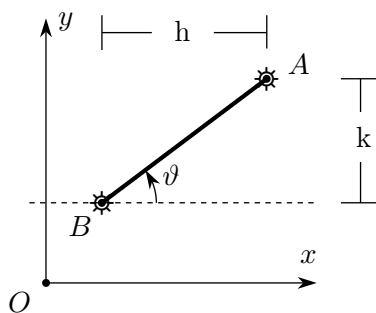
Si tratta di un sistema con 0 gradi di libertà (isostatico). Si può vedere come la sovrapposizione di 3 vincoli semplici (vincolo triplo).

Asta con cerniera fissa e carrello**Figura 3.10.** *Asta con cerniera fissa e carrello*

I vincoli possono essere scritti analiticamente:

$$x_B = a, \quad y_B = b, \quad l \cos \vartheta - h = 0.$$

Per la compatibilità si richiede che $h \leq l$. Il sistema ha 0 gradi di libertà ed è isostatico.

Asta con due cerniere**Figura 3.11.** *Asta con due cerniere*

I vincoli possono essere scritti analiticamente:

$$x_B = a, \quad y_B = b, \quad l \cos \vartheta - h = 0, \quad l \sin \vartheta - k = 0.$$

Si tratta di un sistema iperstatico: se tolgo uno dei quattro vincoli il sistema non diventa labile.

3.5.2. Coppie di aste collegate, in un piano, mediante cerniere

Trattiamo alcune situazioni di particolare interesse applicativo e concernenti coppie di aste rigide variamente collegate tra di loro con cerniere e mobili in un piano.

Siano dunque AB e $A'B'$ due aste, di lunghezze rispettive l ed l' , per ciascuna delle quali abbiamo scelto i parametri lagrangiani più volte utilizzati. In totale si tratta di un sistema a 6 gradi di libertà:

$$x_B, y_B, \vartheta, x_{B'}, y_{B'}, \varphi.$$

Supponiamo ora che le due aste siano incernierate, con una cerniera interna che collega i punti B e B' .

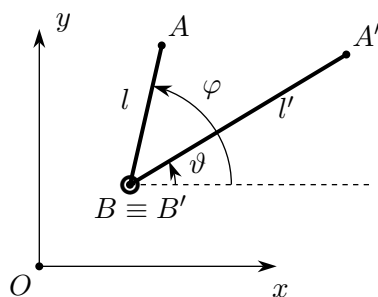


Figura 3.12. Due aste incernierate

I vincoli si scrivono analiticamente:

$$x_B = x_{B'}, \quad y_B = y_{B'}.$$

La matrice Jacobiana è:

$$\begin{matrix} x_B & y_B & \vartheta & x_{B'} & y_{B'} & \varphi \\ f_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

palesamente di rango 2. Il sistema ha quattro gradi di libertà e le coordinate lagrangiane potrebbero essere: $x_B, y_B, \vartheta, \varphi$.

Come esercizio si possono trattare i seguenti casi:

- bpendolo;
- sistema biella-manovella;
- arco a tre cerniere.

Si scrivano, servendosi dei parametri più volte utilizzati, le equazioni dei vincoli e la matrice jacobiana.

Si determini il numero dei gradi di libertà e si precisi quali coordinate lagrangiane conviene scegliere.

Nelle figure che seguono $\odot$ indica una cerniera fissa, $\bullet$ indica una cerniera interna, mobile, convenzione del resto già adottata nelle figure precedenti.

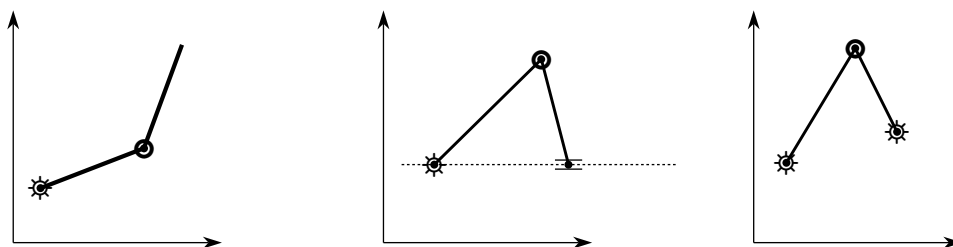


Figura 3.13. Bpendolo, sistema biella-manovella, arco a tre cerniere

4. Cinematica dei rigidi

4.1. Generalità

Lo studio della cinematica dei sistemi rigidi può essere ritenuto equivalente, come già osservato, a quello dello studio di una terna di riferimento $\mathcal{S}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, detta solidale al rigido, rispetto a una terna di riferimento $\Sigma(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, detta terna fissa.

Segnaliamo che è fondamentale, in quanto segue, il fatto che ci mettiamo nel modello della *Meccanica Classica*, cioè assumiamo che le misure di lunghezze e intervalli di tempo siano indipendenti dall'osservatore.

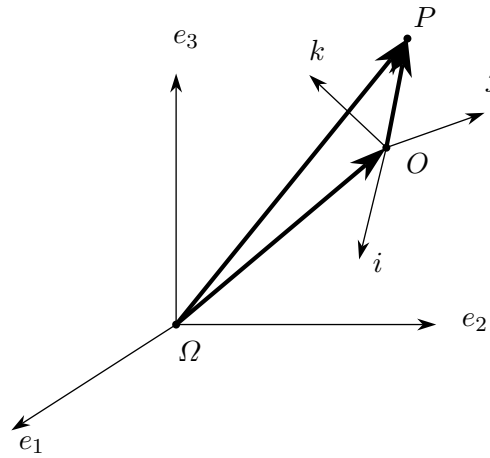


Figura 4.1. Terna fissa e terna solidale

P è un punto qualunque del rigido e t indica il tempo. In realtà in cinematica t può essere un qualunque parametro atto ad individuare la posizione del generico punto P , ma, in vista delle applicazioni alla dinamica, possiamo tranquillamente identificarlo con il tempo fisico.

Indichiamo, come è tradizione, con $\vec{X}$ il vettore posizione di P rispetto a $\mathcal{S}$, cioè al rigido, $\vec{X} = \vec{OP}$, notando che le sue componenti rispetto a $\mathcal{S}$ sono costanti. Denotiamo poi con $\vec{x}$ il vettore posizione di P rispetto a Σ , $\vec{x} = \vec{\Omega P}$, e con $\vec{x}_O$ il vettore posizione di O sempre rispetto a Σ , $\vec{x}_O = \vec{\Omega O}$. In sostanza il vettore $\vec{X}$ indica il punto materiale scelto nel rigido, il vettore $\vec{x}$ indica il punto spaziale, posizione o piazzamento di $\vec{X}$ in un istante t .

Un *piazzamento*, o *configurazione*, del rigido è una funzione

$$\sigma: \vec{X} \mapsto \vec{x},$$

che sia un'isometria, ovvero che mantenga le distanze tra i punti.

Un *moto* del rigido è una famiglia di piazzamenti dipendenti da un parametro t (che per noi sarà sempre il tempo).

Si possono fare considerazioni analoghe anche per corpi continui non rigidi. In questo caso occorrerà, per individuare i punti del corpo, fissare una particolare configurazione, detta iniziale, e indicare con $\vec{X}$ il vettore posizione di un generico punto P rispetto a un sistema $\mathcal{S}$ “solidale” al corpo in questa specifica configurazione. Naturalmente in questo caso i piazzamenti non saranno più isometrie, ma generiche trasformazioni di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ (configurazione iniziale) in $\mathbb{R}^3$, con opportune condizioni di regolarità che qui non occorre precisare.

Tornando ai sistemi rigidi è opportuno scrivere il vettore $\vec{X}$ nelle sue componenti rispetto a $\mathcal{S}$ (che sono costanti), mentre i vettori $\vec{x}$ e $\vec{x}_O$ nelle loro componenti rispetto a Σ . Nel futuro useremo sempre queste convenzioni.

4.2. La formula di Poisson

Indichiamo con R la matrice di trasformazione di coordinate tra $\mathcal{S}$ e Σ . Come è noto, trattandosi di sistemi ortogonali, R è ortogonale, cioè $R^{-1} = R^T$.

Si può allora scrivere

$$(4.1) \quad \vec{x} = \vec{x}_O + R\vec{X}$$

o, meglio,

$$(4.2) \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_O(t) + R(t)\vec{X},$$

evidenziando il fatto che $\vec{x}$, $\vec{x}_O$ ed R dipendono da t , mentre $\vec{X}$ no. Per derivazione rispetto al tempo si ha

$$(4.3) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}_O}{dt} + \frac{dR}{dt}\vec{X}.$$

D'altro canto

$$(4.4) \quad R\vec{X} = \vec{x} - \vec{x}_O \Rightarrow \vec{X} = R^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_O) = R^T(\vec{x} - \vec{x}_O).$$

Se ne deduce che

$$(4.5) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}_O}{dt} + \frac{dR}{dt}R^T(\vec{x} - \vec{x}_O) = \frac{d\vec{x}_O}{dt} + A(\vec{x} - \vec{x}_O),$$

ove abbiamo posto

$$(4.6) \quad A = \frac{dR}{dt}R^T.$$

Lemma 4.1. *La matrice A è antisimmetrica, ovvero $A + A^T = 0$ (per ogni t).*

Dimostrazione. Usiamo, come è d'abitudine in meccanica, la scrittura $\dot{f}$ per indicare la derivata di una funzione di t , rispetto a t .

Avendosi $R^T = R^{-1}$, si ha $RR^T = I$, da cui

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0.$$

Ora $\dot{R}R^T = A$, da cui

$$\left(\dot{R}R^T\right)^T = \left(R^T\right)^T \dot{R}^T = R\dot{R}^T = A^T.$$

Ne segue subito che

$$A + A^T = 0.$$

□

Lemma 4.2. *Se A è una matrice antisimmetrica di ordine 3, esiste un unico vettore $\vec{\omega}$ (di $\mathbb{R}^3$) tale che*

$$(4.7) \quad A\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrazione. La dimostrazione che faremo è costruttiva. Se la matrice A è antisimmetrica, essa è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

si ha

$$(4.8) \quad A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ -a_{12}v_1 + a_{23}v_3 \\ -a_{13}v_1 - a_{23}v_2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo ora un $\vec{\omega}$ tale che $\vec{\omega} \wedge \vec{v} = A\vec{v}$.

$$(4.9) \quad \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2v_3 - \omega_3v_2 \\ \omega_3v_1 - \omega_1v_3 \\ \omega_1v_2 - \omega_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Da (4.8) e (4.9) si deduce subito

$$(4.10) \quad a_{12} = -\omega_3, \quad a_{13} = \omega_2, \quad a_{23} = -\omega_1,$$

e queste formule determinano univocamente $\vec{\omega}$.

□

Si noti che per la dimostrazione di questo lemma si è usato il prodotto vettoriale, operazione (per quanto ci riguarda) caratteristica di $\mathbb{R}^3$, e dunque il lemma vale *solo* per le matrici 3×3 .

Possiamo ora riscrivere la formula (4.5) nella forma seguente:

$$(4.11) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}_O}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_O).$$

Se, come a noi interesserà, t è il tempo, si può riscrivere la formula (4.11) usando le velocità:

$$(4.12) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}.$$

Questa formula è detta *Formula di Poisson* o *Formula fondamentale della cinematica di rigidi* ed è la formula più importante per lo studio della meccanica dei corpi rigidi.

Essa si può leggere dicendo che *la velocità di un qualunque punto P di un rigido è nota non appena si conoscono la velocità di un qualsiasi altro punto prefissato del rigido e il vettore $\vec{\omega}$.*

Il vettore $\vec{\omega}$, per un motivo che vedremo fra poco, è detto *velocità angolare*.

Una conseguenza immediata della formula di Poisson è la seguente: se P e Q sono due punti qualsiasi di un rigido si ha

$$(4.13) \quad \frac{d\vec{QP}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge \vec{QP},$$

formula che riesce utile in molte circostanze.

Il campo delle velocità di un rigido è equiproiettivo

Una proprietà molto importante relativa ai rigidi, proprietà che discende immediatamente dalla formula di Poisson, è espressa dal seguente

Teorema 4.3. *Condizione necessaria e sufficiente perché il moto di un sistema di punti sia rigido è che, dati due qualunque punti P e Q del sistema, le componenti delle velocità $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ secondo la direzione di PQ siano uguali.*

Dimostrazione.

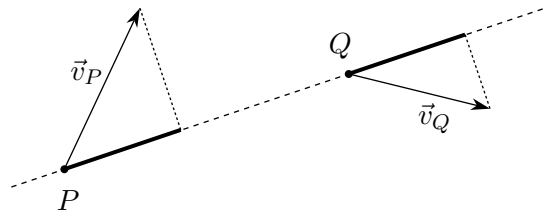


Figura 4.2. Velocità di due punti di un rigido

Se il moto è rigido, scegliendo Q come origine della terna solidale, si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q).$$

Ne segue subito, ricordando che il prodotto misto è nullo se due dei tre vettori coincidono, che

$$\vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q).$$

Se viceversa $\vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q)$, consideriamo la distanza dei due punti P e Q , che indichiamo con l . Si ha

$$l^2 = \|P - Q\|^2 = (P - Q) \cdot (P - Q).$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{dl^2}{dt} = 2(\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \cdot (P - Q) = 0,$$

per l'ipotesi. Ma se la distanza di due punti qualunque rimane costante, il corpo è rigido per definizione.

Questa proprietà si usa richiamare dicendo che il campo delle velocità di un rigido è equiproiettivo. $\square$

Una ulteriore conseguenza della formula di Poisson è il fatto che, se P e Q sono due punti qualsiasi di un rigido,

$$(4.14) \quad \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega},$$

cioè le velocità di due punti qualunque hanno uguali componenti secondo la direzione orientata della velocità angolare. Poiché, esplicitando i prodotti scalari che compaiono in (4.14) si ottengono dei trinomi, l'espressione invariante $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$ si chiama *trinomio invariante* o *invariante scalare*.

4.3. Proprietà della velocità angolare

La velocità angolare $\vec{\omega}$ prima introdotta è strettamente legata al moto della terna solidale. Infatti si ha il seguente

Teorema 4.4. *La velocità angolare di un rigido è data da*

$$(4.15) \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\vec{i} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{j} \wedge \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{k} \wedge \frac{d\vec{k}}{dt} \right).$$

Dimostrazione. Prendiamo, nel rigido, il punto $P = O + \vec{i}$; se deriviamo rispetto al tempo otteniamo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \frac{d\vec{i}}{dt};$$

dalla formula di Poisson abbiamo inoltre $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{i}$. Se ne deduce subito che

$$(4.16) \quad \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} \text{ e, analogamente, } \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}, \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}.$$

Moltiplichiamo vettorialmente, a sinistra, queste tre uguaglianze⁽¹⁾ per $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, rispettivamente e sommiamo membro a membro, tenendo conto, vedi la formula (2.15) nella pagina 10, che

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{j} \wedge \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{k} \wedge \frac{d\vec{k}}{dt} &= \vec{i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + \vec{j} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + \vec{k} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k}) = \\ &= (\vec{i} \cdot \vec{i})\vec{\omega} - (\vec{i} \cdot \vec{\omega})\vec{i} + (\vec{j} \cdot \vec{j})\vec{\omega} - (\vec{j} \cdot \vec{\omega})\vec{j} + \\ &\quad + (\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{\omega} - (\vec{k} \cdot \vec{\omega})\vec{k} = \\ &= \vec{\omega} - \omega_1 \vec{i} + \vec{\omega} - \omega_2 \vec{j} + \vec{\omega} - \omega_3 \vec{k} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = \\ &= 2\vec{\omega}, \end{aligned}$$

da cui si conclude immediatamente. $\square$

¹In alcuni testi sono queste tre formule che prendono il nome di Formule di Poisson.

Come conseguenza della (4.15), si potrebbe provare, ma rinunciamo a farlo, che $\vec{\omega}$ è indipendente dalla particolare terna solidale scelta.

4.4. Moti rigidi particolari

Per capire bene il significato di $\vec{\omega}$, e in generale della formula di Poisson, consideriamo alcuni moti rigidi particolari.

Moti rigidi traslatori

Si tratta di quei moti in cui una terna solidale, e quindi tutte, mantiene orientamento invariabile, cioè in cui il moto trasforma rette solidali al rigido in rette ad esse parallele. Se $\mathcal{S}$ ha orientamento invariabile, dalla (4.15) si ha $\vec{\omega} = \vec{0}$ (le derivate di $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rispetto al tempo sono nulle) e quindi $\vec{v}_P = \vec{v}_O$. Se invece $\vec{\omega} = \vec{0}$, dalle formule (4.16) segue che $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ hanno derivate nulle, cioè sono costanti: la terna $\mathcal{S}$ ha orientamento invariabile. Abbiamo dunque provato il seguente

Teorema 4.5. *Un moto rigido è traslatorio se, e solo se, $\vec{\omega} = \vec{0}$.*

La matrice R della formula (4.1) nella pagina 42

$$\vec{x} = \vec{x}_O + R\vec{X},$$

è costante (addirittura è la matrice identica se si sceglie la terna solidale parallela alla terna fissa) e lo studio del moto può essere ridotto a quello di un solo punto del corpo.

Moti rigidi rototraslatori

Si tratta di quei moti rigidi in cui una retta a , solidale al rigido, mantiene direzione invariabile (e quindi ciò succede per ogni retta parallela ad a). In questo caso scegliamo la terna solidale in modo che $\vec{k}$ sia parallelo ad a . Allora $\vec{k}$ è costante e quindi

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0},$$

ma allora $\vec{\omega} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ e quindi

- o $\vec{\omega} = \vec{0}$ (moto traslatorio),
- oppure $\vec{\omega} \parallel \vec{k}$.

Escluso il primo caso (che abbiamo già considerato) possiamo dire che $\vec{\omega}$ è parallela a $\vec{k}$ e quindi che $\vec{\omega}$ ha direzione invariabile nel tempo. Vale anche il viceversa: se $\vec{\omega}$ ha direzione invariabile, il moto rigido è rototraslatorio. Se infatti $\vec{\omega}_1$ è il versore (che risulta essere costante) di $\vec{\omega}$, si ha

$$\frac{d(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \cdot \vec{i} + \vec{\omega}_1 \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{i} = 0,$$

il che indica che $\vec{\omega}_1$ ha componente costante rispetto a $\vec{i}$. In modo analogo si prova che $\vec{\omega}_1$ ha componenti costanti rispetto a $\vec{j}$ e $\vec{k}$, ovvero che $\vec{\omega}_1$ è costante anche rispetto alla terna solidale. Se allora P e Q sono due punti del rigido su una retta r parallela a $\vec{\omega}$, tenendo anche conto di (4.13), si ha

$$\frac{d\vec{QP}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{QP} = \vec{0},$$

il che implica l'invariabilità della direzione di r . Possiamo dunque concludere con il

Teorema 4.6. *Un moto rigido è rototraslatorio se e solo se la sua velocità angolare ha direzione costante.*

Vediamo come si scrive esplicitamente, in questo caso, la matrice⁽²⁾ R che compare nella formula (4.1) della pagina 42

$$\vec{x} = \vec{x}_O + R\vec{X}.$$

Per fare ciò osserviamo che la matrice R stessa è unicamente determinata dall'orientazione della terna solidale rispetto alla terna fissa. Per individuare questa orientazione possiamo supporre $O \equiv \Omega$, i vettori $\vec{e}_3$ e $\vec{k}$ coincidenti e rappresentare graficamente solo il piano di $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{i}$, $\vec{j}$. L'orientazione della terna solidale sarà determinata solo dall'angolo φ tra i versori $\vec{e}_1$ e $\vec{i}$ (oppure $\vec{e}_2$ e $\vec{j}$), angolo che supponiamo orientato in senso antiorario. Tutto questo è in accordo con il fatto che l'angolo di nutazione (vedi la figura 3.1 nella pagina 31) è 0.

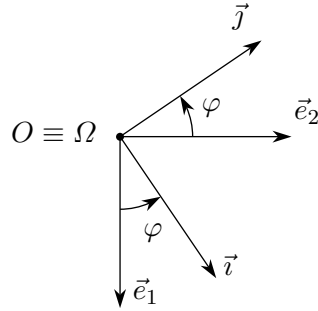


Figura 4.3. *Moti rigidi rototraslatori e orientazione delle due terne*

Si ha facilmente

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A = \dot{R}R^T = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo costituisce intanto una verifica del fatto che A è una matrice antisimmetrica e poi fornisce, vedi la formula (4.10) nella pagina 43, la velocità angolare in questo particolare moto:

$$(4.17) \quad \vec{\omega} = (0, 0, \dot{\varphi}), \quad \text{ovvero} \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}.$$

In sostanza si può concludere che in un moto rigido rototraslatorio la velocità angolare è la derivata di un angolo, esattamente come succede nel moto circolare di un punto.

Dunque *in ogni moto rototraslatorio*

$$(4.18) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}.$$

²Ricordiamo che gli elementi della matrice R di rotazione si ottengono prendendo, sulle colonne, le componenti della base “ruotata” ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) rispetto alla base “originaria” ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$).

Notiamo che si avrebbe $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\vec{k}$ se l'angolo φ fosse scelto con orientazione “oraria”.

Moti rigidi rotatori

Sono quei moti rigidi in cui esiste una retta a solidale al rigido, fissa, cioè i cui punti hanno velocità nulla. Si tratta, evidentemente, di un caso particolare di moto rototraslatorio. In questo caso si può ovviamente scegliere scegliamo O sull'asse a (asse di rotazione) e addirittura coincidente con Ω . Scegliamo inoltre $\vec{e}_3 \equiv \vec{k}$ paralleli all'asse a .

La formula (4.1) della pagina 42 si semplifica in

$$\vec{x} = R\vec{X}.$$

Per quanto riguarda la velocità angolare vale naturalmente, a maggior ragione, la formula (4.18).

Moti rigidi elicoidali

Sono quei moti rigidi in cui i punti di una retta, a , hanno velocità parallela alla retta stessa (la retta “scorre su se stessa”). La retta in questione si chiama *asse del moto elicoidale* e si tratta ovviamente ancora di un caso particolare di moto rototraslatorio. Se scegliamo O sull'asse del moto elicoidale, nella formula di Poisson $\vec{v}_O$ e $\vec{\omega}$ sono paralleli ad a e di direzione invariabile. Anzi se durante tutto il moto esiste un punto O tale che $\vec{v}_O$ e $\vec{\omega}$ risultino paralleli e di direzione invariabile, il moto risulta senz'altro elicoidale e l'asse del moto è la retta per O , parallela a $\vec{\omega}$. Infatti il moto è intanto rototraslatorio per l'invariabilità della direzione di $\vec{\omega}$; inoltre i punti P della parallela a $\vec{\omega}$ per O hanno velocità data da

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{v}_O.$$

Dunque

Teorema 4.7. *Un moto rigido è elicoidale se e soltanto se esiste un punto O tale che $\vec{v}_O$ e $\vec{\omega}$ risultino paralleli e di direzione invariabile.*

Per quanto riguarda la velocità angolare vale naturalmente ancora la formula (4.18).

Moti rigidi con un punto fisso, o moti polari

Sono quei moti in cui un punto del rigido ha, costantemente, velocità nulla⁽³⁾. Conviene, naturalmente, scegliere $\Omega \equiv O$: per individuare la posizione del rigido bastano solo i tre angoli di Eulero (3 gradi di libertà).

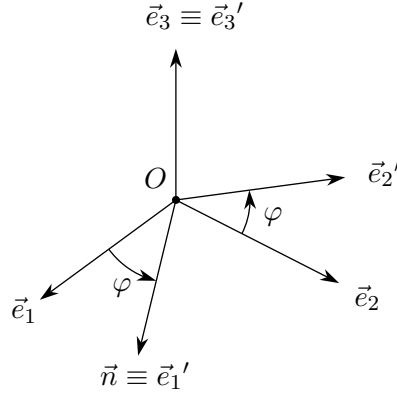
Vogliamo vedere come si può scrivere esplicitamente la matrice R in questo caso, segnalando che, ovviamente, la determinazione effettuata vale in generale, in quanto la matrice R , come più volte ricordato, è determinata solo dall'orientazione della terna solidale rispetto alla terna fissa.

Per la determinazione della matrice, consideriamo la trasformazione da Σ a $\mathcal{S}$ come la composizione di tre successive semplici rotazioni.

1-Precessione

Si tratta di una rotazione attorno a $\vec{e}_3$ di un angolo φ (appunto angolo di precessione), in modo che $\vec{e}_1$ si sovrapponga alla linea dei nodi.

³In alcuni testi questi moti sono detti di precessione, ma riteniamo impropria questa denominazione, usata abitualmente per uno speciale moto con un punto fisso, precisamente quel moto in cui una retta f , detta *asse di figura*, passante per O e solidale al rigido, forma un angolo fisso con una retta p , detta *asse di precessione*, passante per O e fissa nello spazio ambiente.

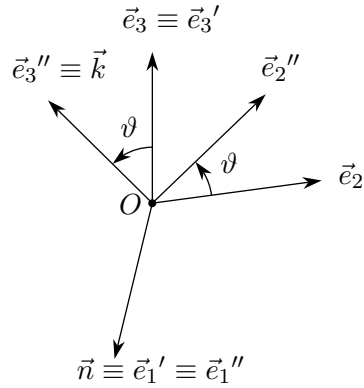
**Figura 4.4.** *Precessione*

La matrice di trasformazione, diciamola R_1 è la stessa già considerata per i moti di rototraslazione:

$$(4.19) \quad R_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-Nutazione

Rotazione, attorno a $\vec{n}$, di un angolo ϑ (appunto angolo di nutazione), in modo che $\vec{e}_3$ si vada a sovrapporre a $\vec{k}$.

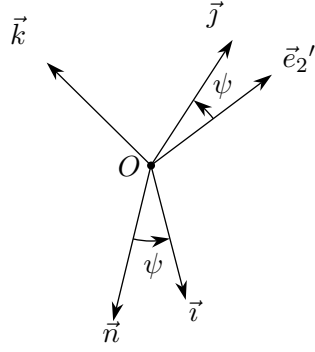
**Figura 4.5.** *Nutazione*

La matrice di trasformazione, diciamola R_2 , si ottiene facilmente con la solita regola (le sue colonne sono le componenti della base “nuova” rispetto alla “vecchia”). Si trova

$$(4.20) \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

3-Rotazione propria

Rotazione, attorno a $\vec{k}$, di un angolo ψ (appunto angolo di rotazione propria), in modo che $\vec{n}$ si vada a sovrapporre a $\vec{i}$ (e quindi $\vec{e}_2''$ a $\vec{j}$).

**Figura 4.6.** Rotazione propria

La matrice di rotazione, diciamola R_3 , si trova nel modo ormai usuale e si ottiene

$$(4.21) \quad R_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando, nell'ordine dato, le tre trasformazioni, si ottiene la matrice R come prodotto delle tre matrici $R = R_1 R_2 R_3$. Con calcoli un po' noiosi, ma utili come esercizio, si trova

$$(4.22) \quad R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Per trovare la velocità angolare si deve ora scrivere la matrice $A = \dot{R}R^T$ e poi usare la già vista proprietà che lega $\vec{\omega}$ agli elementi di questa matrice. Si tratta di un lungo e noioso calcolo, che però non presenta nessuna difficoltà teorica. Si ottiene:

$$(4.23) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) & \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta & 0 & -(\dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi) \\ -(\dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi) & \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

È anche interessante osservare che la scomposizione della generica trasformazione R in tre rotazioni “elementari”, implica che la velocità angolare si potrà scrivere come

$$(4.24) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 + \dot{\vartheta} \vec{n} + \dot{\psi} \vec{k}.$$

Naturalmente questa formula non può essere usata direttamente, perché nei problemi abbiamo la necessità di esprimere i vettori o rispetto a $\mathcal{S}$ o rispetto a Σ .

Segnaliamo anche che, abitualmente, si preferisce scrivere $\vec{\omega}$ nelle sue componenti rispetto a $\mathcal{S}$, componenti che, tradizionalmente, vengono indicate con p , q , r :

$$(4.25) \quad \vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}.$$

4.5. Punti di vista lagrangiano ed euleriano

Nello studio del moto di un rigido (ma anche di un continuo non rigido), si possono adottare due diverse impostazioni.

1. Se si considerano le varie grandezze fisiche (per quanto ci interessa qui, la velocità) in funzione dei punti del corpo in moto, si adotta il cosiddetto punto di vista *lagrangiano* o molecolare.
2. Se si considerano le stesse grandezze in funzione dei punti dello spazio, si adotta il cosiddetto punto di vista *euleriano*. In questo caso la formula di Poisson definisce un *campo di velocità*, cioè una funzione che associa, in ogni istante, a ogni punto dello spazio una velocità, e precisamente la velocità di quel punto materiale che, nell'istante considerato, si trova a passare per quel punto dello spazio. Questa descrizione è particolarmente utile nel caso del moto dei fluidi.

La distribuzione delle velocità del rigido in un dato istante si chiama *atto di moto*.

Si possono usare per l'atto di moto gli stessi nomi già usati per i moti: traslatorio, rotatorio, elicoidale (come vedremo non ci sono, per i corpi rigidi, atti di moto diversi da questi).

È bene ricordare che un atto di moto può essere, per esempio, rotatorio, senza che il moto sia rotatorio: nell'atto di moto conta soltanto la distribuzione delle velocità nello spazio in un dato istante. Per esempio è facile rendersi conto che se consideriamo il caso particolare di un moto con punto fisso, gli atti di moto sono tutti rotatori, ma il moto ovviamente non è rotatorio. Ciò significa che, in ogni istante, il moto appare come una rotazione attorno a un asse, ma tale asse non è sempre lo stesso.

Per l'importanza che hanno nel seguito occupiamoci in particolare degli atti di moto elicoidali. In base alla definizione di moto elicoidale, dato il campo delle velocità di un rigido, in un dato istante deve esistere un punto A tale che, per ogni punto P , si abbia $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P - A)$, con $\vec{v}_A$ e $\vec{\omega}$ paralleli. Se teniamo conto che in un moto rigido la componente della velocità di un punto nella direzione di $\vec{\omega}$ non dipende dal punto e che in questo caso $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$, ne deduciamo che $\vec{v}_A$ è una costante, che possiamo semplicemente indicare con $\vec{\tau}$. Dunque un atto di moto rigido è elicoidale se esiste un punto A tale che il campo di velocità del rigido sia dato da

$$(4.26) \quad \vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - A), \quad \text{con} \quad \vec{\tau} \parallel \vec{\omega}.$$

È evidente che gli atti di moto traslatorio e rotatorio sono casi particolari di quello elicoidale: nel primo basterà che $\vec{\omega} = \vec{0}$, nel secondo che $\vec{\tau} = \vec{0}$. In questi casi parleremo di atto di moto elicoidale degenere.

4.6. Il teorema di Mozzi

Il risultato fondamentale per quanto riguarda gli atti di moto è il seguente

Teorema 4.8 (Teorema di Mozzi⁽⁴⁾). *Ogni atto di moto rigido è elicoidale, cioè si può scomporre in modo unico in un campo di velocità traslatorio uniforme e in un campo di velocità rotatorio attorno all'asse del moto elicoidale, detto asse di Mozzi:*

$$(4.27) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_{P,\parallel} + \vec{v}_{P,\perp} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - A), \quad \text{con} \quad A \in \text{asse di Mozzi}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede in modo formalmente identico a quella seguita per determinare l'asse centrale di un sistema di vettori applicati. In sostanza allora la

⁴G.Mozzi, 1730 – 1813

determinazione dell'asse centrale era basata sostanzialmente sulla formula di trasporto

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge (O' - O),$$

e, a parte l'ovvio diverso significato dei vettori che vi compaiono, questa formula è simile alla formula di Poisson

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P - A).$$

Se per caso l'atto di moto è traslatorio, allora in quell'istante $\vec{v}_P = \vec{v}_A = \text{cost} = \vec{\tau}$, e non c'è nulla da provare; se invece l'atto di moto è rotatorio, allora esiste un punto A tale che $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - A)$ e ancora non c'è nulla da provare.

Supponiamo dunque che l'atto di moto non sia né traslatorio né rotatorio e consideriamo un punto P qualunque (P è, in questo caso, la posizione occupata da un punto del rigido nell'istante in esame). Come sappiamo, il componente di $\vec{v}_P$ nella direzione di $\vec{\omega}$ è costante (come era costante il componente di $\vec{M}_O$ nella direzione di $\vec{R}$ quando trattavamo i sistemi di vettori applicati). Indichiamo questo componente con $\vec{\tau}$. Con $\vec{v}_{P,\perp}$ indichiamo invece il componente di $\vec{v}_P$ perpendicolare alla direzione di $\vec{\omega}$. Si ha allora

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{v}_{P,\perp}.$$

I vettori $\vec{\tau}$ e $\vec{v}_{P,\perp}$ sono entrambi non nulli, altrimenti l'atto di moto sarebbe o rotatorio o traslatorio, casi che abbiamo già considerato. Applichiamo i vettori $\vec{v}_P$, $\vec{\tau}$, $\vec{v}_{P,\perp}$ in P .

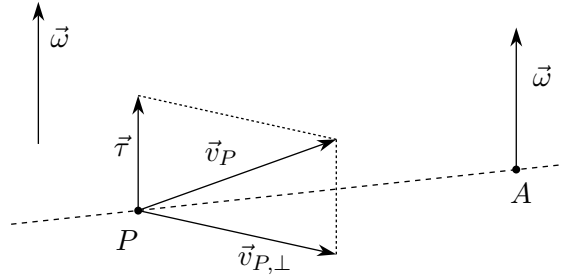


Figura 4.7. Ricerca dell'asse di Mozzi

Consideriamo poi un punto A tale che se applichiamo $\vec{\omega}$ in A , il suo momento rispetto a P sia $\vec{v}_{P,\perp}$, ovvero

$$\vec{v}_{P,\perp} = \vec{PA} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \vec{AP} = \vec{\omega} \wedge (P - A).$$

Ma allora

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - A).$$

È chiaro che A si può trovare esattamente come indicato per la costruzione della figura 2.13, nella pagina 18, e che ogni altro punto della retta a per A e parallela a $\vec{\omega}$ va bene.

Per concludere basta provare che A non dipende dalla scelta del punto P usato nella dimostrazione. Se, partendo da un punto Q diverso da P si ottiene un punto A' e si considera la retta a' per A' , parallela a $\vec{\omega}$, per la formula di Poisson si deve avere

$$(4.28) \quad \vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{\omega} \wedge (A - A').$$

Poiché $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_{A'}$ devono essere entrambi paralleli a $\vec{\omega}$ e quindi tra di loro, mentre $\vec{\omega} \wedge (A - A')$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$, si conclude che $\vec{\omega} \wedge (A - A') = \vec{0}$, ovvero che $A \equiv A'$ oppure $\vec{\omega} \parallel (A - A')$, che è come dire che A' sta su a , e che quindi le due rette a e a' coincidono. $\square$

La retta a dunque esiste ed è unica, a meno che l'atto di moto non sia traslatorio e, come già detto, si chiama *asse di moto* o *asse di Mozzi*, o ancora *asse istantaneo di moto*.

Si noti (anche qui in analogia con l'asse centrale di un sistema di vettori applicati) che l'asse di moto è la retta i cui punti hanno, nell'istante considerato, velocità minima (oltretutto parallela a $\vec{\omega}$).

Nel caso in cui l'atto di moto sia rotatorio, l'asse di Mozzi prende il nome di *asse istantaneo di rotazione*.

Tenendo conto di quanto detto a proposito del teorema di Mozzi e tenendo conto che, qualunque sia P , $\mathcal{J} = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$ è un invariante (invariante scalare), possiamo concludere con il seguente

Teorema 4.9 (Teorema di classificazione).

$\mathcal{J}$	$\vec{\omega}$	$\vec{v}_P$	tipo di atto di moto
$\neq 0$			<i>effettivamente elicoidale</i>
$= 0$	$\neq \vec{0}$		<i>rotatorio</i>
$= 0$	$= \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	<i>traslatorio</i>
$= 0$	$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	<i>nullo</i>

Dimostrazione. Proviamo, per esempio, che $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ e $\mathcal{J} = 0 \Leftrightarrow$ l'atto di moto è rotatorio. Basta osservare che il componente di $\vec{v}_P$ parallelo a $\vec{\omega}$ si scrive in generale

$$\vec{v}_{P,\parallel} = \left(\vec{v}_P \cdot \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} \right) \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} = \frac{\mathcal{J}}{\|\vec{\omega}\|^2} \vec{\omega}.$$

Dunque se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, esso si annulla se e solo se $\mathcal{J} = 0$, e quindi, in tal caso sopravvive solo il componente $\vec{v}_{P,\perp}$ (detto anche *componente rotatorio* per evidenti motivi). $\square$

Equazione dell'asse di moto

Consideriamo un atto di moto non traslatorio ($\vec{\omega} \neq \vec{0}$) e indichiamo con a l'asse di moto di cui vogliamo trovare l'equazione. Dato il punto O , origine di $\mathcal{S}$, consideriamo un punto A di a che stia nel piano per O perpendicolare a $\vec{\omega}$. A , come ogni punto dell'asse di moto, ha $\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$, e dunque $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A = \vec{0}$. Allora:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A &= \vec{0} = \vec{\omega} \wedge [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O)] = \\ &= \vec{\omega} \wedge [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\vec{x}_A - \vec{x}_O)] = \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x}_A - \vec{x}_O)) = \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{v}_O + [\vec{\omega} \cdot (\vec{x}_A - \vec{x}_O)] \vec{\omega} - [\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}] (\vec{x}_A - \vec{x}_O); \end{aligned}$$

poiché $\vec{\omega} \cdot (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = 0$, in quanto $\overrightarrow{OA} \perp \vec{\omega}$, ne segue

$$\vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_O - [\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}] (\vec{x}_A - \vec{x}_O) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_O - \omega^2 (\vec{x}_A - \vec{x}_O).$$

Dunque

$$\vec{x}_A = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{\omega^2}.$$

Come detto, per ottenere gli altri punti dell'asse di Mozzi, basterà spostarsi lungo la retta per A , parallelamente a $\vec{\omega}$, ovvero aggiungere al vettore $\vec{x}_A$ trovato prima un vettore del tipo $\lambda \vec{\omega}$. L'equazione dell'asse di moto in forma parametrica, e con parametro λ , sarà allora

$$(4.29) \quad \vec{x} = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}.$$

4.7. Moti rigidi piani

Si chiamano così i moti dei rigidi piani (lamine) che avvengono nel piano π della lamina. In questo caso possiamo prendere le terne Σ e $\mathcal{S}$ con assi $\vec{e}_3$ e $\vec{k}$ paralleli e perpendicolari a π . Un moto rigido piano è ovviamente rototraslatorio, in quanto le rette perpendicolari al piano hanno direzione invariabile.

Il corpo rigido ha tre gradi di libertà ed è sufficiente la conoscenza delle coordinate (x_O, y_O) dell'origine della terna mobile e l'angolo φ tra $\vec{e}_1$ e $\vec{i}$ (che volendo possiamo chiamare angolo di precessione, anche se, a rigore, in questo caso la linea dei nodi non è definita e quindi non si potrebbe parlare di angolo di precessione) e possiamo concludere (moti rototraslatori) che $\vec{\omega}$ o è nulla o è data da $\dot{\varphi}\vec{k}$, cioè è perpendicolare a π . Poichè v_P è ovviamente parallelo a π , il trinomio invariante $\mathcal{J}$ è nullo e quindi l'atto di moto è traslatorio o rotatorio. Nel caso sia rotatorio l'intersezione dell'asse di moto (che in questo caso è anche asse istantaneo di rotazione) con il piano π si chiama *centro di istantanea rotazione*. Questo risultato, già noto indipendentemente dal teorema di Mozzi, prende il nome di

Teorema 4.10 (Teorema di Eulero). *Il campo di velocità (non nullo) di un moto rigido piano o è traslatorio o è rotatorio (se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$), intorno a un punto C , detto centro di istantanea rotazione che è l'intersezione dell'asse di istantanea rotazione con il piano del moto e ha coordinate*

$$(4.30) \quad \vec{x}_C = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{\omega^2}.$$

Il punto C è l'unico punto del piano solidale al rigido che ha (nel caso di atto di moto rotatorio) velocità nulla e inoltre, per ogni punto P solidale al rigido,

$$(4.31) \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - C).$$

Come ovvia conseguenza della formula (4.31) si ha che (per atti di moto rotatori) $\vec{v}_P$ è perpendicolare a $(P - C)$, cioè alla retta passante per P e C : ne segue che il punto C è intersezione delle rette passanti per due punti P e Q del rigido e ortogonali alle velocità (supposte non parallele). Questo risultato è anche noto come

Teorema 4.11 (Teorema di Chasles). *Il centro di istantanea rotazione di un moto rigido piano (in ogni istante in cui l'atto di moto è rotatorio) è dato dall'intersezione delle rette passanti per due punti P e Q del rigido e ortogonali alle velocità (supposte non parallele).*

È ora chiaro che se sono noti C e $\vec{\omega}$ si può trovare la velocità di ogni punto del rigido (in un dato istante). D'altro canto se sono note le direzioni delle velocità di due punti (supposte non parallele) si può trovare subito C .

4.8. Il vincolo di puro rotolamento

Come già accennato nella pagina 30, il vincolo di puro rotolamento di una sfera su un piano è un classico esempio di vincolo anolonomo, mentre il vincolo di puro rotolamento di un disco su una guida rettilinea (se il disco si mantiene in un piano fisso), pur essendo intrinsecamente anolonomo, può essere trattato come vincolo olonomo. Vediamo le ragioni di questi fatti, segnalando che si tratta di situazioni molto comuni sia nelle applicazioni che nei problemi.

Consideriamo il caso di una sfera rigida, di raggio R , vincolata a rimanere con un suo punto sempre a contatto con un piano π , per esempio il piano Ωxy , e scegliamo una terna solidale con origine nel centro della sfera stessa. Il vincolo impone che la terza coordinata z_O del centro sia sempre uguale a R : $z_O = R$. Il sistema ha 5 gradi di libertà.

L'equazione del vincolo, per derivazione, porta a concludere che $\dot{z}_O = 0$, condizione che esprime il fatto evidente che la velocità del centro della sfera deve essere parallela al piano Ωxy .

L'equazione $\dot{z}_O = 0$ e l'equazione $z_O = R$ sono perfettamente equivalenti per descrivere il vincolo: pur essendo la prima espressa in termini delle derivate dei parametri, essa può essere ricavata per derivazione da un'equazione in termini finiti e dunque rappresenta comunque un vincolo olonomo.

Imponiamo ora il vincolo che la velocità del punto di contatto, C , della sfera con il piano sia, in ogni istante, nulla (moto di puro rotolamento o moto senza strisciamento): ciò implica che l'atto di moto del rigido deve essere rotatorio attorno ad un asse passante per C e che deve aversi, per ogni punto P ,

$$(4.32) \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}.$$

È chiaro che quest'ultima equazione, espressa mediante i parametri che individuano la posizione della sfera, porta a un'equazione coinvolgente sia i parametri stessi che le loro derivate: ebbene si può dimostrare che una tale equazione *non è deducibile da una relazione in termini finiti nei parametri stessi*. Per questo il vincolo di puro rotolamento della sfera è *anolonomo*.

Vediamo ora il caso di un disco, di centro O , che rotoli senza strisciare su una guida rettilinea, mantenendosi in un piano fisso π . Assumiamo come piano Ωxy il piano π e come asse delle ascisse la guida rettilinea su cui il disco rotola. Fissiamo poi un raggio OQ di riferimento sul disco e indichiamo con ϑ l'angolo formato da OQ con una parallela per O all'asse y , orientato in modo che ϑ cresca al crescere dell'ascissa di O .

Senza il vincolo di puro rotolamento il sistema avrebbe chiaramente due gradi di libertà e i parametri lagrangiani potrebbero essere proprio l'angolo ϑ e l'ascissa x del centro del disco. La scelta dell'angolo ϑ implica che la velocità angolare (necessariamente perpendicolare al piano π) è data da

$$(4.33) \quad \vec{\omega} = -\dot{\vartheta} \vec{e}_3.$$

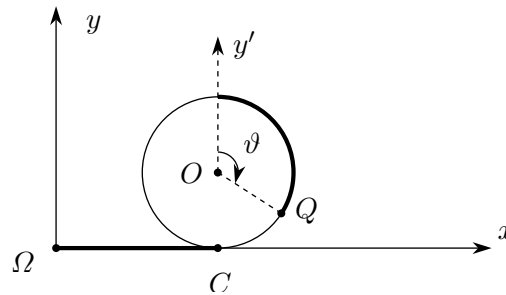


Figura 4.8. Puro rotolamento di un disco

Scelto nella (4.32) $P \equiv O$ si ha: $\vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO}$. Inoltre $\vec{v}_O = \dot{x}\vec{e}_1$. Se ne deduce

$$\dot{x}\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & -\dot{\vartheta} \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix},$$

da cui discende

$$(4.34) \quad \dot{x} = r\dot{\vartheta}.$$

A differenza dell'equazione (4.32), è chiaro che la (4.34) è integrabile e produce

$$(4.35) \quad x = r\vartheta + \vartheta_0,$$

con la condizione naturalmente che l'angolo ϑ non sia limitato all'intervallo $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Il vincolo dunque è esprimibile mediante un'equazione in termini finiti tra i parametri e riduce il numero dei gradi di libertà da 2 a 1.

Quindi il vincolo di puro rotolamento, anche se in generale è anolonomo, in particolari situazioni può essere pensato come olonomo.

5. Equazioni cardinali

5.1. Generalità

Supponiamo noti dal corso di Fisica il concetto di forza e i principi della dinamica. Segnaliamo qui in particolare, perché importante ai fini dello studio del moto dei corpi rigidi, il principio di azione e reazione che ha come conseguenza che l'insieme delle forze interne a un qualunque sistema materiale è costituito da coppie di braccio nullo e quindi con risultante e momento risultante rispetto a un polo qualsiasi sempre nulli.

Segnaliamo poi che il principio di inerzia si può ritenere valido anche in sistemi non inerziali, pur di includere nelle forze anche le forze cosiddette di inerzia (forze di trascinamento e di Coriolis).

5.2. Classificazione delle forze

Per quanto riguarda le applicazioni è importante una precisa *classificazione delle forze*, scegliendo diversi possibili criteri, a seconda delle necessità. Ci interesseranno, per ora, le seguenti considerazioni.

Forze interne ed esterne

Si dicono *forze interne* quelle che si esercitano tra le varie parti che costituiscono un sistema, per esempio le forze che vicendevolmente si esplicano i pianeti e il sole all'interno del sistema solare.

Si dicono *forze esterne* quelle che vengono esercitate sul sistema da parte di agenti esterni. Per esempio se consideriamo un sistema di aste variamente collegate tra di loro, la forza peso è una forza esterna.

È da notare che il concetto di interno ed esterno dipende dal sistema scelto.. Per esempio le forze di attrazione Terra-Sole sono interne al sistema solare, ma esterne al sistema Terra-Luna.

Forze attive e reattive

Un'altra distinzione di grande importanza è quella tra forze attive e forze reattive. Precisamente si chiamano *forze reattive* le forze che i vincoli esercitano su un sistema, ovvero le forze che bisogna sostituire ai vincoli per realizzare lo stesso stato di quiete o di moto ottenibile in presenza dei vincoli.

Questa definizione si basa in realtà su un postulato, detto *Postulato delle reazioni vincolari*, che afferma appunto che le azioni che un vincolo esercita su un sistema materiale sono sempre rappresentabili con un insieme di forze.

Tutte le forze non reattive si chiamano *forze attive*.

Forze concentrate e forze distribuite

Si chiamano *forze concentrate*, o *carichi concentrati*, quelle forze che sono applicate a specifici punti del sistema. Per esempio quando apro una porta esercito una forza concentrata sulla maniglia.

Si chiamano *forze distribuite* o *carichi distribuiti* quelle che sono applicate in ogni punto di un sistema (o di una sua parte) e che di solito sono assegnate mediante una densità. Esempio classico è la forza peso: dato un corpo continuo, di densità di massa $\mu(P)$, la forza di densità vettoriale $\mu(P)\vec{g}$ è la forza peso, e il peso di un “elemento infinitesimo” di materia è dato da $\mu(P)\vec{g}d\tau$, mentre il peso di un corpo $\mathcal{B}$ è dato da

$$\int_{\mathcal{B}} \mu(P)\vec{g}d\tau.$$

L’elemento $d\tau$ è un elemento infinitesimo di linea, di superficie, o di volume o seconda dei casi.

Altre classificazioni che interessano sono quelle tra *forze a distanza* e *forze a contatto*, tra *forze conservative* e *forze non conservative*.

Esempio

Arco a tre cerniere con le forze indicate.

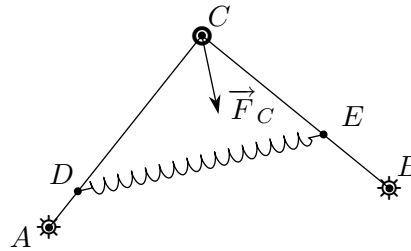


Figura 5.1. Esempi di forze

1. Forze attive: peso, $\vec{F}_C$, forze elastiche in D ed E .
Forze reattive: reazioni delle cerniere in A , B , C .
2. Forze esterne: peso, $\vec{F}_C$, reazioni delle cerniere in A e B .
Forze interne: forze elastiche in D ed E , reazioni della cerniera in C .
3. Forze distribuite: forza peso.
Forze concentrate: tutte, tranne il peso.

Si noti che la distinzione tra forze attive e forze reattive gioca un ruolo essenziale in molti problemi a applicazioni. In parecchie questioni è noto il moto del sistema, o addirittura esso è in quiete, e le incognite del problema sono proprio le reazioni vincolari, la cui determinazione consente di assicurarsi che i dispositivi che le realizzano siano costruiti in maniera adeguata.

5.3. Equazioni cardinali

Consideriamo ora un qualunque sistema materiale. Per semplicità ci riferiremo sempre a un sistema particellare, costituito cioè da un insieme finito di *punti materiali*, ciascuno

dotato di una massa m_i , mobile con velocità $\vec{v}_i$, accelerazione $\vec{a}_i$, e sottoposto a delle forze in cui abitualmente distingueremo quelle attive ($\vec{F}_i$) da quelle reattive o vincolari ($\vec{\Phi}_i$).

Per ciascun punto potremo allora scrivere l'equazione della dinamica nella forma

$$(5.1) \quad \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i = m_i \vec{a}_i.$$

Tutto quanto diremo mantiene però intatta la validità se si sostituiscono le somme con integrali (ove opportuno, cioè in presenza di carichi e masse distribuite) anche per corpi continui.

Se sommiamo tutte le equazioni (5.1) e teniamo conto che le forze interne eventualmente presenti sono coppie di braccio nullo, per cui si elidono a vicenda, si ottiene

$$(5.2) \quad (\vec{R}^e =) \vec{R}^{e,a} + \vec{R}^{e,v} = \sum m_i \vec{a}_i,$$

con ovvio significato dei simboli.

Detto poi T un punto qualunque dello spazio, se si moltiplica ciascuna delle (5.1) per $T\vec{P}_i$ e si somma membro a membro si ottiene, tenendo conto che le forze interne essendo coppie di braccio nullo non contribuiscono nemmeno al momento risultante,

$$(5.3) \quad (\vec{M}_T^e =) \vec{M}_T^{e,a} + \vec{M}_T^{e,v} = \sum T\vec{P}_i \wedge m_i \vec{a}_i.$$

Le equazioni (5.2) e (5.3) si chiamano *Equazioni cardinali della dinamica* e costituiscono due equazioni *indipendenti* (tranne nel caso di un singolo punto, nel quale la (5.3) è conseguenza diretta della (5.2)), utili per lo studio del moto dei sistemi, o delle condizioni di equilibrio.

È molto importante segnalare che le equazioni cardinali *non sono sufficienti* a determinare il moto di un sistema, o a garantirne l'equilibrio. Per un esempio banale consideriamo un compasso che sia sottoposto a due forze uguali e contrarie (coppia di braccio nullo).

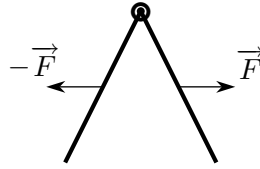


Figura 5.2. Aste a compasso con coppia di braccio nullo

È chiaro che si ha

$$\vec{R}^e = \vec{0}, \quad \vec{M}_T^e = \vec{0}, \quad \forall T,$$

ma questo non è sufficiente a garantire l'equilibrio (supposto il compasso inizialmente fermo).

Daremo, nel caso dinamico, una nuova forma alle equazioni cardinali, che ci sarà utile nelle applicazioni. Ora occupiamoci del caso statico.

5.4. Statica dei sistemi

Se un punto si trova in quiete rispetto a un sistema di riferimento, l'equazione (5.1) si riduce a

$$(5.4) \quad \vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{0}.$$

Si dice allora che P è in *posizione di equilibrio*. Se viceversa P si trova in una posizione dove è verificata la (5.4) ed ha velocità nulla, allora si verifica sempre⁽¹⁾ che il punto rimane in quiete in quella posizione.

A partire dalla equazione (5.4), applicata a tutti i punti di un sistema particellare, si possono ottenere le equazioni

$$(5.5) \quad \vec{R}^{e,a} + \vec{R}^{e,v} = \vec{0}$$

$$(5.6) \quad \vec{M}_T^{e,a} + \vec{M}_T^{e,v} = \vec{0},$$

dette *Equazioni cardinali della statica*.

Si noti che la (5.6), se è valida per un polo T , lo è per ogni altro polo T' , a causa di (5.5).

5.5. Statica dei sistemi rigidi

Nel caso di sistemi rigidi le equazioni cardinali sono sufficienti a garantire l'equilibrio, come proveremo successivamente.

Le equazioni cardinali allora, nel caso di un rigido, possono essere usate per determinare le condizioni di equilibrio. Questo ci permetterà, in molti casi, di determinare sia le posizioni di equilibrio, che le reazioni vincolari all'equilibrio.

Vedremo successivamente i dettagli, per ora consideriamo un esempio.

Esempio di determinazione dell'equilibrio e delle reazioni vincolari

Sia data un'asta OA , come nella figura 5.3, di lunghezza l .

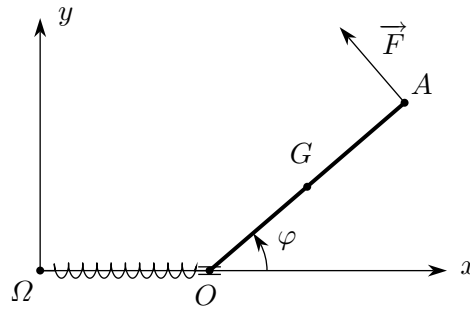


Figura 5.3. Esempio di problema di statica

Il piano Ωxy è supposto verticale e l'asse delle y è verticale ascendente. Le forze agenti sono:

- una forza $\vec{F}$ di modulo noto e costante, agente in A e perpendicolare a OA ;
- una forza di tipo elastico di costante k , agente sul punto O e avente centro in Ω ;
- il peso della sbarra, che è supposta omogenea e di massa m ;
- una reazione vincolare in O , che costringe il punto O stesso a scorrere sull'asse delle x (vincolo a carrello).

¹La cosa non è però facile da verificare analiticamente e dipende da questioni di regolarità delle forze e delle reazioni vincolari presenti.

Premessa e osservazioni importanti per la trattazione di problemi di meccanica

- In Meccanica razionale le forze elastiche che si considerano sono sempre “molle ideali” nel senso che
 1. possono subire qualunque allungamento;
 2. esercitano esclusivamente una forza *di richiamo*, proporzionale alla loro lunghezza: detto C il “punto di fissaggio” della molla e P il punto di applicazione, si ha

$$\vec{F}_{el} = -k\overrightarrow{CP} = -k(P - C),$$

ove k è una costante positiva, detta *costante elastica*. Si noti che con questa convenzione le molle possono essere solo allungate e non compresse.

- I corpi che si considerano nei problemi pratici non sono mai troppo grandi, per cui ha senso parlare di baricentro (le forze peso possono essere pensate sistemi di vettori applicati paralleli) e il baricentro coincide con il centro di massa.

Inoltre abbiamo provato che, per sistemi di vettori applicati di questo tipo, si può operare una riduzione, ai fini del calcolo del risultante e del momento risultante rispetto a un dato polo, a un solo vettore applicato in un punto dell’asse centrale e, in particolare, nel centro del sistema di vettori applicati paralleli (in questo caso il baricentro).

Poichè per i sistemi rigidi le equazioni cardinali della statica sono sufficienti a caratterizzare l’equilibrio, e poichè nelle equazioni cardinali compaiono il risultante e il momento risultante, potremo sempre, per i corpi rigidi, pensare al peso come a un’unica forza applicata nel baricentro. Si tenga comunque sempre presente che questa riduzione dell’insieme delle forze peso a un’unica forza è valida per questioni legate all’uso delle equazioni cardinali; vedremo che, nel caso dei rigidi, la cosa sarà possibile anche per questioni connesse al calcolo del lavoro, ma in generale è bene evitare di pensare sempre alla forza peso come una forza unica agente sul baricentro.

- Anche le reazioni vincolari agiscono sui punti di un rigido e dunque, agli effetti dell’uso delle equazioni cardinali, il sistema di forze che descrivono le reazioni vincolari potrà sempre essere ridotto a un unico vettore applicato in un punto A e a una coppia il cui momento coincide col momento del sistema di reazioni rispetto ad A .

Nelle applicazioni che ci interessano, di solito, i vincoli agiscono (mediante cerniere, carrelli, incastri, ...) in determinati punti del rigido o al più in un intorno di questi punti e conviene analizzare separatamente le reazioni in ciascuno di questi punti, riducendo il sistema di reazioni in ogni punto a un vettore applicato in quel punto e a una coppia. Si tenga ben presente che il “punto” su cui agiscono le reazioni vincolari è, in realtà, quasi sempre una zona estesa circondante il punto stesso (un intorno opportuno), ed è per questo che nel ridurre il sistema di reazioni bisogna considerare sia un risultante che un momento risultante: se le forze agissero su un singolo punto esse sarebbero sempre riducibili solo al vettore risultante, senza bisogno di alcuna coppia. Si tenga altresì presente che, se è richiesto il momento risultante rispetto a un polo diverso dal punto in considerazione, bisognerà poi applicare la consueta formula di trasporto.

Naturalmente questo non esclude che, in alcune situazioni (peraltro abbastanza frequenti nei problemi), ci si possa limitare a ridurre il sistema di reazioni vincolari al solo risultante, per di più di direzione facilmente individuabile a priori: è questo, per esempio, il caso di “vincoli senza attrito”, su cui torneremo più avanti.

Queste considerazioni pratiche sui vincoli sono di grande importanza perché, come abbiamo già detto, è proprio la determinazione delle reazioni vincolari uno dei problemi cruciali delle applicazioni.

Tornando al nostro problema della pagina 60 assumeremo (per ora perché in seguito ne daremo una giustificazione) che il vincolo in O sia schematizzabile con un unico vettore perpendicolare a ΩO .

Schematizziamo il problema, come conviene sempre fare, con un *diagramma delle forze*.

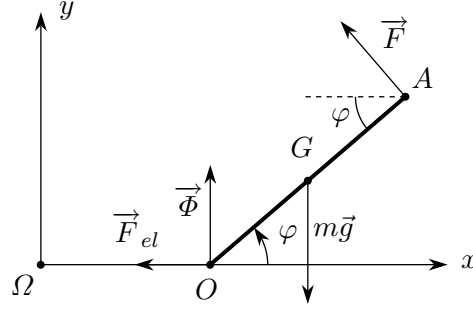


Figura 5.4. Diagramma delle forze

Si noti che, anche se abbiamo disegnato nel diagramma il vettore $\vec{\Phi}$ verso l'alto, non facciamo alcuna ipotesi sul suo verso, ma solo sulla sua direzione: sia il verso che il modulo dovranno esserci forniti (se le equazioni saranno sufficienti!) dalla risoluzione delle equazioni.

Il sistema ha due gradi di libertà e possiamo scegliere come parametri lagrangiani

$$x = x_O \quad \text{e} \quad \varphi.$$

Indichiamo con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i versori degli assi x e y rispettivamente e scriviamo le equazioni cardinali della statica usando come polo O , così due delle quattro forze (tra cui quella incognita) non compariranno nell'equazione dei momenti.

$$\begin{aligned}\vec{R}^e &= \vec{F}_{el} + \vec{\Phi} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^e &= \vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{0}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda le forze e gli altri vettori abbiamo:

- $\vec{F}_{el} = -kx\vec{i}$;
- $\vec{\Phi} = \Phi_y\vec{j}$ (Φ_y è incognita);
- $m\vec{g} = -mg\vec{j}$;
- $\vec{F} = -F \sin \varphi \vec{i} + F \cos \varphi \vec{j}$;
- $\vec{OG} = \frac{l}{2} \cos \varphi \vec{i} + \frac{l}{2} \sin \varphi \vec{j}$;
- $\vec{OA} = l \cos \varphi \vec{i} + l \sin \varphi \vec{j}$.

Dunque

$$-\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{l}{2} \cos \varphi & \frac{l}{2} \sin \varphi & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -mg \frac{l}{2} \cos \varphi \vec{k};$$

$$-\vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \varphi & l \sin \varphi & 0 \\ -F \sin \varphi & F \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = Fl\vec{k}.$$

L'equazione dei risultanti fornisce due equazioni scalari nelle componenti x e y , mentre l'equazione dei momenti fornisce una sola equazione scalare nella terza componente (succede sempre così quando si ha a che fare con sistemi piani in cui tutte le forze hanno componenti solo nel piano).

Le tre equazioni sono

$$\begin{cases} -kx - F \sin \varphi = 0 \\ \Phi_y + F \cos \varphi - mg = 0 \\ -mg \frac{l}{2} \cos \varphi + Fl = 0 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle incognite x , φ , Φ_y , da cui si possono ricavare sia le posizioni di equilibrio che il valore di Φ_y (almeno in teoria, in quanto il sistema non è lineare in φ , ma solo in x e Φ_y).

Dalla terza equazione ricaviamo

$$\cos \varphi = \frac{2F}{mg} = \lambda.$$

- Se $\lambda > 1$ non ci sono soluzioni, il sistema non può stare in equilibrio (fisicamente significa che il peso non può essere sufficiente a bilanciare la spinta perpendicolare all'asta impressa dalla forza $\vec{F}$).
- Se $\lambda = 1$ c'è un'unica soluzione $\varphi = 0$;
- $\lambda < 1$ ci sono due soluzioni $\varphi_{1,2} = \pm \arccos \lambda$, simmetriche rispetto a x e una con $0 < \varphi < \pi/2$, l'altra con $-\pi/2 < \varphi < 0$.

Dalla prima equazione si ricava ora, se la terza ha soluzioni,

$$x = -\frac{F}{k} \sin \varphi = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda = 1; \\ \pm \frac{F}{k} \sqrt{1 - \lambda^2}, & \text{se } \lambda < 1. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava infine Φ_y

$$\Phi_y = mg - F \cos \varphi = mg - \frac{2F^2}{mg} = \frac{m^2 g^2 - 2F^2}{mg}.$$

Poiché, per avere soluzioni, deve essere $\lambda \leq 1$, ovvero $2F \leq mg$, si deduce che $m^2 g^2 \geq 4F^2 > 2F^2$ e quindi $m^2 g^2 - 2F^2 > 0$, ovvero che $\vec{\Phi}$ è sempre diretta verso l'alto.

6. Lavori virtuali

6.1. Spostamenti

Se un punto P si sposta da una posizione A a una posizione B , il vettore $B - A$ si chiama spostamento (finito) del punto P e si può indicare con ΔP : $\Delta P = B - A$. Se la posizione B è “infinitamente vicina” ad A , lo spostamento si dice *infinitesimo* e si indica generalmente con ∂P , o con dP , o ancora con δP , a seconda dei casi, come vedremo.

Spostamenti infinitesimi generici

In alcune questioni ha interesse considerare spostamenti infinitesimi generici, non tenuti a soddisfare nemmeno le condizioni imposte dai vincoli; lo spostamento del generico punto P del sistema si indica in questo caso con ∂P e si ottiene per differenziazione delle (3.1)

$$(6.1) \quad \partial P = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \xi_i} \partial \xi_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \partial t,$$

ove le $\partial \xi_i$ sono completamente arbitrarie. Non avremo però, in questo corso, bisogno di occuparci di spostamenti di questo tipo.

Spostamenti possibili e spostamenti effettivi

Uno spostamento infinitesimo si può sempre pensare ottenuto attribuendo a ogni punto una velocità opportuna, $\vec{w}_P$ e considerando lo spostamento come $\vec{w}_P dt$. Se le velocità sono del tutto arbitrarie e non tengono conto degli eventuali vincoli esterni presenti, ma solo eventualmente del vincolo di rigidità, si ottiene un generico spostamento infinitesimo. Se invece sono delle velocità consentite al sistema dai vincoli presenti, si ottiene uno spostamento detto *possibile*.

Se il sistema è espresso mediante coordinate lagrangiane, gli spostamenti possibili si ottengono per differenziazione delle (3.5)

$$(6.2) \quad dP = \sum_{h=1}^N \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} dt,$$

ove l'ultimo termine compare solo in presenza di vincoli mobili e ove le dq_h sono completamente arbitrarie in assenza di vincoli unilateri e devono soddisfare opportune disequazioni in presenza di vincoli unilateri, ma solo a partire da posizioni di confine.

Se le velocità sono addirittura quelle effettive (conseguenti alle forze agenti e alle condizioni iniziali), si ottiene lo spostamento detto *effettivo* o anche *elementare*, che si indica, come del resto quello possibile, con dP : $dP = v_P dt$.

Spostamenti virtuali

Il caso di maggior interesse per la statica è quello degli spostamenti cosiddetti *virtuali*: essi si ottengono se le velocità considerate sono un insieme di velocità consentite al sistema dai vincoli quali essi sono nell'istante considerato (“vincoli congelati” all'istante considerato).

Nel caso particolare, e particolarmente importante, di vincoli fissi gli spostamenti virtuali e quelli possibili coincidono. Gli spostamenti virtuali si indicano con δP .

Se il sistema è espresso mediante coordinate lagrangiane, gli spostamenti virtuali si ottengono per differenziazione delle (3.5), considerando il tempo costante

$$(6.3) \quad \delta P = \sum_{h=1}^N \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_h} \delta q_h,$$

ove le δq_h sono completamente arbitrarie in assenza di vincoli unilateri e sono sottoposte a limitazioni solo in presenza di vincoli unilateri a partire da posizioni di confine.

Spostamenti reversibili

Uno spostamento virtuale si dice *reversibile* se anche il suo opposto è virtuale. Nel caso di vincoli bilateri tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili; nel caso di vincoli unilateri gli spostamenti a partire da posizioni ordinarie sono tutti reversibili, quelli a partire da posizioni di confine, no.

6.2. Spostamenti di un rigido

Nel caso di un rigido gli spostamenti di qualunque tipo devono ovviamente tenere conto del vincolo interno di rigidità e quindi si possono ricavare dalla formula di Poisson, pensando le velocità non come quelle effettive, ma quelle di un atto di moto opportuno, a seconda del tipo di spostamento richiesto.

Poichè siamo particolarmente interessati al caso degli spostamenti virtuali, consideriamo un atto di moto caratterizzato dalla possibile velocità “virtuale” $\vec{v}_O'$ di un punto O arbitrario del rigido e da una possibile velocità angolare “virtuale” $\vec{\omega}'$, dove con “virtuale” intendiamo, come sopra detto, consentito al sistema dai vincoli quali essi sono nell’istante considerato. Se scriviamo la formula di Poisson e moltiplichiamo ambo i membri per dt otteniamo:

$$\vec{v}_P' dt = \vec{v}_O' dt + \vec{\omega}' dt \wedge \overrightarrow{OP},$$

ovvero

$$(6.4) \quad \delta P = \delta O + \vec{\Psi} \wedge \overrightarrow{OP},$$

ove δO rappresenta lo spostamento virtuale di un punto O scelto arbitrariamente nel rigido e $\vec{\Psi}$ è un vettore (infinitesimo) avente la direzione di una possibile velocità angolare del rigido, consentita dai vincoli “congelati” all’istante in esame.

6.3. Lavoro virtuale

Come conseguenza della definizione di spostamento, si ha quella di lavoro, in particolare di lavoro virtuale. Data una forza $\vec{F}$ (attiva o reattiva), agente su un punto P , si chiama *lavoro virtuale* di $\vec{F}$, e si indica con δL , il prodotto $\vec{F} \cdot \delta P$:

$$(6.5) \quad \delta L = \vec{F} \cdot \delta P.$$

Nel caso di un sistema di forze agenti su più punti, il lavoro virtuale totale è la somma dei lavori virtuali delle singole forze (l’integrale nel caso di forze distribuite).

Nel caso particolare, e particolarmente importante, di forze applicate ai punti di un rigido, che supponiamo per semplicità costituito da un numero finito di punti, si ha

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \sum \vec{F}_i \cdot \delta P_i = \sum \vec{F}_i \cdot (\delta O + \vec{\Psi} \wedge \overrightarrow{OP_i}) = \\
 &= \delta O \cdot \sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_i \cdot \vec{\Psi} \wedge \overrightarrow{OP_i} = \\
 &= \delta O \cdot \vec{R} + \sum \vec{\Psi} \wedge \overrightarrow{OP_i} \cdot \vec{F}_i = \\
 &= \delta O \cdot \vec{R} + \sum \vec{\Psi} \cdot \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i = \\
 &= \delta O \cdot \vec{R} + \vec{\Psi} \cdot \sum \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_i = \\
 &= \delta O \cdot \vec{R} + \vec{\Psi} \cdot \vec{M}_O,
 \end{aligned}$$

ovvero

$$(6.6) \quad \delta L = \delta O \cdot \vec{R} + \vec{\Psi} \cdot \vec{M}_O.$$

La formula (6.6) ha come importante conseguenza che nel calcolo del lavoro di un sistema di forze applicate ai punti di un rigido contano solo il risultante e il momento risultante delle forze. È questo un fatto di grande importanza nella risoluzione dei problemi. Per esempio, per un corpo rigido non troppo esteso, le forze peso costituiscono un sistema di vettori applicati paralleli, riducibile dunque al solo risultante applicato nel baricentro. Ebbene, anche per il calcolo del lavoro delle forze peso ci si può limitare a calcolare il lavoro del risultante applicato nel baricentro. Si badi bene che questa proprietà *non* è valida in caso di forze applicate ai punti di un sistema non rigido.

6.4. Principio delle reazioni vincolari

Definizione 6.1. Si chiamano vincoli non dissipativi, o brevemente vincoli lisci, tutti i vincoli le cui reazioni vincolari compiono un lavoro virtuale non negativo, per ogni spostamento virtuale del sistema

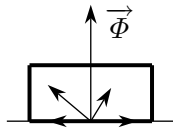
$$(6.7) \quad \delta L^v = \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta P_i \geq 0.$$

Nel caso di spostamenti reversibili, in particolare nel caso di vincoli bilateri, la (6.7) si scrive, ovviamente,

$$(6.8) \quad \delta L^v = \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta P_i = 0.$$

Questa definizione, che costituisce un vero e proprio *principio di Meccanica*, in aggiunta alle leggi di Newton, trova la sua giustificazione nell'analisi di tutti i casi concreti che capita di considerare, come mostrano i seguenti esempi.

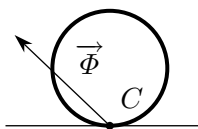
Appoggio su una superficie priva di attrito



Il vincolo è normale al piano di appoggio, gli spostamenti virtuali possono fare solo un angolo acuto con la reazione vincolare $\vec{\Phi}$, da cui $\delta L^v \geq 0$.

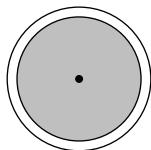
Puro rotolamento di un disco o una sfera su una superficie scabra

Osserviamo innanzitutto che il vincolo di puro rotolamento richiede che la superficie di appoggio sia scabra; nonostante questo il vincolo è non dissipativo, o liscio nel senso che abbiamo detto. Non si confonda dunque il concetto di vincolo non dissipativo con quello di vincolo privo di attrito.



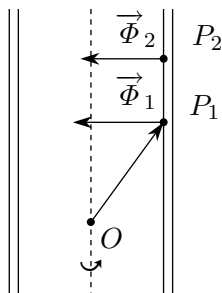
Il vincolo, come osservato, non è normale al piano di appoggio, ma il puro rotolamento impone che in un qualunque atto di moto si abbia $\vec{v}_C = \vec{0}$, ovvero $\delta C = \vec{0}$, da cui $\delta L^v = 0$.

Corpo rigido con asse fisso, senza attrito



La rotazione attorno a un asse fisso, in assenza di attrito, si può schematizzare pensando che una parte cilindrica del corpo sia vincolata a stare dentro un cilindro fisso, di raggio leggermente più grande. La figura a fianco mostra la situazione in sezione.

Le reazioni vincolari, in assenza di attrito, sono tutte perpendicolari alle due superfici cilindriche, e quindi passano per l'asse comune dei due cilindri.

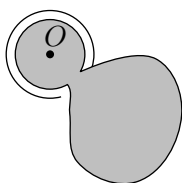


Se si prende un punto O sull'asse, si ha $\delta O = \vec{0}$ e inoltre $\vec{OP}_i \wedge \vec{\Phi}_i$ perpendicolare all'asse, e quindi

$$\delta L^v = \vec{R} \cdot \delta O + \vec{\Psi} \cdot \vec{M}_O = 0,$$

ove abbiamo tenuto conto del fatto che $\vec{\Psi}$ deve essere necessariamente parallelo all'asse, in quanto deve avere la direzione di una velocità angolare consentita al sistema.

Corpo rigido con un punto fisso, senza attrito



Il vincolo si può schematizzare pensando che una parte sferica del corpo sia vincolata all'interno di una sfera fissa, di raggio leggermente più grande e concentrica alla prima. Scegliendo O coincidente con il punto fisso, si ha $\delta O = \vec{0}$ e $\vec{\Phi}$ sempre concorrente in O , per cui $\vec{M}_O = \vec{0}$. Ne segue che deve essere $\delta L^v = 0$.

6.5. Il principio dei lavori virtuali

Il *Principio dei lavori virtuali* è, nella nostra impostazione, un teorema conseguente alla definizione di vincolo non dissipativo; ad esso si dà comunque il nome di *principio* per la sua grande importanza nello sviluppo della meccanica, in quanto, come vedremo, permette l'eliminazione delle incognite reazioni vincolari. Nella sua forma definitiva il principio è dovuto a Lagrange.

Teorema 6.2 (Principio dei lavori virtuali). *Condizione necessaria e sufficiente a garantire l'equilibrio di un qualsiasi sistema materiale a vincoli lisci è che il lavoro virtuale delle forze*

attive sia non positivo per ogni spostamento virtuale

$$(6.9) \quad \delta L^a \leq 0.$$

Se i vincoli sono tutti bilateri la relazione si scrive, più semplicemente,

$$(6.10) \quad \delta L^a = 0.$$

Dimostrazione. Il principio è una diretta conseguenza della definizione di vincolo liscio e si può assumere l'uno o l'altro concetto come postulato di partenza. Nel caso di un solo punto la cosa è quasi ovvia:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \Rightarrow \delta L^a + \delta L^v = 0,$$

e quindi

$$\delta L^a \leq 0 \Leftrightarrow \delta L^v \geq 0.$$

□

Esempio di applicazione del principio dei lavori virtuali

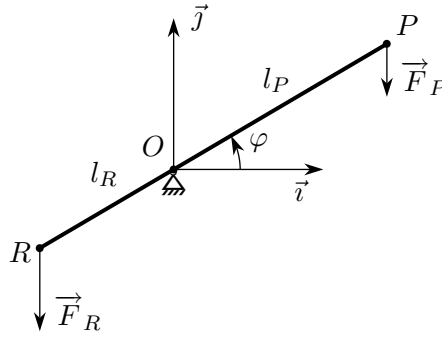


Figura 6.1. Applicazione del principio dei lavori virtuali alla leva

Si ha:

- $\vec{OP} = l_P \cos \varphi \vec{i} + l_P \sin \varphi \vec{j}$;
- $\vec{OR} = -l_R \cos \varphi \vec{i} - l_R \sin \varphi \vec{j}$;
- $\delta P = -l_P \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + l_P \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$;
- $\delta R = l_R \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} - l_R \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$;
- $\vec{F}_P = -F_P \vec{j}$;
- $\vec{F}_R = -F_R \vec{j}$ (F_P ed F_R rappresentano qui i moduli delle due forze).

Se ne deduce

$$\delta L^a = \cos \varphi (F_R l_R - F_P l_P) \delta \varphi.$$

Quindi

$$\delta L^a = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \vee l_R F_R = l_P F_P,$$

che rappresentano condizioni ben note per l'equilibrio di una leva e che sono state ricavate senza la necessità di trovare anche la reazione vincolare in O .

6.6. Sistemi olonomi. Componenti lagrangiane della sollecitazione

Se un sistema è a vincoli olonomi, la posizione di ogni punto P del sistema è individuata da N parametri lagrangiani o liberi, ed eventualmente dal tempo (equazione (3.5) nella pagina 33):

$$(3.5) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1, q_2, \dots, q_r, t).$$

Si ha allora (equazione (6.3) nella pagina 66):

$$(6.3) \quad \delta P = \sum_{h=1}^N \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_h} \delta q_h.$$

Se consideriamo un sistema di n punti P_i su cui agiscono le forze attive $\overrightarrow{F}_i$, si ottiene, successivamente e applicando più volte le proprietà distributiva e associativa della somma (che ci permettono tra l'altro di scambiare l'ordine delle sommatorie),

$$\begin{aligned} \delta L^a &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i \cdot \delta P_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i \cdot \left(\sum_{h=1}^N \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^N \overrightarrow{F}_i \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \\ &= \sum_{h=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \right) \delta q_h = \sum_{h=1}^N Q_h \delta q_h, \end{aligned}$$

ovvero

$$(6.11) \quad \delta L^a = \sum_{h=1}^N Q_h \delta q_h,$$

con

$$(6.12) \quad Q_h = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F}_i \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h}.$$

Le Q_h sono dette *forze generalizzate* o *componenti lagrangiane della sollecitazione* e la (6.11) può essere vista come la generalizzazione del lavoro per una forza $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ agente su un punto P che subisce uno spostamento virtuale $\delta P = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$

$$(6.13) \quad \delta L = \overrightarrow{F} \cdot \delta P = \sum_{i=1}^3 F_i \delta x_i.$$

L'analogia tra le formule (6.11) e (6.13) è evidente, e giustifica il nome dato alle Q_h .

La condizione di equilibrio per un sistema olonomo a vincoli lisci e bilateri si può allora scrivere

$$\delta L^a = \sum_{h=1}^N Q_h \delta q_h = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(6.14) \quad Q_h = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, N,$$

vista l'arbitrarietà dei δq_h .

Naturalmente anche le (6.14) forniscono una ulteriore giustificazione all'appellativo usato per le Q_h , in quanto sono simili alle condizioni

$$F_i = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

che caratterizzano l'equilibrio di un punto sottoposto, come più sopra precisato, alla forza totale $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Esempio

Come esempio ritroviamo le condizioni di equilibrio per l'esercizio proposto nella pagina 60, usando il principio dei lavori virtuali. Con riferimento alla figura 5.4 nella pagina 62 e alle formule ivi riportate, otteniamo

$$\begin{aligned} - \vec{\Omega G} &= \left(x + \frac{l}{2} \cos \varphi \right) \vec{i} + \frac{l}{2} \sin \varphi \vec{j}; \\ - \vec{\Omega A} &= (x + l \cos \varphi) \vec{i} + l \sin \varphi \vec{j}; \\ - \vec{\Omega O} &= x \vec{i}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} - \delta G &= \left(\delta x - \frac{l}{2} \sin \varphi \delta \varphi \right) \vec{i} + \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}; \\ - \delta A &= (\delta x - l \sin \varphi \delta \varphi) \vec{i} + l \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}; \\ - \delta O &= \delta x \vec{i}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \delta L^a &= \vec{F}_{el} \cdot \delta \vec{O} + m \vec{g} \cdot \delta \vec{G} + \vec{F} \cdot \delta \vec{A} = \\ &= -kx \delta x - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi - F \sin \varphi \delta x + Fl \sin^2 \varphi \delta \varphi + Fl \cos^2 \varphi \delta \varphi = \\ &= (-kx - F \sin \varphi) \delta x + \left(Fl - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \right) \delta \varphi. \end{aligned}$$

Le componenti lagrangiane della sollecitazione sono

$$\begin{cases} Q_x &= -kx - F \sin \varphi \\ Q_\varphi &= Fl - mg \frac{l}{2} \cos \varphi \end{cases}.$$

Uguagliando a zero le due forze generalizzate trovate si ottengono due equazioni pure (cioè senza le reazioni vincolari) di equilibrio che coincidono esattamente con la prima e la terza equazione scritte nella pagina 63.

7. Azioni interne in un rigido all'equilibrio (Cenni)

7.1. Generalità

Consideriamo un rigido in equilibrio sotto l'azione di un insieme di forze applicate (attive e vincolari)

$$\mathcal{S} = \left\{ (A_i, \vec{F}_i) \right\},$$

supponendo per semplicità di avere un insieme finito di carichi concentrati (ma nulla cambia se si considerano carichi distribuiti, basta “sostituire” le somme con gli integrali).

Saremo particolarmente interessati a sistemi unidimensionali piani, ma la teoria generale si può fare anche per sistemi 3D, senza complicazioni particolari.

Supponiamo di sezionare virtualmente il rigido con un piano π che non passi per nessuno dei punti di applicazione dei carichi concentrati: il rigido sarà suddiviso in due parti, ciascuna delle quali è in equilibrio.

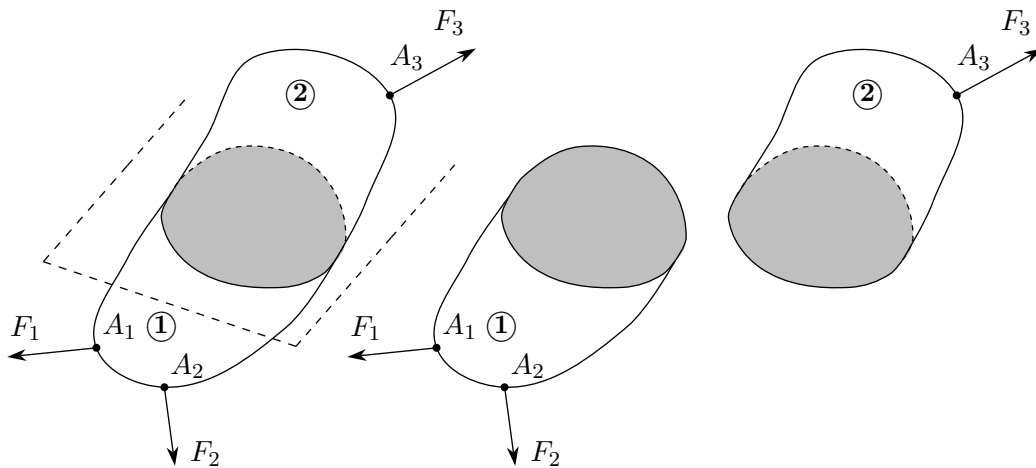


Figura 7.1. *Sezione virtuale di un solido con un piano*

Poiché le forze esterne agenti su ciascuna delle due parti sono ora solo una parte delle forze totali agenti, è chiaro che se le due parti sono in equilibrio, dovremo introdurre delle nuove azioni, per ciascuna, che consentano l'equilibrio. In sostanza dobbiamo ritenere che le azioni della parte 1 sulla parte 2, e viceversa, siano schematizzabili con un sistema di forze (uguali e contrarie per il principio di azione e reazione), che chiameremo forze interne della parte 1 sulla parte 2 e viceversa. Nelle applicazioni ha grande interesse la determinazione di queste forze.

Useremo le seguenti notazioni:

$\mathbf{g}_{\text{est}, \rightarrow 1}$: la parte di forze esterne agenti sulla parte 1;
 $\mathbf{g}_{\text{est}, \rightarrow 2}$: la parte di forze esterne agenti sulla parte 2;
 $\mathbf{g}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$: le forze esercitate dalla parte 2 sulla parte 1;
 $\mathbf{g}_{\text{int}, 1 \rightarrow 2}$: le forze esercitate dalla parte 1 sulla parte 2.

È chiaro che, per l'equilibrio di ciascuna delle due parti, per esempio la 1, il sistema $\mathbf{g}_{\text{est}, \rightarrow 1} \cup \mathbf{g}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$ deve essere equilibrato. Poichè si tratta di forze applicate a un rigido, come sappiamo la condizione affinché questo sistema sia equilibrato si può scrivere con un'equazione dei risultanti e una dei momenti risultanti. È tradizione, perché conveniente, scegliere il *polo dei momenti sulla sezione*, dopodiché le equazioni dell'equilibrio, per la parte 1 ad esempio, si scrivono

$$(7.1) \quad \vec{R}_{\text{est}, \rightarrow 1} + \vec{R}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1} = \vec{0},$$

$$(7.2) \quad \vec{M}_P^{\text{est}, \rightarrow 1} + \vec{M}_P^{\text{int}, 2 \rightarrow 1} = \vec{0}.$$

7.2. Sforzi normali e di taglio. Momenti torcente e flettente

Consideriamo ora la normale alla sezione e orientiamola scegliendo il versore, $\vec{n}$, in senso uscente, cioè dalla parte 1 verso la parte 2 (il contrario se studiamo l'equilibrio della parte 2).

Le componenti, *scalari*, di $\vec{R}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$ e di $\vec{M}_P^{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$ secondo n , si chiamano *sforzo normale* e *momento torcente*, rispettivamente, e si indicano con $N(P)$ e $M_t(P)$:

$$(7.3) \quad N(P) = \vec{R}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{n} \quad (\text{sforzo normale}),$$

$$(7.4) \quad M_t(P) = \vec{M}_P^{\text{int}, 2 \rightarrow 1} \cdot \vec{n} \quad (\text{momento torcente}).$$

I *vettori* componenti lungo il piano di sezione si chiamano, rispettivamente, *azione* o *sforzo di taglio* e *momento flettente* e si indicano con $\vec{T}(P)$ e $\vec{M}_f(P)$ rispettivamente:

$$(7.5) \quad \vec{T}(P) = \vec{R}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1} - N\vec{n} \quad (\text{sforzo di taglio}),$$

$$(7.6) \quad \vec{M}_f(P) = \vec{M}_P^{\text{int}, 2 \rightarrow 1} - M_t\vec{n} \quad (\text{momento flettente}).$$

Si noti, a scanso di equivoci, che lo sforzo normale e il momento torcente sono scalari, in quanto la direzione di n è ben definita; il taglio e il momento flettente sono invece vettori, in quanto non esiste una ben definita direzione tangente la sezione.

I nomi utilizzati sono significativi di per sé e non hanno bisogno di spiegazioni.

Se $N > 0$ la parte 1 è “tirata” dalla parte 2, altrimenti è “compressa”: si parla appunto di *trazione* e *compressione*. Notiamo che se consideriamo la parte 2, anziché la 1, $\vec{R}_{\text{int}, 1 \rightarrow 2}$ ha verso contrario a $\vec{R}_{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$ (principio di azione e reazione), ma anche n cambia verso, per cui N mantiene sempre lo stesso segno: si può parlare di sforzo normale e analogamente di momento torcente nella sezione, senza dover precisare di quale parte del rigido stiamo parlando. È per questo che di queste componenti si considera solo la parte scalare e non la componente vettoriale.

Per quanto riguarda il taglio e il momento flettente invece, non potendo, almeno nel caso generale, conoscere la direzione, si considera la componente vettoriale che, naturalmente, è opposta se passo dalla parte 1 alla parte 2.

7.3. Il caso dei rigidi piani, con carichi nel piano

Nel caso di un rigido 2D (lamina), che supporremo piano, limitiamoci a considerare casi in cui le forze agenti siano anch'esse nel piano, e consideriamo una sezione perpendicolare al piano stesso, che dunque taglia il rigido lungo un segmento o un'unione di segmenti.

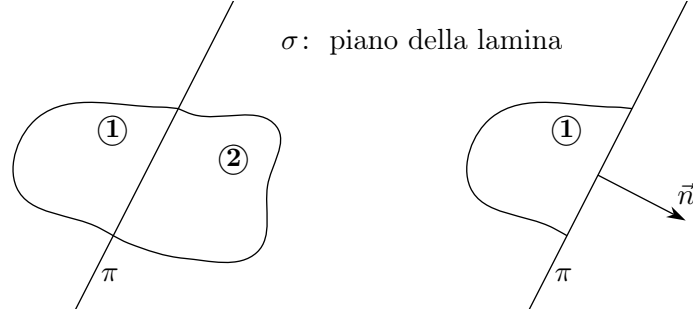


Figura 7.2. Sezione di un rigido 2D

Si ha, ovviamente,

$$(7.7) \quad \vec{R}^{\text{int},2 \rightarrow 1} = -\vec{R}^{\text{est}, \rightarrow 1} \in \sigma,$$

$$(7.8) \quad \vec{M}_P^{\text{int},2 \rightarrow 1} = -\vec{M}_P^{\text{est}, \rightarrow 1} \perp \sigma.$$

In questo caso il taglio sta necessariamente nel piano e dunque, dovendo essere ortogonale a $\vec{n}$, ne conosciamo la direzione (ma non il verso!). Se si sceglie il sistema di riferimento con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ nel piano, come è naturale, $\vec{k}$ è ortogonale al piano e possiamo considerare un versore $\vec{\tau}$ tale che

$$(7.9) \quad \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{k},$$

cioè la terna $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$ abbia la stessa orientazione di $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

In questo caso si chiama *componente di taglio* lo scalare

$$(7.10) \quad T(P) = \vec{R}^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\tau}.$$

Per quanto riguarda il momento delle forze $\vec{M}_P^{\text{int},2 \rightarrow 1}$, osserviamo che il momento torcente è nullo, in quanto essendo tutte le forze nel piano, il momento è perpendicolare al piano stesso e quindi a $\vec{n}$. Si considera poi la *componente del momento flettente* nella direzione di $\vec{k}$, data da

$$(7.11) \quad M_f(P) = \vec{M}_P^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{k}.$$

Analogamente a quanto fatto con il caso generale, se si considera la parte 2 anziché la 1, si sceglie $\vec{n}$ opposto e conviene scegliere anche $\vec{\tau}$ opposto. Si ha dunque, ancora, $\vec{\tau}' \wedge \vec{n}' = \vec{k}$. Dunque il segno della componente di taglio non varia (cambiano sia il verso di $\vec{R}^{\text{int},1 \rightarrow 2}$ che quello di $\vec{\tau}$), mentre il segno della componente del momento flettente è opposto ($\vec{M}_P^{\text{int},1 \rightarrow 2}$ è opposto, ma $\vec{k}$ rimane uguale).

7.4. Il caso dei rigidi piani in una dimensione, con carichi nel piano

Consideriamo ora il caso, particolarmente importante, dei rigidi 1D (aste, archi, ...), piani e con carichi contenuti nel piano. In questo caso si usa assumere nel rigido un sistema di ascisse curvilinee, con origine su uno dei due estremi del rigido stesso. Il versore $\vec{n}$ è ora il versore tangente al rigido, mentre $\vec{\tau}$ è normale al rigido stesso, nel suo piano. Si mantengono naturalmente valide tutte le considerazioni fatte per i rigidi 2D, solo che ora si può esprimere tutto in funzione dell'ascissa curvilinea s , da cui dipendono naturalmente $\vec{n}$ e $\vec{\tau}$, ma non $\vec{k}$

$$(7.12) \quad N(s) = \vec{R}^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{n}(s) \quad \text{sforzo normale}$$

$$(7.13) \quad T(s) = \vec{R}^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\tau}(s) \quad \text{componente di taglio}$$

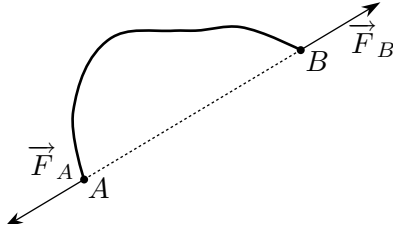
$$(7.14) \quad M_t(s) = \vec{M}^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{n}(s) = 0 \quad \text{momento torcente nullo}$$

$$(7.15) \quad M_f(s) = \vec{M}^{\text{int},2 \rightarrow 1} \cdot \vec{k} \quad \text{momento flettente}$$

Si badi bene che, come anche nel caso 2D, il momento torcente è nullo solo nell'ipotesi che le forze stiano nel piano del rigido. Analogo discorso per le componenti di taglio e flettente che hanno una direzione nota a priori solo nel caso di forze contenute nel piano del rigido.

7.4.1. Il caso di aste e archi “scarichi”

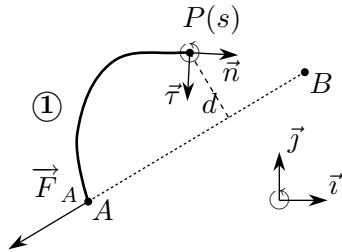
Consideriamo ora il caso, semplice ma frequente, di un arco con solo carichi concentrati sugli estremi.



È chiaro che l'arco può restare in equilibrio solo se le forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ agli estremi costituiscono una coppia di braccio nullo: $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$.

Figura 7.3. Arco scarico

Operiamo la solita sezione in due parti e teniamo conto delle (7.7) e (7.8).



$$N(s) = -\vec{F}_A \cdot \vec{n}(s) = \vec{F}_B \cdot \vec{n}(s)$$

$$T(s) = -\vec{F}_A \cdot \vec{\tau}(s) = \vec{F}_B \cdot \vec{\tau}(s)$$

$$M_f(s) = \vec{P} \wedge (-\vec{F}_A) \cdot \vec{k}$$

e quindi

$$|M_f(s)| = \|\vec{F}_A\| d(s)$$

Figura 7.4. Arco scarico e azioni interne

Quindi l'azione normale, quella di taglio e il momento flettente dipendono dal punto P in cui faccio la sezione e inoltre il momento flettente si annulla necessariamente agli estremi A e B ($d = 0$).

Nel caso (importante per le applicazioni) in cui gli "archi scarichi" siano addirittura rettilinei (aste scariche), si deve tenere conto che il versore $\vec{n}$ è costantemente diretto parallelamente all'asta, e quindi $\vec{\tau}$ è normale all'asta stessa. Se teniamo conto che deve aversi $\vec{F}_B = -\vec{F}_A \parallel \vec{n}$, se ne deduce che

$$\begin{aligned} N &= -\vec{F}_A \cdot \vec{n} \\ T &= -\vec{F}_A \cdot \vec{\tau} = 0 \\ M_f &= \|\vec{F}_A\|d = 0 \end{aligned}$$

Dunque in un'asta scarica le azioni interne si riducono solo alla componente normale (cioè parallela all'asta), che viene chiamata *azione assiale*, mentre il taglio e il momento flettente (oltreché quello torcente) si annullano. Inoltre l'azione assiale è costante in ogni punto dell'asta in quanto $\vec{n}$ è costante.

Se $N > 0$ si dice che l'asta è soggetta a trazione, mentre se $N < 0$ si dice che è soggetta a compressione. Per esprimere il fatto che le altre azioni interne si annullano, si dice che un'asta scarica si comporta da

tirante se $N > 0$;
puntone se $N < 0$.

Ribadiamo ancora una volta che tutte le considerazioni che abbiamo fatto nei casi 2D e 1D si applicano solo se i carichi appartengono allo stesso piano delle lamine o degli archi considerati.

8. Operatore d'inerzia

Anche in questo capitolo, come nei precedenti, considereremo solo sistemi particellari, per semplicità. Tutte le considerazioni fatte si applicano comunque anche a sistemi continui, con opportune sostituzioni di somme con integrali, come più volte indicato.

8.1. Generalità

Definizione 8.1. Dato un sistema di punti P di massa m_P , e considerata una retta r , si chiama momento di inerzia del sistema, rispetto a r , e si indica con $\mathcal{I}_r$, il numero non negativo

$$(8.1) \quad \mathcal{I}_r = \sum_P m_P (d(P))^2,$$

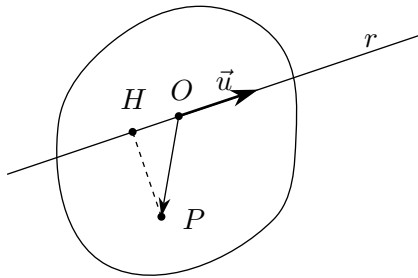
ove $d(P)$ è la distanza del generico punto P dalla retta r .

È ovvio che questo numero è non negativo e può essere nullo solo se tutti i punti P stanno sulla retta r .

La definizione 8.1 si applica a un sistema qualunque, anche non rigido, ma ha un interesse particolare nel caso di corpi rigidi e di rette r solidali al rigido stesso, quando $\mathcal{I}_r$ dipende esclusivamente dalla geometria delle masse costituenti il rigido, in rapporto alla retta r stessa.

Il momento di inerzia gioca un ruolo essenziale nello studio della meccanica dei sistemi e ne faremo uno studio abbastanza dettagliato. Ci interesserà in particolare studiare come varia il momento di inerzia al variare della retta r in una stella di rette di centro un punto O fissato.

8.2. L'operatore di inerzia



Dato il corpo (rigido) e un punto O , consideriamo una retta r per O e indichiamo con $\vec{u}$ uno dei suoi due versori. Sia poi P un punto generico del corpo.

È evidente che si ha $\overline{PH} = \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\|$. Allora

$$(8.2) \quad \mathcal{I}_r = \sum_P m_P \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\|^2 = \sum_P m_P [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}] \cdot [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}].$$

Applichiamo la proprietà del prodotto misto $\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$, con $\vec{a} = \vec{u}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{c} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}$ e otteniamo

$$(8.3) \quad \mathcal{J}_r = \sum_P m_P \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}] = \vec{u} \cdot \left\{ \sum_P m_P \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}] \right\}.$$

Ora consideriamo il vettore, in parentesi graffe nell'equazione (8.3),

$$\sum_P m_P \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}].$$

È evidente che esso, per un rigido fissato, dipende solo da $\vec{u}$ e dal punto O (in quanto segue il corpo sarà sempre rigido, la retta r una retta solidale al rigido e O un punto fisso sulla retta r).

Consideriamo allora la funzione

$$(8.4) \quad \mathbb{I}_O: \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3, \quad \mathbb{I}_O(\vec{v}) = \sum_P m_P \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}].$$

Mostreremo che si tratta di una trasformazione lineare di $\mathcal{V}_3$ in $\mathcal{V}_3$. Essa si chiama *trasformazione* o *operatore d'inerzia* relativo a O . Da quanto detto risulta ovvio che, se r è una retta per O , e $\vec{u}$ è uno dei suoi due versori, si ha

$$(8.5) \quad \mathcal{J}_r = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{u}).$$

Veniamo ora alle proprietà di $\mathbb{I}_O$.

1. $\mathbb{I}_O$ è *lineare*. Siano infatti $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}_3$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora

$$\mathbb{I}_O(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \mathbb{I}_O(\vec{v}) + \mu \mathbb{I}_O(\vec{w}),$$

come conseguenza immediata della definizione.

2. $\mathbb{I}_O$ è *simmetrico rispetto al prodotto scalare*, ovvero

$$\mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{w}), \quad \forall \vec{v}, \vec{w}.$$

Si ha infatti

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{w} &= \left[\sum_P m_P \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP}] \right] \cdot \vec{w} = \\ &= \left[\sum_P m_P \left[(\overrightarrow{OP}^2) \vec{v} - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}) \overrightarrow{OP} \right] \right] \cdot \vec{w} = \\ &= \sum_P \left[m_P \left[(\overrightarrow{OP}^2) \vec{v} - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}) \overrightarrow{OP} \right] \cdot \vec{w} \right] = \\ &= \sum_P m_P \left[(\overrightarrow{OP}^2) \vec{v} \cdot \vec{w} - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}) (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}) \right]. \end{aligned}$$

Siccome l'ultimo membro è simmetrico in $\vec{v}$ e $\vec{w}$, si deduce subito che

$$\mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \mathbb{I}_O(\vec{w}) \cdot \vec{v} \quad (= \vec{v} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{w})).$$

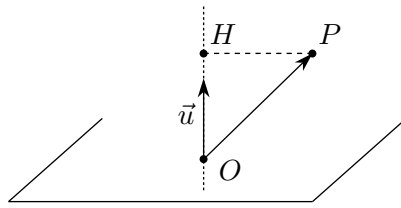
3. $\mathbb{I}_O$ è definito positivo, cioè

$$\mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0},$$

tranne nel caso di un rigido con tutti i punti su una stessa retta r , caso che diremo degenerare (e che per ora escludiamo). Per provarlo, attesa la linearità di $\mathbb{I}_O$, basta provarlo per un versore $\vec{u}$. Se infatti $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, si ha $\mathbb{I}_O(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda^2 \mathbb{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u}$ e $\lambda^2 > 0$. A questo punto per concludere è sufficiente ricordare che $\mathbb{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \mathcal{I}_r$ e $\mathcal{I}_r > 0$, tranne nel caso di punti tutti appartenenti alla stessa retta r .

La cosa si può comunque provare anche direttamente. Mettiamo $\vec{u}$ al posto di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nella formula (8.6) e otteniamo

$$\mathbb{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \sum_P m_P \left[\overrightarrow{OP}^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})^2 \right].$$



Si ha poi

$$|\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}| = \overline{OH},$$

e, per il teorema di Pitagora,

$$\overrightarrow{OP}^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})^2 = \overline{PH}^2.$$

8.3. La matrice di inerzia

Essendo l'operatore $\mathbb{I}_O$ lineare, fissata una base in $\mathcal{V}_3$, $\mathbb{I}_O$ ha una matrice di rappresentazione, che si chiama *matrice di inerzia* e che indicheremo ancora con $\mathbb{I}_O$ ⁽¹⁾.

Poichè lo spazio in cui operiamo è dotato di prodotto scalare, e la base che usiamo è sempre ortonormale, per determinare gli elementi della matrice $\mathbb{I}_O$ si può allora fare semplicemente

$$(8.7) \quad I_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_j).$$

La simmetria dell'operatore di inerzia ha come conseguenza la simmetria della matrice di rappresentazione $\mathbb{I}_O$:

$$(8.8) \quad I_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_j) = \mathbb{I}_O(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_i) = I_{ji}.$$

Se la terna scelta è solidale al rigido⁽²⁾, come succederà sempre nel seguito, gli elementi della matrice $\mathbb{I}_O$ non variano nel tempo, ma è ovvio che essi dipendono dalla scelta della base.

Gli elementi della diagonale principale

$$(8.9) \quad I_{ii} = \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_i)$$

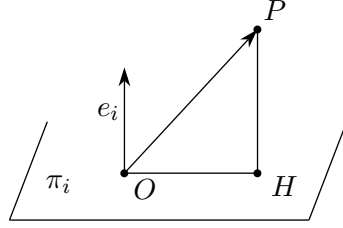
¹Si noti che se $\mathbb{I}_O$ è l'operatore di inerzia e $\vec{v}$ è un vettore si scrive $\mathbb{I}_O(\vec{v})$ per indicare il trasformato; se $\mathbb{I}_O$ è la matrice di inerzia e $\vec{v}$ è la terna delle componenti si scrive $\mathbb{I}_O \vec{v}$ (prodotto di matrici) per indicare la terna delle componenti del vettore trasformato.

²Si noti che altre volte abbiamo usato $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ per indicare la terna solidale. Qui usiamo invece la notazione "con indici" $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Del resto in questo contesto siamo interessati solo al rigido stesso e non al suo moto rispetto a una terna fissa.

sono, per definizione di momento di inerzia, i momenti di inerzia del sistema rispetto agli assi di riferimento.

Analizziamo gli elementi fuori diagonale. Si ha ($i \neq j$)

$$\begin{aligned}
 (8.10) \quad I_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_j) = \mathbb{I}_O(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \\
 &= \sum_P m_P \left[\overrightarrow{OP}^2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_i)(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_j) \right] \\
 &= - \sum_P m_P (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_i)(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_j).
 \end{aligned}$$



Consideriamo il piano π_i , ortogonale per O a $\vec{e}_i$ (cioè il piano degli altri due vettori di base). È chiaro che $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_i$ fornisce la componente di $\overrightarrow{OP}$ nella direzione orientata di $\vec{e}_i$, cioè la distanza con segno di P dal piano π_i (segno $+$ se P sta nel semipiano, individuato da π_i , che contiene $O + \vec{e}_i$, segno $-$ altrimenti), cioè la coordinata i -esima di P .

Se indichiamo con (x, y, z) le coordinate di P , si ha dunque

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_1 = x, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_2 = y, \quad \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_3 = z.$$

Se ne deduce che

$$(8.11) \quad I_{12} = - \sum_P m_P xy, \quad I_{23} = - \sum_P m_P yz, \quad I_{13} = - \sum_P m_P xz.$$

Analogamente è immediato che

$$(8.12) \quad I_{11} = \sum_P m_P (y^2 + z^2), \quad I_{22} = \sum_P m_P (x^2 + z^2), \quad I_{33} = \sum_P m_P (x^2 + y^2).$$

Si tenga presente che, in molti testi, nella matrice di inerzia si considerano gli opposti di I_{12} , I_{13} , I_{23} .

Gli elementi fuori diagonale si chiamano *momenti deviatori* o *momenti centrifughi* rispetto alla coppia π_i, π_j di piani ortogonali a $\vec{e}_i, \vec{e}_j$.

8.3.1. Il caso piano

Se il rigido è piano (lamina) conviene scegliere la terna di riferimento con due assi (x e y) nel piano. Si ha allora

$$\begin{aligned}
 (8.13) \quad I_{11} &= \sum_P m_P y^2, \quad I_{22} = \sum_P m_P x^2, \quad I_{33} = \sum_P m_P (x^2 + y^2) = I_{11} + I_{22}, \\
 I_{13} &= I_{23} = 0, \quad I_{12} = - \sum_P m_P xy.
 \end{aligned}$$

Dunque la matrice di inerzia è del tipo

$$(8.14) \quad \mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix}$$

8.4. Ellissoide di inerzia

Considerata una retta r e uno dei suoi versori, $\vec{u}$, indichiamo con α, β, γ le componenti (coseni direttori) di $\vec{u}$. Si ha allora

$$(8.15) \quad \mathcal{J}_r = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \\ = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2I_{12}\alpha\beta + 2I_{13}\alpha\gamma + 2I_{23}\beta\gamma.$$

Questa formula fornisce il momento di inerzia rispetto a una retta qualunque per O , nota la matrice di inerzia e i coseni direttori della retta stessa.

Su ogni retta (orientata) uscente da O consideriamo ora il punto L dato da⁽³⁾

$$(8.16) \quad \overline{OL} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}_r}} \quad (= d).$$

Le coordinate di L sono date da $L = (d\alpha, d\beta, d\gamma)$ e per trovare il luogo dei punti L al variare della retta r , basterà sostituire

$$\alpha = \frac{x}{d}, \quad \beta = \frac{y}{d}, \quad \gamma = \frac{z}{d}$$

nell'espressione di $\mathcal{J}_r$ data da (8.15). Si ottiene facilmente

$$(8.17) \quad I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz = 1.$$

Si tratta dunque di una quadrica dello spazio che, avendo tutti i punti al finito per la definizione di OL ($\mathcal{J}_r \neq 0$ per l'ipotesi che abbiamo fatto di non considerare il caso degenere), non può che essere un ellissoide, detto *ellissoide di inerzia relativo a O* . Noto l'ellissoide di inerzia e considerata una retta r per O che interseca l'ellissoide in due punti L_1 e L_2 , il momento di inerzia rispetto a r si trova subito come

$$(8.18) \quad \mathcal{J}_r = \frac{1}{\overline{OL}^2}.$$

Notiamo che, considerata la funzione

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz,$$

l'ellissoide è la superficie di livello 1 di questa funzione, che è chiaramente una forma quadratica.

Si possono sfruttare tutte le note proprietà di queste forme quadratiche, in particolare il fatto che ogni ellissoide ha, almeno, 3 assi di simmetria tra loro ortogonali e che, se si assumono questi come assi di riferimento con l'origine in O , l'equazione dell'ellissoide si riduce a forma canonica, ovvero la matrice di inerzia si diagonalizza. In questo caso gli elementi della diagonale principale saranno indicati con J_1, J_2, J_3 :

$$(8.19) \quad \mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}.$$

³Ricordiamo che abbiamo, per ora, escluso il caso di un rigido allineato.

L'equazione dell'ellissoide diventa, semplicemente,

$$(8.20) \quad J_1 x^2 + J_2 y^2 + J_3 z^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{1}{J_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{J_2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{J_3}} = 1.$$

Dai semiassi dell'ellissoide si possono dunque subito ricavare i momenti di inerzia J_1, J_2, J_3 , detti *momenti principali di inerzia*. Gli assi dell'ellissoide si chiamano *assi principali di inerzia* e la terna di questi assi *terna principale di inerzia* (relativa a O).

8.5. Operatore di inerzia e autovalori

Indicati con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori della terna principale di inerzia, e con le notazioni e definizioni introdotte si ha subito

$$(8.21) \quad \mathbb{I}_O(\vec{i}) = J_1 \vec{i}, \quad \mathbb{I}_O(\vec{j}) = J_2 \vec{j}, \quad \mathbb{I}_O(\vec{k}) = J_3 \vec{k},$$

basta, per calcolare $\mathbb{I}_O(\vec{i})$ per esempio, usare la terna principale di inerzia:

$$\mathbb{I}_O(\vec{i}): \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le (8.21) affermano che i versori della terna principale di inerzia sono autovettori dell'operatore di inerzia e che $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \mathbb{J}_3$ sono i rispettivi autovalori.

La ricerca degli assi principali di inerzia è dunque un problema agli autovalori. Data una terna qualunque e considerata la matrice di inerzia relativa a quella terna, $\mathbb{I}_O$, si risolve il problema agli autovalori per $\mathbb{I}_O$

$$(8.22) \quad \det(\mathbb{I}_O - \lambda I_3) = 0,$$

dove I_3 è la matrice identica 3×3 . Considerata la simmetria dell'operatore di inerzia si può concludere che i tre autovalori sono sempre tutti tre reali (eventualmente coincidenti) e che si possono presentare solo i seguenti casi:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$: in questo caso esiste una sola terna principale di inerzia e l'ellissoide di inerzia non è un ellissoide di rotazione.
2. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$: in questo caso la direzione individuata dall'autovettore corrispondente all'autovalore λ_3 è asse principale di inerzia (ed è di solito detta *asse di figura*). Una qualunque direzione per O nel piano perpendicolare all'asse di figura è asse principale di inerzia. Questo piano è anche detto spesso *piano equatoriale*. L'ellissoide di inerzia è rotondo con asse di rotazione coincidente con l'asse di figura.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: una qualunque terna centrata in O è principale di inerzia e l'ellissoide di inerzia è una sfera.

8.6. Il caso di un rigido rettilineo

In questo caso l'operatore di inerzia non è definito positivo. Tuttavia si possono ripetere sostanzialmente le stesse considerazioni precedenti, con opportuni adattamenti. In particolare se si prende una terna con $\vec{k}$ parallelo all'asse che contiene il rigido, si ottiene subito

che essa è principale di inerzia e che l'ellissoide di inerzia degenera in un cilindro (si può ottenere al limite per $J_3 \rightarrow 0$) circolare

$$(8.23) \quad \frac{x^2}{\frac{1}{J}} + \frac{y^2}{\frac{1}{J}} = 1, \quad (J_1 = J_2 = J \text{ per simmetria}).$$

8.7. Ricerca di una terna principale di inerzia

Il metodo più efficiente per la ricerca di una terna principale di inerzia (cosa di grande importanza nelle applicazioni) è quello di risolvere il problema agli autovalori⁽⁴⁾. Tuttavia esistono alcune situazioni in cui la ricerca è facilitata da particolari considerazioni. Ne tratteremo due.

Se è già noto un asse principale di inerzia

Prendiamo una terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$, con $\vec{k}$ parallelo all'asse principale di inerzia già noto e calcoliamo la matrice $\mathbb{I}_O$ rispetto a questa terna. Poiché $\vec{k}$ è autovettore di $\mathbb{I}_O$, si deve avere $\mathbb{I}_O \vec{k} = J_3 \vec{k}$. Usando la matrice $\mathbb{I}_O$ si avrà allora

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = J_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

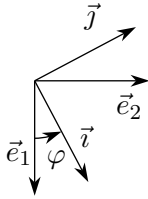
ovvero

$$\begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{I}_O$ ha dunque una forma più semplice rispetto al caso generale

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}.$$

Se per caso $I_{12} = 0$ abbiamo già una terna principale di inerzia. Se invece $I_{12} \neq 0$ andiamo a cercare una terna $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ in modo che, rispetto a essa, I_{12} , che possiamo indicare con I'_{12} , sia nullo. Teniamo conto che $I'_{12} = \vec{i} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{j})$. Per trovare $\vec{i}$ e $\vec{j}$ usiamo la matrice che già abbiamo e la terna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$. Dovremo scrivere le componenti di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ in questa terna.



$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \vec{j} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

$\vec{k}$ è perpendicolare al piano del foglio e di verso uscente.

Allora

$$I'_{12} = (\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

⁴Attenzione: l'equazione agli autovalori è di 3° grado e non è detto che sia di facile risoluzione.

$$\begin{aligned}
&= (\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0) \begin{pmatrix} -I_{11} \sin \varphi + I_{12} \cos \varphi \\ -I_{12} \sin \varphi + I_{22} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= -I_{11} \cos \varphi \sin \varphi + I_{12} \cos^2 \varphi - I_{12} \sin^2 \varphi + I_{22} \sin \varphi \cos \varphi
\end{aligned}$$

Uguagliano a zero si trova

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{I_{11} - I_{22}}{2I_{12}},$$

ottenendo il valore di φ e quindi la terna richiesta.

Proprietà di simmetria materiale

Un piano si dice di *simmetria materiale* per un corpo se il corpo è invariante per riflessione rispetto al piano. Se un tal piano esiste, ogni asse perpendicolare al piano è principale di inerzia. Se infatti $\vec{k}$ è perpendicolare al piano e $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sono due versori ortogonali nel piano, calcoliamo $\mathbb{I}_O$ rispetto a questa terna e verifichiamo che $\vec{k}$ è un autovettore di $\mathbb{I}_O$. Si ha

$$\mathbb{I}_O(\vec{k}): \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}.$$

Ma $I_{33} = -\sum m_P xz$. Se il piano xy è di simmetria, a ogni punto P in un semispazio corrisponde un punto P' nel semispazio opposto, che ha dunque stesso x e y , ma z opposto: la somma precedente è nulla. Allo stesso modo si prova che $I_{23} = 0$. Dunque

$$\mathbb{I}_O(\vec{k}): \mathbb{I}_O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\vec{k}$ è autovettore e I_{33} è momento principale di inerzia.

Se dunque un solido ha simmetrie è possibile trovare a priori uno o più assi principali di inerzia.

8.8. Il teorema di Huygens-Steiner

Se G è il centro di massa di un rigido, l'ellissoide di inerzia relativo a G si chiama *ellissoide centrale di inerzia*. Il teorema di Huygens-Steiner lega il momento di inerzia rispetto a un asse qualunque al momento di inerzia rispetto alla parallela a questo asse condotta per il centro di massa (o baricentro, per corpi non troppo estesi). Precisamente

Teorema 8.2 (Huygens-Steiner). *Se r_O ed r_G sono due parallele, passanti rispettivamente per un punto O e per il baricentro G di un rigido, e M è la massa totale del rigido, si ha*

$$(8.24) \quad \mathcal{I}_{r_O} = \mathcal{I}_{r_G} + M d^2(r_O, r_G),$$

ove $d(r_O, r_G)$ è la distanza tra le due rette parallele r_O ed r_G .

Dimostrazione.

$$\mathbb{I}_O(\vec{u}) = \sum \left(m_P \overrightarrow{OP} \wedge [\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}] \right) =$$

$$= \sum \left(m_P \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} \right) \wedge \left[\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} \right) \right] \right) =$$

(applicando due volte la proprietà distributiva)

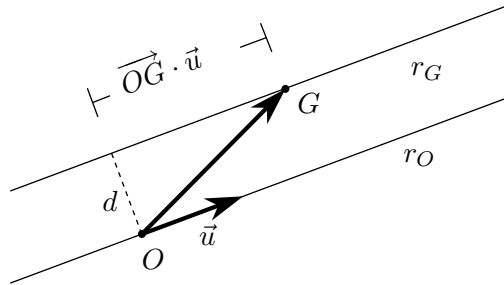
$$\begin{aligned} &= \sum \left(m_P \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] \right) + \sum \left(m_P \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP} \right] \right) + \\ &\quad + \sum \left(m_P \overrightarrow{GP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] \right) + \sum \left(m_P \overrightarrow{GP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP} \right] \right) = \\ &= \left(\sum m_P \right) \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] + \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \sum \left(m_P \overrightarrow{GP} \right) \right] + \\ &\quad + \left(\sum m_P \overrightarrow{GP} \right) \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] + \sum \left(m_P \overrightarrow{GP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP} \right] \right) = \\ &= M \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] + \mathbb{I}_G(\vec{u}), \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto della formula (2.32) e della definizione (8.4) di operatore di inerzia relativo a un punto.

Moltiplichiamo ora scalarmente per $\vec{u}$ e otteniamo

$$\begin{aligned} J_{r_O} &= \vec{u} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{u}) = \mathbb{I}_O(\vec{u}) \cdot \vec{u} = \\ &= \mathbb{I}_G(\vec{u}) \cdot \vec{u} + M \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right] \cdot \vec{u} = \\ &= J_{r_G} + M \left[\left(\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OG} \right) \vec{u} - \left(\overrightarrow{OG} \cdot \vec{u} \right) \overrightarrow{OG} \right] \cdot \vec{u} = \\ &= J_{r_G} + M \left[\overrightarrow{OG}^2 - \left(\overrightarrow{OG} \cdot \vec{u} \right)^2 \right] = J_{r_G} + M d^2, \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la figura a lato.



□

9. Cenni di cinematica delle masse

9.1. Definizioni

Quantità di moto

Dato un punto P di massa m e velocità $\vec{v}$, si chiama *quantità di moto* di P il vettore

$$(9.1) \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Nel caso di un sistema di punti (che, al solito, supporremo particellare solo per semplicità), si chiama *quantità di moto* la somma delle quantità di moto dei singoli punti

$$(9.2) \quad \vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i.$$

Momento angolare

Dato un punto P di massa m e velocità $\vec{v}$, e considerato un punto (“polo”) O , si chiama *momento angolare* o *momento delle quantità di moto*, rispetto al polo O , il vettore

$$(9.3) \quad \vec{l}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{p}.$$

Nel caso di un sistema di punti (che, come prima, supporremo particellare solo per semplicità), si chiama *momento angolare* del sistema il vettore

$$(9.4) \quad \vec{L}_O = \sum \overrightarrow{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum \overrightarrow{OP}_i \wedge \vec{p}_i.$$

Se a è una retta orientata, di versore $\vec{u}$, e O un suo punto, come sappiamo la componente di $\vec{L}_O$ rispetto alla retta a non dipende dal polo O , e potremo chiamarla *momento angolare rispetto all'asse*:

$$(9.5) \quad L_a = \vec{L}_O \cdot \vec{u}.$$

Energia cinetica

Sempre nelle stesse ipotesi di punto P di massa m e velocità $\vec{v}$, lo scalare

$$(9.6) \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

prende il nome di *energia cinetica* o *forza viva* del punto.

Al solito, per un sistema di punti l'energia cinetica sarà la somma delle energie cinetiche dei singoli punti:

$$(9.7) \quad K = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

9.2. Nuova forma delle equazioni cardinali

Tenendo conto della definizione di centro di massa di un sistema di punti

$$(9.8) \quad M\vec{OG} = \sum m_i \vec{OP}_i,$$

si trova subito, per derivazione rispetto al tempo,

$$(9.9) \quad M\vec{v}_G = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P}.$$

Se ne deduce, per ulteriore derivazione, che

$$(9.10) \quad \dot{\vec{P}} = M\vec{a}_G,$$

e quindi che la prima equazione cardinale della dinamica si può scrivere in una delle forme

$$(9.11) \quad \vec{R}^e = \dot{\vec{P}},$$

oppure

$$(9.12) \quad \vec{R}^e = M\vec{a}_G.$$

Passiamo ora a calcolare la derivata temporale del momento della quantità di moto, tenendo conto che, se $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$, si ha $\dot{\vec{AB}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_O &= \sum ((\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{a}_i) = \\ &= \sum (\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i) - \sum (\vec{v}_O \wedge m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{a}_i) = \\ &= \vec{0} - \vec{v}_O \wedge \sum (m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{a}_i) = \\ &= \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{a}_i) - \vec{v}_O \wedge M\vec{v}_G. \end{aligned}$$

Se teniamo conto poi della seconda equazione cardinale della dinamica

$$\vec{M}_O^e = \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{a}_i),$$

ne deduciamo

$$(9.13) \quad \vec{M}_O^e = \dot{\vec{L}}_O + \vec{v}_O \wedge M\vec{v}_G.$$

Se poi O è *fisso* o *coincidente con il baricentro* si ha, semplicemente,

$$(9.14) \quad \vec{M}_O^e = \dot{\vec{L}}_O,$$

forma particolarmente significativa della seconda equazione cardinale della dinamica, dove si manifesta una perfetta simmetria con la forma (9.11) della prima equazione cardinale della dinamica.

9.3. Il caso dei corpi rigidi

Sia l'espressione di $\vec{L}_O$ che quella di K assumono una forma particolare, e molto importante ai fini delle applicazioni, nel caso di corpi rigidi.

In questo caso, scelto O appartenente al rigido, vale la formula di Poisson

$$(9.15) \quad \vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_i.$$

Momento delle quantità di moto di un rigido

Da (9.15) segue

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = \sum (\vec{OP}_i \wedge m_i (\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_i)) = \\ &= \sum (m_i \vec{OP}_i \wedge \vec{v}_O) + \sum (m_i \vec{OP}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}_i)) = \\ &= M\vec{OG} \wedge \vec{v}_O + \mathbb{I}_O(\vec{\omega}), \end{aligned}$$

cioè

$$(9.16) \quad \vec{L}_O = M\vec{OG} \wedge \vec{v}_O + \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) \quad (O \in \text{rigido}),$$

che esprime il momento delle quantità di moto di un rigido rispetto a un punto O del rigido stesso.

Se ci interessa $\vec{L}_\Omega$ rispetto a un punto non appartenente al rigido, potremo usare la usuale formula di trasporto

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_O + \vec{\Omega O} \wedge M\vec{v}_G,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la risultante delle quantità di moto è, come già visto, $M\vec{v}_G$.

Se il polo O è fisso o coincidente con il baricentro la (9.16) si riduce a

$$(9.17) \quad \vec{L}_O = \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) \quad (O \in \text{rigido}, O \text{ fisso oppure } O \equiv G).$$

Nel caso che la terna solidale di origine O sia terna principale di inerzia relativa a O , indicando (vedi l'equazione (4.25) nella pagina 50) con p, q, r le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto a questa terna, l'espressione (9.17) si può scrivere⁽¹⁾

$$(9.18) \quad \vec{L}_O = J_1 p \vec{i} + J_2 q \vec{j} + J_3 r \vec{k}.$$

Se il rigido ha un *asse fisso*, scelto O sull'asse, si ha $\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \vec{k}$ (ϑ orientato in “senso antiorario”). Possiamo allora semplificare l'espressione di $\vec{L}_O$ come segue.

$$(9.19) \quad \vec{L}_O = \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) = \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} =$$

¹In molti testi i momenti principali di inerzia si indicano A, B, C , per cui la formula (9.18) si trova scritta nella forma

$$\vec{L}_O = A p \vec{i} + B q \vec{j} + C r \vec{k}.$$

$$= \begin{pmatrix} I_{13}\dot{\vartheta} \\ I_{23}\dot{\vartheta} \\ I_{33}\dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13}\vec{i} + I_{23}\vec{j} + I_{33}\vec{k} \end{pmatrix} \dot{\vartheta}.$$

La componente di $\vec{L}_O$ rispetto all'asse è semplicemente

$$(9.20) \quad L_a = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = I_{33}\dot{\vartheta} = \mathcal{J}\dot{\vartheta},$$

dove abbiamo indicato semplicemente con $\mathcal{J}$ il momento di inerzia rispetto all'asse fisso.

Se l'asse fisso è asse principale di inerzia allora $I_{13} = I_{23} = 0$ e il momento delle quantità di moto rispetto a un punto dell'asse fisso è

$$(9.21) \quad \vec{L}_O = I_{33}\dot{\vartheta}\vec{k} = \mathcal{J}\vec{\omega}.$$

Nel caso di una *lamina piana* che si muove nel suo piano, assunto come polo G e osservato che l'asse per G perpendicolare al piano è principale di inerzia, si ottiene

$$(9.22) \quad \vec{L}_G = \mathcal{J}\vec{\omega}.$$

Energia cinetica per un rigido

Esaminiamo ora, sempre usando la formula di Poisson, l'espressione che assume l'energia cinetica per un rigido.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum (m_i \vec{v}_i^2) = \frac{1}{2} \sum \left(m_i \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right) \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum (m_i \vec{v}_O^2) + \sum \left(m_i \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(m_i \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) \vec{v}_O^2 + \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \sum \left(m_i \overrightarrow{OP_i} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\left(\vec{\omega} \wedge m_i \overrightarrow{OP_i} \right) \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 + \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge M \overrightarrow{OG} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum \left(m_i \overrightarrow{OP_i} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_i} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}), \end{aligned}$$

cioè

$$(9.23) \quad K = \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}).$$

Se il punto O è *fisso* si ottiene

$$(9.24) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O.$$

Se la terna solidale è principale di inerzia relativa a O l'equazione (9.24) assume, tenendo conto anche di (9.18) e usando le componenti di $\vec{\omega}$ nella terna solidale, la forma seguente

$$(9.25) \quad K = \frac{1}{2} (J_1 p^2 + J_2 q^2 + J_3 r^2),$$

che spesso si trova scritta (vedi nota 1 nella pagina 91)

$$(9.26) \quad K = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Se $O \equiv G$ la formula (9.23) diventa

$$(9.27) \quad K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_G,$$

dove, per il secondo addendo, avremo ancora una formula del tipo (9.26), pur di intendere i momenti principali di inerzia relativi al baricentro, anziché a un polo O generico.

Se il corpo rigido ha un asse fisso si ha semplicemente

$$(9.28) \quad K = \frac{1}{2} \dot{\vartheta} \vec{k} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \mathcal{J} \dot{\vartheta}^2$$

ove $\mathcal{J}$ è il momento di inerzia rispetto all'asse (anche se non è principale di inerzia).

10. Sistemi conservativi

Lo studio dei campi di forze conservativi e le condizioni analitiche coinvolte sono già state oggetto di studio nel corso di analisi, e qui ne considereremo solo i risultati che interessano esplicitamente questo corso.

10.1. Campi conservativi - Energia potenziale

Un campo di forze posizionali è una funzione (di classe almeno $C^{(2)}$) di un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$

$$(10.1) \quad \vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x})) .$$

F_1, F_2, F_3 sono le componenti della forza rispetto al sistema di coordinate (ortogonali) di cui indichiamo con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i versori degli assi.

Un campo di forze posizionali si dice *conservativo* se esiste una funzione

$$(10.2) \quad U: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$(10.3) \quad \vec{F}(\vec{x}) = -\text{grad}(U(\vec{x})) = -\sum \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} \vec{e}_i,$$

o, il che è la stessa cosa,

$$(10.4) \quad F_1(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_1}, \quad F_2(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_2}, \quad F_3(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_3}.$$

La funzione U si chiama *energia potenziale*. Le formule (10.3) oppure (10.4) esprimono il fatto che il lavoro del campo di forze è il differenziale di $-U$. Come è noto una tal funzione esiste se e solo se il lavoro del campo di forze è indipendente dal percorso, e dipende solo dalle posizioni iniziale e finale⁽¹⁾.

Ricordiamo che Condizione necessaria perchè un campo di forze sia conservativo è che $\text{rot } \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$, condizione che si può esprimere nelle componenti utilizzando un determinante simbolico simile a quello che si usa nel prodotto vettoriale

$$(10.5) \quad \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Come è noto la condizione di irrotazionalità è anche sufficiente se l'insieme di definizione del campo di forze è semplicemente connesso.

¹Segnaliamo che, abitualmente, nei testi di analisi si considera la funzione $V = -U$, cioè una funzione il cui gradiente è esattamente il campo di forze, e a questa funzione si dà il nome di *potenziale*. In meccanica si preferisce considerare la funzione U , dandole il nome di *energia potenziale* perchè, come vedremo, essa consente di scrivere l'energia totale dei sistemi meccanici conservativi come *somma* di energia cinetica ed energia potenziale: $E = K + U$; usando V si avrebbe invece $E = K - V$

10.2. Esempi di forze conservative

Proponiamo alcuni esempi di campi di forza conservativi, scelti tra quelli più comuni nelle applicazioni che faremo.

Forze costanti - forza peso

Sono forze la cui espressione analitica è del tipo

$$(10.6) \quad \vec{F}(\vec{x}) = c\vec{u} \quad (c \text{ costante e } \vec{u} \text{ versore costante}).$$

Esse sono conservative e hanno energia potenziale data da

$$(10.7) \quad U(\vec{x}) = -c\vec{u} \cdot \vec{x},$$

come è immediato constatare.

L'esempio più importante di questo tipo di forze è quello della forza peso. Se $Oxyz$ è un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) e z è *verticale ascendente*, consideriamo un punto P di massa m , o un rigido di baricentro G e massa m (ricordiamo che la forza peso si può pensare applicata nel baricentro anche agli effetti del calcolo del lavoro). Si ha allora

$$(10.8) \quad \vec{F} = -mg\vec{k},$$

e quindi

$$(10.9) \quad U = mg\vec{k} \cdot \vec{OG} = mgz_G.$$

Forze elastiche di centro fisso

Sono forze del tipo

$$(10.10) \quad \vec{F} = -k\varrho\vec{u},$$

essendo $k > 0$ una costante ("costante elastica"), ϱ la distanza tra il centro fisso O e il punto P di applicazione della forza, $\vec{u}$ il versore di $\vec{OP}$.

Esse sono conservative e hanno energia potenziale data da

$$(10.11) \quad U = \frac{1}{2}k\varrho^2.$$

Più in generale ogni campo di forze centrali, se posizionale, è conservativo. Un tal campo di forze si può sempre scrivere nella forma

$$(10.12) \quad \vec{F} = f(\varrho)\vec{u},$$

con lo stesso significato dei simboli della formula (10.10).

In questo caso l'energia potenziale è data da

$$(10.13) \quad U(\varrho) = - \int f(\varrho) d\varrho,$$

formula di cui la (10.11) è un caso particolare.

Forza elastica con centro nella proiezione del suo punto di applicazione su una retta fissa

Detto P il punto di applicazione della forza e H la sua proiezione sulla retta fissa r data, la forza in questione è del tipo

$$(10.14) \quad \vec{F} = -k\overrightarrow{HP}.$$

Anche le forze di questo tipo sono conservative, con energia potenziale data da

$$(10.15) \quad U = \frac{1}{2}k\overrightarrow{HP}^2.$$

Coppia di forze elastiche tra due punti del sistema

Detti A e B i due punti del sistema, le due forze elastiche sono date da

$$(10.16) \quad \vec{F}_A = -k\overrightarrow{BA}, \quad \vec{F}_B = -k\overrightarrow{AB}.$$

Anche queste forze sono conservative e, detta d la distanza tra i due punti A e B , l'energia potenziale *complessiva* della coppia di forze è

$$(10.17) \quad U = \frac{1}{2}kd^2.$$

10.3. Sollecitazioni conservative nei sistemi olonomi

Se il sistema materiale in esame è soggetto a vincoli olonomi, e le forze sono conservative, l'energia potenziale si può esprimere in funzione delle coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \dots, q_N$ e si può concludere facilmente che per le componenti lagrangiane della sollecitazione si deve avere

$$(10.18) \quad Q_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h},$$

in perfetta analogia con quanto succede per le componenti cartesiane del campo di forza (vedi l'equazione (10.4)).

La condizione di irrotazionalità, necessaria perchè la sollecitazione sia conservativa, si può scrivere

$$(10.19) \quad \frac{\partial Q_h}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_h}.$$

10.4. Sollecitazioni conservative ed equilibrio

Sulla base di quanto detto è immediato concludere che, se un sistema materiale è soggetto solo a forze conservative, e U è l'energia potenziale totale, una posizione è di equilibrio se e solo se è un punto di stazionarietà dell'energia potenziale, ovvero, nel caso di sistemi olonomi,

$$(10.20) \quad \frac{\partial U}{\partial q_h} = 0.$$

L'uso dell'energia potenziale (se la sollecitazione è conservativa) permette anche di valutare la stabilità o meno dell'equilibrio: una posizione è di equilibrio *stabile* se e solo se l'energia potenziale ha un minimo nella posizione di equilibrio.

11. Equazioni di Lagrange

11.1. Relazione ed equazione simbolica della dinamica

Riprendiamo in esame l'equazione fondamentale della dinamica del punto (equazione di Newton, vedi (5.1) nella pagina 59)

$$(11.1) \quad \vec{F} + \vec{\Phi} = m\vec{a},$$

e scriviamola nella forma, assolutamente equivalente,

$$(11.2) \quad (\vec{F} - m\vec{a}) + \vec{\Phi} = \vec{0}.$$

In sostanza quest'ultima scrittura trasforma l'equazione della dinamica in un'equazione di statica, in cui però alle forze attive $\vec{F}$ si sostituisce la differenza $\vec{F} - m\vec{a}$. La quantità $-m\vec{a}$ è detta *forza d'inerzia*, o *di massa*, e allora si può enunciare il seguente

Teorema 11.1 (Principio di d'Alembert). *Se il moto non modifica le modalità di realizzazione delle forze attive e delle reazioni vincolari, le equazioni di moto si ottengono da quelle di equilibrio sostituendo le forze attive con la somma tra le forze attive e le forze d'inerzia⁽¹⁾.*

Nel caso di vincoli lisci, indicando con δL^m il lavoro virtuale delle forze d'inerzia, si deduce che il principio dei lavori virtuali diventa

$$(11.3) \quad \delta L^a + \delta L^m \leq 0,$$

e costituisce la condizione di “equilibrio” dinamico per i sistemi a vincoli lisci, cioè la condizione caratteristica per determinare il moto di un sistema, condizione che viene detta *Relazione simbolica della dinamica*.

Nel caso di vincoli bilateri si ottiene

$$(11.4) \quad \delta L^a + \delta L^m = 0,$$

equazione che viene detta *Equazione simbolica della dinamica*.

11.2. Il caso dei vincoli olonomi

Riprendiamo in esame l'equazione (11.4) nel caso di un sistema soggetto a vincoli olonomi: se ne otterrà una forma particolarmente significativa e importante per gli sviluppi della meccanica.

¹In alcuni testi questa somma tra le forze attive e le forze d'inerzia è chiamata *forza perduta*, in quanto dall'equazione (11.2) si deduce che se non ci fossero i vincoli $\vec{F} - m\vec{a}$ sarebbe zero, ovvero tutta la forza attiva sarebbe spesa per imprimere moto, invece a causa dei vincoli presenti $\vec{F} - m\vec{a}$ è, per così dire, “perduta” ai fini del moto e serve per controbilanciare la presenza dei vincoli

Si ha, in questo caso,

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta L^a + \delta L^m = \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \delta \vec{P}_i = \\
 &= \sum_i \left(\left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \sum_h \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_i \left(\sum_h \left(\left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) \right) = \\
 &= \sum_h \left(\sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} - m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \right) \delta q_h \right) = \sum_h (Q_h - \tau_h) \delta q_h,
 \end{aligned}$$

ove abbiamo posto, come in statica,

$$(11.5) \quad Q_h = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h},$$

e inoltre

$$(11.6) \quad \tau_h = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h}.$$

L'arbitrarietà dei δq_h produce subito

$$(11.7) \quad Q_h = \tau_h,$$

equazioni che caratterizzano il moto del sistema e che sostituiscono, nel caso dinamico, le $Q_h = 0$ che erano caratteristiche dell'equilibrio.

11.3. Equazioni di Lagrange

La cosa particolarmente importante relativamente alle equazioni (11.7) è che le τ_h si possono esprimere in una forma notevole, che coinvolge solo l'energia cinetica del sistema.

Precisamente si prova che

$$(11.8) \quad \tau_h = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_h}.$$

Dunque le equazioni di moto (11.7) si scrivono nella forma

$$(11.9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h,$$

dette *Equazioni di Lagrange* o anche *Equazioni di Lagrange non conservative*.

Se le forze sono conservative si ha

$$Q_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

Poichè

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0,$$

in quanto U non può dipendere dalle $\dot{q}_h$, posto

$$(11.10) \quad \mathcal{L} = K - U$$

si ottiene

$$(11.11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0,$$

dette *Equazioni di Lagrange conservative*.

La funzione $\mathcal{L}$ prende il nome di *funzione lagrangiana* o anche *potenziale cinetico* del sistema.

Vale il seguente importante teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema 11.2. *Le equazioni di Lagrange formano un sistema di N equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine, che può essere sempre posto in forma normale rispetto alle derivate seconde delle q_h (componenti lagrangiane dell'accelerazione)*

$$(11.12) \quad \ddot{q}_h = f_h(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) \quad h = 1, 2, \dots, N.$$

Ne segue che, con le opportune condizioni di regolarità per le forze e i vincoli, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h \\ q_h(0) = q_{h,0} \\ \dot{q}_h(0) = \dot{q}_{h,0} \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione (determinismo della meccanica classica).

11.4. Energia cinetica di un sistema olonomo

Poiché l'energia cinetica di un sistema olonomo interviene “pesantemente” nella determinazione delle equazioni di moto, è opportuno esaminarne l'espressione esplicita. Si ha, se O è un punto fisso,

$$\overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OP}_i(q_1, q, \dots, q_N, t),$$

e

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OP}_i}{dt} = \sum_{h=1}^N \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial t}.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i (m_i \vec{v}_i^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i \left(\sum_{h,k} \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + 2 \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial t} \cdot \sum_h \frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}_i}{\partial t} \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

che scriveremo

$$(11.13) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_h b_h \dot{q}_h + d = K_2 + K_1 + K_0,$$

ove abbiamo operato uno scambio di sommatorie su i e su h, k e abbiamo posto

$$(11.14) \quad a_{hk} = \sum_i m_i \frac{\partial \overrightarrow{OP_i}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP_i}}{\partial q_k},$$

$$(11.15) \quad b_h = \sum_i m_i \frac{\partial \overrightarrow{OP_i}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OP_i}}{\partial q_h},$$

$$(11.16) \quad d = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP_i}}{\partial t} \right)^2.$$

Dunque K è un polinomio di secondo grado nelle derivate delle coordinate lagrangiane. Se i vincoli non dipendono dal tempo K si riduce a K_2 , che è dunque una forma quadratica definita positiva, a coefficienti che non dipendono dal tempo.

11.5. Teorema dell'energia cinetica o delle forze vive

Data una forza $\overrightarrow{F}$ si chiama *potenza istantanea* di $\overrightarrow{F}$ il prodotto

$$(11.17) \quad \Pi(t) = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v}.$$

Per un sistema di forze basterà considerare la somma delle potenze di ciascuna forza

$$(11.18) \quad \Pi(t) = \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \vec{v}_i.$$

Vale il seguente teorema, per un qualunque sistema, anche non olonomo

$$(11.19) \quad \frac{dK}{dt} = \Pi^a + \Pi^v$$

detto *Teorema dell'energia cinetica, o delle forze vive*.

La dimostrazione è quasi immediata. Consideriamo l'equazione di Newton per il generico punto del sistema

$$m_i \vec{a}_i = \overrightarrow{F_i} + \Phi_i,$$

moltiplichiamo per $\vec{v}_i$ e sommiamo

$$\sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \overrightarrow{F_i} \cdot \vec{v}_i + \sum \Phi_i \cdot \vec{v}_i.$$

Se teniamo conto che

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i,$$

troviamo che

$$\frac{dK}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i,$$

da cui segue immediatamente la tesi.

11.6. Conservazione dell'energia in sistemi olonomi

Supponiamo che il sistema meccanico sia a vincoli fissi, lisci, bilateri e olonomi. Se inoltre le forze attive sono conservative si ha

$$\delta L^v = 0 \quad , \quad Q_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

Calcoliamo esplicitamente Π^a :

$$\Pi^a = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \sum_h \left(\frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \right) \right) = \sum_h \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h = \sum_h Q_h \dot{q}_h.$$

Analogamente si trova

$$\Pi^v = \sum_h \left(\sum_i \vec{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_h} \right) \dot{q}_h.$$

Se i vincoli sono fissi $\delta q_h = \dot{q}_h dt$, essendo $\dot{q}_h$ una qualunque velocità consentita dai vincoli. Ma allora

$$\delta L^v = 0 \Rightarrow \Pi^v = 0.$$

Dunque dal teorema delle forze vive e dall'ipotesi di forze conservative segue

$$\frac{dK}{dt} = \Pi^a = \sum_h Q_h \dot{q}_h = \sum_h -\frac{\partial U}{\partial q_h} \dot{q}_h,$$

ovvero

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

Posto allora

$$(11.20) \quad E = K + U,$$

possiamo concludere che

$$(11.21) \quad E = \text{cost}.$$

11.7. Macchine semplici

Si chiamano *macchine semplici* i sistemi olonomi con un solo grado di libertà.

Nelle macchine semplici con vincoli fissi, lisci e bilateri, se le forze sono posizionali l'energia si conserva. Infatti l'unica componente lagrangiana della sollecitazione è funzione di una sola variabile, $Q = f(q)$ e quindi, nella sola ipotesi di continuità, ha una primitiva e si ha

$$(11.22) \quad U = - \int f(q) dq.$$

In queste ipotesi inoltre l'energia cinetica si riduce a

$$(11.23) \quad K = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2,$$

e la funzione di Lagrange è

$$(11.24) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q).$$

L'unica equazione di Lagrange diventa

$$(11.25) \quad a(q)\ddot{q} - \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + U'(q) = 0.$$

La conservazione dell'energia meccanica fornisce la condizione

$$(11.26) \quad \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{cost}.$$

Dalle (11.25) e (11.26) si possono agevolmente ricavare $\ddot{q}$ e $\dot{q}$ in funzione di q . Ricavando le reazioni vincolari dalle equazioni cardinali della dinamica, esse potranno essere espresse in funzione della sola q , anche senza risolvere esplicitamente l'equazione di Lagrange del moto.

Parte II.

Esercizi

12. Esercizi di algebra vettoriale

Esercizio 12.1 (Algebra vettoriale). *Dati quattro punti, a tre a tre non allineati, P, P_1, P_2, P_3 , si dimostri che il vettore*

$$\vec{v} = \overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_3} \wedge \overrightarrow{PP_1}$$

è perpendicolare al piano dei punti P_1, P_2, P_3 .

Basta far vedere che $\vec{v}$ è perpendicolare ai vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$. Ora $\overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{PP_2}$ è perpendicolare al piano di P, P_1, P_2 , quindi anche a $\overrightarrow{P_1P_2}$. Si ha poi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_3} \wedge \overrightarrow{PP_1} &= \overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{PP_3} - \overrightarrow{PP_1} \wedge \overrightarrow{PP_3} = \\ &= (\overrightarrow{PP_2} - \overrightarrow{PP_1}) \wedge \overrightarrow{PP_3} = (\overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2}) \wedge \overrightarrow{PP_3} = \\ &= \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{PP_3}, \end{aligned}$$

dunque anche $\overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{PP_3} + \overrightarrow{PP_3} \wedge \overrightarrow{PP_1}$ è ortogonale a $\overrightarrow{P_1P_2}$, e allora anche $\vec{v}$ lo è.

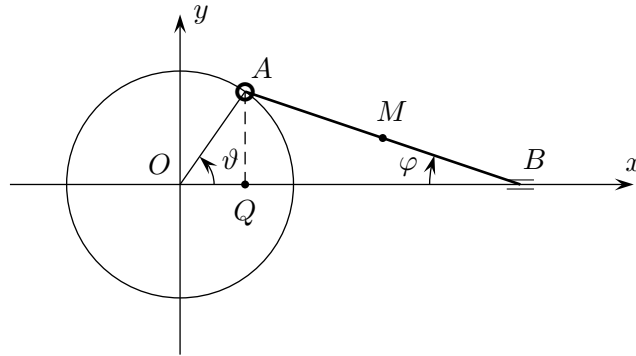
Si può poi provare, partendo da $\overrightarrow{PP_2} \wedge \overrightarrow{PP_3}$, che $\vec{v}$ è la somma di due vettori ortogonali a $\overrightarrow{P_2P_3}$. Questo basta per concludere.

13. Esercizi di cinematica

Esercizio 13.1 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano riferito a un sistema cartesiano ortogonale Oxy , di versori $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ (“terna fissa”), si consideri una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio r . Un’asta rigida AB di lunghezza $l > 2r$ è vincolata con l’estremo A sulla circonferenza $\mathcal{C}$, mentre l’altro estremo B deve scorrere sull’asse x (vincolo “a carrello”). Si supponga che il punto A ruoti uniformemente sulla circonferenza $\mathcal{C}$ e che, inizialmente, l’asta sia sovrapposta all’asse x .*

Si chiede di determinare:

1. la velocità del punto B ;
2. la velocità angolare dell’asta;
3. la velocità del punto medio M di AB .



Il sistema ha un solo grado di libertà e la scelta più efficiente è quella dell’angolo φ di figura, in quanto, essendo il moto rototraslatorio come ogni moto piano, questa scelta ci consente di scrivere facilmente la velocità angolare del rigido come

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\vec{e}_3.$$

La scelta dell’ascissa del punto B , pur teoricamente possibile, comporta il problema della non biunivocità della corrispondenza tra i valori di x_B e la posizione dell’asta (per uno stesso valore di x_B il punto A può stare sopra o sotto l’asse x). Anche la scelta dell’angolo ϑ è corretta, ma la velocità angolare del rigido non è legata in maniera semplice a questo angolo e alla sua derivata temporale.

Il moto del punto A è tale che, per l’angolo ϑ di figura si ha (abbiamo anche tenuto conto della posizione iniziale dell’asta):

$$\vartheta = wt,$$

dove w è la velocità angolare (è uno scalare) del moto circolare uniforme di A sulla circonferenza.

Dalla figura (ricavando AQ dai due triangoli $\triangle OQA$ e $\triangle QAB$) si deduce inoltre il seguente legame tra ϑ e φ :

$$r \sin \vartheta = l \sin \varphi .$$

Dopo queste premesse possiamo passare alla risoluzione del problema.

1 Dalla relazione indicata tra ϑ e φ otteniamo:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \vartheta} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 (wt)} .$$

L'ascissa di B è data da:

$$x_B = r \cos \vartheta + l \cos \varphi .$$

Si ha:

$$\dot{x}_B = -rw \sin(wt) - \frac{r^2 w \sin(wt) \cos(wt)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 wt}} .$$

Infine la velocità di B è data da:

$$\vec{v}_B = \dot{x}_B \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 = \dot{x}_B \vec{e}_1 .$$

2 Possiamo ricavare l'angolo φ dalla relazione trovata tra ϑ e φ :

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{r}{l} \sin(wt) \right) .$$

Per derivazione si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{rw \cos(wt)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 (wt)}} ,$$

da cui la velocità angolare, data da $\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \vec{e}_3$.

3 Per trovare $\vec{v}_M$ si può procedere in due modi: o si scrivono le coordinate di M e si derivano rispetto al tempo, o si usa la formula fondamentale della cinematica dei rigidi. Nel primo caso si ha:

$$x_M = r \cos(wt) + \frac{l}{2} \cos \varphi , \quad y_M = \frac{r}{2} \sin(wt) ,$$

da cui

$$\dot{x}_M = -rw \sin(wt) - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi , \quad \dot{y}_M = \frac{r}{2} w \cos(wt) ;$$

da qui si ottiene subito la velocità richiesta, tenendo conto dell'espressione già trovata per $\dot{\varphi}$. Usando invece la formula fondamentale

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (M - A) ,$$

si deve calcolare il prodotto vettoriale $\vec{\omega} \wedge (M - A)$. Intanto si ha

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= -rw \sin(wt) \vec{e}_1 + rw \cos(wt) \vec{e}_2 , \\ M - A &= (x_M - x_A) \vec{e}_1 + (y_M - y_A) \vec{e}_2 = \frac{l}{2} \cos \varphi \vec{e}_1 + \left(\frac{r}{2} \sin(wt) - r \sin(wt) \right) \vec{e}_2 = \\ &= \frac{l}{2} \cos \varphi \vec{e}_1 - \frac{r}{2} \sin(wt) \vec{e}_2 ; \end{aligned}$$

allora:

$$\vec{\omega} \wedge (M - A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ \frac{l}{2} \cos \varphi & -\frac{r}{2} \sin(wt) & 0 \end{vmatrix}.$$

Ne segue

$$\dot{x}_M = -rw \sin(wt) - \frac{r}{2} \dot{\varphi} \sin(wt), \quad \dot{y}_M = rw \cos(wt) - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Dal legame, più volte utilizzato, tra ϑ e φ si ricava:

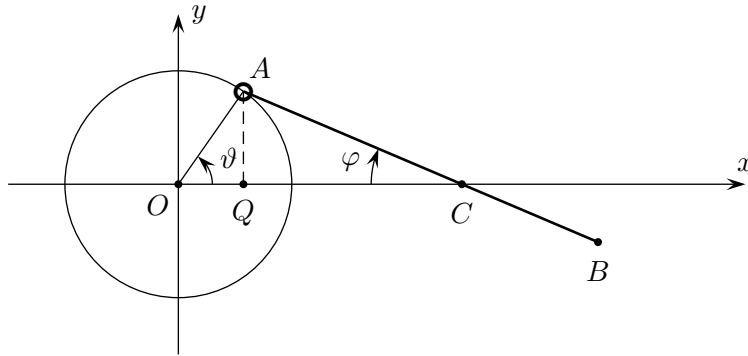
$$r \sin(wt) = l \sin \varphi \quad \text{e} \quad l \dot{\varphi} \cos \varphi = rw \cos(wt).$$

Questo ci permette di verificare che i valori ora trovati per le componenti di $\vec{v}_M$ sono gli stessi di prima.

Si consideri la seguente variante dell'esercizio 13.1:

Esercizio 13.2 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *L'asta AB, anziché essere vincolata con l'estremo B scorrevole sull'asse x, sia vincolata a passare per un punto C fisso dell'asse x. Posto OC = h, e supposta l'asta sufficientemente lunga da non sfilarsi dal punto C, si chiede di trovare:*

1. la velocità dell'estremo B dell'asta;
2. la velocità angolare dell'asta;
3. la velocità del punto dell'asta che transita per C.



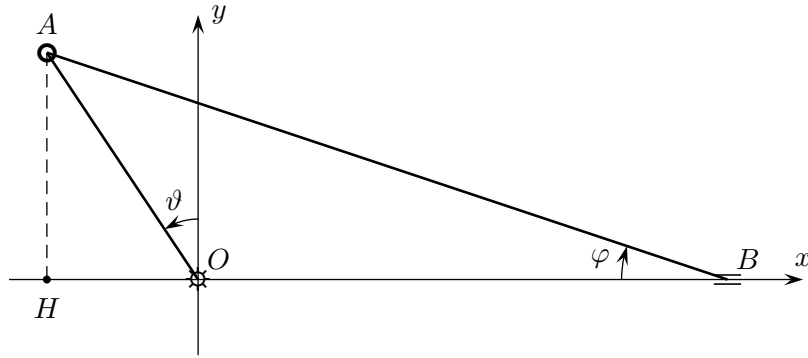
Si può procedere in maniera sostanzialmente identica a quella dell'esercizio 13.1, con una variazione al legame tra ϑ e φ . Per trovare la velocità angolare si può sempre osservare che essa sarà data da $\vec{\omega} = -\dot{\varphi} \vec{e}_3$; per la velocità di B si possono trovare le coordinate e derivarle, oppure usare la formula fondamentale, una volta trovata $\vec{\omega}$. Per trovare la velocità del punto dell'asta che transita per C conviene usare la formula fondamentale (le coordinate di C sono fisse, e dunque non ha senso calcolarne le derivate; inoltre il punto dell'asta che transita per C è sempre diverso!). Si potrebbe anche osservare che il punto dell'asta che transita per C ha necessariamente una velocità parallela all'asta: se si introduce sull'asta

un sistema di ascisse con origine in A e si indica con s l'ascissa del punto C , e con $\vec{t}$ il versore dell'asta, si deve avere $\vec{v}_C = \dot{s}\vec{t}$. Il valore di s si può trovare con il teorema di Carnot nel triangolo $\triangle OAC$; esprimendo il vettore $\vec{t}$ nelle sue componenti rispetto al sistema fisso, si troverà di nuovo l'espressione di $\vec{v}_C$.

Altre possibili domande per un esercizio come questo:

- Si verifichi direttamente che la velocità del punto dell'asta che transita per C (trovata con la formula fondamentale della cinematica dei rigidi) è parallela a AB (per esempio facendo il prodotto vettoriale tra $\vec{v}_C$ e $\overrightarrow{AB}$).
- Si trovi il centro, I , di rotazione istantanea e si verifichi che la velocità di B si ottiene come $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IB}$.

Esercizio 13.3 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri il sistema biella-manovella rappresentato in figura, con il punto O incernierato e il punto B vincolato a scorrere sull'asse x . Si supponga $\overline{OA} = l_1$, $\overline{AB} = l_2$ e si assuma come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ di figura. Si determini la velocità angolare dell'asta AB e la velocità del punto B .*



Indichiamo con $\vec{\omega}_1$ la velocità angolare della prima asta e con $\vec{\omega}_2$ quella della seconda asta. Si ha:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\vartheta} \vec{e}_3.$$

Per determinare la velocità angolare $\vec{\omega}_2$ si potrebbe ricavare, come abbiamo fatto per il problema 13.1, un legame tra gli angoli ϑ e φ di figura. Vogliamo invece procedere usando solo la formula fondamentale della cinematica dei rigidi. Cominciamo con il determinare $\vec{v}_A$, esaminando il moto rigido della prima asta (moto rotatorio):

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge (A - O) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ -l_1 \sin \vartheta & l_1 \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = -l_1 \dot{\vartheta} \cos \vartheta \vec{e}_1 - l_1 \dot{\vartheta} \sin \vartheta \vec{e}_2.$$

Esaminando poi il moto della seconda asta, si deve avere:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge (B - A) = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB}.$$

La determinazione delle componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ è immediata se si esamina il triangolo $\triangle AHB$:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \vartheta} \vec{e}_1 - l_1 \cos \vartheta \vec{e}_2.$$

Allora

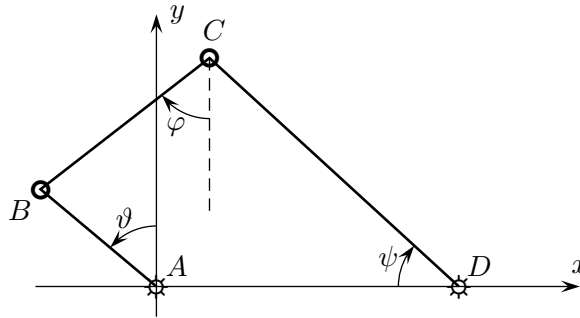
$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \vartheta} & -l_1 \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(-l_1 \dot{\vartheta} \cos \vartheta + \omega_2 l_1 \cos \vartheta \right) \vec{e}_1 + \left(-l_1 \dot{\vartheta} \sin \vartheta + \omega_2 \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \vartheta} \right) \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Tenendo conto che deve essere $\dot{y}_B = 0$, si ricava che

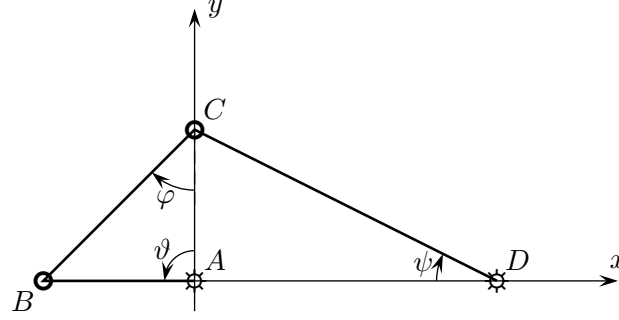
$$\omega_2 = \frac{l_1 \dot{\vartheta} \sin \vartheta}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Questo ci consente di avere anche il valore di $\dot{x}_B$, e quindi la velocità di B .

Esercizio 13.4 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri il sistema di manovelle di figura. Le 3 aste hanno lunghezze rispettive: $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{2}$, $\overline{CD} = \sqrt{5}$. Assunto come parametro lagrangiano l'angolo ϑ di figura, si determini il centro di istantanea rotazione dell'asta BC , precisandone in particolare le coordinate nel caso $\vartheta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Si indichi un procedimento, senza eseguire i calcoli, mediante il quale sarebbe possibile calcolare la velocità angolare delle tre aste, calcolando esplicitamente tali velocità angolari solo nella posizione $\vartheta = \pi/2$.*



I punti B e C dell'asta BC appartengono anche, rispettivamente, alle aste AB e CD . Poiché queste due aste compiono un moto puramente rotatorio attorno ad un asse perpendicolare al piano del disegno e passante rispettivamente per A e D , la velocità di B sarà perpendicolare ad AB , mentre quella di D sarà perpendicolare a CD : ne segue che il centro di istantanea rotazione sarà nel punto di intersezione delle due rette AB e CD (e non sarà definito quando esse sono parallele). È immediato trovarlo nelle 4 posizioni richieste. Vediamo in particolare quella con $\vartheta = \pi/2$, a cui si riferisce la figura che segue.



È immediato che in questo caso il centro di istantanea rotazione dell'asta BC è il punto D . Con riferimento a quest'ultima figura possiamo ricavare anche che $\overline{AC} = 1$, da cui $\overline{AD} = 2$.

Esaminiamo ora il problema del calcolo delle velocità angolari delle tre aste, che indichiamo con $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_3 = \dot{\vartheta} \vec{e}_3$, $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_3$, $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{e}_3$ (ω_2 e ω_3 sono le incognite da trovare). Intanto ci serve un legame per calcolare φ e ψ in funzione di ϑ . Questo legame può essere scritto in vari modi; per esempio si possono calcolare le coordinate di C usando le aste AB e BC , oppure usando solo l'asta CD : uguagliando le 2 coordinate calcolate in questo modo si hanno due relazioni mediante le quali, almeno teoricamente, si possono ricavare φ e ψ in funzione di ϑ . A questo punto le velocità angolari si possono ricavare per semplice derivazione, tenendo conto che si ha, evidentemente, $\omega_2 = -\dot{\varphi}$ e $\omega_3 = -\dot{\psi}$.

In dettaglio le relazioni si scrivono:

$$\begin{aligned} -\sin \vartheta + \sqrt{2} \sin \varphi &= 2 - \sqrt{5} \cos \psi, \\ \cos \vartheta + \sqrt{2} \cos \varphi &= \sqrt{5} \sin \psi. \end{aligned}$$

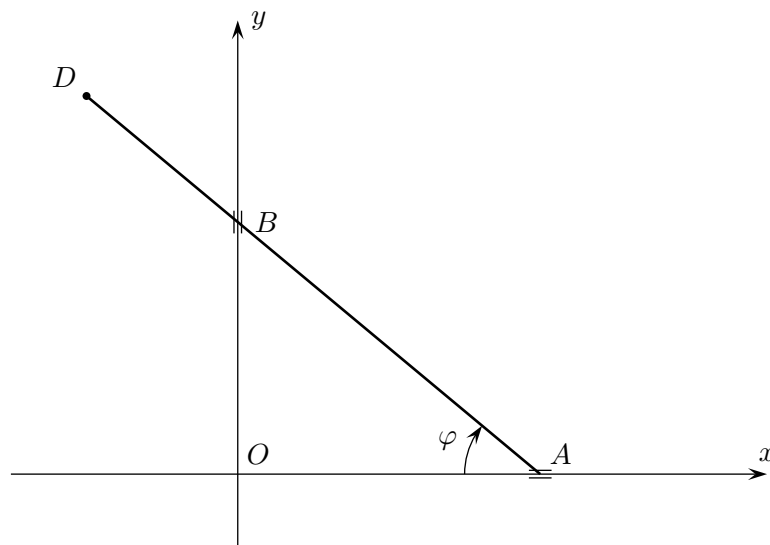
Per derivazione da queste formule si ottiene:

$$\begin{aligned} -\dot{\vartheta} \cos \vartheta + \sqrt{2} \dot{\varphi} \cos \varphi &= \sqrt{5} \dot{\psi} \sin \psi, \\ -\dot{\vartheta} \sin \vartheta - \sqrt{2} \dot{\varphi} \sin \varphi &= \sqrt{5} \dot{\psi} \cos \psi. \end{aligned}$$

Non è ora difficile ricavare sia $\dot{\varphi}$ che $\dot{\psi}$ in funzione di $\dot{\vartheta}$, ma non è assolutamente facile invece far comparire solo il parametro lagrangiano ϑ , in quanto bisognerebbe risolvere il precedente sistema trigonometrico nelle incognite φ e di ψ , che non è elementare. Nelle applicazioni si possono naturalmente usare metodi numerici, o addirittura grafici, per trovare l'espressione di $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ in funzione di $\dot{\vartheta}$.

Nel caso particolare richiesto dal problema tutto si semplifica, in quanto il centro di istantanea rotazione dell'asta BC è il punto D e si può scrivere $\vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB}$ (pensando B come appartenente all'asta AB) e $\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{DB}$ (pensando B come appartenente all'asta BD): uguagliando le due espressioni si trova il valore di ω_2 . Analogo discorso per ω_3 usando il punto C .

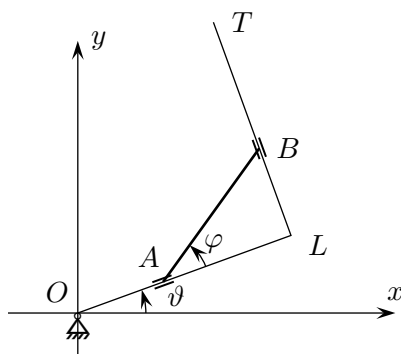
Esercizio 13.5 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri un'asta AD , di lunghezza l , vincolata a scorrere con l'estremo A su una retta r e con un suo punto B , a distanza b da A , su una retta $s \perp r$. Assunto come parametro lagrangiano l'angolo φ di figura, si determinino le velocità di A , B e D . Detto C il centro di istantanea rotazione dell'asta, si verifichi che si ha $\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD}$.*



Altre possibili domande per un esercizio come questo:

- Qual è l'equazione cartesiana della traiettoria del punto D ?
- Qual è l'equazione cartesiana della traiettoria del punto C ?
- Si trovi la velocità del punto medio M di AB

Esercizio 13.6 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). Si consideri un'asta AB , di lunghezza l , vincolata a scorrere con i suoi estremi A e B su un'asta a squadra OLT , la quale sia libera di ruotare attorno al punto O , come in figura. Si supponga che $\overline{OL} = a > l$ e si assumano come parametri lagrangiani gli angoli ϑ e φ di figura. Si determini la velocità del punto medio M dell'asta AB e la velocità angolare della stessa asta.

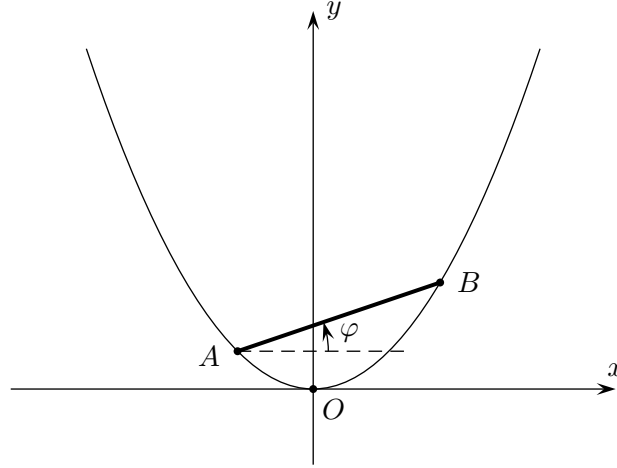


Esercizio 13.7 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). Si consideri un'asta AB di lunghezza $2\sqrt{2}$, vincolata con gli estremi A e B sulla parabola di equazione $y = x^2/2$, come nella figura seguente. Assunti come parametri iniziali per la determinazione della posizione dell'asta supposta libera le coordinate (x_A, y_A) del punto A e l'angolo φ di figura, si scrivano esplicitamente le equazioni dei vincoli.

Si assuma successivamente come parametro lagrangiano l'ascissa x_A del punto A . Si indichi un procedimento per ricavare le coordinate di B in funzione di x_A , senza eseguire esplicitamente i calcoli.

Si determini, graficamente, la posizione del centro di istantanea rotazione.

Si consideri la posizione dell'asta nell'istante in cui A passa per il vertice della parabola e si determini, in questo caso, analiticamente la posizione del centro di istantanea rotazione. Supposta nota in questo istante la velocità del punto A , si determinino, nello stesso istante, la velocità angolare dell'asta e la velocità del punto B .



Le equazioni dei vincoli si possono scrivere imponendo le condizioni di appartenenza dei punti A e B alla parabola. Si ha, intanto,

$$x_B = x_A + 2\sqrt{2} \cos \varphi \quad , \quad y_B = y_A + 2\sqrt{2} \sin \varphi \quad .$$

Scrivendo le condizioni

$$y_A = \frac{x_A^2}{2} \quad , \quad y_B = \frac{x_B^2}{2}$$

e sostituendo i valori trovati sopra si trova, dopo qualche semplificazione,

$$\begin{cases} x_A^2 - 2y_A = 0 \\ \sqrt{2} \sin \varphi - \sqrt{2} x_A \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi = 0 \end{cases} \quad ,$$

che sono le equazioni richieste dei vincoli.

Per calcolare le coordinate di B in funzione di x_A bisognerebbe risolvere la seconda delle equazioni di vincolo nella variabile φ e sostituirla nelle espressioni sopra riportate per x_B e y_B .

Per determinare la posizione del centro di istantanea rotazione si può osservare che i due punti A e B hanno, necessariamente, velocità tangenti alla parabola, e dunque la posizione di detto centro sta sull'intersezione delle perpendicolari a dette tangenti. Nel momento in cui l'asta ha l'estremo A nell'origine, il calcolo è facilitato dal fatto che la perpendicolare per A alla tangente alla parabola è l'asse della parabola, ovvero l'asse y . In questa posizione si ha inoltre

$$x_B = 2\sqrt{2} \cos \varphi \quad , \quad y_B = 2\sqrt{2} \sin \varphi \quad ,$$

da cui, tenendo conto che $y_B = x_B^2/2$, e con facili semplificazioni,

$$2 \sin^2 \varphi + \sqrt{2} \sin \varphi - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad .$$

La tangente e la perpendicolare alla parabola in B si trovano ora immediatamente, e così pure la posizione del centro di istantanea rotazione.

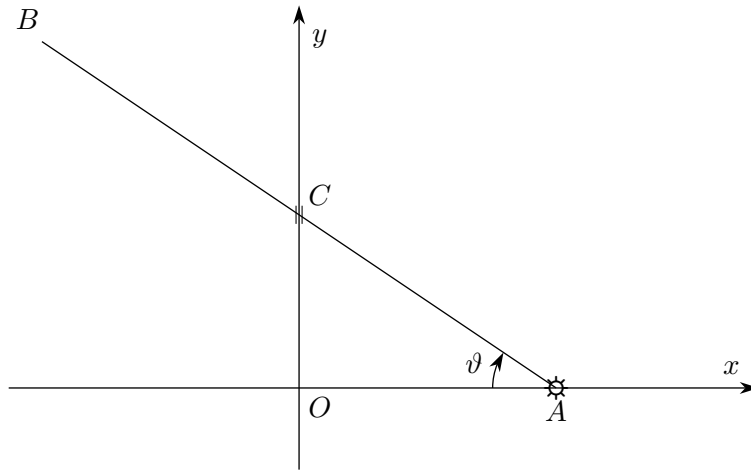
Per quanto riguarda la velocità angolare possiamo osservare, intanto, che $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$. Se si deriva, rispetto al tempo, la seconda equazione di vincolo sopra scritta, si trova

$$\sqrt{2}\dot{\varphi} \cos \varphi - \sqrt{2}[\dot{x}_A \cos \varphi - x_A \dot{\varphi} \sin \varphi] + 4\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

Da qui è facile ricavare $\dot{\varphi}$ nella posizione richiesta, sostituendo $x_A = 0$ e $\varphi = \pi/4$.

Una volta trovata $\vec{\omega}$ si può trovare $\vec{v}_B$ con la formula di Poisson $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$. Si può anche, in alternativa, derivare le coordinate di B trovate sopra. In entrambi i modi bisognerà sempre sostituire $x_A = 0$ e $\varphi = \pi/4$.

Esercizio 13.8 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri un'asta rigida AB di lunghezza l , con l'estremo A fissato nel punto $(a, 0)$ di un sistema cartesiano ortogonale Oxy . Supposto che l'asta sia costretta a passare per il punto C mobile sull'asse y con legge $y = f(t)$ assegnata, si chiede di determinare la velocità angolare dell'asta e la velocità del punto B . Si veda anche la figura allegata.*



È sufficiente osservare che $\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \vec{k}$. La determinazione di ϑ , e quindi di $\dot{\vartheta}$, si può fare usando il triangolo OAC . Si ricava facilmente

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y_C}{a} = \frac{f(t)}{a}, \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{f(t)}{a}$$

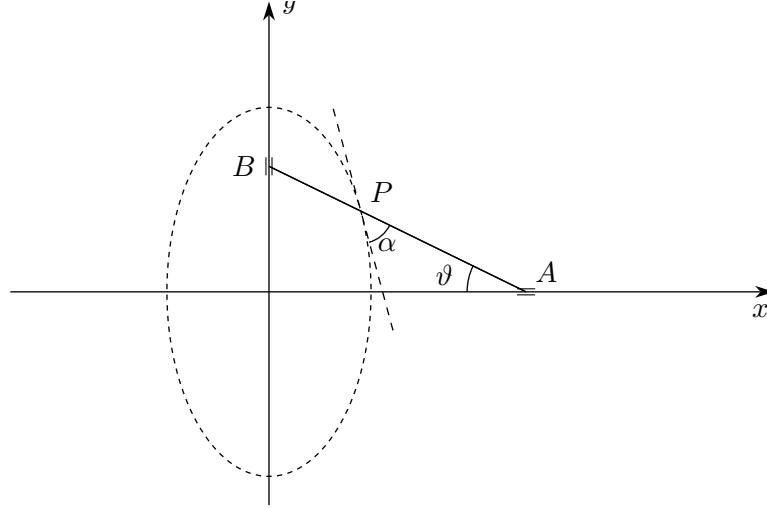
Da qui si ricava, per derivazione rispetto al tempo,

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\frac{f^2(t)}{a^2} + 1} \cdot \frac{\dot{f}(t)}{a} = \frac{a\dot{f}(t)}{f^2(t) + a^2}$$

per determinare la velocità del punto B basta ora applicare la formula di Poisson (moto rotatorio):

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ -l \cos \vartheta & l \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = -l\dot{\vartheta} \sin \vartheta \vec{i} - l\dot{\vartheta} \cos \vartheta \vec{j}.$$

Esercizio 13.9 (Cinematica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri un'asta rigida AB , di lunghezza l , i cui estremi sono vincolati a scorrere sugli assi x e y di un sistema cartesiano ortogonale Oxy . Si determini la traiettoria descritta dal punto P dell'asta distante h da A e il modulo della velocità di P , sia usando la formula di Poisson che la proprietà di equiproiettività del campo delle velocità di un rigido, supposto che A si muova con legge assegnata $x_A = f(t)$ sull'asse x .*



La determinazione della traiettoria del punto P si può fare trovandone le equazioni parametriche, in funzione per esempio dell'angolo ϑ , e poi eliminando il parametro.

$$x = (l - h) \cos \vartheta, \quad y = h \sin \vartheta,$$

ovvero

$$\frac{x}{l - h} = \cos \vartheta, \quad \frac{y}{h} = \sin \vartheta.$$

Quadrando e sommando si trova

$$\frac{x^2}{(l - h)^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1,$$

che è l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e semiassi $l - h$ e h .

Per trovare la velocità di P usando la formula di Poisson occorre prima trovare la velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \vec{k}$. Si ha

$$x_A = f(t) = l \cos \vartheta \Rightarrow \vartheta = \arccos \frac{f(t)}{l} \Rightarrow \dot{\vartheta} = -\frac{\dot{f}(t)}{\sqrt{l^2 - f^2(t)}}.$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\vartheta} \\ -h \cos \vartheta & h \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \dot{f}(t) \vec{i} - h \dot{\vartheta} \sin \vartheta \vec{i} - h \dot{\vartheta} \cos \vartheta \vec{j}.$$

Da qui si trova poi il modulo richiesto.

Se si vuole invece usare la proprietà che il campo delle velocità di un rigido è equiproiettivo, si può introdurre il versore di $\overrightarrow{AP}$, diciamolo $\vec{u}$, e osservare che si deve avere

$$\vec{v}_P \cdot \vec{u} = \vec{v}_A \cdot \vec{u}.$$

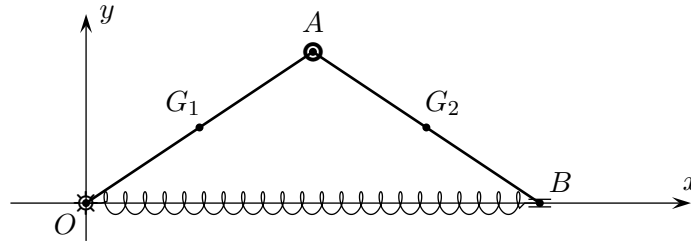
Detto α l'angolo di figura, che si può trovare tenendo conto che la velocità di P è tangente all'ellisse prima determinata, si deve avere, in modulo,

$$v_P |\cos \alpha| = v_A |\cos \vartheta| \Rightarrow v_P = \frac{|\cos \vartheta|}{|\cos \alpha|}.$$

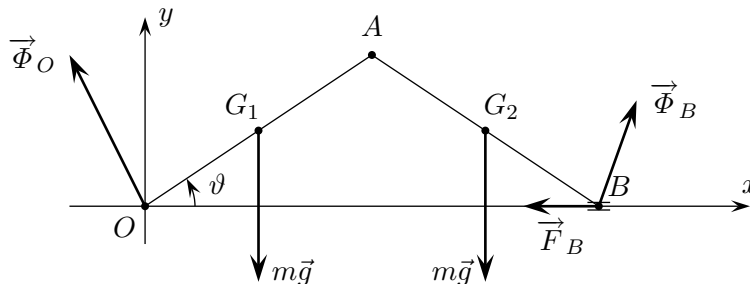
14. Esercizi di statica

Esercizio 14.1 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse y verticale ascendente, un sistema di due aste disposte come in figura, incernierate tra di loro in A . L'asta OA è incernierata in O con cerniera liscia, mentre il punto B può scorrere sull'asse con vincolo scabro e coefficiente di attrito statico f_s . Sulle aste, omogenee e di ugual lunghezza l , agisce, oltre ai pesi, una forza elastica di origine O , applicata nel punto B e di costante k . Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e le reazioni vincolari in O e B , nell'ipotesi che le reazioni siano schematizzabili, in ciascuno dei due punti, solo con il risultante.*

(Come d'abitudine in Meccanica si suppone che una forza elastica di centro O e agente su un punto P sia schematizzabile con una forza del tipo $\vec{F}_{el} = h\vec{PO}$, cioè che sia una forza solo "di richiamo".)



Il sistema è a un grado di libertà e conviene assumere come parametro lagrangiano l'angolo ϑ indicato nella figura seguente, dove è anche riportato il diagramma delle forze agenti.



Trattandosi di un sistema a vincoli non lisci, usiamo le equazioni cardinali della statica, cosa del resto indispensabile visto che il testo richiede anche il calcolo delle reazioni vincolari.

Il sistema in considerazione non è rigido e pertanto, in linea di principio, le equazioni cardinali applicate all'intero sistema possono non essere sufficienti a determinare l'equilibrio. Se del caso, potremo anche scrivere le equazioni cardinali applicate solo a una parte del sistema stesso.

Nel sistema cartesiano scelto, le coordinate dei punti dove agiscono le forze sono:

- $O: (0, 0)$;
- $G_1: (l/2 \cos \vartheta, l/2 \sin \vartheta)$;
- $G_2: (3l/2 \cos \vartheta, l/2 \sin \vartheta)$;
- $B: (2l \cos \vartheta, 0)$.

Si tenga conto del fatto che, dovendo applicare le equazioni cardinali della statica che coinvolgono solo il risultante e il momento risultante delle forze applicate, si può ridurre, per ciascuna componente rigida del sistema, la forza peso ad un'unica forza applicata nel baricentro, centro di un sistema di vettori applicati paralleli. Si noti altresì che le forze peso agenti sui singoli elementi del sistema (la forza peso è un classico esempio di forza “distribuita”) possono essere considerate un sistema di vettori applicati paralleli solo se si trascurano le dimensioni del sistema stesso, cosa del tutto legittima nel caso in questione (e in tutti i casi dei problemi ordinari di meccanica razionale!).

Indicati con $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i versori degli assi, le forze agenti possono essere scritte come segue:

- $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{i} + \Phi_{Oy}\vec{j}$;
- $\vec{\Phi}_B = \Phi_{Bx}\vec{i} + \Phi_{By}\vec{j}$;
- $m\vec{g} = -mg\vec{j}$;
- $\vec{F}_B = -\vec{F}_O = -2kl \cos \vartheta \vec{i}$.

L'equazione dei risultanti,

$$\vec{R}^{(e,a)} + \vec{R}^{(e,v)} = \vec{0},$$

proiettata sui due assi, fornisce allora le seguenti due equazioni scalari:

$$(14.1) \quad \Phi_{Ox} + \Phi_{Bx} - 2kl \cos \vartheta = 0,$$

$$(14.2) \quad \Phi_{Oy} + \Phi_{By} - 2mg = 0.$$

Per l'equazione dei momenti,

$$\vec{M}_Q^{(e,a)} + \vec{M}_Q^{(e,v)} = \vec{0},$$

scegliamo come polo il punto O , e otteniamo:

$$\overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\Phi}_B = \vec{0},$$

in quanto le forze $\vec{\Phi}_O$ e $\vec{F}_B$ non hanno momento rispetto a O (una è applicata in O , l'altra è concorrente in O). Otteniamo:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l/2 \cos \vartheta & l/2 \sin \vartheta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3l/2 \cos \vartheta & l/2 \sin \vartheta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2l \cos \vartheta & 0 & 0 \\ \Phi_{Bx} & \Phi_{By} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

L'unica componente non nulla del primo membro fornisce una ulteriore equazione scalare:

$$-mg \frac{l}{2} \cos \vartheta - mg \frac{3l}{2} \cos \vartheta + 2l \Phi_{By} \cos \vartheta = 0,$$

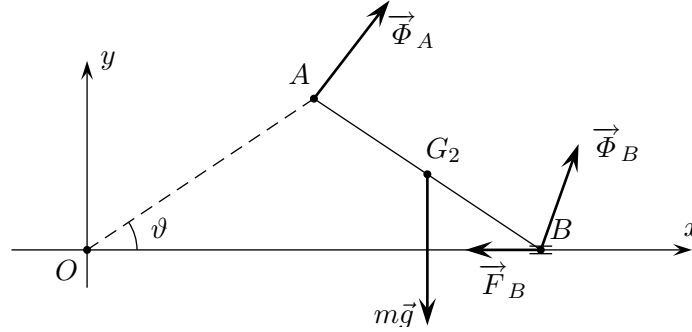
ovvero, semplificando,

$$(14.3) \quad -mg \cos \vartheta + \Phi_{By} \cos \vartheta = 0.$$

Abbiamo 3 equazioni scalari nelle 5 incognite: ϑ_{eq} (posizione di equilibrio), Φ_{Ox} , Φ_{Oy} , Φ_{Bx} , Φ_{By} . Una ulteriore condizione si ricava dalla richiesta che il vincolo scabro in B soddisfi la relazione (di *Coulomb*)

$$\left| \frac{\Phi_{Bx}}{\Phi_{By}} \right| \leq f_s.$$

Per trovare una ulteriore equazione indipendente possiamo considerare, ad esempio, il sistema costituito dalla sola asta AB : dobbiamo introdurre le azioni (incognite!) che l'asta OA esercita sull'asta AB nel punto A . Queste azioni possono essere ridotte, nelle condizioni del problema, ad una sola forza $\vec{\Phi}_A$.



Per evitare l'introduzione di nuove incognite, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale della statica relativa alla sola asta AB , prendendo come polo proprio il punto A :

$$\vec{AG}_2 \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{\Phi}_B + \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}.$$

Operando come con la precedente equazione dei momenti, troviamo:

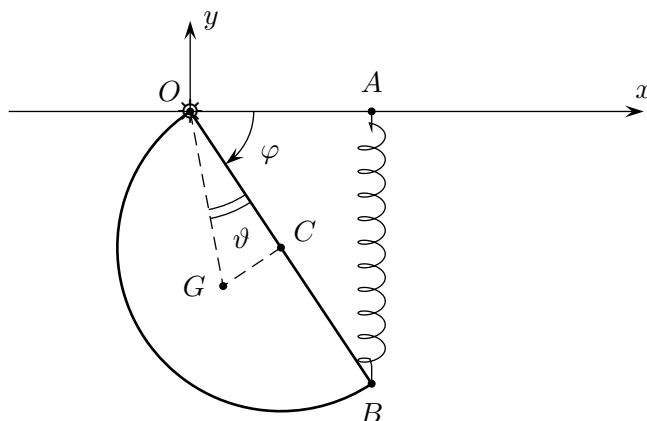
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l/2 \cos \vartheta & -l/2 \sin \vartheta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \vartheta & -l \sin \vartheta & 0 \\ \Phi_{Bx} & \Phi_{By} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \vartheta & -l \sin \vartheta & 0 \\ -2lk \cos \vartheta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Prendendo l'unica componente non nulla dei vettori a primo membro e semplificando, otteniamo una nuova equazione:

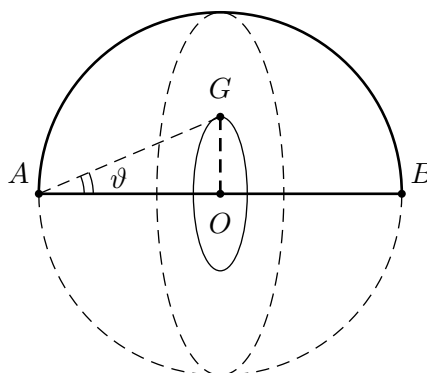
$$(14.4) \quad -\frac{mg}{2} \cos \vartheta + \Phi_{By} \cos \vartheta + \Phi_{Bx} \sin \vartheta - 2kl \cos \vartheta \sin \vartheta = 0$$

Le 4 equazioni ottenute permettono di ricavare i valori delle 4 componenti delle reazioni vincolari, in funzione di ϑ . Le posizioni di equilibrio (infinite in un caso come questo), sono individuate dagli angoli ϑ che soddisfano la relazione di Coulomb, già menzionata.

Esercizio 14.2 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse y verticale ascendente, un semidisco circolare di raggio r , vincolato, come nella figura seguente, con una cerniera liscia in O e sottoposto, oltreché al proprio peso, a una forza elastica BA , con A intersezione della perpendicolare per B all'asse x . Si determini il valore da attribuire alla costante elastica k affinché la posizione $\varphi = \pi/4$ sia di equilibrio (φ è l'angolo evidenziato nella figura), nonché la reazione vincolare in O in questa posizione.*



Determiniamo innanzitutto la posizione del baricentro G rispetto alla lamina. La strategia più comoda, tenendo conto delle particolari simmetrie, è quella di usare uno dei teoremi di Guldino, e precisamente quello che concerne il volume descritto da una regione piana, l'area della regione e la circonferenza descritta dal baricentro in una rotazione completa attorno a una retta del piano.



Se eseguiamo una rotazione del semidisco, di area S , attorno al diametro AB , otteniamo una sfera di volume V ; indicando con d la distanza del baricentro dal diametro stesso, otteniamo

$$V = 2\pi dS \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = (2\pi d)\frac{\pi r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{4r}{3\pi}.$$

È ora anche immediato trovare l'angolo ϑ che ci servirà per determinare le coordinate del baricentro del sistema materiale in esame: esaminando il triangolo rettangolo OAG si trova facilmente

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{d}{r} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \left(\frac{d}{r} \right).$$

Ritornando al sistema materiale in esame, e indicando i versori degli assi, al solito, con $\vec{i}$ e $\vec{j}$, osserviamo che le forze agenti si possono scrivere come segue:

- peso del semidisco: $m\vec{g} = -mg\vec{j}$,
- forza elastica in B : $\vec{F}_{el} = k\vec{BA} = 2kr \sin \varphi \vec{j}$,
- reazione vincolare in O : $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{i} + \Phi_{Oy}\vec{j}$.

Osservato che

$$OG = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{r^2 + \frac{16r^2}{9\pi^2}} = \frac{r}{3\pi} \sqrt{9\pi^2 + 16} = \lambda,$$

le coordinate dei punti di applicazione delle forze sono:

- G : $(\lambda \cos(\vartheta + \varphi), -\lambda \sin(\vartheta + \varphi))$,
- B : $(2r \cos \varphi, -2r \sin \varphi)$,
- O : $(0, 0)$.

Possiamo ora scrivere le equazioni cardinali della statica per il semidisco (sistema rigido).

$$\vec{\Phi}_O + m\vec{g} + \vec{F}_{el} = \vec{0},$$

da cui otteniamo le due equazioni scalari:

$$(14.5) \quad \Phi_{Ox} = 0,$$

$$(14.6) \quad \Phi_{Oy} - mg + 2kr \sin \varphi = 0.$$

Passiamo all'equazione dei momenti, che scriviamo rispetto al polo O :

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OB} \wedge \vec{F}_{el} = \vec{0},$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda \cos(\vartheta + \varphi) & -\lambda \sin(\vartheta + \varphi) & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2r \cos \varphi & -2r \sin \varphi & 0 \\ 0 & 2kr \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Prendendo in considerazione l'unica componente non nulla dei momenti, si ottiene una nuova equazione scalare:

$$(14.7) \quad -mg\lambda \cos(\vartheta + \varphi) + 4kr^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Il sistema delle tre equazioni ottenute consentirebbe di determinare sia le posizioni di equilibrio che la reazione vincolare in O , in quelle posizioni. Il sistema ottenuto non è però lineare nell'incognita φ e non è risolubile elementarmente. Il testo chiede però di determinare la costante elastica in modo che la posizione $\varphi = \pi/4$ sia di equilibrio. Il valore richiesto della costante si ricava facilmente dall'equazione (14.7), ponendo $\varphi = \pi/4$. A questo punto la reazione vincolare in O si trova subito dalle due equazioni precedenti.

Si noti che l'equazione (14.7) è un'equazione pura di equilibrio, cioè un'equazione che non contiene le reazioni vincolari. Essa si sarebbe potuta anche ricavare dall'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali al sistema. Infatti, tenendo conto delle espressioni già trovate per le coordinate dei punti di applicazione delle forze (solo di quelle attive, in quanto nel PLV non intervengono le reazioni vincolari), si trova:

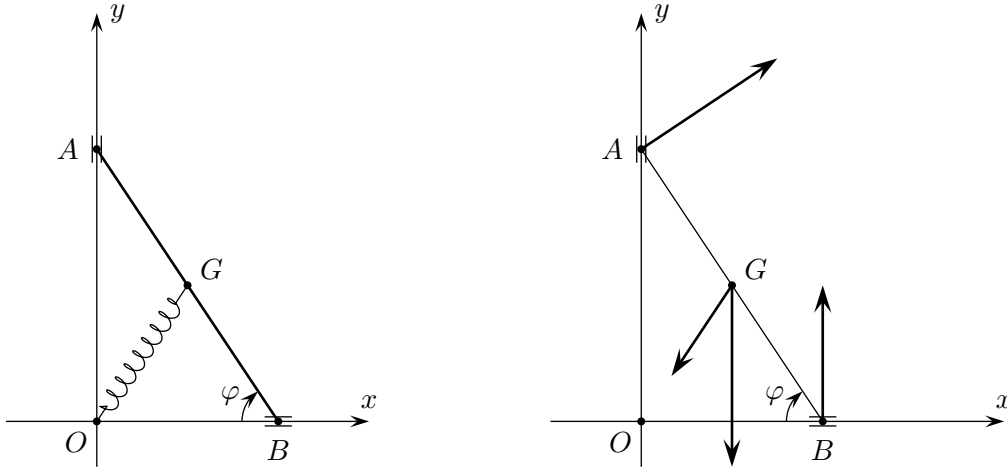
$$\begin{aligned} -\delta B &= -2r \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} - 2r \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}, \\ -\delta G &= -\lambda \sin(\vartheta + \varphi) \delta \varphi \vec{i} - \lambda \cos(\vartheta + \varphi) \delta \varphi \vec{j}, \end{aligned}$$

da cui

$$\delta L^a = (mg\lambda \cos(\vartheta + \varphi) - 4kr^2 \sin \varphi \cos \varphi) \delta \varphi = Q_\varphi \delta \varphi,$$

che fornisce di nuovo la stessa equazione pura di equilibrio precedente.

Esercizio 14.3 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse y verticale ascendente, un'asta omogenea pesante AB , di massa m e lunghezza $2l$, vincolata con gli estremi A e B sui due assi cartesiani, come nella figura seguente. Il vincolo sia liscio in B e scabro in A , con coefficiente di attrito statico f_s . Sulla sbarra agisce, oltre alla forza peso, una forza elastica di centro O sul baricentro G . Determinare entro quali limiti può variare la costante della forza elastica perché la posizione $\varphi = \pi/3$ sia di equilibrio.*



La figura di destra riporta il diagramma delle forze agenti.

Le coordinate dei punti di applicazione delle forze sono:

- $A: (0, 2l \sin \varphi),$
- $B: (2l \cos \varphi, 0),$
- $G: (l \cos \varphi, l \sin \varphi).$

Denominando, al solito, $\vec{i}$ e $\vec{j}$ i versori degli assi, le forze si possono scrivere come segue:

- $\vec{\Phi}_A = \Phi_{Ax} \vec{i} + \Phi_{Ay} \vec{j},$
- $\vec{\Phi}_B = \Phi_{By} \vec{j}$
- $m\vec{g} = -mg\vec{j},$
- $\vec{F}_{el} = -kl \cos \varphi \vec{i} - kl \sin \varphi \vec{j}.$

Le equazioni cardinali della statica, scegliendo come polo dei momenti il punto A , sono:

$$(\Phi_{Ax} + -kl \cos \varphi) + (\Phi_{Ay} + \Phi_{By} - mg - kl \sin \varphi) \vec{j} = \vec{0},$$

e

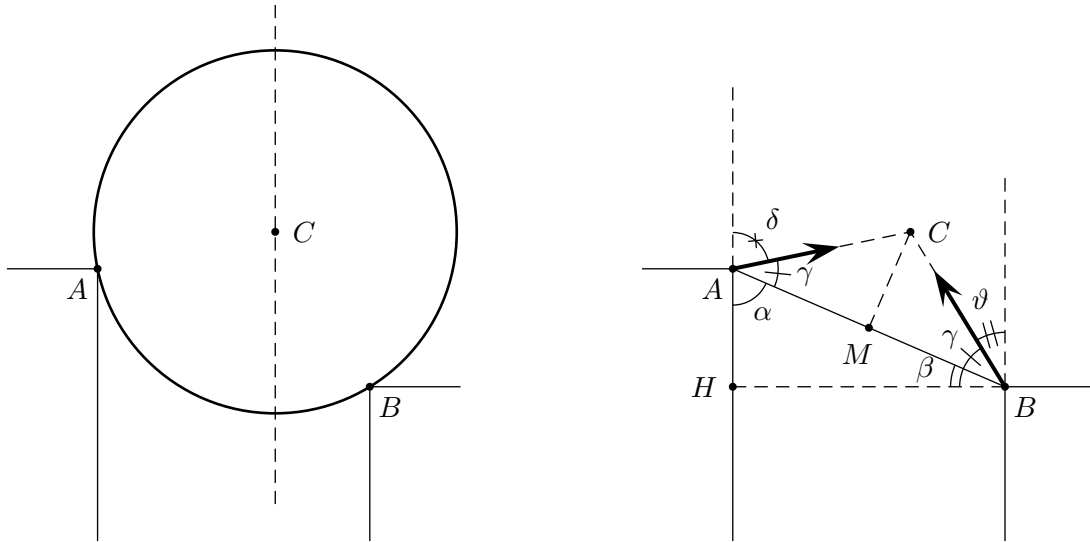
$$\overrightarrow{AG} \wedge (m\vec{g} + \vec{F}_{el}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Phi}_B.$$

Prendendo le componenti sui due assi si ottengono 3 equazioni nelle incognite Φ_{Ax} , Φ_{Ay} , Φ_{By} , φ . Si possono determinare facilmente le reazioni vincolari in funzione di φ (le equazioni sono lineari nelle componenti delle reazioni vincolari), dopodiché la condizione richiesta dal testo di esplicita scrivendo la relazione di Coulomb relativa all'attrito statico:

$$(14.8) \quad \left| \frac{\Phi_{Ay}}{\Phi_{Ax}} \right| \leq f_s.$$

Sostituendo nell'equazione (14.8) $\pi/3$ al posto di φ si ottengono le limitazioni richieste per k .

Esercizio 14.4 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri, in un piano verticale, un disco rigido pesante, **non** omogeneo, di massa m e raggio r , poggiato senza attrito su due punti A e B come in figura. Siano h il dislivello tra A e B e d la distanza tra le due rette verticali passanti per A e B . Nell'ipotesi che il disco sia in equilibrio, si determinino la posizione del baricentro G e le reazioni vincolari in A e B .*



Tenendo conto che $\overline{HB} = d$, $\overline{AH} = h$, $\overline{AC} = \overline{CB} = r$, tutti gli elementi della figura di destra possono essere facilmente determinati.

Per determinare la posizione del baricentro possiamo usare il PLV: se la posizione data è di equilibrio, il lavoro virtuale delle forze attive deve essere non positivo. Se ne deduce che il baricentro G deve trovarsi sulla verticale per C : sono le uniche due posizioni in cui tutti gli spostamenti virtuali di G sono perpendicolari alla forza peso (unica forza attiva agente), rendendo nullo il suo lavoro virtuale. In ogni altra posizione alcuni spostamenti virtuali potrebbero fare un angolo acuto con la forza, rendendone positivo il lavoro virtuale: basta tenere conto che G può ruotare attorno a C o sollevarsi; nel caso del sollevamento non ci sono problemi, per le rotazioni basta tenere conto che gli spostamenti virtuali corrispondenti sono tangenti alla circonferenza di centro C e passante per G .

Detti $\vec{i}$ e $\vec{j}$ due versori, di cui il primo orizzontale verso destra e il secondo verticale ascendente, e indicati con Φ_A e Φ_B i moduli delle due reazioni vincolari in A e B , si ha

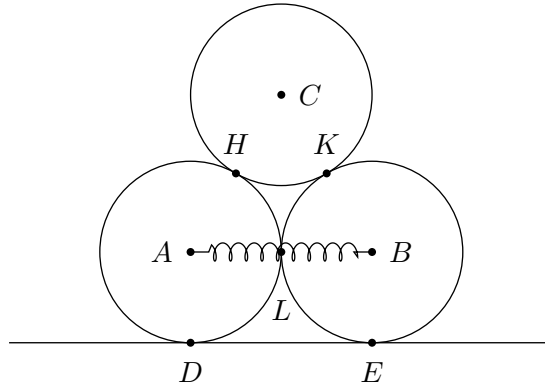
- $\vec{\Phi}_A = \Phi_A \sin \delta \vec{i} + \Phi_A \cos \delta \vec{j}$,
- $\vec{\Phi}_B = -\Phi_B \cos(\gamma + \beta) \vec{i} + \Phi_B \sin(\gamma + \beta) \vec{j}$,
- $m\vec{g} = -mg\vec{j}$.

La prima equazione cardinale della statica fornisce, considerando le due componenti, due equazioni indipendenti nelle due sole incognite Φ_A e Φ_B .

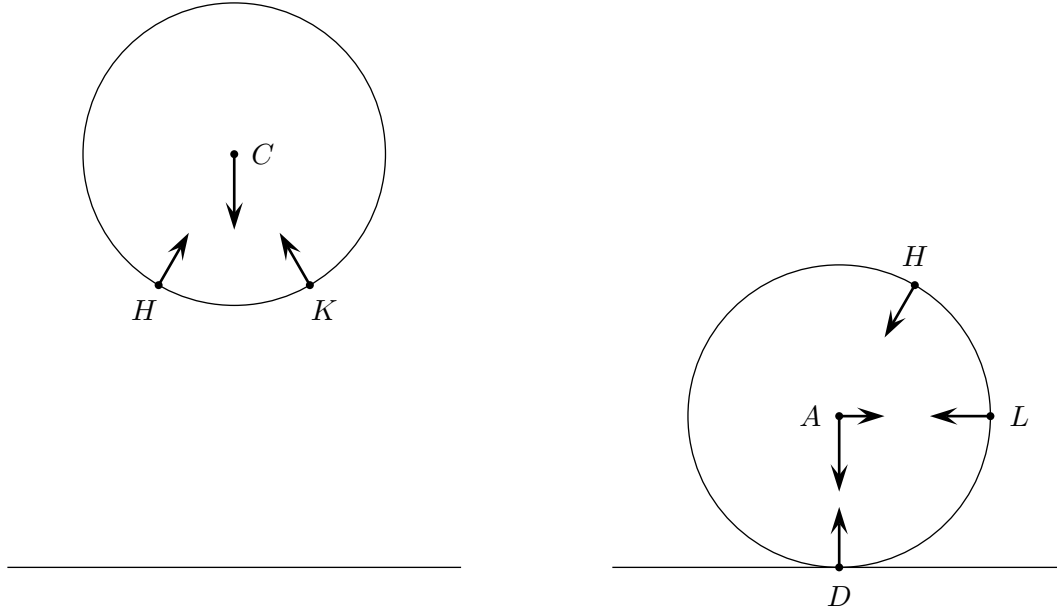
La seconda equazione cardinale della statica, se scritta usando come polo il punto C , non fornisce alcuna ulteriore informazione, in quanto tutte le forze sono concorrenti in C (anche il peso, anche se non ne è noto il punto di applicazione) e quindi hanno momento nullo.

Si noti che esistono due posizioni diverse per il baricentro che consentono l'equilibrio: è chiaro che esse sono equivalenti per quanto riguarda l'equilibrio, mentre differiscono per quanto riguarda la stabilità dell'equilibrio stesso, cosa di cui ci occuperemo più avanti.

Esercizio 14.5 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri, in un piano verticale, un sistema di tre dischi pesanti, di ugual massa m e raggio r , disposti come nella figura seguente. Si supponga che tutti i vincoli siano privi di attrito (compresi quelli al contatto tra i dischi). I due centri A e B sono collegati da una forza elastica. Le uniche altre forze attive agenti siano i pesi dei tre dischi. Si determini il minimo valore della costante elastica k che rende possibile l'equilibrio, e le forze esercitate tra i dischi.*



Trattandosi di un sistema non rigido applichiamo le equazioni cardinali della statica alle varie componenti rigide. Questa è anche una necessità legata al fatto che le forze richieste sono tutte interne al sistema in esame e dunque non possono comparire nelle equazioni cardinali applicate all'intero sistema. Considereremo il disco di centro C e quello di centro A . La figura di seguito è opportunamente ingrandita per rendere più chiara la trattazione. Cominciamo con l'osservare che il triangolo ABC è equilatero e di lato $2r$. Questo consente di trovare facilmente tutte le caratteristiche geometriche della figura.



Sia per il primo disco che per il secondo scriveremo solo la prima equazione cardinale della statica, in quanto, scegliendo come polo il centro dei dischi, sia nel primo che nel secondo caso i momenti sono tutti nulli, perché le forze sono concorrenti nei centri.

Introducendo il solito sistema cartesiano ortogonale con l'asse y verticale ascendente, otteniamo per il primo disco, con ovvio significato dei simboli,

$$\vec{\Phi}_H + \vec{\Phi}_K + m\vec{g} = \vec{0},$$

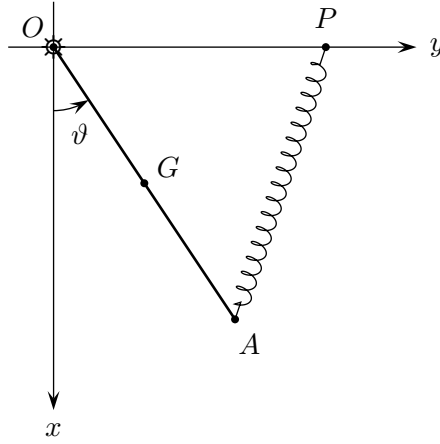
che fornisce subito il valore di $\vec{\Phi}_H$, tenuto conto della simmetria tra $\vec{\Phi}_H$ e $\vec{\Phi}_K$. Per il secondo disco otteniamo

$$\vec{\Phi}'_H + \vec{\Phi}_L + \vec{\Phi}_M + m\vec{g} + \vec{F}_{el} = \vec{0},$$

Se teniamo conto che, per il principio di azione e reazione, $\vec{\Phi}'_H = -\vec{\Phi}_H$, da qui possiamo trovare subito tutte le reazioni vincolari.

Per rispondere alla domanda del problema relativamente alla costante della molla, basterà osservare che il valore di Φ_M che ricaviamo dalla risoluzione dell'equazione precedente (e che rappresenta la componente di $\vec{\Phi}_M$ nella direzione di $\vec{i}$, deve essere ≤ 0 , per la scelta del sistema di coordinate, e quindi, al limite per garantire l'equilibrio, deve essere uguale a zero. Questa osservazione fornisce il valore richiesto per k .

Esercizio 14.6 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano verticale riferito al sistema di coordinate cartesiane indicato nella figura seguente, con l'asse y verticale discendente, si consideri un'asta OA , di massa M e lunghezza $2l$, incernierata in O e un punto P di massa m , vincolato a scorrere sull'asse delle x . Nell'ipotesi di assenza di attrito, si determinino le posizioni di equilibrio del sistema, utilizzando il Principio dei lavori virtuali.*



Si possono introdurre come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ di figura e l'ordinata y del punto P . Le coordinate dei punti di applicazione delle forze attive agenti sono allora le seguenti.

- $P: (0, y)$,
- $G: (l \cos \vartheta, l \sin \vartheta)$,
- $A: (2l \cos \vartheta, 2l \sin \vartheta)$.

Le forze attive agenti sono:

- $m\vec{g} = mg\vec{i}$,
- $M\vec{g} = Mg\vec{i}$,
- $\vec{F}_A = k\vec{AP} = -2kl \cos \vartheta \vec{i} + (ky - 2kl \sin \vartheta)\vec{j}$,
- $\vec{F}_P = k\vec{PA} = -\vec{F}_A = 2kl \cos \vartheta \vec{i} + (2kl \sin \vartheta - ky)\vec{j}$,

Per gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze si ottiene:

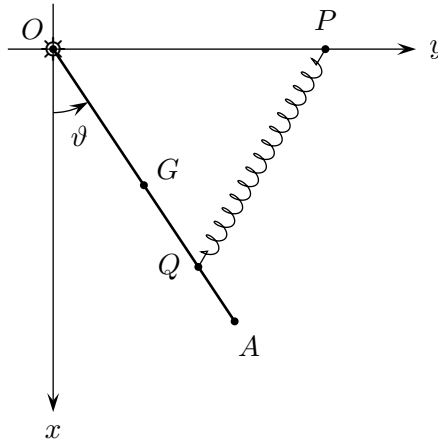
- $\delta P = \delta y \vec{j}$,
- $\delta G = -l \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + l \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{j}$,
- $\delta A = -2l \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + 2l \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{j}$

Il lavoro virtuale delle forze attive si calcola ora facilmente.

$$\begin{aligned}
 \delta L^a &= m\vec{g} \cdot \delta P + M\vec{g} \cdot \delta G + \vec{F}_A \cdot \delta A + \vec{F}_P \cdot \delta P = \\
 &= 0 - Mgl \sin \vartheta \delta \vartheta + 4kl^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \delta \vartheta + 2kyl \cos \vartheta \delta \vartheta - 4kl^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \delta \vartheta + 2kly \sin \vartheta \delta y - ky \delta y = \\
 &= -Mgl \sin \vartheta \delta \vartheta + 2kyl \cos \vartheta \delta \vartheta + 2kl \sin \vartheta \delta y - ky \delta y = \\
 &= (-Mgl \sin \vartheta + 2kyl \cos \vartheta) \delta \vartheta + (2kl \sin \vartheta - ky) \delta y = Q_\vartheta \delta \vartheta + Q_y \delta y.
 \end{aligned}$$

Si trovano così, uguagliando a zero le due componenti lagrangiane della sollecitazione, due equazioni pure di equilibrio, che hanno le soluzioni banali $y = 0, \vartheta = 0$ e $y = 0, \vartheta = \pi$ e altre due soluzioni, simmetriche rispetto all'asse verticale (come è ovvio).

Esercizio 14.7 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Si consideri la seguente variante dell'esercizio 14.6. Oltre all'asta OA e al punto P si consideri un secondo punto Q di massa m_1 , vincolato a scorrere senza attrito sulla semiretta OA , e si supponga che la forza elastica agisca tra Q e P . Si chiede di scrivere, usando il principio dei lavori virtuali, le componenti lagrangiane della sollecitazione.*



Il sistema è ora a tre gradi di libertà. Si possono usare la ϑ e y usate nel problema 14.6 e in più un parametro per determinare la posizione di Q sulla semiretta OA , per esempio la sua ascissa su questa semiretta, che indichiamo con ξ .

Si ottengono le espressioni che seguono per le coordinate dei punti di applicazione delle forze

- $G: (l \cos \vartheta, l \sin \vartheta)$,
- $P: (0, y)$,
- $Q: (\xi \cos \vartheta, \xi \sin \vartheta)$,

i loro spostamenti virtuali

- $\delta G = -l \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + l \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{j}$,
- $\delta P = \delta y \vec{j}$,
- $\delta Q = (\cos \vartheta \delta \xi - \xi \sin \vartheta \delta \vartheta) \vec{i} + (\sin \vartheta \delta \xi + \xi \cos \vartheta \delta \vartheta) \vec{j}$,

e le forze agenti

- $M \vec{g} = Mg \vec{i}$,
- $m \vec{g} = mg \vec{i}$,
- $m_1 \vec{g} = m_1 g \vec{i}$,
- $\vec{F}_P = k \vec{PQ} = -\vec{F}_Q = k \xi \cos \vartheta \vec{i} + (k \xi \sin \vartheta - ky) \vec{j}$,
- $\vec{F}_Q = k \vec{QP} = -k \xi \cos \vartheta \vec{i} + (ky - k \xi \sin \vartheta) \vec{j}$,

Il lavoro virtuale delle forze attive è dato da:

$$\delta L^a = M \vec{g} \cdot \delta G + m \vec{g} \cdot \delta P + m_1 \vec{g} \cdot \delta Q + \vec{F}_P \cdot \delta P + \vec{F}_Q \cdot \delta Q.$$

Utilizzando le espressioni sopra trovate è facile scrivere il lavoro in termini delle coordinate lagrangiane e delle loro variazioni virtuali, ottenendo un'espressione del tipo

$$\delta L^a = Q_\vartheta \delta \vartheta + Q_\xi \delta \xi + Q_y \delta y,$$

che fornisce immediatamente le componenti lagrangiane richieste.

Una ulteriore variante dell'esercizio 14.6 può prevedere che il punto P sia un punto fisso dell'asse y , e non faccia parte del sistema, ma sia solo origine della forza elastica.

Il sistema è ora a due gradi di libertà e si possono usare i parametri ϑ e ξ già usati prima. Le forze e le componenti lagrangiane della sollecitazione si possono ottenere modificando le

equazioni già ottenute, oppure, più semplicemente, pensando la y costante (per esempio $y = a$) in quelle equazioni, e quindi $\delta y = 0$. Naturalmente bisognerà eliminare dal novero delle forze attive sia il peso di P che la forza elastica $\vec{F}_P$.

Si otterrà:

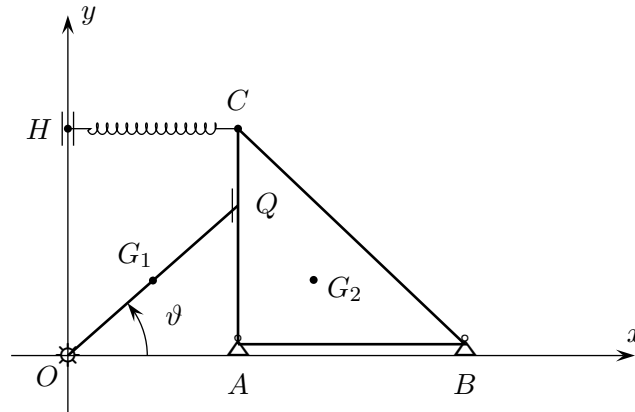
$$\delta L^a = M\vec{g} \cdot \delta G + m_1\vec{g} \cdot \delta Q + \vec{F}_Q \cdot \delta Q.$$

Dopo qualche semplificazione si ottiene:

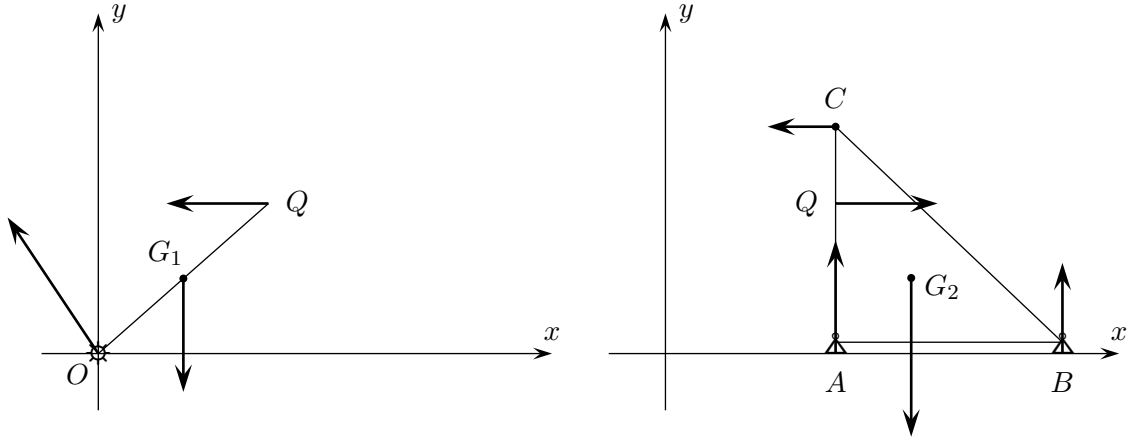
$$\delta L^a = (-Mgl \sin \vartheta - m_1 g \xi \sin \vartheta + ka\xi \cos \vartheta) \delta \vartheta + (m_1 g \cos \vartheta - k\xi + ka \sin \vartheta) \delta \xi,$$

da cui si possono trarre due equazioni pure di equilibrio. Le equazioni non sono semplicemente risolubili per determinare effettivamente le posizioni di equilibrio, ma in un esercizio si potrebbero porre altre questioni, come per esempio quella di trovare il valore di k che rende possibile l'equilibrio con $\vartheta = \pi/4$ e, in questo caso, la posizione di Q sulla semiretta OA .

Esercizio 14.8 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano verticale, riferito al sistema cartesiano di figura, con l'asse y verticale ascendente, sia OQ una sbarra omogenea pesante di massa m e lunghezza l , e ABC una lamina a forma di triangolo rettangolo isoscele, di cateto l , omogenea e pesante, di massa M , poggiata solo con i vertici A e B sull'asse x , su cui può scorrere senza attrito. Una molla di costante elastica k agisce tra il punto C del triangolo e la sua proiezione H sull'asse delle y . La sbarra è incernierata, senza attrito, in O e poggia, sempre senza attrito, con il suo estremo Q sul lato AC del triangolo ABC . Determinare la costante k della forza elastica in modo che la posizione con $\vartheta = \pi/6$ sia di equilibrio e le condizioni sui dati affinché la configurazione assegnata di equilibrio sia possibile (cioè affinché il triangolo non si sollevi dall'asse x).*



Trattandosi di un sistema non rigido conviene considerare separatamente le due parti di cui è costituito, ovvero l'asta OQ e il triangolo ABC . Nella figura seguente sono rappresentate le due parti, con le forze agenti.



Per determinare i punti di applicazione delle forze osserviamo che G_2 è il baricentro del triangolo ABC , baricentro che ha distanza dal vertice A uguale a $2/3$ dell'altezza relativa a BC , per cui

$$\overline{AG_2} = \frac{2}{3} \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{3}.$$

Ne segue che la distanza di G_2 dai cateti del triangolo è $l/3$. Si hanno quindi, con ovvio significato dei simboli, i seguenti valori per i le coordinate dei punti di applicazione delle forze e le forze stesse.

- $O(0, 0)$, $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{i} + \Phi_{Oy}\vec{j}$;
- $G_1(l/2 \cos \vartheta, l/2 \sin \vartheta)$, $m\vec{g} = -mg\vec{j}$;
- $Q(l \cos \vartheta, l \sin \vartheta)$, $\vec{\Phi}_Q = \Phi_{Qx}\vec{i}$, $\vec{\Phi}'_Q = -\vec{\Phi}_Q = -\Phi_{Qx}\vec{i}$;
- $C(l \cos \vartheta, l)$, $\vec{F}_{el} = k\vec{CH} = -kl \cos \vartheta \vec{i}$;
- $G_2(l \cos \vartheta + l/3, l/3)$, $M\vec{g} = -Mg\vec{j}$;
- $A(l \cos \vartheta, 0)$, $\vec{\Phi}_A = \Phi_{Ay}\vec{j}$;
- $B(l \cos \vartheta + l, 0)$, $\vec{\Phi}_B = \Phi_{By}\vec{j}$.

Poiché il testo non richiede la reazione vincolare in O , se applichiamo l'equazione dei momenti all'asta prendendo come polo O la reazione vincolare in O non interverrà nelle equazioni.

Per l'asta OQ avremo dunque:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{OG}_1 \wedge m\vec{g} + \vec{OQ} \wedge \vec{\Phi}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l/2 \cos \vartheta & l/2 \sin \vartheta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \vartheta & l \sin \vartheta & 0 \\ \Phi_{Qx} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(-mg \frac{l}{2} \cos \vartheta - l\Phi_{Qx} \sin \vartheta \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ne segue, tenendo conto che vogliamo che la posizione $\vartheta = \pi/6$ sia di equilibrio,

$$(14.9) \quad \Phi_{Qx} = -\frac{mg}{2 \tan \vartheta} = -\frac{mg\sqrt{3}}{2}.$$

Applichiamo ora la prima e la seconda (con polo in A) equazione cardinale della statica alla lamina triangolare.

$$\vec{R} = \vec{F}_{el} + M\vec{g} + \vec{\Phi}'_Q + \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B = (-kl \cos \vartheta - \Phi_{Qx})\vec{i} + (-Mg + \Phi_{Ay} + \Phi_{By})\vec{j} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{AC} \wedge \vec{F}_{el} + \vec{AQ} \wedge \vec{\Phi}'_Q + \vec{AG}_2 \wedge M\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{\Phi}_B = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & l & 0 \\ -kl \cos \vartheta & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & l \sin \vartheta & 0 \\ -\Phi_{Qx} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l/3 & l/3 & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{By} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (kl^2 \cos \vartheta + l\Phi_{Qx} \sin \vartheta - (Mgl)/3 + l\Phi_{By})\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Otteniamo allora tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} -kl \cos \vartheta - \Phi_{Qx} = 0 \\ -Mg + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0 \\ kl^2 \cos \vartheta + l\Phi_{Qx} \sin \vartheta - (Mgl)/3 + l\Phi_{By} = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto del valore trovato in (14.9) per Φ_{Qx} e del fatto che deve essere $\vartheta = \pi/3$, dalla prima equazione troviamo

$$k = \frac{mg}{l}.$$

Dalle altre due troviamo poi:

$$\Phi_{By} = \frac{Mg}{3} - \frac{mg\sqrt{3}}{4}, \quad \Phi_{Ay} = \frac{2Mg}{3} + \frac{mg\sqrt{3}}{4}$$

L'equilibrio statico in questa configurazione è possibile solo se

$$\Phi_{By} \geq 0 \quad \wedge \quad \Phi_{Ay} \geq 0.$$

La seconda condizione è sempre verificata (a conferma del fatto intuitivo che la lamina non si alzerà mai, con queste forze agenti, dal punto A), mentre la prima condizione richiede che

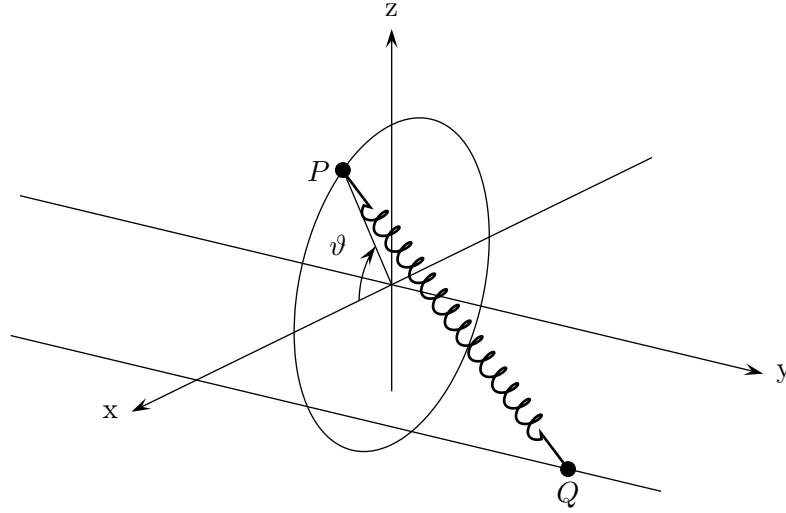
$$\frac{Mg}{3} - \frac{mg\sqrt{3}}{4} \geq 0,$$

che fornisce una condizione sul rapporto delle masse della lamina e dell'asta:

$$\frac{M}{m} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Anche quest'ultima condizione è intuitiva: se la lamina pesa troppo poco rispetto alla sbarra, il punto B non ce la farà a rimanere attaccato all'asse x , nella configurazione di equilibrio data, tenendo anche conto del fatto che la molla tende a far "sollevare" il punto B .

Esercizio 14.9 (Statica dei sistemi di punti). *In un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, con l'asse z verticale ascendente, si consideri una guida circolare di centro O e raggio r , appartenente al piano Oxz . Sul piano Oxy si consideri poi una guida rettilinea di equazione $x = 2r$. Un punto P di massa m è vincolato, senza attrito, sulla guida circolare, mentre un punto Q , di massa M è vincolato sulla guida rettilinea, sempre senza attrito. Tra i due punti agisce una forza elastica di costante h . Si determinino, utilizzando il PLV, le posizioni di equilibrio del sistema.*



Il sistema è a due gradi di libertà e si possono introdurre come parametri lagrangiani l'angolo ϑ di figura e la coordinata y del punto Q .

Le coordinate dei punti d'azione delle forze attive e le forze stesse si possono scrivere come segue.

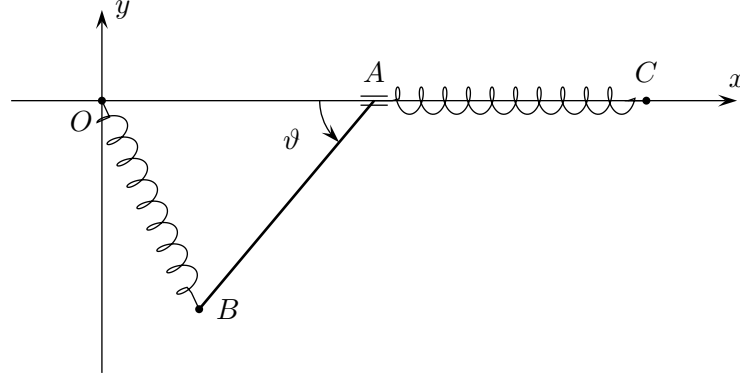
$$\begin{aligned} - P(r \cos \vartheta, 0, r \sin \vartheta), \quad m\vec{g} = -mg\vec{k}, \quad \vec{F}_P = h\vec{PQ} = (2hr - hr \cos \vartheta)\vec{i} + hy\vec{j} - hr \sin \vartheta\vec{k}, \\ - Q(2r, y, 0), \quad M\vec{g} = -Mg\vec{k}, \quad \vec{F}_Q = -\vec{F}_P = (hr \cos \vartheta - 2hr)\vec{i} - hy\vec{j} + hr \sin \vartheta\vec{k}. \end{aligned}$$

Gli spostamenti virtuali dei due punti di applicazione delle forze sono:

$$\begin{aligned} - \delta P = -r \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + r \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{k}; \\ - \delta Q = \delta y \vec{j}. \end{aligned}$$

Il calcolo del lavoro virtuale delle forze attive è ora immediato, come pure la determinazione delle componenti lagrangiane della sollecitazione e le posizioni di equilibrio (ottenute uguagliando a zero le due componenti lagrangiane della sollecitazione).

Esercizio 14.10 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale ascendente, si consideri un'asta omogenea AB , di lunghezza l e massa m , vincolata con l'estremo A a scorrere senza attrito sull'asse x . Sull'asta agiscono, oltre al peso, due forze elastiche, di ugual costante k , sugli estremi A e B : la prima ha centro nel punto $C(2l, 0)$, la seconda nell'origine del sistema di coordinate. Si determinino, utilizzando il PLV, le equazioni dell'equilibrio del sistema, senza risolverle. Si determini poi la reazione vincolare in A , nelle posizioni di equilibrio.*



Il sistema è a due gradi di libertà: possiamo scegliere l'angolo ϑ di figura e l'ascissa, $x = x_A$ del punto A. Con questa scelta le coordinate dei punti di applicazione delle forze, e le forze stesse, sono, indicando al solito con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori della terna scelta:

- $A = (x, 0)$, $\vec{F}_A = h\vec{AC} = (2hl - hx)\vec{i}$,
- $B = (x - l \cos \vartheta, -l \sin \vartheta)$, $\vec{F}_B = h\vec{BO} = (-hx + hl \cos \vartheta)\vec{i} + hl \sin \vartheta \vec{j}$,
- $G = (x - \frac{l}{2} \cos \vartheta, -\frac{l}{2} \sin \vartheta)$, $m\vec{g} = -mg\vec{j}$.

Gli spostamenti virtuali sono:

- $\delta A = \delta x \vec{i}$,
- $\delta B = (\delta x + l \sin \vartheta \delta \vartheta) \vec{i} + (-l \cos \vartheta \delta \vartheta) \vec{j}$,
- $\delta G = (\delta x + \frac{l}{2} \sin \vartheta \delta \vartheta) \vec{i} + (-\frac{l}{2} \cos \vartheta \delta \vartheta) \vec{j}$.

Si può ora procedere con il calcolo del lavoro virtuale della sollecitazione attiva ottenendo, dopo qualche semplificazione,

$$\begin{aligned} \delta L^a &= \vec{F}_A \cdot \delta A + \vec{F}_B \cdot \delta B + m\vec{g} \cdot \delta G = \\ &= (-2hx + hl \cos \vartheta + 2hl)\delta x + (-hlx \sin \vartheta + mg\frac{l}{2} \cos \vartheta)\delta \vartheta. \end{aligned}$$

Le condizioni richieste per l'equilibrio sono

$$\begin{cases} -2x + l \cos \vartheta + 2l = 0 \\ -hx \sin \vartheta + \frac{mg}{2} \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

La risoluzione esplicita di queste equazioni (non richiesta dal testo) è un po' laboriosa dal punto di vista dei calcoli: si dovrebbe ricavare x in funzione di $\tan \vartheta$ dalla seconda equazione, e sostituirlo nella prima, ottenendo un'equazione nella sola ϑ .

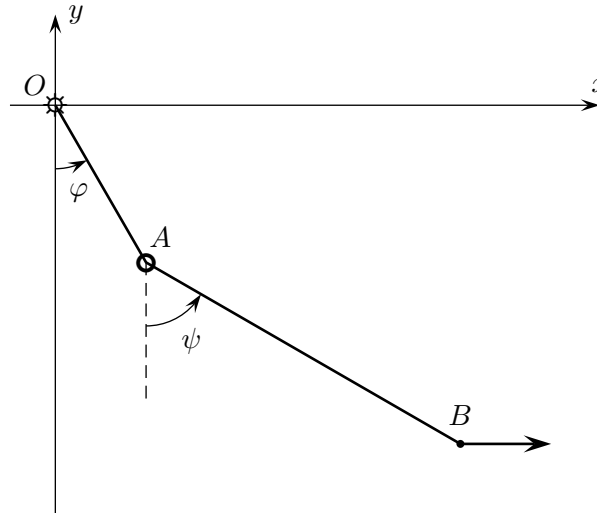
La determinazione della reazione vincolare in A si può fare scrivendo solo la prima equazione cardinale della statica relativa all'asta:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g} + \vec{\Phi}_A = \vec{0},$$

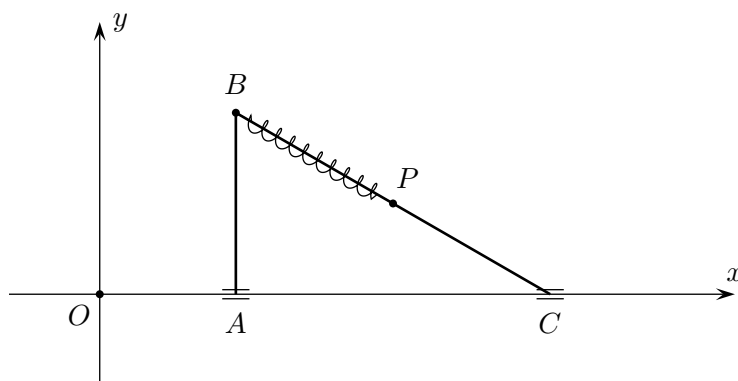
e basterà tenere conto che $\vec{\Phi}_A$ ha solo una componente verticale.

Esercizio 14.11 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale ascendente, si considerino due aste OA e AB (bipendolo) incernierate tra*

di loro in A , di lunghezza rispettiva l e $2l$; la prima abbia densità $\mu = as + b$, essendo s l'ascissa del generico punto P dell'asta, calcolata a partire da O ; la seconda asta sia invece omogenea e di massa M . Si supponga che, oltre ai pesi, agisca in B un forza costante $\vec{F}$ avente direzione e verso dell'asse x . Si chiede di determinare le posizioni di equilibrio del sistema e la reazione vincolare in O . Tutti i vincoli siano lisci.



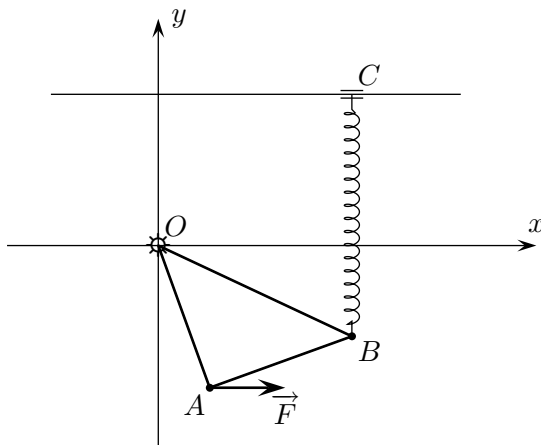
Esercizio 14.12 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). In un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale ascendente, si consideri un corpo rigido costituito da due aste omogenee AB e BC di lunghezza l e $2l$ rispettivamente, e densità μ , saldate in B in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in A . Gli estremi A e C sono vincolati a scorrere sull'asse x , senza attrito. Sull'asta BC è vincolato a scorrere un punto P , di massa m , senza attrito. Si supponga che, oltre ai pesi, agisca una forza elastica di costante k tra i punti B e P . Detta s l'ascissa di P sulla semiretta BC , misurata a partire da B , si scelgano come parametri lagrangiani s e l'ascissa x del punto A . Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e le reazioni vincolari in A e C .



Esercizio 14.13 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). In un piano Oxy , con l'asse y verticale ascendente, si consideri un sistema di tre aste, omogenee, OA , AB e OB incernierate tra loro a formare un triangolo rettangolo isoscele come in figura, con i cateti

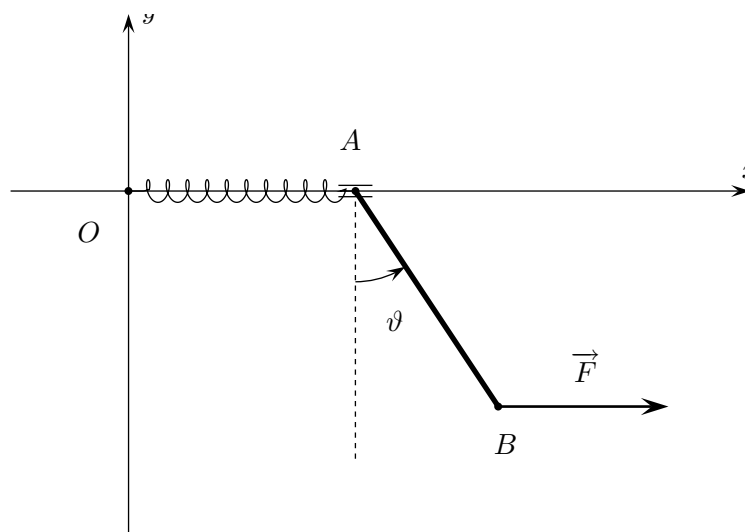
lunghe l . Il sistema sia inoltre incernierato in O con cerniera liscia. Oltre ai pesi si supponga che agisca sul vertice B una forza elastica avente centro nella proiezione C di B sulla retta di equazione $y = l$. Il punto C , origine della forza elastica, scorre sulla retta senza attrito. In A agisca inoltre una forza $\vec{F}$, parallela ed equiversa all'asse x .

Si determini la costante della forza elastica in modo che il sistema rimanga in equilibrio nella posizione con AB orizzontale. In questa posizione si determini la reazione vincolare in O .



Esercizio 14.14 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). Si consideri un sistema, come in figura, costituito da un'asta rigida AB , omogenea, di massa m e lunghezza l , vincolata a scorrere con il suo estremo A sull'asse x di un sistema cartesiano ortogonale Oxy , con l'asse y verticale ascendente. Sull'asta agiscono, oltre al peso, una forza elastica di centro O , costante k e applicata nel punto A , e una forza costante $\vec{F}$ orizzontale, applicata nell'estremo B dell'asta e orientata nel verso del semiasse x positivo.

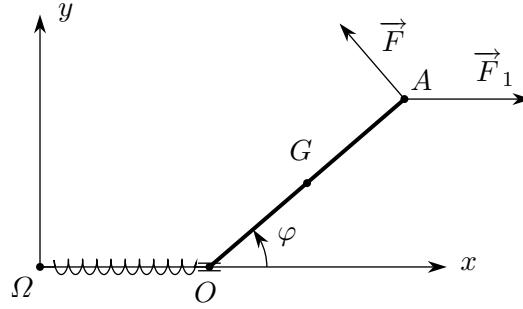
1. Nell'ipotesi che i vincoli siano lisci (privi di attrito), si chiede di trovare le posizioni di equilibrio usando il principio dei lavori virtuali.
2. Nell'ipotesi che il vincolo in A sia scabro, con coefficiente di attrito statico f_s , si chiede di trovare le posizioni di equilibrio e la reazione vincolare in A , all'equilibrio.



Esercizio 14.15 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). Si riprenda in esame l'esercizio proposto nel paragrafo 5.5 (nella pagina 60) del testo di teoria e si aggiunga al sistema di carichi presenti una forza $\vec{F}_1 = F_1 \vec{i}$, agente sul punto A, costante in modulo, direzione e verso. Si risolva l'esercizio con questa variante.

Per maggiore chiarezza riproponiamo il testo integrale dell'esercizio con l'aggiunta del nuovo carico.

Sia data un'asta OA, come nella figura che segue, di lunghezza l.



Il piano Ωxy è supposto verticale e l'asse delle y è verticale ascendente. Le forze agenti sono:

- una forza $\vec{F}$ di modulo noto e costante, agente in A e perpendicolare a OA;
- una forza di tipo elastico di costante k, agente sul punto O e avente centro in Ω ;
- il peso della sbarra, che è supposta omogenea e di massa m;
- una reazione vincolare in O, che costringe il punto O stesso a scorrere sull'asse delle x (vincolo a carrello).

Rispetto alla soluzione già trattata nel testo di teoria bisogna aggiungere il contributo, sia al risultante che al momento risultante, del nuovo carico. Per quanto riguarda l'equazione dei risultanti avremo una modifica solo sulla prima componente, mentre nulla cambia per la seconda:

$$\begin{cases} -kx - F \sin \varphi + F_1 = 0 \\ \Phi_y + F \cos \varphi - mg = 0 \end{cases}.$$

Per l'equazione dei momenti basterà calcolare

$$\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \varphi & l \sin \varphi & 0 \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -lF_1 \sin \varphi \vec{k}.$$

Le tre equazioni scalari saranno allora:

$$\begin{cases} -kx - F \sin \varphi = 0 \\ \Phi_y + F \cos \varphi - mg = 0 \\ -mg \frac{l}{2} \cos \varphi + Fl - F_1 l \sin \varphi = 0 \end{cases}.$$

Come si può facilmente constatare, dal punto di vista meccanico l'introduzione di questo nuovo carico non ha comportato un aumento delle difficoltà di calcolo. Dal punto di vista

analitico però la soluzione del nuovo sistema di equazioni è più complesso del precedente, in quanto l'ultima equazione non è più un'equazione elementare in coseno, ma un'equazione lineare in seno e coseno. La sua risoluzione può essere fatta in diversi modi.

Risoluzione per via grafica

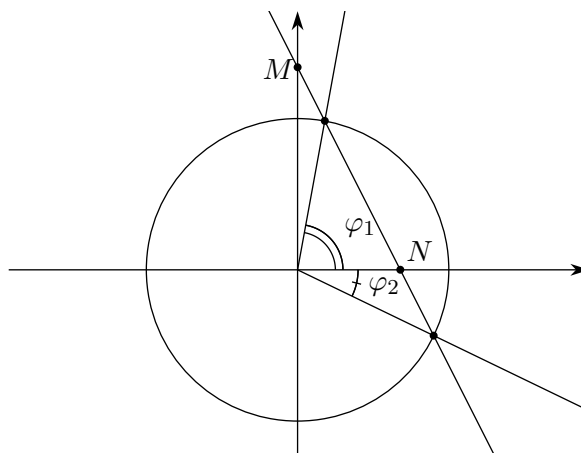
Posto $\cos \varphi = X$ e $\sin \varphi = Y$, l'equazione, con anche qualche semplificazione di scrittura, e messa a sistema con la circonferenza goniometrica, fornisce:

$$\begin{cases} mgX + 2F_1Y - 2F = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

L'equazione avrà o no soluzioni a seconda che la retta fornita dalla prima equazione ha o no intersezioni con la circonferenza. Poiché i punti di intersezione di questa retta con gli assi coordinati sono

$$M = \left(0, \frac{F}{F_1}\right), \quad N = \left(\frac{2F}{mg}, 0\right),$$

l'esistenza o meno di soluzioni dipenderà dai rapporti tra i parametri F , F_1 ed mg . Se per esempio almeno uno dei due valori F/F_1 e $2F/mg$ è minore di 1, allora la situazione sarà quella della figura seguente e ci saranno due soluzioni in φ ; bisognerà poi, usando le altre due equazioni, trovare le corrispondenti soluzioni in x e Φ_y .



Soluzione analitica

Se si scrive l'equazione nella forma

$$mg \cos \varphi + 2F_1 \sin \varphi = 2F,$$

e si dividono ambo i membri per $\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}$ si ottiene

$$\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}} \cos \varphi + \frac{2F_1}{\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}} \sin \varphi = \frac{2F}{\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}}.$$

Considerato l'unico angolo α tale che

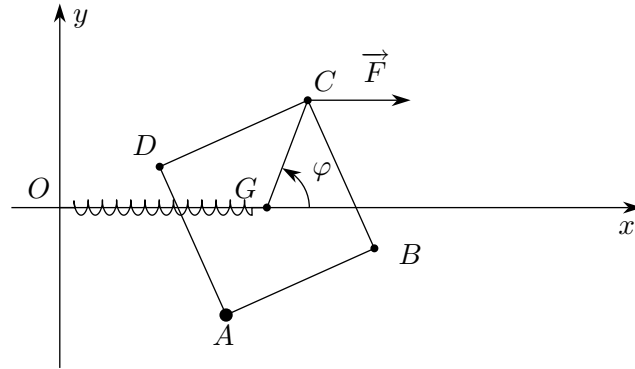
$$\sin \alpha = \frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{2F_1}{\sqrt{m^2g^2 + 4F_1^2}},$$

l'equazione si potrà scrivere nella forma

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{2F}{\sqrt{m^2 g^2 + 4F_1^2}},$$

che avrà soluzioni solo se il secondo membro è minore o uguale a 1. Trovate le soluzioni in φ si procede poi come indicato prima.

Esercizio 14.16 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *In un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale ascendente, è dato un quadrato $ABCD$ omogeneo, di lato l e massa m , vincolato senza attrito con il baricentro G sull'asse x . Sul punto A è saldata una massa puntiforme M . Nell'ipotesi che agiscano, oltre ai pesi, una forza elastica in G di centro O e costante h , e una forza costante $\vec{F}$ in C , parallela ed equiversa all'asse x , si chiede di determinare le posizioni di equilibrio del sistema e la reazione vincolare in G all'equilibrio.*



Il sistema è a due gradi di libertà e si possono assumere come parametri lagrangiani l'ascissa $x = x_G$ del punto G e l'angolo φ di figura.

Le forze agenti sono

- $\vec{F} = F\vec{i}$;
- $M\vec{g} = -Mg\vec{j}$;
- $m\vec{g} = -mg\vec{j}$;
- $\vec{F}_e l = h\vec{GO}$;
- $\vec{\Phi}_G = \Phi_G\vec{j}$.

Le due componenti non nulle della prima equazione cardinale della statica forniscono le seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} F - hx = 0 \\ -Mg - mg + \Phi_G = 0 \end{cases}$$

Per la seconda equazione cardinale scegliamo come polo il punto G (in questo modo due delle quattro forze non danno alcun contributo) e otteniamo:

$$\vec{GA} \wedge M\vec{g} + \vec{GC} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -l\sqrt{2}/2 \cos \varphi & -l\sqrt{2}/2 \sin \varphi & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ +l\sqrt{2}/2 \cos \varphi & +l\sqrt{2}/2 \sin \varphi & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

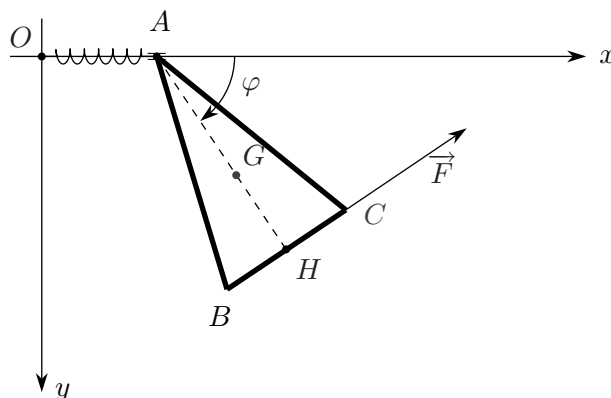
L'unica componente non nulla di questa equazione fornisce una terza equazione scalare che, unita alle prime due, consente di risolvere il problema di equilibrio completamente, ovvero determinando sia le posizioni di equilibrio che la reazione vincolare in G .

Si risolva lo stesso problema con una delle due ipotesi seguenti.

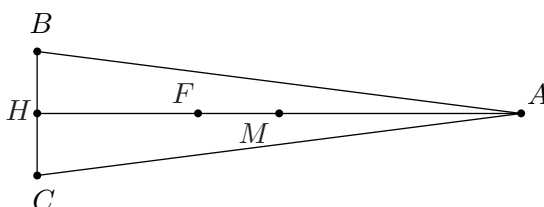
- La forza elastica $h\overrightarrow{GO}$ viene sostituita da una forza elastica $h\overrightarrow{DO}$ (cioè agente sul punto D anziché sul baricentro G del quadrato).
- La forza elastica $h\overrightarrow{GO}$ viene sostituita da una forza elastica $h\overrightarrow{DH}$, ove H è la proiezione di D sull'asse delle y .

Esercizio 14.17 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Con riferimento alla figura seguente, si consideri un telaio costituito da tre aste omogenee di massa totale $3m$ e uguale densità, saldate a formare un triangolo isoscele ABC , con $\overline{AB} = \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Il telaio sia vincolato in un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale discendente, con una cerniera in A liscia e scorrevole sull'asse orizzontale x . Si supponga che, oltre al peso, agiscano una forza $\vec{F}$ in C , di modulo costante e sempre parallela ed equiversa a $\overline{BC}$ e una forza elastica sul punto A di costante k e centro in O .*

1. Scrivere le equazioni pure di equilibrio del sistema e discuterne la risolubilità, determinando le configurazioni di equilibrio.
2. Calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio.



Cominciamo con l'osservare che in un telaio come quello qui considerato il centro di massa (o baricentro fisico che coincide con il centro di massa viste le ridotte dimensioni del sistema) non coincide con il baricentro geometrico (intersezione delle mediane del triangolo). La cosa risulta evidente da un punto di vista meccanico se si considera, per esempio, un triangolo isoscele con un angolo al vertice molto piccolo, come nella figura che segue.



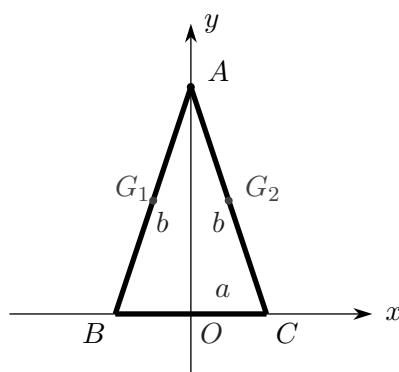
È chiaro che il baricentro geometrico (punto F della figura) si troverà sempre a una distanza da H corrispondente a $1/3$ dell' altezza AH , mentre il centro di massa sarà tanto più vicino al punto medio M della stessa altezza quanto più l'angolo al vertice è piccolo: al tendere a zero di questo angolo al vertice il triangolo può infatti essere sempre meglio approssimato a due aste omogenee sovrapposte, il cui baricentro è ovviamente al centro delle aste stesse.

Lo stesso tipo di considerazioni può anche far capire perché, nel caso di una lamina piana omogenea, anziché di un telaio, il baricentro geometrico e il centro di massa coincidano. In questo caso infatti, se si tira per il baricentro geometrico una perpendicolare all'altezza AH , il triangolo risulterà suddiviso in due parti che, dal punto di vista della distribuzione di massa, saranno sempre "metà da una parte e metà dall'altra", come risulta evidente se si calcolano le aree delle due parti.

A questo punto per risolvere il problema meccanico possiamo scegliere una delle seguenti strategie:

- trattare separatamente le tre aste, considerando la forza peso di ciascuna applicata nel rispettivo baricentro;
- trovare il baricentro del telaio triangolare e applicare la forza peso totale in questo baricentro.

Seguiremo la seconda possibilità. Consideriamo allora un triangolo isoscele ABC posto in un sistema di riferimento che semplifichi i calcoli, e indichiamo con ρ la densità di ciascuno dei lati.



Per trovare il centro di massa usiamo la definizione, osservando che ci basta solo l'ordinata in quanto l'ascissa è ovviamente nulla per simmetria. Le masse dei lati e della base sono ρb e ρa rispettivamente, e possiamo tenere conto che il baricentro della base è sull'origine, e dunque ha ordinata nulla. Indichiamo inoltre con h l'altezza del triangolo (facilmente ricavabile con il teorema di Pitagora) e osserviamo che l'ordinata dei baricentri dei due lati è $h/2$.

$$y_G = \frac{\rho b y_{G_1} + \rho b y_{G_2}}{2\rho b + \rho a} = \frac{bh}{2b + a}.$$

Naturalmente, se $b = a$, si ottiene $y_G = h/3$, cioè se il triangolo è equilatero il centro di massa coincide con il baricentro geometrico, come è evidente per questioni di simmetria. Si noti altresì che se le tre aste avessero avuto la stessa massa (e quindi non la stessa densità, il centro di massa sarebbe stato nel baricentro geometrico del triangolo.

Passiamo ora alla risoluzione del problema. Per semplificare la scrittura delle equazioni poniamo $c = \overline{AG}$ e $\alpha = \hat{GAC}$, notando che il seno e il coseno di α , ove necessari, possono essere facilmente ricavati usando i noti teoremi sui triangoli rettangoli.

Osserviamo preventivamente che il sistema ha due gradi di libertà e si possono assumere come parametri lagrangiani l'ascissa x del punto A e l'angolo φ di figura.

Le forze presenti sono le seguenti.

- $\vec{F}_{el} = k\overline{AO} = -kx\vec{i}$.
- $3m\vec{g} = 3mg\vec{j}$.
- $\vec{F} = F \sin \varphi \vec{i} - F \cos \varphi \vec{j}$.
- $\vec{\Phi}_A = \Phi_A \vec{j}$.

Le prime tre sono forze attive, l'ultima è la reazione vincolare in A che possiamo supporre perpendicolare all'asse x (vincolo liscio) e appartenente al piano Oxy (tutte le forze attive stanno nel piano Oxy). Per scrivere due equazioni pure di equilibrio possiamo utilizzare il principio dei lavori virtuali. Siccome il testo chiede anche di trovare la reazione vincolare all'equilibrio, in realtà potremmo utilizzare direttamente le equazioni cardinali della statica. In un problema come questo la scelta dell'una o dell'altra strada non comporta grosse differenze nei calcoli. In ogni caso l'uso del principio dei lavori virtuali è utile perché fornisce le componenti lagrangiane della sollecitazione (forze generalizzate) che servono generalmente per poter successivamente scrivere le equazioni di Lagrange del moto quando si tratterà la parte dinamica.

Il calcolo del lavoro virtuale delle forze attive può essere fatto trovando lo spostamento virtuale dei punti di applicazione di ciascuna delle forze presenti, oppure usando la formula che fornisce il lavoro per un corpo rigido:

$$(*) \quad \delta L^a = \vec{R} \cdot \delta \Omega + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\Psi},$$

dove Ω è un punto qualunque del rigido.

Faremo i calcoli in entrambi i modi, per un utile esercizio. I vettori che individuano le posizioni dei punti di applicazione delle forze attive sono i seguenti.

- $\overline{OA} = x\vec{i}$.
- $\overline{OG} = (x + c \cos \varphi)\vec{i} + c \sin \varphi \vec{j}$.
- $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AH} + \overline{HC}$. Dunque $\overline{OC} = (x\vec{i}) + (h \cos \varphi \vec{i} + h \sin \varphi \vec{j}) + (a \sin \varphi \vec{i} - a \cos \varphi \vec{j})$.
Ne segue $\overline{OC} = (x + h \cos \varphi + a \sin \varphi)\vec{i} + (h \sin \varphi - a \cos \varphi)\vec{j}$.

Possiamo a questo punto scrivere gli spostamenti virtuali di questi punti.

- $\delta A = \delta x \vec{i}$.
- $\delta G = (\delta x - c \sin \varphi \delta \varphi)\vec{i} + c \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$.
- $\delta C = (\delta x - h \sin \varphi \delta \varphi + a \cos \varphi \delta \varphi)\vec{i} + (h \cos \varphi \delta \varphi + a \sin \varphi \delta \varphi)\vec{j}$.

Ne segue

$$\begin{aligned} \delta L^a &= (-kx\delta x) + (3mgc \cos \varphi \delta \varphi) + \\ &\quad + (F \sin \varphi \delta x - Fh \sin^2 \varphi \delta \varphi + Fa \sin \varphi \cos \varphi \delta \varphi - Fh \cos^2 \varphi \delta \varphi - Fa \cos \varphi \sin \varphi \delta \varphi) = \\ &= -kx\delta x + 3mgc \cos \varphi \delta \varphi + F \sin \varphi \delta x - Fh \delta \varphi = \\ &= (-kx + F \sin \varphi)\delta x + (3mgc \cos \varphi - Fh)\delta \varphi. \end{aligned}$$

Le componenti lagrangiane della sollecitazione si ricavano subito e sono

$$Q_x = -kx + F \sin \varphi, \quad Q_\varphi = 3mgc \cos \varphi - Fh.$$

Calcoliamo ora il lavoro usando la formula (*), scegliendo $\Omega \equiv A$.

Per quanto riguarda il risultante delle forze attive abbiamo trovato

$$\vec{R}^a = (-kx + F \sin \varphi) \vec{i} + (3mg - F \cos \varphi) \vec{j}.$$

Si ha poi, tenendo conto che ovviamente la forza elastica non ha momento rispetto ad A ,

$$\vec{M}_A^a = \vec{AG} \wedge 3m\vec{g} + \vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{AG} \wedge 3m\vec{g} + (\vec{AH} + \vec{HC}) \wedge \vec{F} = \vec{AG} \wedge 3m\vec{g} + (\vec{AH}) \wedge \vec{F},$$

in quanto $\vec{HC}$ è parallelo a $\vec{F}$ e quindi il suo contributo al prodotto vettoriale è nullo. Dunque

$$\vec{M}_A^a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c \cos \varphi & c \sin \varphi & 0 \\ 0 & 3mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h \cos \varphi & h \sin \varphi & 0 \\ F \sin \varphi & -F \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = 3mgc \cos \varphi - Fh.$$

Il vettore spostamento virtuale di A , δA , l'abbiamo già trovato. Il vettore $\vec{\Psi}$ è, come in ogni moto rototraslatorio, $\delta \varphi \vec{k}$ (si noti che φ è orientato positivamente rispetto al sistema scelto). A questo punto il calcolo del lavoro è immediato e fornisce ovviamente lo stesso risultato di prima.

Uguagliando a 0 le due forze generalizzate trovate, otteniamo le due equazioni dell'equilibrio.

$$\begin{cases} -kx + F \sin \varphi = 0 \\ 3mgc \cos \varphi - Fh = 0 \end{cases}$$

È conveniente cominciare a risolvere la seconda che ha una sola incognita:

$$\cos \varphi = \frac{Fh}{3mgc} = \lambda > 0.$$

Dunque:

- se $\lambda > 1$ non ci sono soluzioni e il sistema non potrà mai essere in equilibrio;
- se $\lambda = 1$ c'è una sola posizione di equilibrio, $\varphi_1 = 0$, in corrispondenza della quale si trova (dalla prima equazione) $x = 0$;
- se $\lambda < 1$ ci sono due posizioni di equilibrio; $\varphi_2 = \arccos \lambda$ e $\varphi_3 = -\arccos \lambda$. In corrispondenza ad esse si trova $\sin \varphi_2 = \sqrt{1 - \lambda^2}$ e $\sin \varphi_3 = -\sqrt{1 - \lambda^2}$. Utilizzando la prima equazione si trovano i due valori di x che assicurano l'equilibrio:

$$x_{2,3} = \pm \frac{F}{k} \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Per calcolare la reazione vincolare in A si può scrivere la prima equazione cardinale della statica: il risultante delle forze esterne si ottiene aggiungendo a quello delle forze attive, già calcolato, la reazione vincolare, ottenendo

$$\vec{R}^e = (-kx + F \sin \varphi) \vec{i} + (3mg - F \cos \varphi + \Phi_A) \vec{j} = \vec{0}.$$

La componente di questa equazione lungo j fornisce un'equazione in Φ_A :

$$3mg - F \cos \varphi + \Phi_A = 0.$$

Quindi

$$\Phi_A = F \cos \varphi - 3mg = F\lambda - 3mg = \frac{3mgc}{h}\lambda^2 - 3mg = 3mg \left(\frac{c}{h}\lambda^2 - 1 \right) < 0,$$

in quanto $\lambda \leq 1$ e $c/h < 1$: se c'è equilibrio la reazione vincolare ha sempre verso contrario al versore $\vec{j}$, cioè è diretta verso l'alto, come era logico aspettarsi.

Variante proposta

Si risolva lo stesso esercizio modificando la forza $\vec{F}$ in modo che risulti una forza costante e sempre parallela ed equiversa all'asse x , $\vec{F} = F\vec{i}$, ed usando le equazioni cardinali anziché il principio dei lavori virtuali.

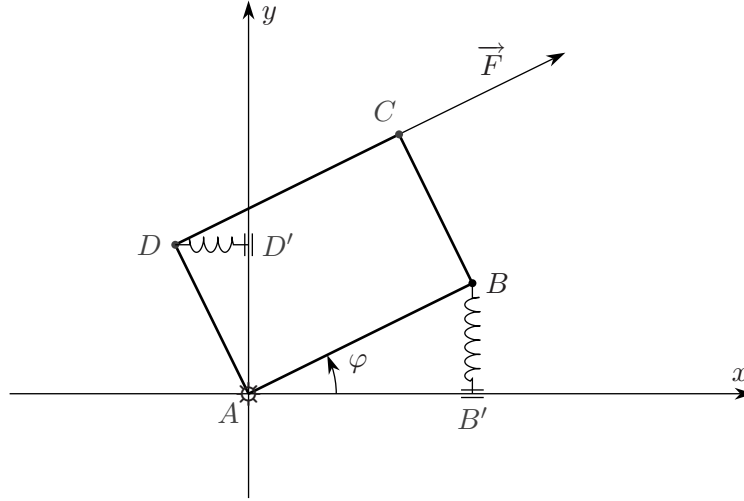
Esercizio 14.18 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). ⁽¹⁾ Con riferimento alla figura seguente, sia $ABCD$ un telaio rettangolare omogeneo di lati $2l$ e $3l$, vincolato in un piano Oxy con una cerniera fissa e liscia in O . Si supponga che il telaio sia sottoposto a una forza F di modulo costante, parallela ed equiversa a $\overrightarrow{DC}$ e applicata in C , a una forza elastica di costante $2h$ agente sul punto D e avente centro nella proiezione di D sull'asse y , e infine a una seconda forza elastica di costante h applicata in B e avente centro nella proiezione di B sull'asse delle ascisse. Si trascuri la forza peso. Si chiede di trovare le posizioni di equilibrio e la reazione vincolare in A all'equilibrio.

Cominciamo con l'osservare che ritenere trascurabile la forza peso può significare, sostanzialmente, una delle seguenti due cose:

- il telaio è appoggiato su un piano orizzontale liscio in tutti i suoi punti (o in almeno tre punti), per cui si può ritenere che la forza peso sia complessivamente bilanciata dalla reazione perpendicolare del piano di appoggio;
- si può ritenere trascurabile il valore di $\vec{g}$.

Si noti che se il corpo fosse vincolato su un piano orizzontale, ma fosse costretto a rimanere in quel piano dal vincolo agente solo nell'intorno del punto A , allora il peso non influirebbe sulle posizioni di equilibrio (e successivamente sul moto del sistema), ma avrebbe influenza sulla reazione vincolare nella cerniera A , che non potrebbe più essere schematizzata solo con un risultante, ma avrebbe bisogno anche di una coppia, proprio per mantenere il telaio nel piano. Discorso analogo se il vincolo agisse solo su due punti. Se invece il vincolo agisce su tre punti, siccome per tre punti passa un solo piano, allora dovrei semplicemente avere una risultante di vincolo perpendicolare al piano, ovviamente uguale alla forza peso, che è l'unica forza agente fuori dal piano, e non avrei bisogno di alcuna coppia per mantenere il telaio nel piano.

¹Esercizio estratto dal compito assegnato dal prof.G.Tondo, Università di Trieste, 3 giugno 2008.



Il sistema è a un solo grado di libertà e possiamo assumere come parametro l'angolo φ di figura. Possiamo supporre $-\pi < \varphi \leq \pi$ (per esempio, ma andrebbe bene anche $0 \leq \varphi < 2\pi$).

Le forze agenti sul telaio si possono scrivere come segue.

- $\vec{F} = F \cos \varphi \vec{i} + F \sin \varphi \vec{j}$.
- $\vec{F}_{el,1} = 2h \overrightarrow{DD'} = 4hl \sin \varphi \vec{i}$.
- $\vec{F}_{el,2} = h \overrightarrow{BB'} = -3hl \sin \varphi \vec{j}$.
- $\vec{\Phi}_A = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j}$

Per scrivere un'equazione pura di equilibrio possiamo usare il principio dei lavori virtuali. Potremmo scrivere anche le equazioni cardinali della statica (3 equazioni scalari complessivamente) che forniscono contemporaneamente le equazioni necessarie per determinare il vincolo. Per scrivere il lavoro virtuale si può usare la formula del lavoro di un sistema di forze applicate a un rigido, oppure scrivere il lavoro di ogni singola forza. Scegliamo la prima strada (è quasi sempre conveniente nel caso di un rigido).

Se scegliamo come polo A avremo

$$\delta L^a = \vec{R} \cdot \delta A + \vec{M}_A^a \cdot \vec{\psi}.$$

Naturalmente $\delta A = \vec{0}$ (perché A è fisso) e $\vec{\psi} = \delta \varphi \vec{k}$ (come in tutti i moti rototraslatori). Ci basta dunque calcolare $\vec{M}_A^a$. Si ha

$$\begin{aligned} \vec{M}_A^a &= \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_{el,1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{el,2} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = \\ &= \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_{el,1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{el,2} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{F} = \\ &= \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_{el,1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{el,2} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{F}, \end{aligned}$$

in quanto $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{F}$. Dunque

$$\begin{aligned} \vec{M}_A^a &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2l \sin \varphi & 2l \cos \varphi & 0 \\ 4hl \sin \varphi & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3l \cos \varphi & 3l \sin \varphi & 0 \\ 0 & -3hl \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2l \sin \varphi & 2l \cos \varphi & 0 \\ F \cos \varphi & F \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-8hl^2 \sin \varphi \cos \varphi - 9hl^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2Fl) \vec{k} = (-17hl^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2Fl) \vec{k}. \end{aligned}$$

Si ha allora $\delta L^a = (-17hl^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2Fl)\delta\varphi$, da cui l'equazione pura di equilibrio

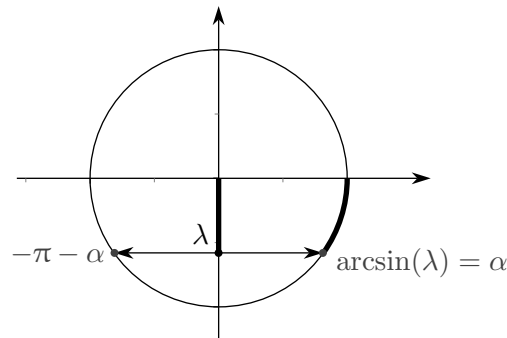
$$-17hl^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2Fl = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\varphi) = -\frac{4F}{17hl} = \lambda.$$

Poiché $\lambda < 0$, l'equazione avrà soluzioni se e solo se $-1 \leq \lambda (< 0)$.

1. Se $\lambda = -1$ si avrà $2\varphi = -\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow \varphi = -\pi/4 + k\pi$ e quindi, nell'intervallo che ci interessa,

$$\varphi_1 = \frac{-\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

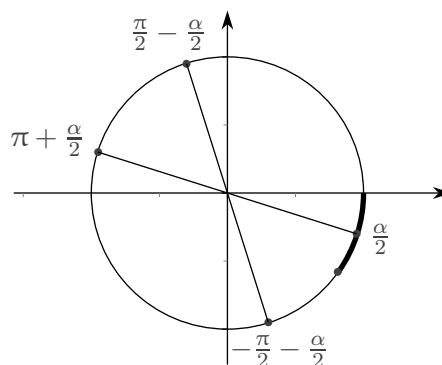
2. Se $\lambda > -1$ consideriamo la circonferenza goniometrica e poniamo $\alpha = \arcsin(\lambda)$.



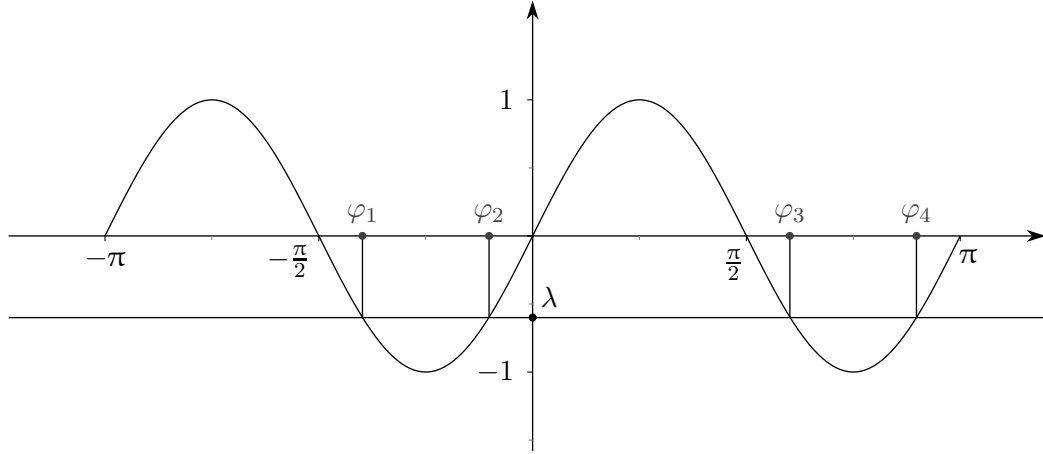
Le soluzioni saranno allora date da $2\varphi = \alpha + 2k\pi$ e da $2\varphi = -\pi - \alpha + 2k\pi$ ovvero $\varphi = \alpha/2 + k\pi$ e da $\varphi = -\pi/2 - \alpha/2 + k\pi$. nell'intervallo che ci interessa avremo 4 soluzioni

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_4 = \pi + \frac{\alpha}{2},$$

che corrispondono, sulla circonferenza goniometrica, ai 4 angoli evidenziati nella figura seguente.



Dal punto di vista analitico, per risolvere l'equazione di equilibrio si poteva naturalmente anche utilizzare il grafico della funzione $\sin(2x)$. Si veda il grafico che segue.



Passiamo ora alla determinazione della reazione vincolare in A . Sarà sufficiente scrivere la prima equazione cardinale e le sue due componenti sugli assi cartesiani.

$$\vec{R}^{e,a} + \vec{R}^{e,v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{F}_{el,1} + \vec{F}_{el,2} + \vec{\Phi}_A = \vec{0}.$$

Se teniamo conto delle espressioni già scritte per le forze avremo le due equazioni seguenti, che permettono di trovare subito la reazione vincolare all'equilibrio (φ è uno degli angoli trovati sopra).

$$\begin{cases} F \cos \varphi + 4hl \sin \varphi + \Phi_x = 0 \\ F \sin \varphi - 3hl \sin \varphi + \Phi_y = 0 \end{cases}$$

Per scrivere esplicitamente questi valori in funzione dei parametri del sistema, dovremo ricavare il seno e il coseno di φ in ciascuna delle posizioni di equilibrio trovate. Nel caso $\lambda = -1$ non c'è alcun problema, nel caso $\lambda > -1$, avendo $\sin 2\varphi = \lambda$ potremo usare le formule di bisezione. Cominciamo con l'osservare che, avendo posto $\alpha = \arcsin(\lambda)$, avremo $\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2}$ (il coseno è positivo in quanto l'angolo α è nel quarto quadrante). Troviamo poi

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}}.$$

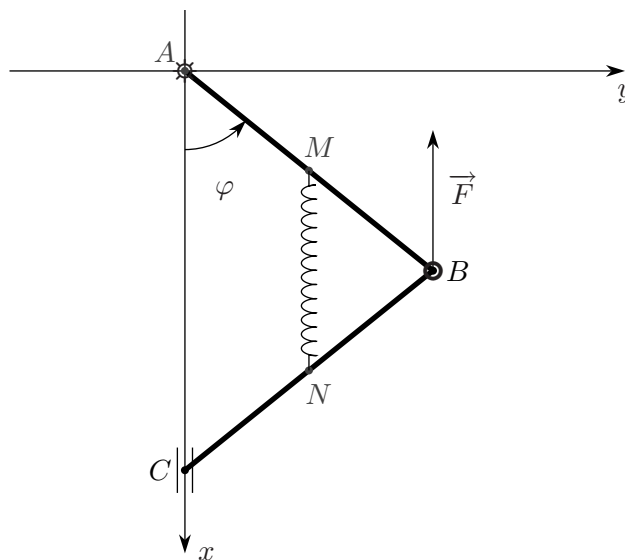
La determinazione del seno e coseno di tutti gli angoli di equilibrio è ora immediata.

Si osservi che, al tendere di λ a -1 , le due posizioni di equilibrio del quarto quadrante si avvicinano entrambe al valore $-\pi/4$, mentre quelle del secondo quadrante si avvicinano entrambe al valore $3\pi/4$, che corrispondono proprio ai due valori trovati quando $\lambda = -1$.

Esercizio 14.19 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). ⁽²⁾ Con riferimento alla figura che segue, si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse x verticale discendente, un sistema articolato costituito da due aste (sistema "biella-manovella") di ugual lunghezza l e massa m vincolato con l'estremo A nell'origine degli assi con una cerniera fissa e liscia, e con l'estremo C a scorrere senza attrito sull'asse delle x . Nell'ipotesi che sul sistema agiscano, oltre al peso, una forza F costante sul punto B , parallela e contraria al versore $\vec{i}$ dell'asse x , e una coppia di forze elastiche realizzate da una molla ideale applicata tra i

²Esercizio estratto dal compito assegnato dal prof.G.Tondo, Università di Trieste, 28 gennaio 2008.

due baricentri delle aste e di costante elastica h , si chiede di determinare le posizioni di equilibrio del sistema e le reazioni vincolari in A e C . Anche la cerniera interna in B tra le due aste è supposta liscia.



Il sistema è a un grado di libertà, e si può assumere l'angolo φ di figura come parametro lagrangiano. Possiamo supporre che $-\pi < \varphi \leq \pi$ (o un'altra scelta analoga con un intervallo di variabilità di 2π), ma occorre prestare attenzione ai valori $\varphi = \pm\pi/2$, in quanto in questa posizione i due vincoli ($A \equiv O$ e $C \in O_x$), diventano dipendenti: $A \equiv O$ e anche $C \equiv O$, quindi stesse condizioni di vincolo.

Il sistema non è rigido e quindi le equazioni cardinali della statica *non* saranno sufficienti a determinare l'equilibrio. La cosa risulta evidente da un'analisi delle incognite presenti che sono

- due per la reazione vincolare in A (una componente su x e una su y);
- una per la reazione vincolare in C (solo una componente su y);
- una per l'angolo di equilibrio.

Si tratta in totale di 4 incognite; le equazioni cardinali, forniscono solo tre equazioni indipendenti: 2 dall'equazione dei risultanti e 1 sola da quella dei momenti, in quanto le forze sia attive che vincolari stanno nel piano e quindi i momenti sono solo perpendicolari al piano. Si noti che questa è la situazione normale per sistemi piani con carichi appartenenti al piano. Per scrivere un'equazione indipendente potremmo considerare solo una parte del sistema e applicare a essa le equazioni cardinali: naturalmente questo implica che dobbiamo sostituire la “parte mancante” con gli sforzi che essa esercita sulla parte considerata. Per esempio possiamo considerare il sistema costituito dalla sola asta BC , lasciando il nodo B attaccato all'asta AB . Dovremo aggiungere, in B , una forza che rappresenta le azioni di AB , comprensivo del nodo⁽³⁾, su BC : sarà sufficiente considerare solo un risultante di queste azioni, visto che il collegamento tra AB e BC è realizzato con una cerniera (liscia).

³Agli effetti che ci interessano, lasciare il nodo attaccato ad AB o a BC è perfettamente equivalente. Se invece fossimo interessati alle azioni sul nodo, dovremmo spezzare il sistema in tre parti: AB , BC e il nodo stesso.

Le forze presenti sull'asta BC saranno il suo peso, la forza elastica su E (che ora diventa esterna per l'asta BC), la forza $\vec{F}_{AB \rightarrow BC}$ e la reazione vincolare in B . Scrivendo, per l'asta BC , la seconda equazione cardinale con polo in B avremo comunque una nuova equazione, senza introdurre nuove incognite.

Considerato che il sistema è a vincoli lisci, è però possibile usare il principio dei lavori virtuali, che ci fornirà una equazione indipendente di equilibrio: useremo poi le equazioni cardinali della statica applicate all'intero sistema per trovare le reazioni vincolari.

Naturalmente, trattandosi di un sistema non rigido, per calcolare il lavoro virtuale delle forze agenti *non* potremo usare la formula per il lavoro di un sistema di forze applicate a un rigido: considereremo invece direttamente il lavoro di ogni singola forza come prodotto tra la stessa e lo spostamento virtuale del punto di applicazione.

Scriviamo intanto le forze agenti.

- $\vec{\Phi}_A = \Phi_{A,x}\vec{i} + \Phi_{A,y}\vec{j}$.
- $\vec{\Phi}_C = \Phi_{C,y}\vec{j}$. Naturalmente questa e la precedente non intervengono nell'uso dei lavori virtuali, essendo reazioni vincolari di vincoli lisci.
- Due forze peso, applicate in M e N , entrambi uguali a $mg\vec{i}$.
- $\vec{F} = -F\vec{i}$.
- Una coppia di braccio nullo costituita dalle due forze elastiche $\vec{F}_1 = h\vec{MN} = hl \cos \varphi \vec{i}$ agente su M e $\vec{F}_2 = h\vec{NM} = -hl \cos \varphi \vec{i}$ agente su N .

Scriviamo ora le coordinate dei punti di applicazione delle forze e i conseguenti spostamenti virtuali.

- $M = \left(\frac{l}{2} \cos \varphi, \frac{l}{2} \sin \varphi \right)$, $\delta M = -\frac{l}{2} \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$.
- $N = \left(\frac{3l}{2} \cos \varphi, \frac{l}{2} \sin \varphi \right)$, $\delta N = -\frac{3l}{2} \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$.
- $B = (l \cos \varphi, l \sin \varphi)$, $\delta B = -l \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + l \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$.

Per il lavoro virtuale delle forze attive si avrà dunque:

$$\begin{aligned} \delta L^a &= m\vec{g} \cdot \delta M + m\vec{g} \cdot \delta N + \vec{F}_1 \cdot \delta M + \vec{F}_2 \cdot \delta N + \vec{F} \cdot \delta B = \\ &= \left(-mg\frac{l}{2} \sin \varphi - 3mg\frac{l}{2} \sin \varphi - h\frac{l^2}{2} \cos \varphi \sin \varphi + 3h\frac{l^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + Fl \sin \varphi \right) \delta \varphi = \\ &= ((Fl - 2mgl) \sin \varphi + hl^2 \cos \varphi \sin \varphi) \delta \varphi. \end{aligned}$$

L'equazione pura di equilibrio è:

$$(Fl - 2mgl) \sin \varphi + hl^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0, \quad \text{ovvero} \quad \sin \varphi (F - 2mg + hl \cos \varphi) = 0.$$

Quest'equazione ha le seguenti soluzioni.

$$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \pi;$$

e inoltre

$$\cos \varphi = \frac{2mg - F}{hl} = \lambda.$$

Per quest'ultima occorre considerare i vari casi, a seconda dei valori dei parametri del sistema.

- Se $\lambda < -1 \vee \lambda > 1$ non ci sono soluzioni.
- Se $\lambda = -1$ si ha una sola soluzione, $\varphi_2 = \pi$ (già trovata prima).
- Se $-1 < \lambda < 0 \vee 0 < \lambda < 1$ si hanno due soluzioni, $\varphi_3 = \arccos(\lambda)$ e $\varphi_4 = -\arccos(\lambda)$. Le soluzioni saranno nel secondo e terzo quadrante se $\lambda < 0$, nel primo e quarto se $\lambda > 0$.
- Se $\lambda = 0$ l'equazione fornisce $\cos \varphi = 0$, dal che si deduce $\varphi = \pm\pi/2$, ma, come osservato, queste posizioni vanno trattate a parte perché i vincoli diventano dipendenti.
- Se $\lambda = 1$ si ha una sola soluzione, $\varphi_1 = 0$ (già trovata sopra).

Esaminiamo in dettaglio le posizioni $\varphi = \pm\pi/2$, cominciando dal caso $\varphi = \pi/2$. Consideriamo, in questa posizione, solo l'asta BC , per esempio con attaccato il nodo B . Le forze attive e reattive agenti su BC sono la reazione vincolare in $C \equiv O$, il peso in N , la forza $\vec{F}$ e la reazione interna in B (le forze elastiche sono nulle in questa posizione). Se applichiamo la 2^a equazione cardinale della statica con polo in B , troviamo che l'unica forza che ha momento è il peso (la reazione vincolare ha la retta di azione che passa per B) e questo momento non può essere nullo, dunque la posizione non può essere di equilibrio per la biella e quindi tantomeno per il sistema complessivo. Discorso esattamente analogo per la posizione $\varphi = -\pi/2$.

Passiamo ora a trovare le reazioni vincolari esterne. Scegliamo come polo dei momenti il punto A e teniamo conto che la coppia di forze elastiche non interviene né nell'equazione dei risultanti né in quella dei momenti (coppia di braccio nullo).

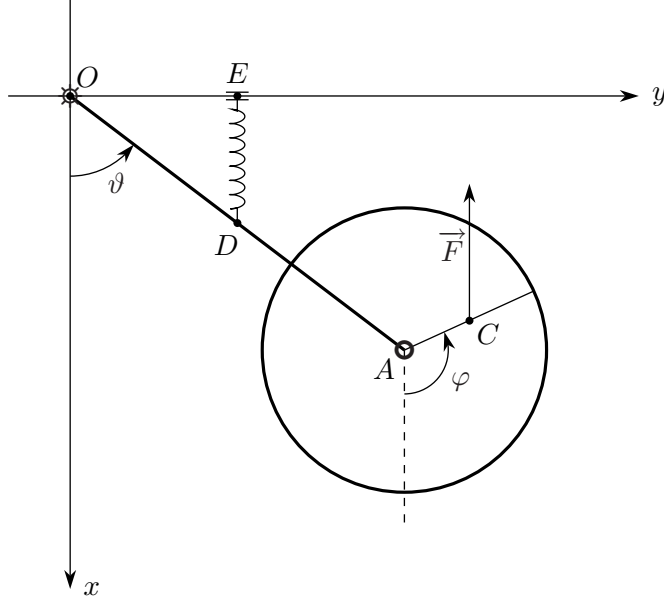
$$\vec{R}^e = \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_C + 2m\vec{g} + \vec{F} = (\Phi_{A,x} + 2mg - F)\vec{i} + (\Phi_{A,y} + \Phi_{C,y})\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^e &= \vec{AM} \wedge m\vec{g} + \vec{AN} \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AC} \wedge \vec{\Phi}_C = \\ &= \vec{AM} \wedge m\vec{g} + (\vec{AM} + \vec{AN}) \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AC} \wedge \vec{\Phi}_C = \\ &= 2\vec{AM} \wedge m\vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AC} \wedge \vec{\Phi}_C = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \varphi & l \sin \varphi & 0 \\ mg & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l \cos \varphi & l \sin \varphi & 0 \\ -F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2l & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{C,y} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-mgl \sin \varphi + Fl \sin \varphi + 2l\Phi_{C,y})\vec{k}.\end{aligned}$$

Uguagliando a zero le 2 componenti della prima equazione e l'unica componente della seconda, si trovano tre equazioni che permettono di determinare completamente le reazioni vincolari richieste. Naturalmente bisognerà sostituire i valori per φ trovati dall'equazione pura di equilibrio. Poiché dall'equazione pura abbiamo il valore di $\cos \varphi$, mentre qui è richiesto il valore di $\sin \varphi$, basterà osservare che $\sin \varphi = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$, e occorrerà prendere il segno corretto davanti al radicale, a seconda dei casi.

Esercizio 14.20 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Con riferimento alla figura seguente, sia Oxy un piano verticale, con l'asse x verticale discendente. Un'asta OA di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata nel piano con una cerniera liscia in O . Sull'estremo A dell'asta è incernierato un disco omogeneo pesante di massa M e raggio $2r < l$; la cerniera interna in A è liscia e consente al disco di ruotare attorno ad A . Si supponga che, oltre ai pesi, agiscano una forza elastica in D , punto medio di OA , avente centro nella proiezione*

E di D sull'asse y e costante elastica h , e una forza costante $\vec{F}$, nel punto C del disco a distanza r da A , parallela e contraria all'asse x . Si chiede di calcolare le posizioni di equilibrio e di determinare le reazioni vincolari all'equilibrio in O e le reazioni interne in A .



Il sistema è a due gradi di libertà e si possono assumere come parametri gli angoli ϑ e φ indicati nella figura.

Le forze esterne agenti sono:

- il peso dell'asta: $m\vec{g} = mg\vec{i}$;
- il peso del disco: $M\vec{g} = Mg\vec{i}$;
- la forza elastica: $h\vec{DE} = -hl \cos \vartheta \vec{i}$;
- la forza costante su C : $\vec{F} = -F\vec{i}$;
- la reazione vincolare in O che può essere schematizzata con un solo vettore risultante, di direzione a priori arbitraria ma contenuta nel piano: $\vec{\Phi}_O = \Phi_{O,x}\vec{i} + \Phi_{O,y}\vec{j}$.

I punti di applicazione delle forze attive sono individuati dai vettori:

- $\vec{OD} = l \cos \vartheta \vec{i} + l \sin \vartheta \vec{j}$;
- $\vec{OA} = 2l \cos \vartheta \vec{i} + 2l \sin \vartheta \vec{j}$;
- $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = (2l \cos \vartheta + 2l \sin \vartheta \vec{j}) + (r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j}) = (2l \cos \vartheta + r \cos \varphi)\vec{i} + (2l \sin \vartheta + r \sin \varphi)\vec{j}$.

Gli spostamenti virtuali di questi punti sono allora:

- $\delta D = -l \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + l \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{j}$;
- $\delta A = -2l \sin \vartheta \delta \vartheta \vec{i} + 2l \cos \vartheta \delta \vartheta \vec{j}$;
- $\delta C = (-2l \sin \vartheta \delta \vartheta - r \sin \varphi \delta \varphi)\vec{i} + (2l \cos \vartheta \delta \vartheta + r \cos \varphi \delta \varphi)\vec{j}$.

Passiamo ora ad applicare il principio dei lavori virtuali.

$$\begin{aligned}\delta L^a &= m\vec{g} \cdot \delta D + h\overrightarrow{DE} \cdot \delta D + M\vec{g} \cdot \delta A + \vec{F} \cdot \delta C = \\ &= -mgl \sin \vartheta \delta \vartheta + hl^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \delta \vartheta - 2Mgl \sin \vartheta \delta \vartheta + 2Fl \sin \vartheta \delta \vartheta + Fr \sin \varphi \delta \varphi = \\ &= (-mgl \sin \vartheta + hl^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2Mgl \sin \vartheta + 2Fl \sin \vartheta) \delta \vartheta + (Fr \sin \varphi) \delta \varphi.\end{aligned}$$

Uguagliando a 0 le due componenti lagrangiane della sollecitazione (cioè i coefficienti di $\delta \vartheta$ e $\delta \varphi$ nell'espressione del lavoro virtuale), si ottengono due equazioni pure di equilibrio.

$$\begin{cases} (-mgl + hl^2 \cos \vartheta - 2Mgl + 2Fl) \sin \vartheta = 0 \\ Fr \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava subito $\sin \varphi = 0$, da cui $\varphi = 0, \pi$. Dalla prima si ricava

$$\sin \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 0, \pi,$$

oppure

$$\cos \vartheta = \frac{mg + 2Mg - 2F}{hl} = \lambda.$$

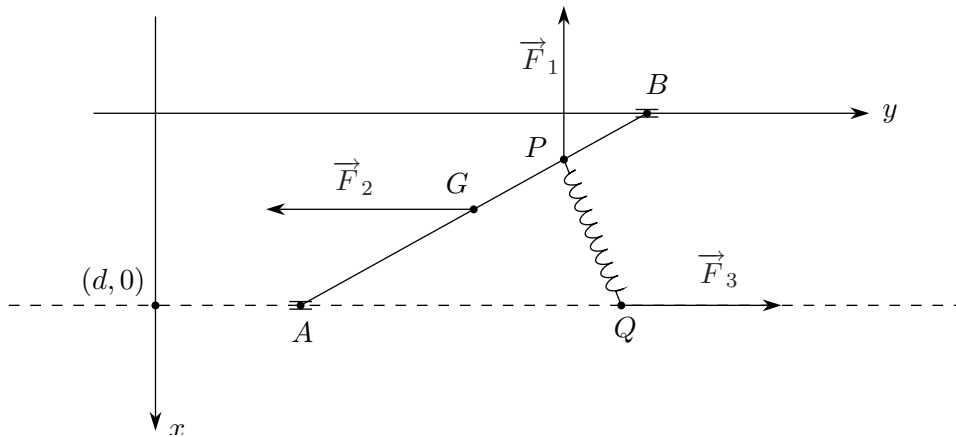
Quest'ultima ha soluzioni solo se $-1 \leq \lambda \leq 1$. Se $\lambda = \pm 1$ si ritrovano le soluzioni di prima, altrimenti si hanno altre due soluzioni $\vartheta = \pm \arccos \lambda$ il cui valore dipende dai rapporti tra i parametri.

La determinazione della reazione vincolare in O si può ora fare semplicemente scrivendo la prima equazione cardinale della statica nelle sue due componenti sugli assi. Come è ovvio, si trova che la reazione vincolare in O è solo verticale, in quanto non ci sono forze attive con componente orizzontale.

La determinazione della reazione vincolare interna in A si può fare “spezzando” il sistema in due parti e considerando, per esempio, solo l'asta OA . Si tratterà di scrivere la prima equazione cardinale della statica applicata a questo sistema, considerando solo le forze agenti sull'asta, che sono: la reazione vincolare in O (già trovata prima), il peso e la forza elastica, la reazione vincolare in A , che potrà essere scritta nelle sue due componenti, ovvero $\vec{\Phi}_A = \Phi_{a,x}\vec{i} + \Phi_{A,y}\vec{j}$. È ovvio che la prima equazione cardinale della statica fornisce due equazioni indipendenti nelle incognite componenti della reazione interna in A . È anche qui ovvio che si avrà sempre $\Phi_{A,y} = 0$, per lo stesso motivo di prima.

Esercizio 14.21 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Con riferimento alla figura seguente dove Oxy è un piano verticale con l'asse x verticale discendente, sia AB un'asta rigida di lunghezza l e massa m_1 vincolata a scorrere con i suoi due estremi B ed A sull'asse delle y e sulla retta di equazione $x = d$ rispettivamente, ove $d < l$. Sull'asta AB sia vincolato a muoversi un punto P di massa m_2 , mentre sulla retta di equazione $x = d$ un punto Q di massa m_3 . Sul sistema agiscono, oltre ai pesi, una coppia di forze elastiche tra i punti P e Q , una forza costante $\vec{F}_1$ sul punto P sempre perpendicolare all'asse y e diretta verso l'alto, una forza costante $\vec{F}_2$ sul baricentro G dell'asta, parallela e contraria all'asse y , una forza costante $\vec{F}_3$ sul punto Q , parallela ed equiversa all'asse y . Tutti i vincoli sono realizzati senza attrito. Si chiede di trovare le posizioni di equilibrio del sistema, le reazioni vincolari esterne in A , B , Q e le reazioni vincolari interne in P .*

Si supponga poi che i vincoli siano modificati sostituendo il “carrello” in A con un manicotto che consenta all’asta di scorrere senza attrito sulla retta $x = d$, senza poter variare la sua inclinazione rispetto alla retta stessa, mentre il punto B non sia più collegato con un carrello all’asse y . Si chiede di discutere se si hanno variazioni nelle posizioni di equilibrio e come si modificano le reazioni vincolari.



Il sistema è a tre gradi di libertà e si possono assumere come coordinate lagrangiane la y_A , la y_Q e una ascissa, diciamola ξ , che individui la posizione di P sull’asta AB , ponendo l’origine in A e orientandola da A verso B .

Anche se il sistema appare complesso e con diverse forze, in realtà la sua trattazione non è difficile. Ne indichiamo solo i passi salienti.

Per semplificare la scrittura delle formule indichiamo con α l’angolo $B\hat{A}Q$ della figura, il cui seno si può trovare dalle proprietà della stessa figura: $d = l \sin \alpha$.

Le coordinate dei punti di applicazione delle forze attive presenti si ricavano in maniera molto semplice:

- $G = (l/2 \sin \alpha, y_A + l/2 \cos \alpha)$;
- $P = ((l - \xi) \sin \alpha, y_A + \xi \cos \alpha)$;
- $Q = (d, y_Q)$.

Le componenti delle forze, gli spostamenti virtuali e il lavoro virtuale della sollecitazione attiva si trovano facilmente. Dall’applicazione del principio dei lavori virtuali si ricavano tre equazioni pure di equilibrio, che costituiscono un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite y_A , y_Q , ξ , dunque risolubile con metodi standard.

La determinazione delle reazioni vincolari richiede l’uso delle equazioni cardinali. Le tre reazioni in A , B , Q sono tutte tre verticali e quindi dall’equazione dei risultanti posso ricavare una sola equazione utile (la componente lungo l’asse y fornisce un’equazione pura di equilibrio). Una seconda equazione si può trovare applicando l’equazione dei momenti con polo, per esempio, in A (una sola equazione, come sempre succede nei casi piani). C’è bisogno di un’ulteriore equazione indipendente, che si può ricavare scrivendo l’equazione fondamentale della statica relativa al solo punto Q : naturalmente la forza elastica su Q diventerà ora una forza esterna per Q .

La determinazione della reazione vincolare interna in P si può fare isolando il punto P stesso dal sistema e scrivendo l’equazione fondamentale della statica ad esso relativa,

equazione nella quale compare, come incognita, proprio questa reazione vincolare (che naturalmente sarà perpendicolare ad AB).

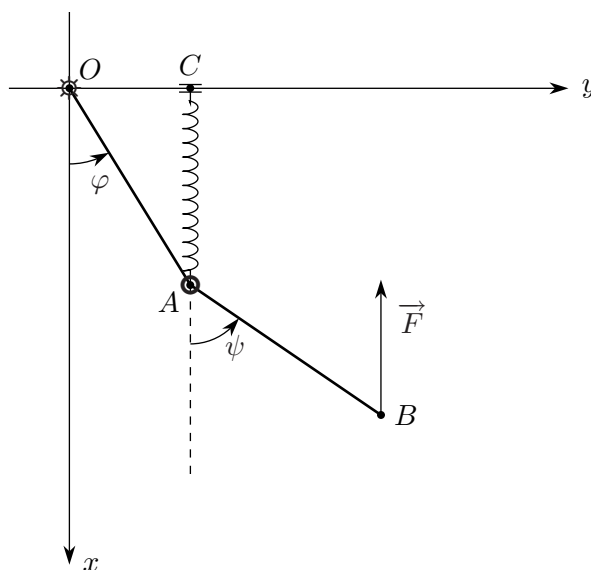
Si noti che la scrittura delle equazioni fondamentali della statica relative a P e Q forniscono 4 equazioni scalari: 2 servono a trovare le incognite reazioni vincolari, le altre due sono due equazioni pure di equilibrio.

Nel caso i vincoli fossero modificati come indicato, nulla cambierebbe nella ricerca delle posizioni di equilibrio: nel principio dei lavori virtuali i vincoli non intervengono, conta solo che siano lisci. Nulla cambierebbe nemmeno per la reazione vincolare in Q . Le modifiche riguarderebbero solo la reazione vincolare in A : in questo punto il vincolo non potrebbe più essere schematizzato solo con un risultante, ma con un risultante (sempre verticale) e una coppia, il cui momento potrebbe essere ricavato dalla scrittura dell'equazione dei momenti rispetto ad A .

Esercizio 14.22 (Statica dei rigidi o dei sistemi di rigidi). *Con riferimento alla figura seguente, siano OA e AB due aste omogenee mobili in un piano verticale, con l'asse x verticale discendente. Le aste sono fissate con una cerniera fissa e liscia in O e incernierate tra di loro, sempre senza attrito, in A . Le aste hanno stessa lunghezza $2l$ e stessa massa m . Sull'estremo B dell'asta è saldato un punto di massa M .*

Sul sistema agiscono, oltre ai pesi delle aste e del punto in B , una forza elastica di costante h in A , avente centro nella proiezione C di A sull'asse y , e una forza $\vec{F}$ costante, parallela e contraria all'asse x , in B .

Si chiede di trovare le posizioni di equilibrio del sistema e le reazioni vincolari esterne in O .



Detti G_1 e G_2 rispettivamente i baricentri delle aste OA e AB , scriviamo le forze attive presenti.

- $m\vec{g} = mg\vec{i}$ in G_1 e in G_2 .
- $\vec{F}_{el} = h\vec{AC} = -2hl \cos \varphi \vec{i}$ in A .
- $\vec{F} = -F\vec{i}$ in B .

$$- M\vec{g} = Mg\vec{i} \text{ in } B.$$

I vettori che individuano i punti di applicazione delle forze sono i seguenti.

$$\begin{aligned} - \vec{OG}_1 &= l \cos \varphi \vec{i} + l \sin \varphi \vec{j}. \\ - \vec{OA} &= 2l \cos \varphi \vec{i} + 2l \sin \varphi \vec{j}. \\ - \vec{OG}_2 &= \vec{OA} + \vec{AG}_2 = (2l \cos \varphi + l \cos \psi) \vec{i} + (2l \sin \varphi + l \sin \psi) \vec{j}. \\ - \vec{OB}_2 &= \vec{OA} + \vec{AG}_2 = (2l \cos \varphi + 2l \cos \psi) \vec{i} + (2l \sin \varphi + 2l \sin \psi) \vec{j}. \end{aligned}$$

Da qui si deducono facilmente gli spostamenti virtuali di questi punti.

$$\begin{aligned} - \delta G_1 &= -l \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + l \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}. \\ - \delta A &= -2l \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + 2l \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}. \\ - \delta G_2 &= (-2l \sin \varphi \delta \varphi - l \sin \psi \delta \psi) \vec{i} + (2l \cos \varphi \delta \varphi + l \cos \psi \delta \psi) \vec{j}. \\ - \delta B &= (-2l \sin \varphi \delta \varphi - 2l \sin \psi \delta \psi) \vec{i} + (2l \cos \varphi \delta \varphi + 2l \cos \psi \delta \psi) \vec{j}. \end{aligned}$$

Possiamo ora procedere al calcolo del lavoro virtuale della sollecitazione attiva, che consentirà di scrivere due equazioni pure di equilibrio.

$$\begin{aligned} \delta L^a &= -mgl \sin \varphi \delta \varphi + 4hl^2 \sin \varphi \cos \varphi \delta \varphi - 2mgl \sin \varphi \delta \varphi - mgl \sin \psi \delta \psi \\ &\quad - 2Mgl \sin \varphi \delta \varphi - 2Mgl \sin \psi \delta \psi + 2lF \sin \varphi \delta \varphi + 2lF \sin \psi \delta \psi. \end{aligned}$$

Uguagliando a 0 i coefficienti di $\delta \varphi$ e $\delta \psi$ troviamo le due equazioni seguenti.

$$\begin{cases} (-3mg + 4hl \cos \varphi - 2Mg + 2F)l \sin \varphi = 0 \\ (-mg - 2Mg + 2F)l \sin \psi = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo intanto

$$\sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0, \pi,$$

e poi

$$\cos \varphi = \frac{3mg + 2Mg - 2F}{4hl} = \lambda.$$

Quindi

- se $|\lambda| > 1$ nessun'altra soluzione;
- se $|\lambda| = 1$, le stesse due soluzioni $\varphi = 0, \pi$ trovate prima;
- se $|\lambda| < 1$, altre due soluzioni $\varphi = \pm \arccos(\lambda)$.

Dalla seconda equazione troviamo

$$\begin{cases} \sin \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = 0, \pi, \\ \psi \text{ arbitrario se } -mg - 2Mg + 2F = 0. \end{cases}$$

La determinazione della reazione vincolare esterna in O si può ora fare scrivendo semplicemente la prima equazione cardinale della statica per l'intero sistema.

$$\vec{\Phi}_O + 2mg\vec{i} - 2hl \cos \varphi \vec{i} - F\vec{i} + Mg\vec{i} = 0.$$

Si trova, com'era prevedibile, che la reazione vincolare in O è puramente verticale e con verso opportuno a seconda dei valori dei parametri e della posizione di equilibrio considerata.

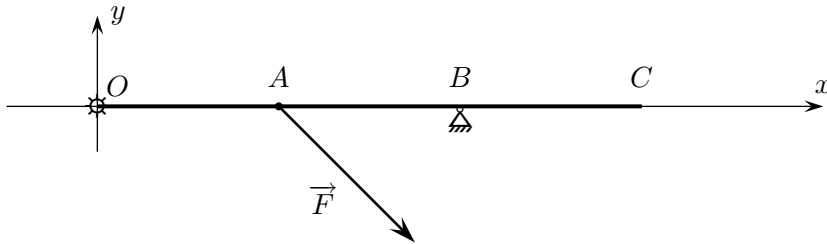
Si sarebbero potute trovare le due equazioni pure di equilibrio anche usando le equazioni cardinali della statica nel modo seguente:

- un'equazione si poteva trovare scrivendo l'equazione dei momenti con polo in O per l'intero sistema (in questo modo la reazione vincolare in O non avrebbe dato alcun contributo;
- una seconda equazione si poteva trovare “spezzando il sistema” nelle due parti rigide che lo compongono e considerando la sola asta AB : scrivendo la seconda equazione cardinale della statica per la sola asta AB , con polo in A si ottiene una equazione in cui non compaiono reazioni vincolari.

Se il problema avesse richiesto anche la reazione vincolare interna in A , essa si sarebbe potuta trovare scrivendo la prima equazione cardinale della statica relativa alla sola asta AB .

15. Esercizi sugli sforzi interni

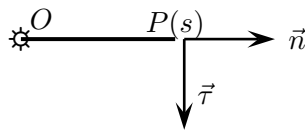
Esercizio 15.1 (Sforzi interni nei rigidi all'equilibrio). *Si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse y verticale ascendente, un'asta rigida OC incernierata in O e poggianti con il suo punto B su un appoggio liscio. Supposta orizzontale la posizione dell'asta, e supposto che agisca, oltre al peso una forza $\vec{F}$, costante e disposta come in figura, si chiede di trovare le reazioni vincolari esterne in A e B e gli sforzi interni nell'asta. Si supponga anche che $OA = AB = BC = l/3$*



L'asta, nella posizione di confine considerata, è un sistema isostatico. La forza peso si può pensare agente sul baricentro complessivo dell'asta (al centro della stessa); la reazione vincolare in A avrà due componenti incognite, mentre quella in B , dovendo essere verticale, ne avrà una sola. Le reazioni vincolari richieste si determinano subito scrivendo la prima equazione cardinale della statica (che fornisce due equazioni scalari) e scegliendo il polo O per la seconda equazione (ottenendo così una terza equazione).

Per determinare gli sforzi interni converrà considerare separatamente una sezione dell'asta nel tratto OA , una nel tratto AB , una nel tratto BC . Indicheremo sempre con s l'ascissa della sezione dell'asta.

1. Sezione interna al tratto OA di asta.



In questo caso abbiamo $\vec{n} = \vec{i}$, $\vec{\tau} = -\vec{j}$, $\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{k}$.

La parte, relativa a questo tratto di asta, delle forze esterne all'intera asta si riduce alla reazione vincolare in O e al peso della sezione OP . Dovremo poi considerare le forze che il tratto PC (che diremo parte "2") esercita sul tratto OP (che diremo parte "1"). Come noto queste forze si schematizzano con un risultante, $\vec{R}^{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$, e un momento risultante $\vec{M}^{\text{int}, 2 \rightarrow 1}$, in cui si sceglie come polo dei momenti il punto P stesso che individua la sezione (in generale il baricentro della sezione stessa).

In un caso come quello qui considerato (sistema piano con forze tutte nel piano del sistema), lo sforzo di taglio è necessariamente parallelo a $\vec{\tau}$ (ed è per questo che ha interesse considerare il vettore $\vec{\tau}$ stesso), anche se non se ne conosce a priori il verso, il momento torcente è nullo e il momento flettente è ortogonale al piano del sistema e delle forze, e dunque parallelo al vettore $\vec{\tau} \wedge \vec{n}$.

Si ha allora

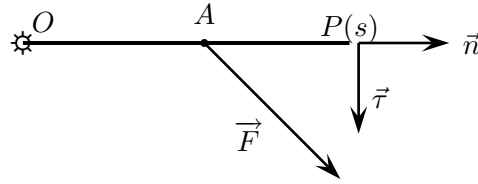
$$\begin{aligned}\vec{R}^{\text{int}, 2 \rightarrow 1} &= N\vec{n} + T\vec{\tau} = N\vec{i} - T\vec{j}, \\ \vec{M}^{\text{int}, 2 \rightarrow 1} &= M_f \vec{k}.\end{aligned}$$

La determinazione di N , T , M_f è ora possibile applicando le equazioni cardinali della statica al tratto OP di asta, tenendo conto che il peso di questo tratto si può pensare agente sul baricentro del tratto stesso, G' , (dunque nell'ascissa $s/2$) e che la massa di questo tratto di asta è, semplicemente, $\mu s = ms/l$.

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_O + \frac{ms}{l}\vec{g} + N\vec{i} - T\vec{j} &= \vec{0}, \\ \vec{PO} \wedge \vec{\Phi}_O + \vec{PG}' \wedge \frac{ms}{l}\vec{g} + M_f \vec{k} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Si hanno tre equazioni scalari nelle incognite N , T , M_f , di facile risoluzione.

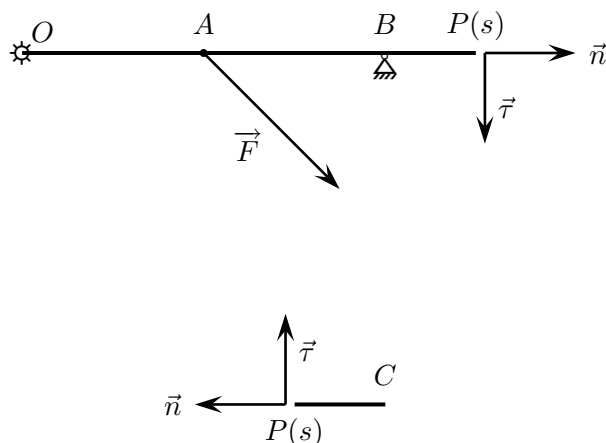
2. Sezione interna al tratto AB di asta.



Si dovranno apportare alcune modifiche rispetto al caso precedente, e precisamente aggiungere il carico concentrato in A , sia nell'equazione dei risultanti che in quella dei momenti, e tenere conto della nuova posizione del baricentro, G'' (anche se questo non produce modifiche nei calcoli).

3. Sezione interna al tratto BC di asta.

In questo caso si può continuare ad operare come prima, considerando il tratto OP di asta e applicando ad esso le equazioni cardinali della statica. È però molto più conveniente considerare invece il tratto PC di asta, su cui agisce come forza esterna al sistema solo il peso del tratto PC stesso. Naturalmente dovremo considerare le azioni della parte 1 sulla parte 2 di asta, che saranno uguali e contrarie, per il principio di azione e reazione, a quelle della parte 2 sulla parte 1. Se però teniamo conto che, in questo caso, si conviene di orientare $\vec{n}$ e $\vec{\tau}$ in senso opposto a prima si avrà che lo sforzo normale, N' , e il taglio, T' , saranno (si tratta di scalari!) gli stessi, mentre il momento flettente, M'_f sarà opposto ($\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{\tau}' \wedge \vec{n}'$, mentre $\vec{M}'_f = -\vec{M}_f$, ovviamente).

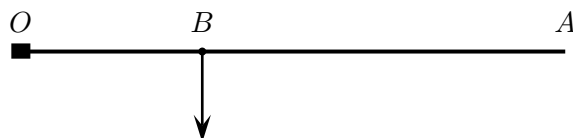


La scrittura delle equazioni cardinali, elementare con la seconda scelta, è comunque semplice anche se si segue la prima strategia indicata.

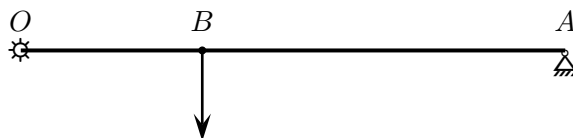
Determinati i valori di N , T , M_f , se ne può fare una rappresentazione grafica, molto significativa per le applicazioni, che evidenzia la discontinuità di N e di T in corrispondenza del carico concentrato in A (che ha una componente parallela e una perpendicolare all'asta), e invece una discontinuità solo di T in corrispondenza di B , in quanto la reazione vincolare in B è puramente ortogonale all'asta. Il Momento flettente non ha invece discontinuità, ma ha, in corrispondenza di A e B , dei punti "angolosi" (bruschi cambi nella direzione della tangente).

Esercizio 15.2 (Sforzi interni nei rigidi all'equilibrio). *Si consideri un'asta OA omogenea di massa m e lunghezza l , disposta orizzontalmente in un piano verticale e sottoposta ad una forza F , verticale, come in figura, agente sul punto B con $\overline{OB} = l/3$. Si determinino le reazioni vincolari esterne e gli sforzi interni nell'asta nelle seguenti situazioni:*

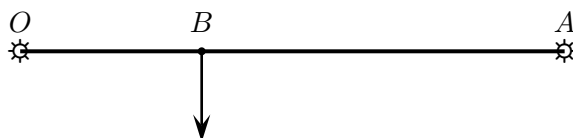
1. asta incastrata in O ;



2. asta incernierata in O (cerniera liscia) e con un appoggio liscio in A ;



3. asta incernierata (cerniere lisce) sia in O che in A .

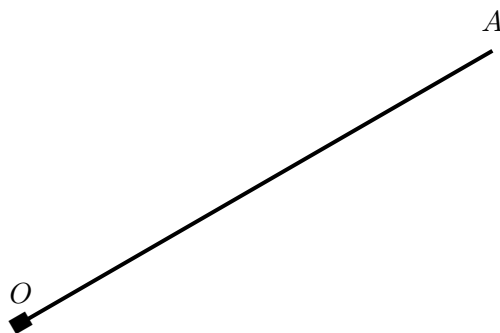


Si noti che nell'ultimo caso il sistema è iperstatico, per cui le reazioni vincolari non sono determinabili in maniera completa.

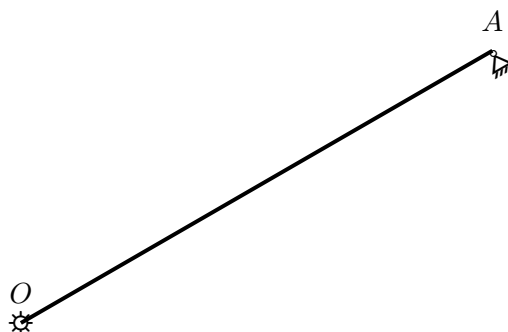
Esercizio 15.3 (Sforzi interni nei rigidi all'equilibrio). *Si consideri, in un piano verticale, un'asta OA, di densità lineare data dalla legge $\mu = as + b$, essendo s l'ascissa sull'asta misurata a partire da O e a, b due reali positivi. L'asta sia inclinata di 30° sull'orizzontale e sia sottoposta solo al proprio peso.*

Si determinino le reazioni vincolari esterne e gli sforzi interni nei due casi seguenti:

1. *asta incastrata in O;*

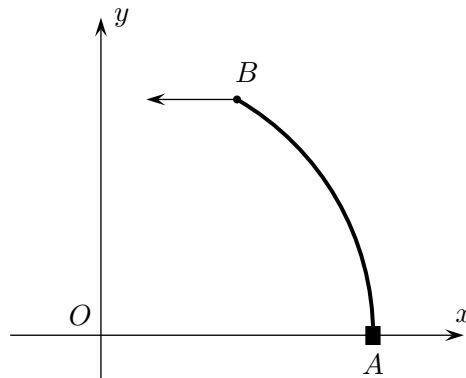


2. *asta incernierata in O (cerniera liscia) e con appoggio liscio in A.*



Esercizio 15.4 (Sforzi interni nei rigidi all'equilibrio). *Si consideri, in un piano Oxy, un'asta rigida AB omogenea, ad arco di cerchio, come in figura, con l'estremo A incastrato e una forza $\vec{F}$, parallela all'asse x, agente nel punto B. Si supponga che l'angolo $\widehat{AOB}$ sia di 60° e che $\overline{OA} = r$. Supposta l'asta soggetta anche al proprio peso, si determinino la reazione vincolare in A e gli sforzi interni nell'asta nelle due ipotesi alternative:*

1. il piano Oxy sia verticale;
2. il piano Oxy sia orizzontale.

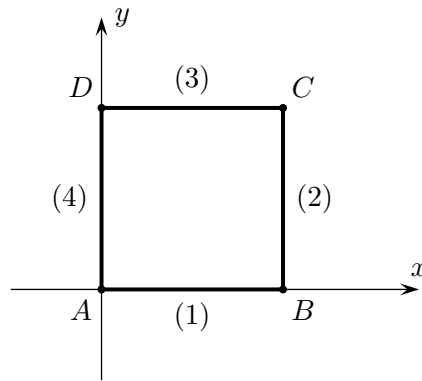


Si noti che quando il piano è verticale il sistema è un sistema rigido piano con forze tutte appartenenti al piano, quando il piano è orizzontale, il peso è invece perpendicolare al piano stesso.

16. Esercizi di cinematica delle masse.

Momenti di inerzia

Esercizio 16.1 (Momenti di inerzia). Dato un quadrato $ABCD$ di lato l e massa $M = 4m$, si determini la matrice $\mathbb{I}_A$ dell'operatore di inerzia relativo al vertice A , assunto come sistema di coordinate un sistema con origine in A stesso e due assi contenenti AB e AD . Si trovi poi la matrice $\mathbb{I}_G$ dell'operatore centrale di inerzia, in un sistema cartesiano con assi paralleli ai precedenti. Si dica come si potrebbe ricavare $\mathbb{I}_A$ da $\mathbb{I}_G$ usando il teorema di Huygens-Steiner e la formula di trasporto dell'operatore di inerzia. Si calcoli poi il momento di inerzia del quadrato rispetto a una generica retta per A .



Indicheremo nel seguito le aste AB, BC, CD, AD come asta 1, 2, 3, 4 rispettivamente. I versori degli assi saranno indicati, al solito, con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Consideriamo ora la matrice $\mathbb{I}_A$:

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Le note proprietà di simmetria dell'operatore di inerzia, unitamente alle proprietà dei sistemi piani ("lamine") e alla simmetria del sistema meccanico in esame, permettono di semplificare notevolmente la scrittura della matrice. Precisamente:

- $I_{11} = I_{22} (= I_x)$;
- $I_{12} = I_{21} (= I_{xy})$;
- $I_{13} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0$;
- $I_{33} = I_{11} + I_{22} = 2I_{11} (= 2I_x)$.

Dunque

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 2I_x \end{pmatrix}$$

Si devono dunque solo calcolare le quantità I_x e I_{xy} ; la prima si può reperire su qualunque manuale, ma è immediato anche il calcolo diretto che faremo, per la seconda si tratta di un calcolo elementare. In ogni caso è utile suddividere il calcolo in 4 parti, per ciascuna delle 4 asti componenti il quadrato.

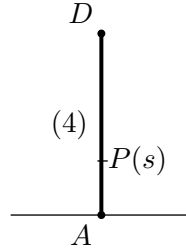
Cominciamo da $I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)}$. È immediato che $I_x^{(1)} = 0$, in quanto tutti i punti di AB hanno distanza nulla dall'asse x ; analogamente si conclude facilmente che $I_x^{(3)} = ml^2$, in quanto tutti i punti di CD hanno ugual distanza l dall'asse x . Per calcolare $I_x^{(2)}$ e $I_x^{(4)}$, che sono uguali tra di loro, possiamo far introdurre un sistema di ascisse, s , sull'asta, con origine in A . Indicata con μ la densità di massa (lineare) sull'asta, avremo, ovviamente,

$$\mu = \frac{m}{l}.$$

Dovremo dunque calcolare l'integrale seguente:

$$\int_0^l \mu s^2 ds = \frac{\mu s^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}.$$

Si veda anche la figura seguente.



Dunque

$$I_x = 0 + \frac{ml^2}{3} + ml^2 + \frac{ml^2}{3} = \frac{5}{3}ml^2 = \frac{5}{12}Ml^2.$$

La determinazione di I_{xy} richiede il calcolo di

$$I_{xy} = - \int_{(1) \cup (2) \cup (3) \cup (4)} \mu xy ds$$

Esattamente come prima si può dividere l'integrale in 4 parti, ottenendo

$$I_{xy} = - \int_0^l \mu s 0 ds - \int_0^l \mu l s ds - \int_0^l \mu s l ds - \int_0^l \mu 0 s ds = -ml^2 = -\frac{Ml^2}{4}.$$

Si può dunque concludere che

$$\mathbb{I}_A = Ml^2 \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

La determinazione della matrice associata all'operatore di inerzia relativo a G , in un sistema di riferimento con assi paralleli ai precedenti, è più semplice in quanto una tale terna è principale d'inerzia per cui la matrice I_G sarà diagonale e sarà semplicemente

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{x'} & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{x'} \end{pmatrix}$$

Si può procedere in maniera sostanzialmente identica a prima, con l'avvertenza che per il calcolo di $I_{x'}^{(2)}$ e $I_{x'}^{(4)}$, avremo un integrale del tipo

$$\int_{-l/2}^{l/2} \mu s^2 ds.$$

Si trova facilmente

$$\mathbb{I}_G = Ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se ora vogliamo riottenere la matrice $\mathbb{I}_A$ usando il teorema di Huygens-Steiner, possiamo osservare che

$$I_x = I_{x'} + Md^2 = \frac{Ml^2}{6} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{5}{12} Ml^2,$$

in perfetto accordo con il risultato precedente.

Per determinare il momento deviatore I_{xy} (l'unico che ci serve), possiamo ricordare la formula per il trasporto dell'operatore di inerzia, ottenuta nel corso della dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner (O è un punto generico e $\vec{u}$ è un versore):

$$\mathbb{I}_O(\vec{u}) = \mathbb{I}_G(\vec{u}) + M \vec{OG} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{OG}].$$

Scegliendo $O \equiv A$, $\vec{u} = \vec{j}$ e moltiplicando scalarmente per $\vec{i}$ otteniamo:

$$I_{xy} = \vec{i} \cdot \mathbb{I}_A(\vec{j}) = \vec{i} \cdot \mathbb{I}_G(\vec{j}) + M \vec{i} \cdot \left\{ \vec{AG} \wedge [\vec{j} \wedge \vec{AG}] \right\} = -\frac{Ml^2}{4},$$

dove per ottenere il risultato abbiamo calcolato i due prodotti vettoriali e il prodotto scalare determinando le componenti dei vettori coinvolti.

Si ottiene quindi esattamente lo stesso risultato già ricavato per via diretta.

Il calcolo del momento di inerzia rispetto a un asse qualunque passante per A è ora immediato: è sufficiente determinare le componenti di uno dei due versori dell'asse e calcolare il prodotto scalare $\vec{u} \cdot A\vec{u}$. Se per esempio si considera la retta r inclinata di 30° sull'asse delle ascisse si avrà

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} + 0 \vec{k},$$

da cui

$$I_r = Ml^2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \dots$$

Esercizio 16.2 (Cinematica delle masse). *Si consideri una lamina a forma di triangolo rettangolo ABC , con A vertice dell'angolo retto e i cateti AB e AC disposti sugli assi di un sistema cartesiano ortogonale $Axyz$. Si trovi la matrice di inerzia relativa al punto A e al sistema di assi indicato.*

Esercizio 16.3 (Cinematica delle masse). *È dato un parallelepipedo omogeneo a base quadrata $ABCD$ di lato l e con altezza AE di lunghezza h , libero di ruotare attorno allo spigolo AE . Calcolarne la quantità di moto, l'energia cinetica e il momento angolare rispetto ad un polo O sull'asse di rotazione.*

Esercizio 16.4 (Momenti di inerzia). *Si consideri un sistema di due aste omogenee AB e BC di ugual lunghezza l , saldate tra loro negli estremi B ad angolo retto. Supposto il sistema vincolato a ruotare in un piano attorno all'estremo A , si chiede di scrivere la matrice di inerzia del sistema rispetto ad A , in un sistema di coordinate opportunamente scelto. Si chiede poi di scrivere la matrice centrale di inerzia, in un sistema di coordinate con gli assi paralleli ai precedenti e di verificare la validità del teorema di Huygens-Steiner in relazione alle due matrici trovate.*

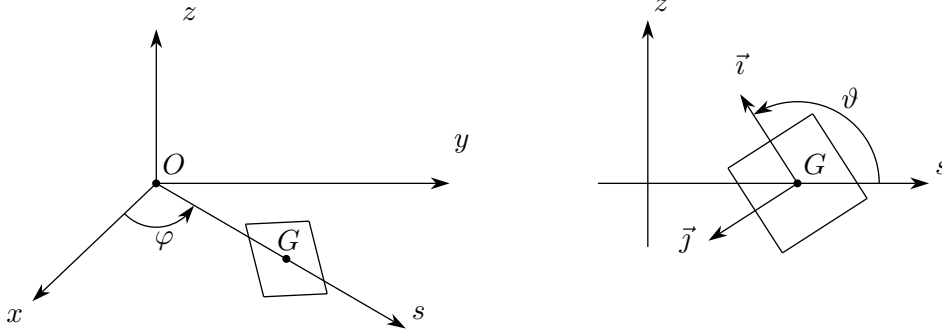
Esercizio 16.5 (Energia cinetica di un rigido). *Dato un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, con l'asse z verticale ascendente, si consideri una retta s , nel piano Oxy , libera di ruotare attorno a O . Un lamina quadrata omogenea di lato l e massa m è vincolata nel piano verticale Osz , con il suo baricentro G sulla retta s , potendo liberamente ruotare attorno a G .*

Si determini l'energia cinetica della lamina.

Come terna solidale alla lamina conviene assumere una terna con origine in G , versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ paralleli ai lati del quadrato e versore $\vec{k}$ ortogonale alla lamina, in modo che, al solito, la terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sia destrorsa.

Il sistema in questione ha 3 gradi di libertà, e si possono assumere le coordinate lagrangiane seguenti:

- $s = s_G$ (ascissa del punto G sulla retta s);
- φ : angolo, nel piano Oxy , tra l'asse x e la retta s (orientamento antiorario);
- ϑ : angolo, nel piano verticale Orz , tra la retta s e il versore $\vec{i}$.



Indichiamo con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i versori della terna fissa $Oxyz$.

Per determinare l'energia cinetica useremo la formula (9.27) nella pagina 93:

$$K = K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) ,$$

dove A, B, C sono i momenti di inerzia relativi alla terna principale di inerzia con origine in G , solidale al rigido, e p, q, r sono le componenti della velocità angolare in questa terna.

Cominciamo a determinare la velocità di G . Si ha

$$\begin{cases} x_G = s \cos \varphi \\ y_G = s \sin \varphi \\ z_G = 0 \end{cases} ,$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{s} \cos \varphi - s \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_G = \dot{s} \sin \varphi + s \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z}_G = 0 \end{cases} ,$$

e quindi

$$\vec{v}_G^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\varphi}^2 .$$

È evidente che la velocità angolare della lamina è la somma tra la velocità di rotazione di s attorno a Oz e della velocità della lamina attorno a $\vec{k}$, velocità che sono tra di loro perpendicolari, per cui

$$(16.1) \quad \vec{\omega} = \dot{\vartheta} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{e}_3 ,$$

anche se (16.1) non è un'espressione adatta agli scopi richiesti, in quanto esprime la velocità angolare in parte usando la terna fissa, in parte usando la terna solidale. Sarà però sufficiente esprimere $\vec{e}_3$ rispetto alla terna solidale per risolvere il problema. Basta fare riferimento alla seconda delle due figure riportate per trovare

$$\vec{e}_3 = \sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j} .$$

Se ne deduce

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{i} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{j} + \dot{\vartheta} \vec{k} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k} .$$

I momenti di inerzia rispetto alla terna centrale sono immediati:

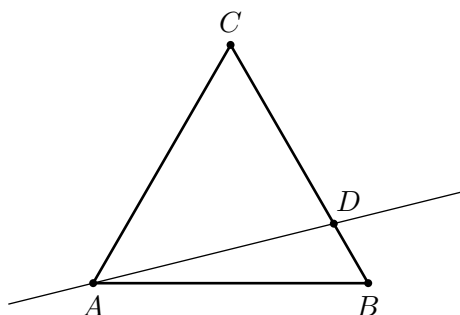
$$A = B = \frac{ml^2}{12} \quad , \quad C = A + B = \frac{ml^2}{6} \quad .$$

In conclusione

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m (\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta + \frac{ml^2}{6}\dot{\vartheta}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{12}\dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{6}\dot{\vartheta}^2 \right) . \end{aligned}$$

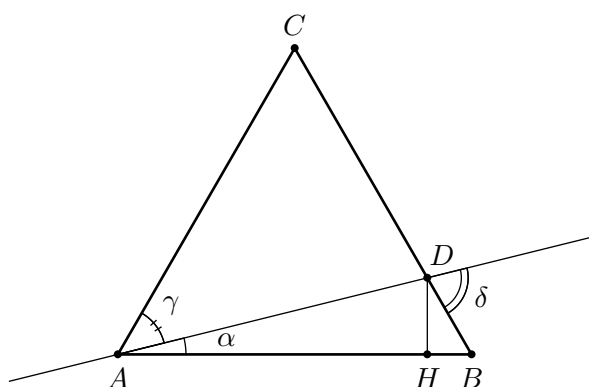
Esercizio 16.6 (Esercizio riepilogativo sui momenti di inerzia). ⁽¹⁾ Con riferimento alla figura seguente, siano date tre aste omogenee di lunghezza l e massa m incernierate a formare un triangolo equilatero ABC .

Si calcoli il momento di inerzia del triangolo rispetto alla retta AD , essendo $\overline{BD} = l/4$.



Proponiamo diverse strategie risolutive per questo problema, per mostrare le varie tecniche coinvolte nel calcolo dei momenti di inerzia.

Cominciamo con il calcolare il seno e il coseno degli angoli α , δ , γ indicati nella figura che segue, angoli che ci serviranno nel seguito.



¹Per questo esercizio si è preso spunto dal compito assegnato dal prof. Giorgio Tondo presso l'Università di Trieste, il 21 luglio 2008.

Per l'angolo α possiamo utilizzare il triangolo rettangolo ADH , dove

$$\overline{DH} = \frac{l\sqrt{3}}{8}, \quad \overline{AH} = \frac{7}{8}l \quad \left(\text{perché } \overline{HB} = \frac{l}{8} \right).$$

Dunque

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{DH}}{\overline{AH}} = \frac{l\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{8}{7l} = \frac{\sqrt{3}}{7} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{52}}, \quad \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{52}}.$$

Per i pigri ricordiamo che

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{1/\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

formula che permette di ricavare subito $\sin \alpha$ (e quindi $\cos \alpha$) a partire dalla tangente⁽²⁾.

Per gli altri due angoli basta osservare che $\gamma = \pi/3 - \alpha$, mentre $\delta = \pi/3 + \alpha$. Quindi

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{7}{\sqrt{52}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{52}} = 3\sqrt{\frac{3}{52}}, \quad \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{52}}; \\ \sin \delta &= \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{7}{\sqrt{52}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{52}} = 4\sqrt{\frac{3}{52}}, \quad \cos \delta = \frac{2}{\sqrt{52}}. \end{aligned}$$

Risoluzione n° 1: calcolo diretto mediante la definizione

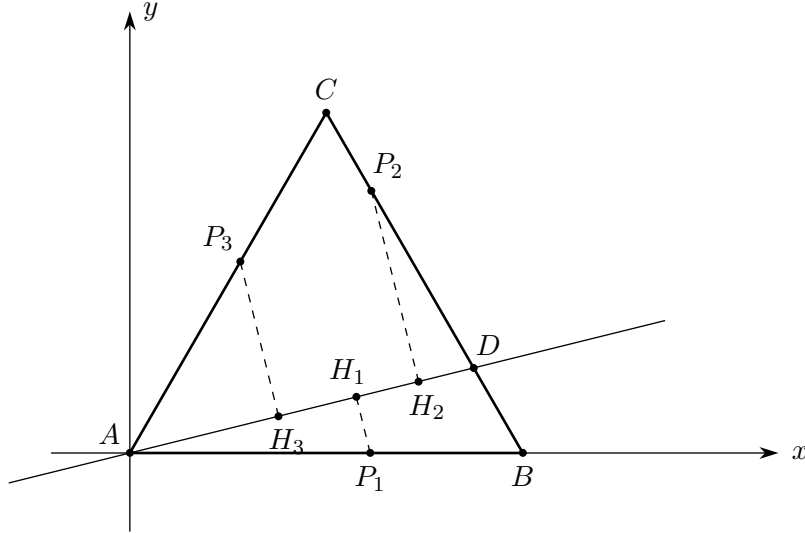
La prima risoluzione che proponiamo (la più semplice dal punto di vista dei calcoli), utilizza direttamente la definizione di momento di inerzia di un corpo $\mathcal{C}$ rispetto a una retta r . Detta d_i (per un sistema particellare) o d (per un sistema continuo) la distanza di un punto del corpo dalla retta r si ha:

$$\mathcal{J}_r = \sum_i m_i d_i^2, \quad \text{oppure} \quad \mathcal{J}_r = \int_{\mathcal{C}} \mu d^2 d\mathcal{C},$$

a seconda che si tratti di un sistema particellare o continuo. Nell'integrale abbiamo indicato con μ la densità, e l'integrale è un integrale di linea, di superficie, di volume, a seconda del tipo di corpo in considerazione.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, come nella figura seguente, prendiamo un punto generico P su ciascuno dei tre lati del triangolo, e consideriamone la distanza $\overline{PH}$ dalla retta AD rispetto a cui vogliamo calcolare il momento di inerzia.

²Naturalmente ci sarebbero anche altri modi per ricavare il seno e il coseno di α ...



Si tratterà di introdurre una parametrizzazione per ciascuno dei tre lati del triangolo e poi fare tre integrali di linea. Avremo inoltre bisogno di trovare le distanze $\overline{PH}$: si può operare sui triangoli rettangoli evidenti dalla figura, oppure usare la formula della distanza di un punto da una retta, in questo caso la retta AD , la cui equazione si trova immediatamente, tenendo conto che le coordinate di D in questo sistema sono le seguenti

$$D = \left(\frac{7}{8}l, \frac{\sqrt{3}}{8}l \right).$$

L'equazione in questione è

$$x\sqrt{3} - 7y = 0.$$

- **Lato AB .** Introduciamo come parametro la lunghezza di AP_1 (si tratta del cosiddetto *parametro d'arco*, cioè del parametro che esprime la lunghezza dell'arco, in questo caso un segmento, percorso a partire da una certa origine), parametro che possiamo indicare con t . Le coordinate del punto P_1 variabile sul segmento AB saranno

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1^{(3)}.$$

Per la distanza $\overline{P_1 H_1}$ avremo:

$$\overline{P_1 H_1} = \frac{|t\sqrt{3}|}{\sqrt{52}}, \quad \overline{P_1 H_1}^2 = \frac{3t^2}{52}.$$

³Il fatto che

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$$

è legato al fatto che il parametro scelto è il parametro d'arco. Infatti questa radice fornisce il modulo del vettore tangente alla linea, e, se il parametro è l'arco, il vettore tangente ha modulo 1, come è ben noto. In termini fisici è come dire che se uso come orologio lo spazio percorso, la velocità è costantemente 1, e questo è evidente se si pensa al significato della velocità (rapporto tra spazio e tempo).

Il momento di inerzia del lato AB sarà allora

$$\mathcal{I}_{AB} = \int_0^l \mu \overline{P_1 H_1}^2 ds = \int_0^l \mu \frac{3t^2}{52} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \mu \frac{3}{52} \int_0^l t^2 dt = \mu \frac{3}{52} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{52},$$

dove abbiamo anche tenuto che $\mu l = m$.

- **Lato BC .** Introduciamo come parametro la lunghezza di AP_2 e, ragionando come per AB , otteniamo

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} + \frac{t}{2} \\ y = \frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{t\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1.$$

$$\overline{P_2 H_2} = \frac{|\sqrt{3} \left(\frac{l}{2} + \frac{t}{2} \right) - 7 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{t\sqrt{3}}{2} \right)|}{\sqrt{52}} = \frac{|\sqrt{3}(4t - 3l)|}{\sqrt{52}}, \quad \overline{P_2 H_2}^2 = \frac{3(4t - 3l)^2}{52}.$$

Dunque

$$\mathcal{I}_{BC} = \int_0^l \mu \overline{P_2 H_2}^2 ds = \int_0^l \mu \frac{3(4t - 3l)^2}{52} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \dots = \frac{7ml^2}{52},$$

- **Lato AC .** Introduciamo come parametro la lunghezza di AP_3 e ragioniamo come nei due casi precedenti.

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1.$$

$$\overline{P_3 H_3} = \frac{|\sqrt{3} \frac{t}{2} - 7 \frac{t\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{52}} = \frac{|-3\sqrt{3}t|}{\sqrt{52}}, \quad \overline{P_3 H_3}^2 = \frac{27t^2}{52}.$$

Dunque

$$\mathcal{I}_{AC} = \int_0^l \mu \overline{P_3 H_3}^2 ds = \int_0^l \mu \frac{27t^2}{52} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \dots = \frac{9ml^2}{52},$$

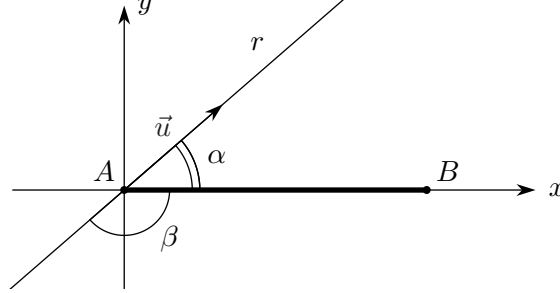
Sommando i tre momenti di inerzia trovati abbiamo infine

$$\mathcal{I}_r = \frac{1}{52}ml^2 + \frac{7}{52}ml^2 + \frac{9}{52}ml^2 = \frac{17}{52}ml^2.$$

Risoluzione n° 2: calcolo dei momenti di inerzia dei tre lati, usando opportunamente la matrice di inerzia

La soluzione che proponiamo con questo secondo metodo, seppure non sostanzialmente diversa dalla precedente, è molto istruttiva e oltremodo utile nelle applicazioni perché utilizza una formula che permette il calcolo del momento di inerzia di un'asta rispetto a una qualunque retta.

Consideriamo un'asta AB qualunque, omogenea⁽⁴⁾, di massa m e lunghezza l , e una retta s arbitraria. Consideriamo poi la parallela r a s passante per un punto dell'asta, per esempio l'estremo A (ma andrebbe bene anche B , o il baricentro dell'asta). Poiché sappiamo “trasportare” il momento di inerzia da r a s con il teorema di Huygens-Steiner, naturalmente passando prima attraverso la parallela passante per il baricentro, basterà calcolare il momento di inerzia rispetto a r . Mettiamoci allora nel piano di r e dell'asta AB e introduciamo un sistema di coordinate come nella figura che segue.



È chiaro che la terna costituita dai due assi x e y e dall'asse z perpendicolare al piano e con verso “uscente” dal foglio (con versori rispettivi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) è principale di inerzia. La matrice di inerzia dell'asta relativa al punto A , con questo sistema di coordinate, sarà allora diagonale e inoltre, come per ogni sistema piano, avrà⁽⁵⁾ $J_3 = J_1 + J_2$. Nel nostro caso J_1 è banalmente nullo (è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse x che contiene l'asta (e dunque tutti i punti dell'asta hanno distanza nulla da questa retta)). J_2 si trova in tutti i manuali, e comunque è di calcolo immediato:

$$\mathbb{J}_2 = \int_{\mathcal{C}} \mu d^2 d\mathcal{C} = \int_0^l \mu t^2 dt = \mu \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}.$$

Dunque

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare $\mathbb{J}_r$ ci basterà trovare uno dei due versori, per esempio quello indicato con $\vec{u}$ nella figura precedente, della retta r :

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} + 0\vec{k} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0).$$

Essendo⁽⁶⁾

$$\mathbb{J}_r = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_A(\vec{u}),$$

⁴Se si vuole trattare un'asta non omogenea, basterà introdurre, nelle formule che considereremo, l'opportuna funzione densità, senza nessuna modifica sostanziale nei calcoli e nelle considerazioni meccaniche che faremo.

⁵Ricordiamo che abbiamo convenuto di indicare con J_i gli elementi diagonali della matrice di inerzia, quando essa è diagonale, cioè quando la terna di riferimento è principale di inerzia e quindi questi elementi diagonali sono gli autovalori dell'operatore di inerzia.

⁶Ricordiamo che abbiamo convenuto di indicare l'operatore di inerzia e la sua matrice in un dato sistema di coordinate con lo stesso simbolo. Scrivendo $\mathbb{I}_A(\vec{u})$ intendiamo l'operatore di inerzia applicato al vettore $\vec{u}$, scrivendo $\mathbb{I}_A \vec{u}$ intendiamo il prodotto tra la matrice $\mathbb{I}_A$ e la terna delle componenti di $\vec{u}$.

se usiamo la matrice prima trovata e la terna delle componenti di $\vec{u}$ troviamo

$$(*) \quad \vec{u} \mathbb{I}_A \vec{u} = \frac{ml^2}{3} (\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \alpha.$$

La formula (*) è particolarmente significativa, in quanto permette di scrivere il momento di inerzia di un'asta omogenea rispetto a una retta qualunque, passante per un estremo, semplicemente usando il seno di uno degli angoli tra l'asta e la retta: l'angolo β della figura precedente ha infatti lo stesso seno di α .

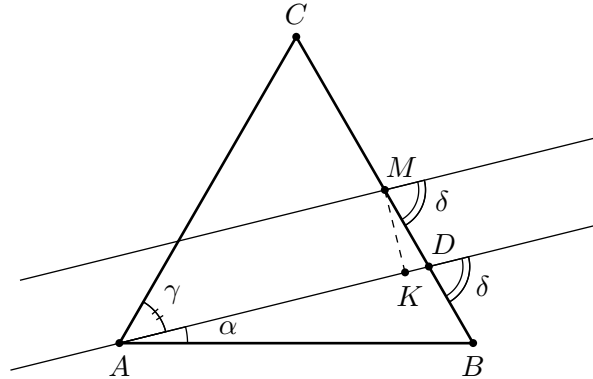
Se vogliamo il momento di inerzia rispetto alla parallela r_G a r passante per il baricentro basterà applicare il teorema di Huygens-Steiner. La distanza tra le due rette è data da $\overline{AG} \sin \alpha$ e l'asta è omogenea per cui il baricentro è al centro dell'asta, quindi:

$$(**) \quad J_r = J_{r_G} + m(\overline{AG} \sin \alpha)^2 = J_{r_G} + \frac{ml^2}{4} \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad J_{r_G} = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha.$$

A questo punto il momento di inerzia di AB e AC rispetto alla retta AD sono immediati, tenendo conto dei valori già trovati per i seni degli angoli richiesti, e valgono rispettivamente

$$J_{AB} = \frac{ml^2}{3} \sin^2(B\hat{A}D) = \frac{ml^2}{3} \frac{3}{52} = \frac{ml^2}{52}, \quad J_{AC} = \frac{ml^2}{3} \sin^2(C\hat{A}D) = \frac{ml^2}{3} \frac{27}{52} = \frac{9ml^2}{52}.$$

Per determinare il momento di inerzia di BC possiamo trovare prima il momento rispetto alla parallela r_M ad AD passante per M : possiamo usare la formula (**) sopra trovata e il seno dell'angolo δ già considerato.



$$J_{r_M, BC} = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \delta = \frac{ml^2}{12} \frac{48}{52} = \frac{4ml^2}{52}.$$

La distanza tra r ed r_M è data da $\overline{MK}$ e si ha

$$\overline{MK} = \overline{MD} \sin \delta = \frac{l}{4} 4 \sqrt{\frac{3}{52}} = l \sqrt{\frac{3}{52}}.$$

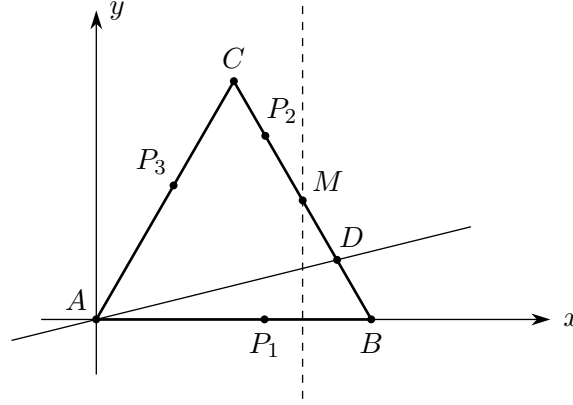
Possiamo ora applicare il teorema di Huygens-Steiner ottenendo

$$J_{BC} = J_{r_M, BC} + m \overline{MK}^2 = \frac{4ml^2}{52} + \frac{3ml^2}{52} = \frac{7ml^2}{52}.$$

Ovviamente tutti i risultati sono in accordo con quelli ottenuti prima.

Risoluzione n° 3: uso di una matrice di inerzia non diagonale, relativa ad A

Introduciamo un sistema di coordinate come nella figura seguente, osservando che si tratta di una terna che non è principale di inerzia relativamente al punto A . Dovremo pertanto calcolare anche i momenti deviatori.



Trattandosi di un sistema piano, la matrice di inerzia relativa ad A sarà del tipo

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix},$$

dove I_{11} e I_{22} sono i momenti di inerzia del triangolo rispetto agli assi x e y , mentre I_{12} e I_{21} , che sono notoriamente uguali, sono gli unici due momenti deviatori non nulli e sono dati da

$$I_{12} = I_{21} = - \int_{\mathcal{C}} \mu xy \, d\mathcal{C}.$$

Cominciamo a calcolare I_{11} , ovvero il momento di inerzia $\mathcal{J}_x$ del triangolo rispetto all'asse x . Converrà fare il calcolo separatamente per i tre lati. Il lato AB non darà alcun contributo perché tutti i suoi punti stanno sull'asse x stessa. Per i lati AC e BC , che danno ovviamente lo stesso contributo, possiamo usare la formula (*) trovata prima.

$$\mathcal{J}_{x,AC} = \mathcal{J}_{x,BC} = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{ml^2}{3} \frac{3}{4} = \frac{ml^2}{4}.$$

Dunque

$$I_{11} = 0 + \frac{ml^2}{4} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{2}.$$

Passiamo ora a calcolare I_{22} , ovvero il momento di inerzia $\mathcal{J}_y$ del triangolo rispetto all'asse y . Converrà anche qui fare il calcolo separatamente per i tre lati. Per i lati AC e AB possiamo usare la formula (*).

$$\mathcal{J}_{y,AC} = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{ml^2}{3} \frac{1}{4} = \frac{ml^2}{12}, \quad \mathcal{J}_{y,AB} = \frac{ml^2}{3}.$$

Per l'asta BC applichiamo il teorema di Huygens-Steiner, considerando la parallela y_M all'asse y per M , tenendo conto che la distanza tra le due rette è $3l/4$:

$$J_{y,BC} = J_{y_M,BC} + m \left(\frac{3l}{4} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \frac{\pi}{6} + \frac{9ml^2}{16} = \frac{7ml^2}{12}.$$

Allora

$$I_{22} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{3} + \frac{7ml^2}{12} = ml^2.$$

Passiamo infine al calcolo del momento deviatore, dividendo al solito il calcolo in tre parti, una per ciascun lato. Occorre parametrizzare i tre lati del triangolo. Anzi, siccome i punti del lato AB hanno sempre $y = 0$, basterà limitarsi solo ai lati AC e BC . Le parametrizzazioni sono ovviamente le stesse che abbiamo già usato precedentemente e che qui riportiamo per comodità.

– **Lato AC .**

$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{t\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1.$$

Quindi

$$I_{22,AC} = - \int_0^l \mu \frac{t}{2} \frac{t\sqrt{3}}{2} dt = -\mu \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^l t^2 dt = -\mu \frac{\sqrt{3}}{12} l^3 = -\frac{ml^2\sqrt{3}}{12}.$$

– **Lato BC .**

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} + \frac{t}{2} \\ y = \frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{t\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq l \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1.$$

Quindi

$$I_{22,BC} = - \int_0^l \mu \left(\frac{l}{2} + \frac{t}{2} \right) \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{t\sqrt{3}}{2} \right) dt = -\mu \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^l (l^2 - t^2) dt = -\frac{ml^2\sqrt{3}}{6}.$$

In conclusione si avrà

$$I_{12} = -\frac{ml^2\sqrt{3}}{4}.$$

Per la matrice $\mathbb{I}_A$ si ha:

$$\mathbb{I}_A = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Non ci resta che trovare uno dei due versori della retta AD , per esempio $\vec{u} = \text{vers}(\overrightarrow{AD})$:

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} + 0 \vec{k} = \left(\frac{7}{\sqrt{52}}, \sqrt{\frac{3}{52}}, 0 \right).$$

Possiamo ora applicare la solita formula $\mathcal{J}_r = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_A \vec{u}$.

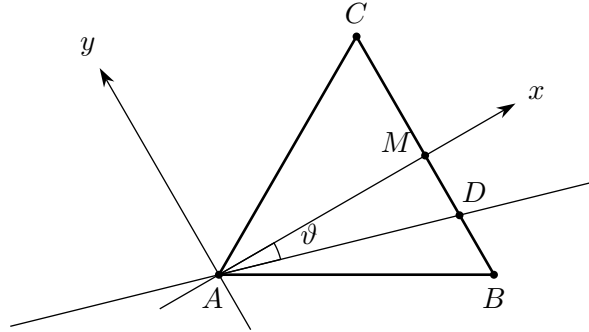
$$\mathcal{J}_r = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{52}} & \sqrt{\frac{3}{52}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{52}} \\ \sqrt{\frac{3}{52}} \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \frac{17}{52} ml^2.$$

Risoluzione n° 4: uso di una matrice di inerzia diagonale, relativa ad A

Introduciamo un sistema di coordinate come nella figura seguente, osservando che si tratta di una terna che è principale di inerzia relativamente al punto A , per i soliti motivi di simmetria. La matrice di inerzia sarà allora più semplice della precedente, in quanto non ci saranno momenti deviatori.

Ci serviranno anche il seno e il coseno dell'angolo $\vartheta = \angle D\hat{A}M$, che si possono facilmente ricavare osservando che $\vartheta = \pi/6 - \alpha$:

$$\sin \vartheta = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \frac{2}{\sqrt{52}}, \quad \cos \vartheta = \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = 4\sqrt{\frac{3}{52}}.$$



Il fatto che la terna sia principale di inerzia e che il sistema sia piano implica che la matrice di inerzia relativa ad A sarà ora del tipo

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 + J_2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathbb{J}_1$ e $\mathbb{J}_2$ sono i momenti di inerzia del triangolo rispetto agli assi x e y . Usando formule ormai ampiamente note e tenendo conto che BC ha tutti i punti alla stessa distanza dall'asse y avremo:

$$J_1 = \mathcal{J}_{x,AB} + \mathcal{J}_{x,AC} + \mathcal{J}_{x,BC} = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} + \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} + \frac{ml^2}{12} = \frac{ml^2}{4};$$

$$J_2 = J_{y,AB} + J_{y,AC} + J_{y,BC} = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} + \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} + m \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{5ml^2}{4}.$$

Possiamo scrivere la matrice $\mathbb{I}_A$:

$$\mathbb{I}_A = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Si noti che J_3 , essendo il momento di inerzia del triangolo rispetto all'asse z , è lo stesso della matrice precedente, in quanto gli assi z dei due sistemi coincidono.

Il versore $\vec{v}$ di $\overrightarrow{AD}$ sarà, tenendo conto dei valori trovati per $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$:

$$\vec{v} = \cos \vartheta \vec{i} - \sin \vartheta \vec{j} + 0 \vec{k} = \left(4\sqrt{\frac{3}{52}}, \frac{2}{\sqrt{52}}, 0 \right).$$

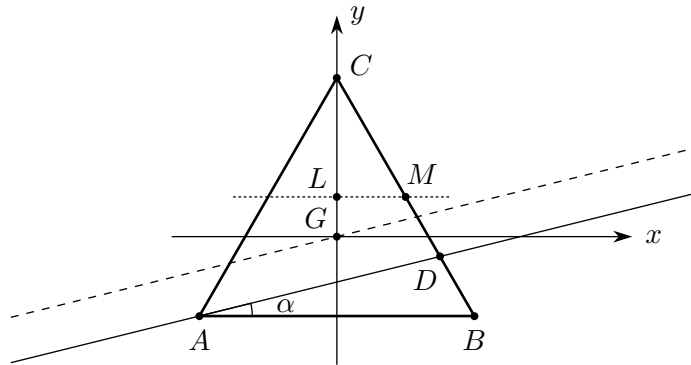
Applicando la solita formula troviamo ora J_r .

$$J_r = ml^2 \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{3}{52}} & \frac{2}{\sqrt{52}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{\frac{3}{52}} \\ \frac{2}{\sqrt{52}} \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \frac{17ml^2}{52}.$$

Risoluzione n° 4: uso della matrice centrale di inerzia

Il baricentro del triangolo in questione coincide con il baricentro geometrico della figura (punto di intersezione delle mediane. Costruiamo allora la matrice centrale di inerzia che, per questioni di simmetria, sarà particolarmente semplice⁽⁷⁾.

Introduciamo una terna di riferimento con origine nel baricentro e disposta come nella figura seguente.



⁷Ricordiamo che se il telaio non fosse a forma di triangolo equilatero, ma per esempio soltanto isoscele, il baricentro fisico (meglio il centro di massa, anche se in casi come questo di corpi non troppo estesi i due concetti coincidono) potrebbe non coincidere con il baricentro geometrico in caso di aste con uguale densità (e quindi con masse diverse avendo lunghezze diverse).

La terna è chiaramente principale d'inerzia perché gli assi y e z sono di simmetria materiale (e quindi anche l'asse x deve essere principale di inerzia in quanto una terna siffatta esiste sempre⁽⁸⁾). Dunque

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 + J_2 \end{pmatrix},$$

dove J_1 e J_2 sono i momenti di inerzia del triangolo rispetto agli assi x e y .

Poiché si ha

$$\mathbb{J}_1 = \mathbb{J}_{x,AB} + \mathbb{J}_{x,AC} + \mathbb{J}_{x,BC} = \mathbb{J}_{x,AB} + 2\mathbb{J}_{x,BC},$$

cominciamo a calcolare $\mathbb{J}_{x,BC}$. Per questo consideriamo la parallela x_M all'asse x passante M (baricentro dell'asta BC) e applichiamo la formula (**):

$$\mathbb{J}_{x_M,BC} = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{ml^2}{16}.$$

Indicando con h l'altezza del triangolo, la distanza tra le due rette è

$$\overline{CG} - \overline{LG} = \frac{2h}{3} - \frac{h}{2} = \frac{h}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{12}.$$

Quindi

$$\mathbb{J}_{x,BC} = \frac{ml^2}{16} + \frac{3ml^2}{144} = \frac{ml^2}{12},$$

e

$$J_1 = \frac{ml^2}{12} + 2 \frac{ml^2}{12} = \frac{ml^2}{4}.$$

Il calcolo di J_2 è ancora più semplice e si ottiene, con la solita formula (*),

$$J_2 = \mathbb{J}_{y,AB} + \mathbb{J}_{y,AC} + \mathbb{J}_{y,BC} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} + \frac{ml^2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{ml^2}{4}.$$

La matrice di inerzia relativa a G è:

$$\mathbb{I}_G = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il fatto che i primi due autovalori siano identici è particolarmente importante: l'ellissoide centrale di inerzia è rotondo, ovvero il momento di inerzia rispetto a una retta qualunque per il centro di massa e appartenente al piano del triangolo è sempre lo stesso. In particolare anche il momento di inerzia rispetto alla parallela r_G a r , passante per G sarà sempre $ml^2/4$.

Possiamo anche controllare direttamente quest'ultima proprietà. Uno dei versori di r_G è naturalmente uguale al versore di $\overrightarrow{AD}$ e quindi si ha:

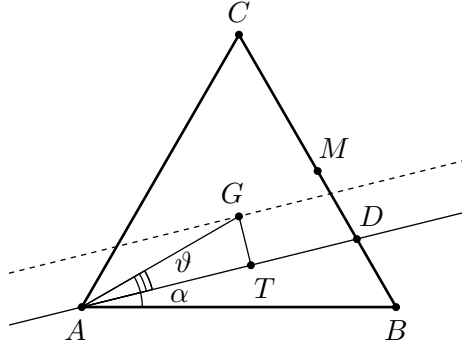
$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} + 0 \vec{k} = \left(\frac{7}{\sqrt{52}}, \sqrt{\frac{3}{52}}, 0 \right).$$

⁸Si può naturalmente anche osservare che il piano Gyz è di simmetria materiale e quindi ogni retta ad esso perpendicolare è principale di inerzia

Dunque

$$\mathcal{I}_{r_G} = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_G \vec{u} = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{52}} & \sqrt{\frac{3}{52}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{52}} \\ \sqrt{\frac{3}{52}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{4}.$$

Dobbiamo solo trovare la distanza tra le due rette r ed r_G , pari al tratto $\overline{GT}$ nella figura che segue.



$$\overline{GT} = \overline{AG} \sin \vartheta = \frac{l\sqrt{3}}{3} \frac{2}{\sqrt{52}} = \frac{2l}{3} \sqrt{\frac{3}{52}}.$$

Applichiamo ora il teorema di Huygens-Steiner (tenendo conto che la massa complessiva del telaio è $3m$) e otteniamo

$$\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_{r_G} + 3m \left(\frac{2l}{3} \sqrt{\frac{3}{52}} \right)^2 = \frac{17ml^2}{52}.$$

Per concludere osserviamo anche che il momento di inerzia rispetto alla perpendicolare al piano per A è, come già visto, $3ml^2/2$, mentre quello rispetto alla perpendicolare al piano per G è $ml^2/2$, in accordo con il teorema di Huygens-Steiner:

$$\mathcal{I}_{z_A} = \mathcal{I}_{z_G} + 3m \overline{AG}^2 = \frac{ml^2}{2} + 3m \left(\frac{l\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3ml^2}{2}.$$

Ancora una considerazione sui momenti di inerzia del triangolo

Un ulteriore interessante esercizio che mostra le proprietà dei momenti di inerzia è quello di verificare che la matrice di inerzia relativa al punto A può essere ottenuta per trasporto a partire dalla matrice di inerzia relativa al punto G .

Nel testo di teoria, svolgendo la dimostrazione del teorema di Huygens-Steiner, si è mostrato che, se O è un punto generico di un corpo e G ne è il baricentro, vale la seguente formula

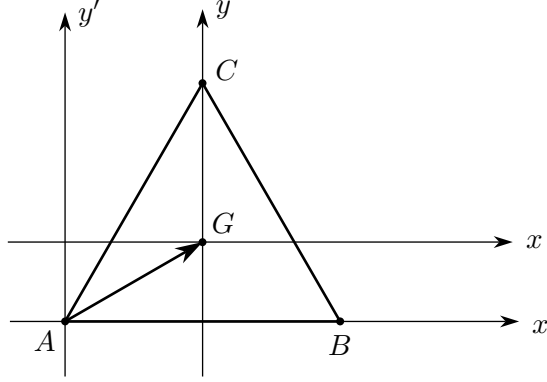
$$(\#) \quad \mathbb{I}_O(\vec{u}) = \mathbb{I}_G(\vec{u}) + M \overrightarrow{OG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG} \right],$$

che si può chiamare *Formula di trasporto dell'operatore di inerzia*.

Ricordiamo che, fissata una terna con origine in A e versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, gli elementi della matrice di inerzia associata all'operatore sono dati da

$$I_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_O(\vec{e}_j).$$

Introduciamo allora due sistemi di coordinate, con gli stessi versori e con origine rispettivamente nei punti A e G .



Dalla formula (#) otteniamo

$$(\#_1) \quad I_{A,ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_j) + 3m\vec{e}_i \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_j \wedge \vec{AG}].$$

Il primo termine del secondo membro fornisce gli elementi della matrice di inerzia relativa a G . Calcoliamo il secondo termine.

$$3m\vec{e}_i \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_j \wedge \vec{AG}] = 3m\vec{e}_i \cdot [(\vec{AG} \cdot \vec{AG})\vec{e}_j - (\vec{AG} \cdot \vec{e}_j)\vec{AG}] = 3m [\vec{AG}^2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) - \vec{AG}_i \vec{AG}_j].$$

Ora

$$\vec{AG} = \vec{AG}_1 \vec{e}_1 + \vec{AG}_2 \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \frac{l}{2} \vec{e}_1 + \frac{l\sqrt{3}}{6} \vec{e}_2, \quad \Rightarrow \vec{AG}^2 = \frac{l^2}{3}.$$

Tenendo anche conto che

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

possiamo concludere che gli elementi del secondo termine del secondo membro di (#₁) sono dati da

$$\begin{aligned} 3m\vec{e}_1 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_1 \wedge \vec{AG}] &= 3m [\vec{AG}^2 - \vec{AG}_1^2] = \frac{ml^2}{4} \\ 3m\vec{e}_2 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_2 \wedge \vec{AG}] &= 3m [\vec{AG}^2 - \vec{AG}_2^2] = \frac{3ml^2}{4} \\ 3m\vec{e}_3 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_3 \wedge \vec{AG}] &= 3m [\vec{AG}^2 - \vec{AG}_3^2] = ml^2 \\ 3m\vec{e}_1 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_2 \wedge \vec{AG}] &= 3m [0 - \vec{AG}_1 \vec{AG}_2] = -\frac{ml^2\sqrt{3}}{4} \\ 3m\vec{e}_2 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_1 \wedge \vec{AG}] &= 3m\vec{e}_1 \cdot \vec{AG} \wedge [\vec{e}_2 \wedge \vec{AG}] \end{aligned}$$

Gli altri 4 elementi sono nulli in quanto contengono a fattore la terza componente di $\overrightarrow{AG}$, che è nulla.

Dunque

$$\mathbb{I}_A = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

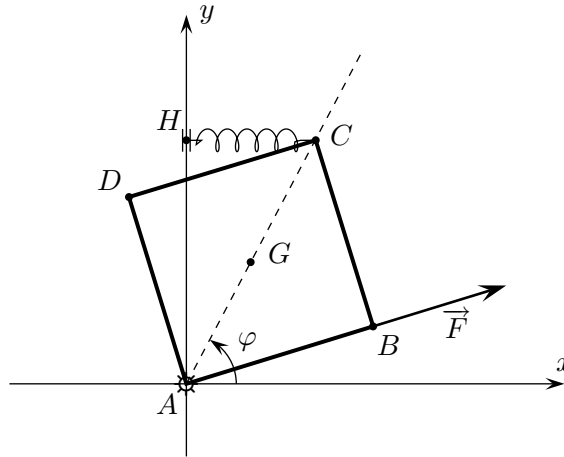
in perfetto accordo con quanto già trovato per via diretta.

17. Esercizi di dinamica

Esercizio 17.1 (Statica e dinamica dei rigidi). Si consideri nuovamente il telaio quadrato considerato nell'esercizio 16.1 e si supponga che esso sia posto in un piano verticale Oxy , con l'asse y verticale ascendente, e sia libero di ruotare attorno al suo vertice A , mediante una cerniera liscia. Si supponga che esso sia soggetto, oltre al proprio peso, a una forza elastica di costante h agente in C e con centro nella proiezione H di C sull'asse y , e ad una forza $\vec{F}$ di modulo costante, parallela ed equiversa ad $\vec{AB}$, agente sul punto B (vedi figura).

Si chiede:

1. di determinare le posizioni di equilibrio usando il principio dei lavori virtuali;
2. di determinare la reazione vincolare in A all'equilibrio;
3. di discutere l'uso dell'energia potenziale per la determinazione delle posizioni di equilibrio e, se possibile, di valutare la stabilità delle posizioni trovate;
4. di calcolare l'energia cinetica del sistema;
5. di scrivere le equazioni cardinali della dinamica del sistema.



Il sistema è a un solo grado di libertà e conviene assumere come parametro lagrangiano l'angolo φ di figura.

Le coordinate dei punti di applicazione delle forze sono:

1. $C = (l\sqrt{2} \cos \varphi, l\sqrt{2} \sin \varphi)$
2. $G = (\frac{l}{2}\sqrt{2} \cos \varphi, \frac{l}{2}\sqrt{2} \sin \varphi)$
3. $B = (l \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}), l \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}))$

Gli spostamenti virtuali degli stessi sono:

1. $\delta C = -l\sqrt{2} \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + l\sqrt{2} \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$
2. $\delta G = -\frac{l}{2}\sqrt{2} \sin \varphi \delta \varphi \vec{i} + \frac{l}{2}\sqrt{2} \cos \varphi \delta \varphi \vec{j}$
3. $\delta B = -l \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) \delta \varphi \vec{i} + l \cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) \delta \varphi \vec{j}$

Infine le forze attive agenti sono:

1. $M\vec{g} = -Mg\vec{j}$;
2. $\vec{F}_{el} = h\vec{CH} = -hl\sqrt{2}\sin\varphi\vec{i}$;
3. $\vec{F} = F\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\vec{i} + F\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})\vec{j}$.

Il calcolo del lavoro della sollecitazione attiva è ora immediato e si ottiene:

$$\delta L^a = \left(-mg\frac{l}{2}\sqrt{2}\cos\varphi + 2kl^2\sin\varphi\cos\varphi \right) \delta\varphi = Q_\varphi\delta\varphi.$$

Si può dunque verificare per calcolo diretto che il lavoro del carico $\vec{F}$ è nullo, cosa del resto prevedibile in quanto gli spostamenti virtuali di B sono, necessariamente, perpendicolari al carico stesso.

La determinazione delle posizioni di equilibrio richiede la risoluzione dell'equazione, nell'incognita φ

$$-mg\frac{l}{2}\sqrt{2}\cos\varphi + 2kl^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Si trova facilmente:

1. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$,
2. $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$,
3. $\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{mg\sqrt{2}}{4hl}\right)$,
4. $\varphi_4 = \pi - \arcsin\left(\frac{mg\sqrt{2}}{4hl}\right)$,

dove, naturalmente, le ultime due posizioni esistono solo se l'argomento dell'arcseno è minore di 1 (se uguale a 1 si ritrova la posizione φ_1).

L'annullarsi del lavoro virtuale della forza $\vec{F}$ consente di usare l'energia potenziale delle altre due forze (palesamente conservative) per la determinazione delle posizioni di equilibrio e la discussione della stabilità.

$$U = mgy_G + \frac{1}{2}h\|\vec{CH}\|^2 = mg\frac{l}{2}\sqrt{2}\sin\varphi + hl^2\cos^2\varphi.$$

Si verifica facilmente che si ha

$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

La verifica della stabilità o meno delle posizioni trovate di equilibrio richiede ora semplicemente di controllare la positività o negatività della derivata seconda di U .

Per determinare l'energia cinetica complessiva del sistema si può osservare che si tratta di moto con punto fisso, da cui

$$K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_A(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\vec{k} \cdot \mathbb{I}_A(\dot{\varphi}\vec{k}).$$

Passando alle componenti si ottiene:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}I_{33}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}Ml^2\right)\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{5}{12}Ml^2\right)\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

La prima equazione cardinale della dinamica,

$$\vec{R}^{\text{est}} = M\vec{a}_G,$$

ha il primo membro identico al caso statico già considerato; per quanto riguarda il secondo membro basterà calcolare l'accelerazione del baricentro, derivando due volte le coordinate già trovate.

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \frac{l}{2}\sqrt{2}(-\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{i} + \cos\varphi\dot{\varphi}\vec{j}) \\ \vec{a}_G &= \frac{l}{2}\sqrt{2}\left[(-\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\ddot{\varphi})\vec{i} + (-\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\ddot{\varphi})\vec{j}\right]\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda equazione cardinale osserviamo che, trattandosi di sistema con un punto fisso, si può scrivere semplicemente

$$\vec{M}_A^{\text{est}} = \dot{\vec{L}}_A.$$

Inoltre, siccome il moto è piano, il sistema ha in realtà un asse fisso, che è anche asse principale di inerzia, per cui $\vec{L}_A = I_a\vec{\omega} = I\dot{\varphi}\vec{k}$.

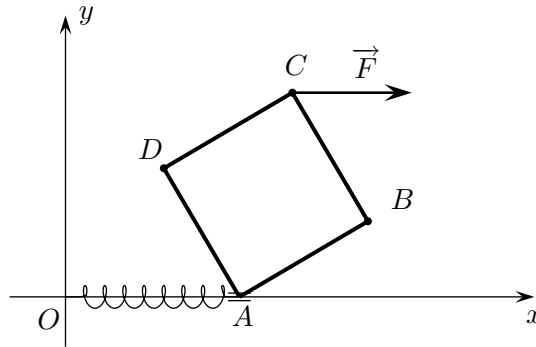
Si ha dunque:

$$\vec{M}_A^{\text{est}} = I_a\ddot{\varphi}\vec{k},$$

che fornisce un'equazione pura di moto, in quanto il momento della reazione vincolare rispetto ad A è nullo. Il primo membro di questa equazione è lo stesso già trovato in statica. inoltre I_a non è altro che l'elemento I_{33} della matrice I_A già trovata.

Esercizio 17.2 (Meccanica dei rigidi). *Si consideri, in un piano verticale Oxy con l'asse y verticale ascendente, un lamina quadrata omogenea $ABCD$, di massa m , vincolata a scorrere senza attrito con il suo vertice A sull'asse x . Nell'ipotesi che, oltre al peso, agiscano una forza elastica sul punto A e di centro O e un forza costante, parallela ed equiversa all'asse x , $\vec{F}$, sul vertice C , si chiede:*

1. di trovare, usando il principio dei lavori virtuali, le configurazioni di equilibrio;
2. di calcolare le reazioni vincolari in A all'equilibrio;
3. di trovare il momento di inerzia della lamina rispetto ad un asse per A e ortogonale al piano della lamina stessa;
4. di trovare l'energia cinetica della lamina;
5. di trovare il momento della quantità di moto della lamina rispetto al polo O ;
6. di scrivere l'energia potenziale delle forze, se conservative.

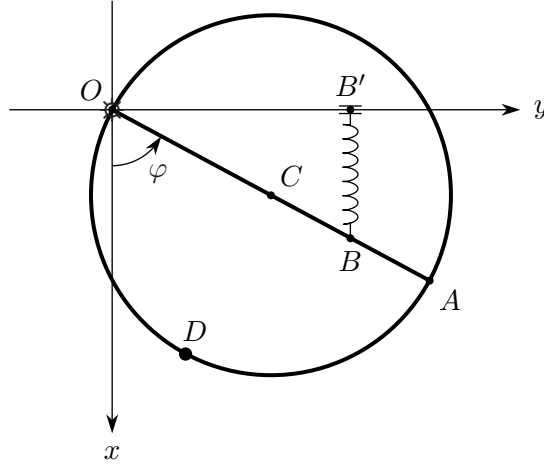


Esercizio 17.3 (Meccanica dei rigidi). Con riferimento alla figura seguente, si consideri un telaio circolare omogeneo di massa m , raggio r e centro C , fissato senza attrito nell'origine O di un sistema cartesiano ortogonale Oxy , con una cerniera che consenta solo rotazioni attorno al punto fisso O . L'asse x sia verticale discendente. Il diametro OA del telaio è costituito da un'asta rigida omogenea con la stessa m del telaio, saldata al telaio. Nel punto D di figura, tale che l'angolo $\widehat{OCD}$ sia $\pi/2$, è saldato un punto di massa m , ancora uguale a quella del telaio.

Sul sistema agiscono, oltre al peso del telaio, del diametro e del punto in D , una forza elastica nel punto B dell'asta rigida, avente centro nella proiezione B' di B sull'asse y , essendo $\overline{CB} = r/2$.

Si chiede

1. di scrivere l'equazione del moto usando il metodo di Lagrange;
2. di ricavare la reazione vincolare in O durante il moto;
3. di esprimere la reazione vincolare solo per mezzo del parametro lagrangiano φ di figura, sapendo che $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.



Posizioni dei punti di applicazione dei carichi e di altri punti notevoli.

- $\overrightarrow{OC} = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j}$.
- $\overrightarrow{OB} = \frac{3r}{2} \cos \varphi \vec{i} + \frac{3r}{2} \sin \varphi \vec{j}$.
- $\overrightarrow{OB'} = \frac{3r}{2} \sin \varphi \vec{j}$.
- $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = r \cos \varphi \vec{i} + r \sin \varphi \vec{j} + r \sin \varphi \vec{i} - r \cos \varphi \vec{j} = (r \cos \varphi + r \sin \varphi) \vec{i} + (r \sin \varphi - r \cos \varphi) \vec{j}$.

Forze agenti.

- Pesi dei tre elementi: $m\vec{g} = mg\vec{j}$.
- Forza elastica: $h\overrightarrow{BB'} = -h\frac{3r}{2} \cos \varphi \vec{i}$
- Reazione vincolare in O : $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{i} + \Phi_{Oy}\vec{j}$.

Potenziale delle forze (tutte conservative).

$$\begin{aligned}
 U &= U_{\text{peso telaio}} + U_{\text{peso asta}} + U_{\text{peso punto}} + U_{\text{forza elastica}} = \\
 &= -mgx_C - mgx_C - mgx_D + \frac{1}{2}h \left(\frac{3r}{2} \cos \varphi \right)^2 = \\
 &= -3mgr \cos \varphi - mgr \sin \varphi + \frac{9}{8}hr^2 \cos^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Da qui si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 3mgr \sin \varphi - mgr \cos \varphi - \frac{9}{4}hr^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

In un problema di statica questa equazione avrebbe potuto fornire le posizioni di equilibrio, ma si tratta di un'equazione di non facile risoluzione.

Per scrivere l'equazione di Lagrange ci basta ora solo calcolare l'energia cinetica, molto semplice perchè il sistema in questione è un rigido con un asse fisso (l'asse z). Basterà dunque trovare il momento di inerzia rispetto all'asse z .

$$\begin{aligned}
 J_z &= J_{\text{telaio}} + J_{\text{asta}} + J_{\text{punto}} = \\
 &= \left(J_{z_C} + m\overline{OC}^2 \right) + m \frac{(2r)^2}{3} + m \left(r\sqrt{2} \right)^2 = \\
 &= mr^2 + mr^2 + \frac{4mr^2}{3} + 2mr^2 = \frac{16}{3}mr^2.
 \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$K = \frac{8}{3}mr^2\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{16}{3}mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{16}{3}mr^2\ddot{\varphi}.$$

L'unica equazione di Lagrange del moto si scrive ora facilmente.

$$\frac{16}{3}mr^2\ddot{\varphi} = -3mgr \sin \varphi + mgr \cos \varphi + \frac{9}{4}hr^2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

e da qui si ricava altrettanto facilmente $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{9}{16r}g \sin \varphi + \frac{3}{16r}g \cos \varphi + \frac{27h}{64m} \cos \varphi \sin \varphi.$$

Dal principio di conservazione dell'energia si ottiene poi, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate:

$$\frac{8}{3}mr^2\dot{\varphi}^2 - 3mgr \cos \varphi - mgr \sin \varphi + \frac{9}{8}hr^2 \cos^2 \varphi = -3mgr + \frac{9}{8}hr^2,$$

e da qui si ricava $\dot{\varphi}$ in funzione di φ .

La determinazione della reazione vincolare esterna in O si può fare con la sola prima equazione cardinale della dinamica

$$\vec{R}^e = 2m\vec{a}_C + m\vec{a}_D.$$

La scrittura del primo membro è immediata, visto che abbiamo già scritto tutte le forze presenti. Per il secondo membro occorreranno le derivate opportune di $\vec{OC}$ e $\vec{OD}$.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_C &= -r\dot{\varphi} \sin \varphi & \ddot{x}_C &= -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\
 \dot{y}_C &= r\dot{\varphi} \cos \varphi & \ddot{y}_C &= r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
 \dot{x}_D &= -r\dot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi & \ddot{x}_D &= -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
 \dot{y}_D &= r\dot{\varphi} \cos \varphi + r\dot{\varphi} \sin \varphi & \ddot{y}_D &= r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Proiettando l'equazione cardinale sui due assi si trovano le due componenti della reazione vincolare in O . Sostituendo in queste componenti i valori di $\ddot{\varphi}$ e $\dot{\varphi}$ trovati prima si può avere la reazione vincolare solo in funzione dell'angolo φ .

18. Suggerimenti “spiccioli” per la risoluzione dei problemi

Proponiamo di seguito un sommario contenente le formule e lo schema dei procedimenti fondamentali utili per la risoluzione dei problemi di meccanica, con riferimento solo a sistemi (rigidi, sistemi articolati, punti) piani, mobili nel loro piano e con forze nel piano. I sistemi saranno poi sempre olonomi e i vincoli fissi, bilateri e lisci (se non diversamente precisato).

Per lo studio di un sistema di questo tipo si sceglie naturalmente sempre un riferimento con gli assi x e y nel piano, e l'asse z ortogonale al piano stesso. Indichiamo con $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ i versori dei tre assi.

18.1. Analisi cinematica, determinazione dei gradi di libertà, della velocità angolare, delle coordinate dei punti

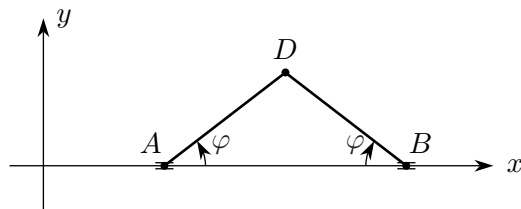
I sistemi meccanici che ci interessano più spesso sono costituiti da

- aste rigide, variamente collegate a formare telai, o incernierate tra di loro a formare sistemi articolati;
- telai a forma di circonferenza (anelli) o parti di circonferenza;
- lamine piane a forma di poligoni, cerchi o parti di cerchio;
- punti materiali.

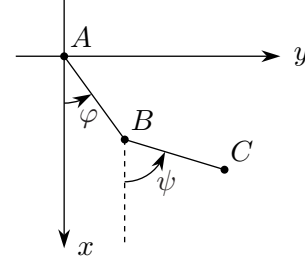
La determinazione dei gradi di libertà è, di solito, abbastanza semplice e si può fare tenendo conto che un punto materiale libero nel piano ha due gradi di libertà (per esempio le sue coordinate) e che un sistema rigido del tipo indicato ha nel piano tre gradi di libertà: di solito si scelgono le coordinate di un suo punto e l'angolo, che indichiamo con φ , compreso tra una retta fissa nel sistema di riferimento scelto e una solidale al rigido. Poichè un moto rigido piano è sempre rototraslatorio, la scelta di un angolo come quello indicato fornisce subito la velocità angolare del rigido: $\vec{\omega} = \pm \dot{\varphi} \vec{k}$, dove si sceglie il segno più o meno a seconda che l'angolo sia orientato in senso orario o antiorario rispetto al riferimento scelto.

I vincoli presenti riducono poi, naturalmente, il numero di gradi di libertà in maniera opportuna.

Esempio 18.1. Il sistema tipo biella-manovella della figura a lato, dove A può scorrere sull'asse x e AD può ruotare attorno ad A , ha due gradi di libertà e si possono utilizzare l'ascissa di A e l'angolo φ . Le velocità angolari delle due aste sono $\vec{\omega}_{AD} = \dot{\varphi} \vec{k}$ e $\vec{\omega}_{BD} = -\dot{\varphi} \vec{k}$. Bisogna anche tenere conto che nella posizione $\varphi = \pm\pi/2$ i vincoli sono dipendenti e dunque queste posizioni vanno trattate separatamente.



Esempio 18.2. In un sistema come quello della figura a lato (bipendolo) conviene scegliere i due angoli indicati: in questo modo le velocità angolari delle aste sono $\vec{\omega}_{AB} = \dot{\varphi} \vec{k}$ e $\vec{\omega}_{BC} = \dot{\psi} \vec{k}$.



La determinazione delle posizioni dei punti coinvolti nella risoluzione del problema si fa con le normali tecniche geometriche (e spesso usando i teoremi di trigonometria sui triangoli). Si tenga presente che, in molti casi, conviene scomporre i vettori posizione secondo direzioni opportune. Per esempio, nel bipendolo dell'esempio 18.2 per trovare il vettore posizione di C conviene procedere come segue (a e b sono le lunghezze delle due aste):

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (a \cos \varphi \vec{i} + a \sin \varphi \vec{j}) + (b \cos \psi \vec{i} + b \sin \psi \vec{j})$$

18.2. Analisi dei carichi presenti e dei vincoli. Lavoro virtuale. Eventuale energia potenziale

I tipi di carichi presenti nei problemi che abbiamo trattato sono sostanzialmente i seguenti.

Carichi costanti agenti in particolari punti del sistema

Detto $\vec{u}$ un versore costante (spesso si tratta del versore di uno dei due assi) e F il modulo del carico, il carico stesso si scrive come

$$\vec{F} = \pm F \vec{u}.$$

Si tratta sempre di carichi conservativi e, detto P il punto di applicazione e O l'origine degli assi di riferimento, l'energia potenziale è data da

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{OP}.$$

Forza peso

Si tratta di un carico costante se il riferimento è fisso rispetto alla terra (come capita in tutti i problemi che abbiamo trattato). Il carico è però distribuito e non concentrato in particolari punti. In ogni caso ai fini del calcolo del risultante e del momento risultante si può pensare concentrata nel baricentro del sistema l'intera massa del corpo. Solo ed esclusivamente per i corpi rigidi si può pensare applicata nel baricentro l'intera massa anche ai fini del calcolo del lavoro (in particolare del lavoro virtuale). Nel caso di sistemi articolati di rigidi conviene trattare separatamente ciascuna componente rigida ai fini del calcolo del lavoro (e quindi dell'energia potenziale).

Ovviamente il calcolo dell'energia potenziale rientra nello schema precedente dei carichi costanti. In particolare se il sistema di riferimento ha l'asse y verticale ascendente l'energia potenziale è $U = mgy_G$, se ha l'asse y verticale discendente $U = -mgy_G$.

Forze elastiche

Abbiamo considerato tre tipi di forze elastiche: con centro fisso, con centro sulla proiezione del punto di applicazione su una retta fissa, coppie di forze elastiche tra due punti del sistema.

In tutti i casi, detto A il centro della forza e P il punto di applicazione, la forza (o una delle due nel caso di una coppia) si può scrivere come

$$\vec{F} = k\overrightarrow{PA} = -k\overrightarrow{AP},$$

dove k è detta costante elastica.

Si tratta sempre di forze conservative e l'energia potenziale complessiva (cioè quella di una forza nei primi due casi e quella totale della coppia nel terzo caso) è sempre

$$U = \frac{1}{2}k\overrightarrow{AP}^2.$$

Carichi follower

Questi carichi sono così chiamati perchè “seguono” il corpo su cui sono applicati, cioè, nel caso di un rigido, sono fissi rispetto al corpo, ma non rispetto al riferimento.

Si tratta in genere di carichi non conservativi, tranne nel caso di sistemi a un grado di libertà (macchine semplici) con carichi che non dipendono esplicitamente dal tempo (cosa sempre verificata nei problemi proposti).

Per determinare l'energia potenziale (nel caso di carichi applicati a macchine semplici) conviene prima trovare l'unica forza generalizzata, che sarà del tipo $Q = f(q)$ e poi trovare una primitiva di $f(q)$, *cambiata di segno*:

$$U = - \int f(q) dq.$$

Reazioni vincolari

Le reazioni vincolari, nei problemi trattati, agiscono su particolari punti del sistema e si possono schematizzare con un solo risultante applicato nel punto (almeno per sistemi piani con carichi attivi nel piano): se il vincolo è una cerniera generalmente la direzione della reazione vincolare non è nota a priori, se il vincolo è un carrello senza attrito la reazione è normale al “piano di appoggio”. Il caso di puro rotolamento è speciale, in quanto si tratta dell'unico caso che abbiamo considerato di vincolo con attrito ma non dissipativo: in questo caso la direzione della reazione vincolare non è nota a priori.

Spostamenti virtuali e lavoro

Dopo aver scritto i vettori posizione dei punti di applicazione delle forze attive il calcolo degli spostamenti virtuali è solo una questione di derivazione:

$$\delta P = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

Se si sono scritte accuratamente le forze, precisando le loro componenti nel riferimento scelto, il calcolo del lavoro virtuale è immediato come prodotto scalare tra le componenti delle forze e dello spostamento del punto di applicazione.

Nel caso particolare di un rigido il lavoro può anche essere calcolato con la formula

$$\delta L^a = \delta A \cdot \vec{R} + \vec{\Psi} \cdot \vec{M}_A$$

dove A è un punto del rigido e dove $\vec{\Psi}$ è, nei casi di moto rototraslatorio che stiamo considerando, $\pm \delta \varphi \vec{k}$ ($\pm$ a seconda dell'orientamento di φ). Siccome però di solito si ha a che fare con un piccolo numero di forze, si può calcolare direttamente il lavoro come somma dei lavori, cosa che spesso rende meno probabili errori di calcolo.

Una volta scritto il lavoro virtuale della sollecitazione attiva si possono ricavare le componenti della forza generalizzata semplicemente prendendo i coefficienti dei vari δq nell'espressione del lavoro. Naturalmente, in caso di forze conservative, se si è scritta l'energia potenziale si può anche usare il fatto che

$$Q_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

La scrittura della forza generalizzata consente di avere (vincoli lisci) delle equazioni pure di equilibrio (pure nel senso che non vi compaiono le reazioni vincolari). Le forze generalizzate consentono anche di scrivere il secondo membro delle equazioni di Lagrange.

18.3. Risultante e momento risultante delle forze

Il primo membro delle equazioni cardinali è costituito rispettivamente dal risultante e dal momento risultante di tutte le forze esterne presenti (se si è considerata solo una parte del sistema bisogna considerare come forze esterne su quella parte le forze esercitate dalla parte di corpo che è stata esclusa). Per la statica si deve scrivere solo questo primo membro e la cosa non presenta alcuna difficoltà se si sono scritte accuratamente le forze e le coordinate dei vari punti che intervengono. Per la scrittura dell'equazione dei momenti conviene sempre usare il determinante simbolico per il calcolo del prodotto vettoriale. Nel caso di sistemi piani con carichi nel piano, la seconda equazione cardinale ha naturalmente solo componente perpendicolare al piano.

Si tenga presente che per trovare le reazioni vincolari (sia all'equilibrio che durante il moto) è indispensabile scrivere le equazioni cardinali e, se il sistema non è rigido, può essere necessario considerare le varie parti di cui il sistema è composto.

18.4. Momenti di inerzia

I momenti di inerzia che ci interessano si riferiscono ad alcuni particolari sistemi rigidi ed eventualmente a loro combinazioni. La regola generale per il calcolo del momento di inerzia di un rigido rispetto a una retta passante per un punto A è quella di usare la matrice di inerzia relativa ad A , $\mathbb{I}_A$: se $\vec{u}$ è uno dei due versori della retta rispetto a cui si deve calcolare il momento di inerzia, si ha

$$\mathcal{J} = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_A \vec{u}.$$

Per i sistemi piani la matrice di inerzia relativa a un punto A qualunque del corpo assume una forma particolarmente semplice: se si prende una terna con origine in A , assi x e

y arbitrari nel piano del corpo e asse z ortogonale al piano stesso (quest'asse è dunque principale di inerzia), si ha

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix}$$

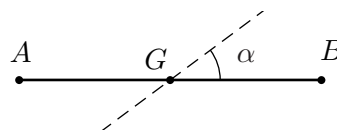
Nei casi che ci interessano comunque si può fare riferimento ad alcune situazioni standard e usare il teorema di Huygens.

Attenzione: tutti i sistemi trattati nei casi seguenti sono *omogenei* (densità costante).

Asta rigida di lunghezza l e massa m

Il momento di inerzia rispetto a una retta r per G , formante un angolo α con l'asta è dato da

$$\mathcal{J} = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \alpha.$$



Se la retta r passa per un estremo dell'asta il momento è (teorema di Huygens)

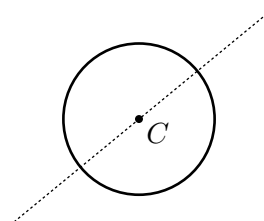
$$\mathcal{J} = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \alpha.$$

A questo punto si può calcolare il momento di inerzia di un telaio qualunque, composto da aste comunque disposte e rispetto a una retta qualunque (anche non del piano del telaio): basta sommare i momenti di inerzia delle varie aste.

Telaio circolare di raggio r e massa m

- Momento di inerzia rispetto a una retta r per C e perpendicolare al piano del telaio: mr^2 .
- Momento di inerzia rispetto a una retta contenente un qualunque diametro:

$$\mathcal{J} = \frac{mr^2}{2}.$$



Per calcolare il momento di inerzia rispetto a un diametro abbiamo applicato la solita regola dei sistemi piani: il momento di inerzia rispetto a una perpendicolare al piano per C , cioè mr^2 , è la somma dei momenti di inerzia rispetto a due diametri ortogonali, che devono essere uguali e quindi ciascuno deve avere proprio valore $mr^2/2$.

Con il teorema di Huygens si può poi trovare il momento di inerzia rispetto a una retta qualunque perpendicolare al piano del telaio o rispetto a una retta contenuta nel piano. Se per caso è richiesto il momento di inerzia rispetto a una retta diversa (non perpendicolare né appartenente al piano del telaio) conviene trovare la matrice centrale di inerzia usando come assi due diametri tra di loro perpendicolari e la retta perpendicolare al piano (che è principale di inerzia), e poi applicare la formula generale dei momenti di inerzia, menzionata prima.

Lamina rettangolare omogenea di massa m e dimensioni a e b

- Momento di inerzia rispetto alla retta r :

$$\frac{mb^2}{12}.$$

- Momento di inerzia rispetto alla retta s :

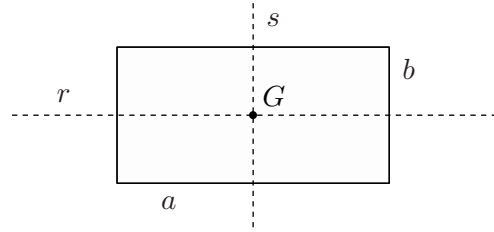
$$\frac{ma^2}{12}.$$

- Momento di inerzia rispetto alla perpendicolare al piano per G :

$$\frac{mb^2}{12} + \frac{ma^2}{12},$$

come per tutti i sistemi piani.

Con questi tre momenti di inerzia si può scrivere la matrice centrale di inerzia (che è principale di inerzia) e questo consente di scrivere il momento di inerzia rispetto a una retta qualunque passante per G e quindi, mediante il solito teorema di Huygens, rispetto a ogni retta dello spazio.

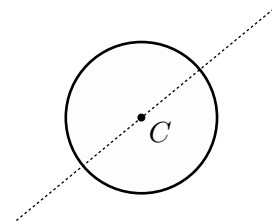
**Lamina circolare omogenea di raggio r e massa m**

- Momento di inerzia rispetto a una retta r per C e perpendicolare al piano della lamina

$$\mathcal{J} = \frac{mr^2}{2}.$$

- Momento di inerzia rispetto a una retta contenente un qualunque diametro:

$$\mathcal{J} = \frac{mr^2}{4}.$$



Anche qui per calcolare l'ultimo risultato abbiamo usato la solita regola dei sistemi piani (vedi il caso del telaio circolare).

Esattamente come nel caso della lamina rettangolare, noti i momenti di inerzia rispetto a due diametri perpendicolari (che sono identici) e a una retta perpendicolare al piano della lamina, si può scrivere la matrice centrale di inerzia (che è principale di inerzia) e quindi il momento di inerzia rispetto a una retta qualunque per C . Con il solito teorema di Huygens si può poi scrivere il momento di inerzia rispetto a ogni retta dello spazio.

Figure con “fori”

Per trattare le figure con fori basta attribuire al foro stesso massa negativa, stando attenti a calcolarne il valore opportuno tenendo conto della massa del corpo forato e conseguentemente della sua densità (ricordiamo che in questo contesto stiamo trattando solo corpi omogenei).

18.5. Momento delle quantità di moto di un rigido

La scrittura del momento delle quantità di moto di un rigido piano in moto nel suo piano è abbastanza semplice.

Sia Ω il punto del piano rispetto a cui si deve calcolare il momento di inerzia

- Se il rigido è in moto traslatorio basta pensare l'intera quantità di moto applicata nel baricentro:

$$L_{\Omega} = \overrightarrow{\Omega G} \wedge M \vec{v}_G.$$

- Se il rigido è in moto rotatorio attorno a un punto O (e dunque il moto è un moto con asse fisso: la retta r per O perpendicolare al piano del corpo), si calcola prima il momento rispetto al punto O del rigido, che vale

$$L_O = \mathcal{J}_r \vec{\omega} \quad (\mathcal{J}_r = \text{momento di inerzia rispetto alla perpendicolare al piano per } O),$$

e poi si trasla il momento con la solita formula di trasporto dei momenti:

$$L_{\Omega} = L_O + \overrightarrow{\Omega O} \wedge M \vec{v}_G$$

(in quanto $M \vec{v}_G$ è il risultante delle quantità di moto).

- Se il rigido è in moto rototraslatorio conviene calcolare il momento delle quantità di moto rispetto al baricentro

$$L_G = \mathcal{J}_{r_G} \vec{\omega} \quad (\mathcal{J}_{r_G} = \text{momento di inerzia rispetto alla perpendicolare al piano per } G),$$

e poi traslare il momento con la solita formula di trasporto dei momenti:

$$L_{\Omega} = L_G + \overrightarrow{\Omega G} \wedge M \vec{v}_G.$$

18.6. Energia cinetica di un rigido

Anche la scrittura dell'energia cinetica di un rigido piano in moto nel suo piano è abbastanza semplice.

- Se il rigido è in moto traslatorio si ha semplicemente

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2.$$

- Se il rigido è in moto rotatorio attorno a un punto O (e dunque il moto è un moto con asse fisso: la retta r per O perpendicolare al piano del corpo) si ha

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{J}_r \vec{\omega}^2 \quad (\mathcal{J}_r = \text{momento di inerzia rispetto alla perpendicolare al piano per } O).$$

- Se il rigido è in moto rototraslatorio conviene usare il baricentro:

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{r_G} \vec{\omega}^2 \quad (\mathcal{J}_{r_G} = \text{mom. di inerzia rispetto alla perp. al piano per } G).$$

Se per caso si è già scritto il momento di inerzia rispetto a una retta perpendicolare al piano passante per un punto O del rigido diverso dal baricentro, e si vuole evitare di ricalcolare il momento di inerzia $\mathcal{J}_{r_G}$, si può anche usare la formula generale

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_O^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_O \vec{\omega}^2,$$

ma è da tener presente che il trasporto del momento di inerzia sul baricentro è comunque elementare con il teorema di Huygens.

18.7. Equazioni di Lagrange

La scrittura delle equazioni di Lagrange è elementare, una volta trovate K , U ed eventualmente Q_h per le forze non conservative. Prestare attenzione al fatto che le equazioni di Lagrange si applicano al caso di vincoli lisci, olonomi e bilateri e che forniscono delle equazioni pure di moto (cioè senza le reazioni vincolari).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h, \quad \text{oppure} \quad - \frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

Se le forze sono conservative si può anche scrivere il principio di conservazione dell'energia

$$K + U = K(0) + U(0),$$

che fornisce un'equazione in cui non compaiono le $\ddot{q}_h$, ma solo le $\dot{q}_h$ e che per questo si chiama un *integrale primo* del moto.

18.8. Macchine semplici

Il caso delle macchine semplici (sistemi a un solo grado di libertà) è particolarmente importante. In questo caso, con vincoli fissi lisci e bilateri, se le forze sono posizionali (questo succede di solito per i carichi follower usati nei problemi che abbiamo proposto) si conserva l'energia. Infatti l'unica forza generalizzata dipende solo da q : $Q = f(q)$ e quindi

$$U = - \int f(q) dq.$$

La cosa riveste particolare importanza in quanto dall'unica equazione di Lagrange e dalla conservazione dell'energia si riesce a trovare $\ddot{q}$ e $\dot{q}$ solo in funzione di q e questo permette di scrivere le reazioni vincolari (da ricavarsi con le equazioni cardinali) solo in funzione di q , cioè della posizione.

18.9. Equazioni cardinali

Le equazioni cardinali della statica richiedono solo il calcolo del risultante e del momento risultante della sollecitazione (attiva e vincolare). Per la dinamica anche il secondo membro è diverso da zero e precisamente si ha

$$\begin{aligned} \vec{R}^e &= M \vec{a}_G, \\ \vec{M}_O^e &= \vec{\dot{L}}_O + \vec{v}_O \wedge M \vec{v}_G. \end{aligned}$$

A. Richiami di algebra lineare

N.B. Questi richiami contengono solo alcune nozioni assolutamente indispensabili per il corso di Meccanica Razionale. Non hanno alcuna pretesa di completezza e sistematicità, non contengono nessuna dimostrazione e si riferiscono a proprietà valide nello spazio $\mathcal{V}_3$ dei vettori o, se del caso, a $\mathbb{R}^3$. Inoltre alcune nozioni sono una riproposizione, qui inserita per motivi di completezza, di concetti già presentati nel capitolo 2.

A.1. Funzioni lineari

Una funzione lineare di $\mathcal{V}_3$ in $\mathcal{V}_3$ è una funzione f che gode della proprietà

$$(A.1) \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3.$$

Fissata in $\mathcal{V}_3$ una base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alla funzione f resta associata una matrice A ottenuta prendendo le immagini $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ dei vettori della base e disponendo sulle colonne le componenti di questi vettori, rispetto alla stessa base

$$(A.2) \quad A = \begin{pmatrix} (f(\vec{e}_1))_1 & (f(\vec{e}_2))_1 & (f(\vec{e}_3))_1 \\ (f(\vec{e}_1))_2 & (f(\vec{e}_2))_2 & (f(\vec{e}_3))_2 \\ (f(\vec{e}_1))_3 & (f(\vec{e}_2))_3 & (f(\vec{e}_3))_3 \end{pmatrix}.$$

In generale si potrebbero anche considerare basi diverse in $\mathcal{V}_3$ come spazio di partenza e $\mathcal{V}_3$ come spazio di arrivo, ma per quanto ci riguarda avremo invece sempre la stessa base.

Lo spazio $\mathcal{V}_3$ è anche dotato di prodotto scalare e la base è sempre ortonormale. La determinazione delle componenti si può allora fare usando il prodotto scalare.

Se $\vec{v}$ è un vettore di $\mathcal{V}_3$ e (v_1, v_2, v_3) sono le sue componenti nella base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, si ha

$$(A.3) \quad \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3,$$

da cui

$$(A.4) \quad v_1 = \vec{v} \cdot \vec{e}_1, \quad v_2 = \vec{v} \cdot \vec{e}_2, \quad v_3 = \vec{v} \cdot \vec{e}_3,$$

oppure

$$(A.5) \quad v_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{v}, \quad v_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{v}, \quad v_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{v}.$$

Si noti altresì che, se $\vec{v}$ è un versore, v_1, v_2 e v_3 sono semplicemente i coseni degli angoli che $\vec{v}$ forma coi tre assi coordinati, detti anche *coseni direttori* di $\vec{v}$.

Per le componenti a_{ij} della matrice A potremo allora scrivere

$$(A.6) \quad a_{ij} = \vec{e}_i \cdot f(\vec{e}_j).$$

Se la funzione lineare f è simmetrica rispetto al prodotto scalare (come succede per l'operatore di inerzia), si ha

$$(A.7) \quad a_{ij} = \vec{e}_i \cdot f(\vec{e}_j) = f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot f(\vec{e}_i) = a_{ji},$$

ovvero la matrice A è simmetrica.

A.2. Problema agli autovalori

Se f è un'applicazione di $\mathcal{V}_3$ in $\mathcal{V}_3$, ha particolare interesse la ricerca di quei vettori, se esistono, tali che

$$(A.8) \quad f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad (f(\vec{v}) \parallel \vec{v}).$$

Ogni vettore che soddisfi la condizione (A.8) si dice un *autovettore* e il coefficiente λ si dice l'*autovalore* a cui corrisponde l'autovettore $\vec{v}$.

È immediato che, se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono autovettori corrispondenti allo stesso autovalore, e α, β sono numeri reali,

$$(A.9) \quad f(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha f(\vec{v}_1) + \beta f(\vec{v}_2) = \alpha \lambda \vec{v}_1 + \beta \lambda \vec{v}_2 = \lambda(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2),$$

e quindi $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$ è ancora autovettore corrispondente allo stesso autovalore λ . Ne segue che l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti allo stesso autovalore costituisce un sottospazio di $\mathcal{V}_3$, che si chiama l'*autospazio* associato a λ .

L'importanza, per i nostri scopi, di questi concetti è che, se si assume come base di $\mathcal{V}_3$ una base di autovettori (supposto che esista) di una funzione, allora la matrice associata risulta diagonale, e gli elementi di questa diagonale sono proprio gli autovalori.

Nel caso che a noi interessa di operatori simmetrici, è immediato osservare che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Infatti se $f(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$ e $f(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ha

$$f(\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, \quad f(\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1.$$

Per la simmetria abbiamo che i primi membri sono uguali, da cui segue l'uguaglianza dei secondi membri e quindi, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ciò implica che $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

A.3. Ricerca degli autovalori e autovettori

La determinazione degli autovalori e corrispondenti autovettori si fa sulla base delle seguenti considerazioni.

Data la funzione lineare f , e una base di $\mathcal{V}_3$, consideriamo la matrice associata ad f e operiamo sulle componenti dei vettori. Si deve allora avere

$$(A.10) \quad A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad \text{ovvero} \quad A\vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0},$$

o ancora

$$(A.11) \quad (A - \lambda I_3)\vec{x} = \vec{0},$$

ove abbiamo indicato con $\vec{x}$ l'incognito autovettore (espresso nella base data) e con I_3 la matrice identica di $\mathbb{R}^3$.

Se vogliamo che l'equazione (A.11) abbia soluzioni non nulle⁽¹⁾ dovrà essere

$$(A.12) \quad \det(A - \lambda I_3) = 0,$$

che diventa, esplicitamente,

$$(A.13) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si tratta di un'equazione di 3° grado in λ che, nel caso di operatori simmetrici si dimostra avere sempre tre soluzioni *reali* eventualmente coincidenti.

Una volta trovati i valori di λ , l'equazione (A.11) permette di trovare gli autovettori a esso corrispondenti.

Sempre nel caso in esame, si possono presentare solo le seguenti situazioni.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$: si hanno tre autovalori distinti e ciascuno degli autospazi corrispondenti ha dimensione 1 (devono essere ortogonali e in $\mathcal{V}_3$ più di tre direzioni mutuamente ortogonali non esistono). Tre versori scelti in questi tre autospazi possono costituire una base che rende diagonale la matrice associata a f .
2. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$: in corrispondenza a $\lambda_1 = \lambda_2$ ho un autospazio di dimensione 2; in corrispondenza a λ_3 ho un autospazio di dimensione 1; tra di loro questi autospazi sono ortogonali. Per avere una base di autovettori posso scegliere due versori ortogonali nell'autospazio di dimensione 2 (e ci sono infinite possibilità), e un versore nell'autospazio di dimensione 1.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: ho un unico autospazio, di dimensione 3, cioè coincidente con $\mathcal{V}_3$, e posso scegliere una qualunque base ortonormale in $\mathcal{V}_3$ stesso.

¹Si tratta di un sistema omogeneo di tre equazioni in tre incognite: esso ha sempre la soluzione nulla, come ogni sistema omogeneo. Se il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo, ha solo quest'unica soluzione.

Notazioni utilizzate

$P, Q, \dots$	punti
$\vec{v}$	vettore
$\vec{v} = B - A$	vettore come differenza di due punti
$B = A + \vec{v}$	traslato di un punto mediante un vettore
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	prodotto scalare di due vettori
u_v	componente di $\vec{u}$ nella direzione di $\vec{v}$
v_x, v_y, v_z	componenti di un vettore sugli assi coordinati
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	prodotto vettoriale di due vettori
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	terne di versori degli assi
$A, B, \dots$	matrici
A^T	matrice trasposta
A^{-1}	matrice inversa
$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$	scrittura delle matrici
$\dot{f}$	derivata di una funzione rispetto al tempo
$\ddot{f}$	derivata seconda di una funzione rispetto al tempo
$\partial P, dP, \delta P$	spostamenti infinitesimo, possibile, virtuale

Indicazioni bibliografiche

Sono qui fornite alcune indicazioni bibliografiche essenziali, indispensabili per una accurata preparazione all'esame per la quale, come già osservato, questi appunti costituiscono solo una introduzione schematica.

- S.Bressan, A.Grioli, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Cortina, Padova.
- A.Fasano, V.de Rienzo, A.Messina, *Corso di Meccanica Razionale*, Laterza, Bari.
- G.Grioli, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Cortina, Padova.
- T.Levi Civita, U.Amaldi, *Compendio di Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna.
- M.Ughi, *Dispense di Meccanica Razionale*, DMI (Trieste), <http://www.dmi.units.it/~ughi>.

Elenco delle figure

2.1. Somma di vettori: regola del parallelogramma e regola del “testa-coda” . . .	6
2.2. Angolo tra due vettori	7
2.3. Proiezione di un vettore su un altro	7
2.4. Prodotto vettoriale di due vettori	9
2.5. Non associatività del prodotto vettoriale di tre vettori	10
2.6. Prodotto misto di tre vettori	11
2.7. Scomposizione di un vettore secondo due rette	12
2.8. Scomposizione di un vettore secondo una direzione e un piano	13
2.9. Scomposizione di un vettore secondo tre rette concorrenti	13
2.10. Teorema di Varignon	16
2.11. Coppia di vettori	16
2.12. Scomposizione del momento risultante di un sistema di vettori	17
2.13. Individuazione dell’asse centrale	18
2.14. Riduzione a tre vettori	20
2.15. Riduzione a due vettori: caso particolare	20
2.16. Riduzione a due vettori: caso generale	21
2.17. Riduzione a un vettore e a una coppia	21
2.18. Piano diametrale coniugato a una direzione	25
2.19. Ricerca del baricentro di una lamina triangolare omogenea	25
2.20. Baricentro di un quadrilatero omogeneo	26
2.21. Determinazione del baricentro di un tetraedro omogeneo	26
3.1. Angoli di Eulero	31
3.2. Lamina rigida mobile in un piano	34
3.3. Pendolo ad asta rigida	35
3.4. Asta rigida mobile in un piano	35
3.5. Asta rigida con vincolo a carrello	36
3.6. Scala appoggiata	36
3.7. Asta rigida con cerniera fissa	37
3.8. Vincolo doppio come sovrapposizione di due vincoli semplici	37
3.9. Vincolo ad incastro	37
3.10. Asta con cerniera fissa e carrello	38
3.11. Asta con due cerniere	38
3.12. Due aste incernierate	39
3.13. Bipedolo, sistema biella-manovella, arco a tre cerniere	39
4.1. Terna fissa e terna solidale	41
4.2. Velocità di due punti di un rigido	44
4.3. Moti rigidi rototraslatori e orientazione delle due terne	47
4.4. Precessione	49

4.5. Nutazione	49
4.6. Rotazione propria	50
4.7. Ricerca dell'asse di Mozzi	52
4.8. Puro rotolamento di un disco	55
5.1. Esempi di forze	58
5.2. Aste a compasso con coppia di braccio nullo	59
5.3. Esempio di problema di statica	60
5.4. Diagramma delle forze	62
6.1. Applicazione del principio dei lavori virtuali alla leva	69
7.1. Sezione virtuale di un solido con un piano	73
7.2. Sezione di un rigido 2D	75
7.3. Arco scarico	76
7.4. Arco scarico e azioni interne	76

Indice analitico

- angoli di Eulero, 31
- angolo di nutazione, 31
- angolo di precessione, 31
- angolo di rotazione propria, 31
- asse centrale, 18
- asse di figura, 48, 84
- asse di Mozzi, 51
- asse di precessione, 48
- asse istantaneo di rotazione, 53
- assi principali di inerzia, 84
- atto di moto, 51
- atto di moto elicoidale, 51
- autospazio, 200
- autovalore, 200
- autovettore, 200
- azione assiale, 77

- baricentro, 24
- braccio di una coppia, 16

- campo di velocità equiproiettivo, 45
- centro di istantanea rotazione, 54
- centro di massa, 24
- centro di vettori paralleli, 23
- componente del momento flettente, 75
- componente di taglio, 75
- componente di un vettore su una retta, 7
- componenti di un vettore, 6
- componenti lagrangiane della sollecitazione, 70
- compressione, 74
- considerazioni pratiche sui vincoli, 62
- consigli per la risoluzione di problemi, 61
- coordinate lagrangiane, 33
- coppia di vettori, 16

- diagramma delle forze, 62
- doppio prodotto vettoriale, 10

- ellissoide centrale di inerzia, 86
- ellissoide di inerzia, 83
- en.potenziale di forze costanti, 96
- en.potenziale elastica, 96
- energia cinetica, 89
- energia potenziale, 95
- equazione dell'asse di moto, 53
- equazioni cardinali della dinamica, 59
- equazioni cardinali della statica, 60
- Equazioni di Lagrange, 100
- equilibrio stabile, 97

- formula di Poisson, 44
- formula di trasporto, 15
- forza d'inerzia, 99
- forza viva, 89
- forze attive e reattive, 57
- forze concentrate e distribuite, 58
- forze conservative, 95
- forze generalizzate, 70
- forze interne ed esterne, 57
- forze posizionali, 95
- funzione lagrangiana, 101

- grado di libertà, 33
- grado di vincolo, 33

- lavoro per un corpo rigido, 67
- lavoro virtuale, 66
- linea dei nodi, 31

- macchine semplici, 103
- matrice di inerzia, 81
- momenti centrifughi, 82
- momenti deviatori, 82
- momenti principali di inerzia, 84
- momento angolare, 89
- momento angolare di un rigido, 91
- momento angolare rispetto all'asse, 89

- momento assiale, 14
- momento d. quantità di moto, 89
- momento di inerzia, 79
- momento di un vettore, 14
- momento flettente, 74
- momento risultante, 15
- momento torcente, 74
- moti rigidi con un punto fisso, 48
- moti rigidi elicoidali, 48
- moti rigidi rotatori, 48
- moti rigidi rototraslatori, 46
- moti rigidi traslatori, 46

- nutazione, 49

- operatore d'inerzia, 80
- operazioni elementari, 19

- piano dell'eclittica, 31
- piano di simmetria materiale, 86
- piano equatoriale, 31
- piano meridiano, 31
- piazzamento di un rigido, 41
- posizione di equilibrio, 60
- postulato delle reazioni vincolari, 57
- potenza istantanea, 102
- precessione, 48
- principio di d'Alembert, 99
- prodotto misto, 11
- prodotto per uno scalare, 6
- prodotto scalare, 6
- prodotto vettoriale, 8
- proiezione di un vettore su un altro, 7
- proprietà del baricentro, 25
- proprietà triangolare, 5
- punto di vista euleriano, 51
- punto di vista lagrangiano, 51

- quantità di moto, 89

- retta di applicazione, 14
- riduz. a un vettore e una coppia, 21
- riduzione a due vettori, 20
- riduzione a tre vettori, 19
- risultante, 15
- rotazione propria, 49

- scomposizioni di un vettore, 12

- sforzo di taglio, 74
- sforzo normale, 74
- sistema iperstatico, 33
- sistema ipostatico o labile, 33
- sistema isostatico, 33
- sistemi di vettori equivalenti, 18
- sistemi piani, 22
- somma tra vettori, 6
- spostamenti effettivi, 65
- spostamenti infinitesimi, 65
- spostamenti possibili, 65
- spostamenti reversibili, 66
- spostamenti virtuali, 65

- teorema di Varignon, 15
- terna principale di inerzia, 84
- tiranti e puntoni, 77
- trasformazione d'inerzia, 80
- trazione, 74
- trinomio invariante, 16
- trinomio invariante (moti rigidi), 45

- velocità angolare, 44
- vettore applicato, 13
- vettori applicati paralleli, 22
- vincoli, 29
- vincoli bilateri e unilateri, 30
- vincoli fissi e mobili, 30
- vincoli interni ed esterni, 29
- vincoli lisci, 67
- vincoli non dissipativi, 67
- vincoli olonomi e anolonomi, 29
- vincolo a carrello, 35
- vincolo a cerniera fissa, 36
- vincolo a incastro, 37
- vincolo di puro rotolamento, 54
- vincolo doppio, 33
- vincolo semplice, 33