Gruppo di Lorentz

Typeset in $\TeX$
in date 17 10 2007

1.Introduzione storica

Nel 1873 J. C. Maxwell riunisce in "A treatise on electricity and magnetism" i fenomeni riconducibili all'elettricità e al magnetismo tramite le sue quattro equazioni entrate ormai di diritto nella storia della fisica

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} = \epsilon_0 \, \vec{J} + \epsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Usando queste equazioni, ponendo le sorgenti (J e ρ) a zero, si ottengono le equazioni delle onde elettromagnetiche nel vuoto

$$\triangle \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Il termine

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sim 300.000 Km/s$$

rappresenta la velocità di propagazione di queste onde e coincide con le misure compiute da **Romer** per quanto riguardava la velocità della luce: quindi una ulteriore unificazione avvenne nella fisica in quanto l'ottica rientrava nei ranghi della nascente elettrodinamica. Ma un nuovo angosciante problema nasceva da questa nuova equazione: la velocità della luce rispetto a quale sistema di riferimento andava misurata? Questa situazione era collegata con un ulteriore problema consistente nel fatto che l'equazione delle onde elettromagnetiche non era invariante per le trasformazioni di Galileo (gruppo di invarianza della Meccanica Newtoniana) e quidi le opzioni erano due o erano errate le equazioni di Maxwell oppure era errata la meccanica di Newton!

A risolvere l'annosa questione fu uno sconosciuto impiegato all'ufficio brevetti di Berna che innalzò a principio fisico l'idea che **la velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali**. Pensando lo spazio tempo come uno spazio vettoriale a quattro dimensioni di coordinate

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

dotato di un prodotto scalare pseudo-Riemanniano detto metrica di **Minkowski**

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possiamo riscrivere l'equazione d'onda nella seguente maniera:

$$\Box E = \left(\sum_{i=1}^{4} \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) E = 0$$

pare evidente che le trasformazioni che lasciano invariata questa equazione siano le isometrie della metrica di segnatura $(3,1)$ cioè proprio $\mathbb{O}(3,1)$ o comunque un suo sottogruppo proprio.

2.Gruppo Speciale Ortogonale

Per trovare l'espressione esplicita di questo gruppo partiamo dal fatto che deve lasciare invariata la metrica η, quindi a livello matriciale deve soddisfare alla relazione

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

che porta alle seguenti due condizioni

$$\begin{cases} \det \Lambda = \pm 1 \\ |\Lambda^{\cdot}{}_0 .0| \geq 1 \end{cases}$$

che caratterizzano le varie parte connesse di $\mathbb{O}(3,1)$: esse sono quattro ed indicate rispettivamente

$$\begin{cases} L_+^\uparrow & \det \Lambda = 1 & \Lambda^{\cdot}{}_0 .0 \geq 1 \\ L_-^\uparrow = PL_+^\uparrow & \det \Lambda = -1 & \Lambda^{\cdot}{}_0 .0 \geq 1 \\ L_+^\downarrow = IL_+^\uparrow & \det \Lambda = 1 & \Lambda^{\cdot}{}_0 .0 \leq 1 \\ L_-^\downarrow = TL_+^\uparrow & \det \Lambda = -1 & \Lambda^{\cdot}{}_0 .0 \leq 1 \end{cases}$$

dove

$$P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \quad T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \quad I = PT = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$$

chiamate rispettivamente **inversione spaziale**, **inversione temporale** e **inversione totale**; noi ci interesseremo solamente alla parte connessa all'identità denominata **gruppo di Lorentz ristretto** che forma un sottogruppo proprio.

Per trovare esplicitamente l'espressione delle matrici che formano il gruppo partiamo dai generatori infinitesimi J che soddisfano alla relazione

$$J^T \eta + \eta J = 0,$$

scritto in componenti

$$J^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\alpha} J^\alpha{}_\beta = 0 \quad \text{corrispondente a} \quad J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu} = 0$$

A questo punto è facile ricavare i 6 generatori dell'algebra aventi espressione

$$(J_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \eta_{\beta\sigma} \left(\delta^\alpha{}_\mu \delta^\sigma{}_\nu - \delta^\alpha{}_\nu \delta^\sigma{}_\mu \right) \qquad \begin{matrix} (\mu < \nu = 0, \dots, 3) \\ (\alpha, \beta = 0, \dots, 4) \end{matrix}$$

che si possono suddividere in due famiglie di vettori tridimensionali

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J_{jk} \quad (j,k = 1,2,3) \\ K_i &= J_{0i} \quad (i = 1,2,3) \end{aligned}$$

aventi le seguenti regole di commutazione[1]

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_k] &= -\epsilon_{ijk} J_k \end{aligned}$$

[1] In generale le regole di commutazione sono date da

$$[J_{\rho\sigma}, J_{\mu\nu}] = \eta_{\rho\mu} J_{\sigma\nu} - \eta_{\sigma\mu} J_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\rho} J_{\mu\nu} - \eta_{\rho\nu} J_{\sigma\mu}$$

Da ciò si nota come i generatori $\vec{J}$ formino una sottoalgebra isomorfa a quella delle rotazioni al contrario dei $\vec{K}$, questo ci indica che $\mathbb{SO}(3)$ è un sottogruppo proprio di $\mathbb{SO}(3,1)$; tralasciando l'esponenziazione dei $\vec{J}$ da cui si ottengono le rotazioni nello spazio tridimensionale, a livello fisico è interessante trovare l'espressione esplicita dei cosidetti **boost** ottenuti tramite l'esponenziazione dei $\vec{K}$

$$B(\hat{m},\lambda) = e^{\lambda \hat{m}\cdot\vec{K}}$$

La loro espressione esplicita lungo gli assi coordinati è

$$B(\hat{e}_x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda & 0 & 0 \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; B(\hat{e}_y,\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & 0 & \sinh\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\lambda & 0 & \cosh\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; B(\hat{e}_z,\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & 0 & 0 & \sinh\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\lambda & 0 & 0 & \cosh\lambda \end{pmatrix}$$

In generale ogni trasformazione di $L_+^\uparrow$ può essere scritta come prodotto di una rotazione per un boost.

3.Un pó di fisica

Una volta ottenuta l'espressione esplicita dei boost cerchiamo dal punto di vista fisico cosa rappresentano: partiamo dall'espressione di un boost lungo l'asse x:

$$\begin{cases} t' = t\cosh\lambda + \frac{x}{c}\sinh\lambda \\ x' = c\,t\sinh\lambda + x\cosh\lambda \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e consideriamo l'immagine del punto $(t_0,0,0,0)$ rispetto a questa trasformazione

$$\begin{cases} t' = t_0\cosh\lambda \\ x' = c\,t_0\sinh\lambda \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

si nota che viene mappato in un punto avente velocità pari a

$$V = \frac{x'}{t'} = c\tanh\lambda \quad (-1 \leq \tanh(x) \leq 1):$$

quindi un boost rappresenta il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro con una velocità pari a $c\tanh\lambda$ rispetto al precedente, cioè collega tra loro i cosidetti **sistemi inerziali**; effettuando due trasformazioni successive di parametri λ_1 e λ_2 si ottiene

$$V'' = c\tanh(\lambda_1+\lambda_2) = c\,\frac{\tanh\lambda_2 + \tanh\lambda_1}{\tanh\lambda_1\tanh\lambda_2 + 1} = \frac{V_1+V_2}{1+\beta_1\beta_2}$$

quindi cambia anche la legge della composizione della velocità: non è possibile comporre due velocità in maniera da ottenerne una superiore a c.

Da ovvie relazioni fra le funzioni iperboliche, usando il termine $\beta = v/c$ si ha inoltre

$$\cosh\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Lambda^{\cdot}{}_{0}.0$$

che solitamente viene indicato con γ nei testi di fisica; quindi le trasformazioni assumono l'espressione

$$\begin{cases} t' = \gamma(t + \frac{\beta}{c}x) \\ x' = \gamma(x + c\beta\,t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

L'invarianza rispetto al prodotto scalare si traduce in una invarianza nella lunghezza di una traiettoria seguita da un corpo materiale che possone essere divise in tre famiglie:

$$\begin{cases} \eta(x,x) < 0 & \text{tipo tempo} \\ \eta(x,x) = 0 & \text{tipo luce} \\ \eta(x,x) > 0 & \text{tipo spazio} \end{cases}$$

.

Particolare importanza assumono le traiettorie di tipo luce in quanto solo particelle di massa nulla possono ritrovarsi su di esse (e solo su di esse in quanto sono costrette ad andare alla velocità della luce); queste traiettorie individuano il **cono luce**: esso individua tutti gli eventi che un determinato corpo può influenzare e da quali corpi può essere influenzato. In particolare il fatto che la componente $\Lambda^{\cdot}{}_{0}.0$ sia positiva fa si che la direzione temporale non venga invertita (anche per questo $L_+^{\uparrow}$ è detto **ortocrono**).

4.Spinori

Esiste un isomorfismo lineare tra matrici hermitiane (che nel seguito indicherò con $\mathbb{H}_2$) e lo spazio $\mathbb{R}^4$ definito come

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^0 - ix^2 \\ x^0 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \, \sigma_\mu$$

dove le σ_μ sono definite come

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son dette **matrici di Pauli**) aventi queste proprietà

$$\sigma^+ = \sigma \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=0}^{3} \epsilon_{0ijk} \sigma_k \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}_2$$

Siccome

$$\det \sigma(x) = |x^0|^2 - |\vec{x}|^2 = -\eta(x,x)$$

il seguente omomorfismo

$$\Lambda \colon \mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{D}\mathrm{iff}(\mathbb{H}_2)$$

definito come $\Lambda_a(X) = aXa^+$ conserva il modulo del vettore e rappresenta perciò una trasformazione di Lorentz; se consideriamo y^μ immagine del vettore x^μ rispetto ad una trasformzione di Lorentz possiamo scrivere

$$\sigma(y) = \sum_{\mu=0}^{3} y^\mu \sigma_u = \Lambda_a \sigma(x) = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu a \sigma_\mu a^+$$

ma $y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ quindi

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu = a \sigma_\nu a^+$$

e si ottiene il fatto che le matrici σ_μ si comportano proprio come vettori di $\mathbb{R}^4$. Prendendo la traccia dell'ultima espressione e sfruttando le proprietà delle matrici di Pauli si ottiene

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left\{ a \sigma_\nu \, a^+ \, \sigma^\mu \right\}$$

A questo punto è facile notare che

$$\mathbb{SO}(3,1) \sim \frac{\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})}{\{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\}}$$

Questa rappresentazione tramite matrici di $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ è detta **rappresentazione spinoriale** in quanto agisce su vettori di $\mathbb{C}^2$ detti appunto **spinori**; la sua algebra è isomorfa a quella di $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ ed è generata dalle matrici complesse 2x2 a traccia nulla (una base è appunto rappresentata dalle matrici di Pauli) ed infatti possiamo ricostruire l'algebra del gruppo di Lorentz tramite l'identificazione

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}$$

con cui si può costruire esplicitamente la rappresentazione delle rotazioni

$$R(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\sigma_0 - i(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\frac{\theta}{2}$$

e dei boost

$$B(\hat{n},\lambda) = \cosh\frac{\lambda}{2}\sigma_0 + (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sinh\frac{\lambda}{2}$$

Tuttavia esiste un'altra rappresentazione di questo gruppo: scegliendo come generatori infinitesimi

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$$

si ottiene dalla loro esponenziazione la seguente rappresentazione

$$\begin{cases} \tilde{R}(\hat{n},\theta) = \cos\frac{\theta}{2}\sigma_0 - i(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\frac{\theta}{2} = R(\hat{h},\theta) \\ \tilde{B}(\hat{n},\lambda) = \cosh\frac{\lambda}{2}\sigma_0 - (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sinh\frac{\lambda}{2} = B(\hat{n},\lambda)^{-1} \end{cases}$$

non equivalente rispetto alla precedente in quanto non esiste una trasformazione che mandi l'uno nell'altra: esse sono collegate tramite l'automorfismo di $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ definito come

$$\phi(a) = (a^+)^{-1}$$

Usando l'omomorfismo

$$\Lambda\colon \mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$$

e sfruttando il fatto che

$$\sigma_2\overline{X}\sigma_2 = (X^0, -\vec{X}) \quad \text{e} \quad (a^+)^{-1} = \sigma_2\bar{a}\sigma_2$$

si ha

$$\Lambda_{\phi(a)} = P\Lambda_a P^{-1}$$

cioè tramite le riflessioni spaziali si collegano le rappresentazioni spinoriali fra loro.

L'importanza di questa rappresentazione è dovuta al fatto che in natura gli elettroni (o comunque la famiglia delle particelle identificata come fermioni) si trasformano secondo questa rappresentazione e soddisfano alla cosidetta **equazione di Dirac**

$$\left(i\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\mathbb{I}_4 \right)\psi = 0$$

dove le γ_μ sono matrici 4x4 con proprietà analoghe alle matrici di Pauli che tengono conto della doppia rappresentazione spinoriale di $L_+^\uparrow$. Essa descrive il comportamento di particelle sottosposte all'interazione elettromagnetica e quindi invariante per inversioni spaziali: ecco la necessità di inserire tutte e due le rappresentazioni all'interno dell'equazione.

The Dirac equation, B. Thaller, Springer-Verlag
The rotation and Lorentz group and their rappresentation for physicists, K. R. Srinivasa, John Wiley&Sons
Teoria dei campi, L. D. Landau, Editori Riuniti
Meccanica quantistica relativistica, L. D. Landau, Editori Riuniti