Appunti di meccanica analitica e relativistica del professor Carlo Marchioro-Marco Grilli

Ferdinando Randisi

30 settembre 2009-12 febbraio 2009

Parte I
Indice

Indice

Parte II

Martedí 30 Settembre 2009

1 Cosa potrebbe dire...

Ancora qualche minuto...
Eccomi qua, dall'hymalaya con furore. Sono venuto a portarvi consiglio e a istradarvi sulla meccanica analitica e relativistica. La sapienza e la saggezza passano in realtà per il moto dei corpi (soprattutto del vostro con addosso una bella figliola, ma questo lo saprete già, avendo 20 e piu' anni). Fino ad adesso avete fatto bazzecole e cazzatelle, ma io sono qui per farvi capire veramente cosa e' la meccanica. Ora cominciamo, e lui inizia a parlare veramente.

2 Meditazione su F=ma

Non discuteremo della base epistemologica della meccanica analitica, che tanto discende da Newton, ma andremo subito a farlo. Fatemi solo meditare un po' sul secondo principio della dinamica.

Verosimilmente voi non lo avete fatto (io nemmeno come studente lo avevo fatto).

Prendiamo un sistema di n punti. Ogn'uno ha una sua massa m_i, e posizione x_i, e sopra gli agisce una forza:

$$m_i \ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}_j, t)$$

perche' possono dipendere da posizione e velocità di ogni punto e dal tempo.

Al tempo 0, ogni particella ha 6 condizioni iniziali, quindi ci sono $6N$ condizioni iniziali (tre coordinate, su posizione e velocità).

$$x_i(0) = x_{i0} \quad \dot{x}_i(0) = x_{i0}(0)$$

Associando queste due equazioni l'una all'altra, posso risolvere il problema di Cauchy associato.

La meccanica di Newton, sviluppata da lui, trova completamento quando cauchy trova che per tempi piccoli la soluzione di questo problema esiste ed e' unica. L'unicità ed esistenza della soluzione non e' ovvia, ora farà esempi per cui in tempi finiti non esiste la soluzione.

In realtà, per tutte le forze che esistono in fisica la soluzione esiste ed e' unica, per tempi anche non infinitesimi.

2.1 Esempio non risolvibile

Sia $f = \dot{x}^2$,$\dot{x} = v$,$m = 1$.

Dunque

$$\frac{dv}{dt} = v^2$$

e

$$\frac{dv}{v^2} = dt$$

Ovvero

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = t$$

e quindi

$$v(t) = \frac{1}{v_0 - t}$$

si vede che in questo caso ad un certo tempo la velocità esplode. Non vuol dire che il mondo cessa di esistere, ma che questo modello fallisce.

Talvolta questo non implica fallimento (effetto Cerenkov, meccanica dei fluidi), ma il blow-up ha significato fisico.

2.2 Esempio in cui non e' unica

Se $f = \sqrt{x}$, evidentemente esistono due soluzioni (anche stavolta $m = 1$), con condizione

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sqrt{v} \\ v &= 0 \\ v &= \frac{1}{4}t^2 \end{aligned}$$

Infatti entrambe soddisfano l'equazione. Questo da casini.

Tuttavia, se la funzione e' continua e derivabile con derivata continua la soluzione esiste unica. Questa e' una condizione che si verifica la stragrande maggioranza delle volte. Nella meccanica dei fluidi anche questo puo' avere un significato.

In questo corso tutte queste forze soddisfano questa condizione.

Se la forza e' ad esempio descritta da un $|x|$ allora non si sa bene cosa capita.

2.3 Notazione

Di solito si scrivono le eq.diff. in forma normale, ovvero con le derivate di ordine superiore messe a sinistra.

Entra ora nel dettaglio.

3 Equazione di Lagrange

Beppe Luigi era un grande scienziato Torinese, che si e' inventato lui insieme a molti altri la meccanica lagrangiana.

Con questa formulazione i conti vengono ridotti, e permette di fare i calcoli in modo molto piu' corto. Inoltre le sue successive astrazioni (meccanica hamiltoniana) permette di andare in fenomeni molto differenti, come elettromagnetismo e meccanica quantistica.

Avere per una stesso fenomeno diverse teorie permette di aprire la strada a molte cose.

E poi e' utile per cose anche come teoria delle popolazioni (preda/predatore, biologia e tante altre cose).

In sostanza, da un lato e' comodo fare lagrangiana, da un altro e' utile per farci altre cose. E' parte del bagaglio culturale FONDAMENTALE per un qualunque fisico di qualunque parte del mondo, anche per un australiano. Serve molto anche per sviluppare senso matematico. Dopo che la abbiamo trovata la usate come una macchinetta: mettete dentro e ottenete una cosa simpatica.

3.1 I vincoli

Cosa e' un vincolo? Un vincolo puo' ad esempio essere una molla che tiene ferma la nostra pallina. Un sistema massa molla avrà, nel piano, due equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases}$$

l'equazione sarà dunque del tipo

$$y(t) = \dot{y}\omega^{-1}\sin(\omega t)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Cosa otteniamo se $k = \infty$? in questo caso otterremmo un'ampiezza nulla, per cui il coso e' vincolato.

Questa e' una realizzazione molto schematica di un vincolo posizionale

Definizione 1 *Un vincolo e' detto posizionale bilaterale o olonomo bilaterale se e' una funzione che limita la posizione dei vari punti tramite una equazione del tipo:*

$$\varphi(x_1, ..., x_n, t) = 0$$

Definizione 2 *Un vincolo e' detto posizionale unilaterale o olonomo unilaterale se e' una funzione che limita la posizione dei vari punti tramite una equazione del tipo:*

$$\varphi(x_1, ..., x_n, t) \geq 0$$

Definizione 3 *un vincolo e' di rigidità se dice che la distanza tra punti si dice costante nel tempo.*

In questo corso tratteremo solo vincoli olonomi, ovvero di tipo posizionale e di rigidità (che in effetti sono caso particolare dei vincoli posizionali, non dipendendo dal tempo)

Nella vita vera ci sono anche vincoli alonomi, che dipendono invece dalla velocità.

Il fatto che ci siano vincoli posizionali limita anche l'atto di moto del sistema. Infatti, la derivata totale rispetto al tempo dell'equazione dei vincoli e':

$$\dot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \cdot \nabla_i \varphi + \frac{\partial q}{\partial t}$$

Se il vincolo dipende anche dalla velocità (alonomo), con a_{ij} opportuni coefficienti, la sua derivata e':

$$\dot{\varphi} = \sum a_i j \cdot x_j + a_{ij}$$

per esempio, quando parcheggiate la macchina non potete avere la vostra velocità diretta direttamente dentro il parcheggio(le ruote non sono dirette di 90 gradi, verso il marciapiede).

I vincoli olonomi non li studiamo perche' sono molto interessanti per l'ingegneria, ma a noi non frega poi assai. Che poi e' molto complicato e scarsamente interessante.

Noi useremo solo vincoli olonomi.

4 Lavori e spostamenti virtuali

Definizione 4 *Una velocita' possibile e' una velocita' compatibile con i vincoli.*

Definizione 5 *Una velocità virtuale v^{virt} e' una velocità, compatibile con i vincoli "congelati" in un certo istante di tempo.*

Se i vincoli non dipendono dal tempo velocita' virtuale e velocita' possibile si eguagliano.

Definizione 6 *uno spostamento virtuale equivale ad una velocità virtuale per un tempo infinitesimo:*

$$\delta p = v^{virt} dt$$

Questo e' un concetto che si e' venuto chiarendo dal 1700. Sarà fondamentale per le prossime volte.

Parte III

Giovedí 2 Ottobre 2008

Intruducimo le coordinate lagrangiane: le coordinate lagrangiane sono un insieme di coordinate linearmente indipendente. Noi parleremo solo di vincoli olonomi, quelli anolonomi non li trattiamo.

5 Le coordinate lagrangiane

Le variabili lagrangiane sono atte ad indicare la generica posizione del sistema. Abbiamo n variabili lagrangiane.

Se ho una curva, basta una sola coordinata lagrangiana per indicare univocamente un punto su di essa, indipendentemente dallo spazio ambiente della curva, e coincide con l'ascissa curvilinea. Se il punto e' vincolato su una superficie, bastano 2 coordinate lagrangiane, eccetera eccetera.

Definizione 7 *Un sistema con vincoli olonomi ha tanti gradi di libertà quante sono le sue coordinate lagrangiane.*

Le coordinate lagrangiane possono, come ben sai, essere coordinate cartesiane in un certo riferimento, ma possono essere in generale di qualunque tipo.

Se un sistema di N particelle nello spazio, con un numero m di vincoli, ha $n = 3N - m$ gradi di libertà.

5.1 I 6 gradi di libertà del corpo rigido

I vincoli di rigidità sono quelli che indicano che la distanza tra le particelle del sistema sono tutte a distanza fissata, giusto? In questo caso il sistema ha un numero di gradi di libertà calcolato come prima, ma quanti sono i vincoli m? Prendo un punto, e ci fisso sopra un sistema di riferimento. Pongo ora in tutto 6 gradi di libertà, di cui 3 per la posizione, e 3 per l'orientamento: poiche' ci sono vincoli di rigidità, la posizione di ogni punto e' costante nel sistema di riferimento solidale con il corpo rigido, quindi basta sapere dove e' e come e' orientato questo sistema per sapere tutto il resto, quindi i vincoli sono 6.

I vincoli sono 6 anche perche' per individuare un corpo rigido posso utilizzare 3 punti, e conoscendone le posizioni posso sapere come e dove e' il corpo rigido, con i 3 vincoli di avere i 'lati' costanti: 3*3-3=6 vincoli.

5.2 Le coordinate lagrangiane non sono univoche

Ad esempio su un piano io posso usare coordinate cartesiane, polari, e tante altre, a patte che siano, ovviamente, delle coordinate univoche, e che quindi ad ogni punto associno una ed una sola n-upla (a parte l'origine, che ad esempio in coordinate polari e' definito solo da ρ per ogni θ).

5.3 Utilità delle coordinate generalizzate

E va bene, ma a noi che cosa ce ne frega? Gli spostamenti virtuali sono molto piu' compatibili con le coordinate generalizzate, poiche' la posizione di ogni punto e' $\bar{OP}_i = (q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Lo spostamento virtuale corrisponde percio' ad una variazione sulle coordinate lagrangiane. Lo spostamento virtuale e' quindi esprimibile tramite il differenziale totale della posizione:

$$\delta\overline{OP}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\overline{OP}_i}{\partial q_h}\delta q_h \tag{1}$$

Chiamiamo r_i le forze vincolari, cioe' le forze fatte dai vincoli. La forza totale sarà

$$m\ddot{x} = f_i + r_i \tag{2}$$

quando f_i sono le forze attive. Come vedremo, con la lagrangiana delle forze vincolari ce ne potremo dimenticare. Deduciamo sperimentalmente e fenomenologicamente che reazioni vincolari si possono esercitare.

5.3.1 Excursus sulle reazioni vincolari

Su una curva, ad esempio quali sono i vincoli, ad esempio, su una curva scabra o liscia? Se la curva e' liscia, non c'e' attrito, se e' scabro c'e' un rapporto tra reazione vincolare normale e la reazione vincolare tangente, e il rapporto sarà legato al coefficiente di attrito. Se e' dinamico o stati come sapete si differenzia molto. Comunque, se e' dinamico, la forza di attrito sarà $r_i = \alpha_D |r_n|$, se e' statico sarà $r_i \leq \alpha_s |r_n|$.

Interessante e' il problema del puro rotolamento, per cui il punto di contatto sta fermo, pero' il corpo si muove lo stesso.

5.3.2 Ora torniamo a noi

Cosa intendiamo per lavoro virtuale? Be, se abbiamo un vettore $\vec{f} = (f_1, f_2, f_2, ..., f_n)$, il lavoro virtuale sara' definito come il lavoro associato ad ogni spostamento virtuale:

$$\delta L_f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta \overline{OP}_i \tag{3}$$

Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari e' quindi e': dunque

$$\delta L_r = \sum r_i \cdot \delta \overline{OP}_i$$

e, se la superficie e' liscia, e' nulla.

Definizione 8 *Un vincolo e' perfetto se, quando r_i e' la reazione vincolare, e':*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \delta \overline{OP}_i = 0$$

In questo corso andremo avanti solo a vincoli perfetti. Questo perche' questo e' un corso propedeutico a quantistica, e nell'infinitamente piccolo l'attrito e' non interessante.

Noi vogliamo una equazione in cui non compaia la rezione vincolare dei vincoli perfetti. Partiamo dall'equazione di d'Alambert o equazione simbolica.

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \delta \overline{OP}_i \cdot (m_i \ddot{x}_i - f_i) = \sum_{i=1}^{N} \delta \overline{OP}_i \cdot r_i = 0 \tag{4}$$

Che abbiamo ricavato mettende insieme la 3con la 2, e abbiamo sostenuto che i vincoli siano perfetti (infatti il lavoro virtuale e' 0).

La strumento matematico di cui avete bisogno e' la derivata parziale: vedere da quali grandezze dipende la variabile e variarne una mantenendo le altre costanti.

6 Troviamo la lagrangiana $\mathcal{L}$

Adesso, costruisco degli strumenti semplici, alcune saranno identità, altre sono comunque semplici. Una particolare attenzione merita il calcolo dell'energia cinetica:

$$
\begin{aligned}
\overline{OP}_i &= \overline{OP}_i(q_1, ..., q_n, t) \\
v_i &= \frac{d\overline{OP}_i}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \\
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}\right]^2 = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h\right)^2 + 2\frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \left(\frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}\right)^2\right] = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + 2\frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\right] + \frac{1}{2}a_{00} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{N} a_{h,k}\dot{q}_k\dot{q}_h + \sum_{h=1}^{n} q_{0h}\dot{q}^h + \frac{1}{2}a_{00}
\end{aligned}
$$

Ove abbiamo posto:

$$
\begin{aligned}
a_{hk} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \overline{\bar{O}P}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \\
a_{0h} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \\
a_{00} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Lavoriamo un pochettino sulla definizione di lavoro virtuale, e tenendo ben presente l'equazione (1):

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta\overline{OP} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h}\delta q_h \\
&= \sum_{h=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \right] \delta q_h
\end{aligned}$$

Per questo, se definiamo la forza generalizzata come:

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \tag{5}$$

otteniamo che vale

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h$$

Molto interessante e' il caso in cui esiste una energia potenziale all'interno di questo bel sistema, ovvero se esiste una U tale che:

$$Q_h = -\frac{\partial U(q_1, ..., q_n, t)}{\partial q_h}$$

Vi scrivo adesso altre due identità, che scrivo solo per comodità. Chiariamo bene: le $\dot{q}_i$ e le $\dot{q}_h$ sono entrambe variabili linearmente indipendenti.

Abbiamo gia' visto la definizione della velocita' virtuale come derivata totale rispetto al tempo dello spostamento virtuale, ma la riscrivo un attimo per comodita'. Deriviamola rispetto alle $\dot{q}_h$ e otteniamo la seguente.

$$\begin{aligned}
v_i &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \\
\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_h} \qquad (6)
\end{aligned}$$

La prossima e' abbastanza banale, e si ottiene derivando rispetto al tempo la tua derivata parziale qualunque dello spostamento:

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial OP_i}{\partial q_h}\right) \tag{7}$$

Che cosa ce ne facciamo di queste due identità? Ne troviamo altre due!

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h} \tag{9}$$

A queste quattro identità qua sopra, che ha dato lui in classe io ho preferito, riguardando gli appunti, aggiungerne un'altra, per fissare le idee. Si ricava dalle altre 4 identita'.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h} \tag{10}$$

Mettendo insieme semplicemente la (9) e la (10) , deriviamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \tag{11}$$

Ritorniamo ora le equazioni simboliche della dinamica.

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{x}_i - f_i) \cdot \delta \overline{OP}_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{x}_i - f_i) \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial OP}{\partial q_h} \delta q_h = 0$$

Dove si e' fatto uso della (1). Se fissiamo l'indice h, e portiamo tutto dall'altra parte, otteniamo dunque:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial \bar{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \frac{\partial \bar{OP}_i}{\partial q_h} \delta q_h = Q_h \delta q_h \tag{12}$$

Ove ci siamo serviti dell'equazione (5), definizione della forza generalizzata, e di quanto trovato nella (11). Mettendo la (12) in (11), portiamo dall'altra parte e moltiplicdiamo per δq_h, e alla fine sommiamo sull'indice h. Otteniamo:

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} - Q_h \right\} \delta q_h = 0$$

poiche' le q_h le abbiamo scelte in modo da essere linearmente indipendenti, i coefficienti tra graffe devono essere nulli per forza affinche' l'uguaglianza sia soddisfatta.

Abbiamo dunque ottenuto un risultato fantastico! Per una particella che si muove lungo un vincolo perfetto e olonomo, vale:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

Vedete che non c'e' piu' alcun termine dipendente dalle reazioni vincolari! C'e' solo l'energia cinetica! Evviva! EVVIVA!

Parte IV
Giovedí 9 Ottobre 2008

L'altra volta abbiamo trovato la funzione:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

Se le forze sono espresse da un potenziale, allora:

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \bar{OP}_i} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} = -\frac{\partial U}{\partial q_h}$$

la sommatoria la ho messa perche' semplicemente l'energia potenziale dipende, a priori, da tutte le cordinate posizionali.

Definisco la funzione lagrangiana, $\mathcal{L} = T - U$ che mi permette di scrivere:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \tag{13}$$

poiche' il potenziale non dipende affatto dalla velocità. Poiche' h va da 0 a N, ci sono N equazioni di Lagrange.

6.1 Applicazioni

Le scrivo sul mio quaderno verde, perche' tanto sono esercizi. Lui fa esempi di coordinate polari e altri.

6.2 Conservazione dei momenti generalizzati

Utilizziamo un po' di definizioni:

Definizione 9 *Si dice forza generalizzata lungo h la derivata della lagrangiana rispetto alla coordinata generalizzata h-esima, e si indica con Q_h:*

$$Q_h := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \tag{14}$$

Questa la avevamo già. La prossima invece e' nuova.

Definizione 10 *Si dice momento generalizzato lungo h la derivata della lagrangiana rispetto alla velocita' generalizzata h-esima, e si indica con p_h:*

$$p_h := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \tag{15}$$

Quando questo e' costante lungo il moto, viene detto integrale primo del moto.

Definizione 11 *Una q_h per cui $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$ si dice ignorabile o ciclica*

Questo ci permette di usare un bel teorema:

Teorema 1 *Se q_h e' una coordinata ignorabile allora il proprio momento generalizzato $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$ si conserva.*

La dimostrazione e' evidente.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

Poiche' q_h e' una coordinata ciclica. Dunque:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = costante \end{aligned}$$

Parte V

Giovedí 9 Ottobre 2008

Buongiorno sono Guido Cavallaro, oggi vi faccio il teorema di koenig e il teorema di Dirichlet sulla stabilità.

7 Il teorema di Koenig

Lo facciamo per un sistema di punti materiali, si generalizza facilmente in caso infinitesimo. Sappiamo che l'energia cinetica totale del sistema e':

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Inventiamoci un secondo sistema di riferimento, in cui misuriamo questa quantità, in traslazione rispetto all'altro.

$$T' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v_i')^2$$

Teorema 2 (primo di koenig) *Sia M la massa del sistema e v_G la velocità del centro di massa rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Se T' e' l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa, vale:*

$$T = T' + \frac{1}{2} M v_G^2$$

per ogni particella varrà la relazione:

$$v_i = v_i' + v_G$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}
T &= \sum \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (v_i' + v_G) \cdot (v_i' + v_G) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i ((v_i')^2 + v_G^2 + 2 v_i' \cdot v_G) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i')^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i v_G^2 + v_G \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i') \\
&= T' + \frac{1}{2} M v_G^2 + 0
\end{aligned}$$

Dove il terzo termine a secondo membro si annulla perche' la sommatoria equivale alla velocità del centro di massa nel sistema di riferimento del centro di massa, o, in termini statistici, perche' la somma degli scarti dalla media equivale a 0. Abbiamo dunque finito di fare la dimostrazione.

Tipicamente negli esercizi vi capiterà che varrà $T' = \frac{1}{2} I \omega^2$.

Ora il teorema di Dirichlet.

8 Il teorema di Dirichlet

Questo teorema dà una condizione sufficiente affinche' un punto di equilibrio sia un punto di equilibrio stabile. Sappiamo, a intuito, che un punto e' di equilibrio se la sua derivata e' nulla, ovvero se quando ce lo metto fermo lui ci rimane.

Definizione 12 *Un punto di equilibrio si dice stabile se,*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad | \quad |x(0) - x^*| + a|\dot{x}(0)|^2 < \delta_\epsilon \Rightarrow |x(t) - x^*| + a|\dot{x}(t)| < \epsilon$$

ovvero se, fissata una distanza massima dal punto di equilibrio stabile ϵ piccola quanto si vuole, esiste una distanza iniziale dal punto di equilibrio stabile δ_ϵ per cui il sistema si mantiene entro la distanza massima.

Teorema 3 (di Dirichlet) *Consideriamo un sistema con vincoli e lagrangiana associata indipendente dal tempo. Sia p^* un punto di equilibrio, ovvero $\frac{dU(p^*)}{dx_i} = 0$. Se p^* e' un punto di minimo relativo, allora e' un punto di equilibrio stabile.*

Il teorema afferma che se ci inventiamo due palle di raggio delta e epsilon e parto dala palla di raggio epsilon non posso uscirne in un moto.

——————— Per comodita, poniamo il punto di equilibrio nell'origine, con energia potenziale che si annulla nell'origine. Poiche' l'energia cinetica e' una funzione non arbitraria della velocita', essa risulta essere anch'essa nulla nell'origine.

- L'energia e' una funzione continua dello spazio delle fasi
- E' nulla solo se e' calcolata nell'origine dello spazio delle fasi, ed e' altrove positiva (essendo l'origine un minimo dell'energia).
- E' un integrale primo del moto (essendo la lagrangiana indipendente dal tempo).

Abbiamo tutto cio' che ci serve per dimostrare il teorema. Procediamo dunque per assurdo.

Supponiamo che l'origine sia un punto di equilibrio instabile. Vuol dire che, per quanto io prenda piccolo δ_ϵ, il mio sistema finisce per uscir dall'intorno di raggio ϵ. Tuttavia, lungo la frontiera dell'intorno ϵ l'energia sara' sempre maggiore di 0 per ipotesi (abbiamo preso l'ipotesi che l'origine e' un minimo relativo). Cio' ci porta ad un brutto assurdo: se il punto esce, allora passa per un punto ad energia positiva, e poiche' l'energia si conserva se passa per un punto ad energia positiva vuol dire che aveva energia positiva dall'inizio.

Poiche' sappiamo che l'energia all'inizio era ben negativa, siamo giunti ad un assurdo, e quindi il minimo del potenziale non puo' che essere un punto di equilibrio stabile.

Questa e' una condizione sufficiente, ma un altro teorema che non dimostriamo discute anche la necessarieta'.

Parte VI

Giovedí 14 Ottobre 2008

La volta passata abbiamo visto che la lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$ ha la proprietà che:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

Utilizzando le definizioni (14) e (15), si riscrive in modo che:

$$\frac{d}{dt}p_h = Q_h$$

questo e' la generalizzazione della seconda legge di Newton.

Il Teorema di Noether che qui non dimostro dice, tra le altre cose, una conseguenza evidente di questo: il momento generalizzato si conserva quando la forza generalizzata e' nulla, e in questi casi si dice che l'integrale primo del moto e' costante lungo tutto il moto.

9 Definiamo l'energia generalizzata

Definizione 13 (Energia generalizzata) *La grandezza H, definita come:*

$$H = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h - \mathcal{L} = \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathcal{L} \tag{16}$$

e' nota come energia generalizzata.

9.1 Energia ed energia generalizzata

Perche' si chiama energia generalizzata? Perche' se i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, coincide con l'energia totale del sistema.

In generale quando la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo nemmeno i vincoli dipendono dal tempo, ma non sempre. A priori sono cose distinte e separate. Poi vediamo un esempio carino.

Proprietà 1 *L'energia generalizzata coincide con l'energia totale del sistema quando nemmeno i vincoli non dipendono dal tempo.*

9.1.1 Calcolo della derivata $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_{h=1} a_{oh}\dot{q}_h + \frac{1}{2}a_{00} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k \end{aligned}$$

Questa relazione qua sopra l'abbiamo dimostrata tempo fa, e va bene quando non dipende dal tempo. Infatti, se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo i termini a_{00} e a_{0h} si annullano.

La derivata in realta' si puo' trovare facilmente con una buona dose di incoscienza, dicendo che nella derivazione una delle sommatorie passa a miglior vita (sopravvivono solo i termini che hanno almeno uno degli indici uguali a r) e ci si riconduce ad una semplice derivazione di funzione quadratica. Il calcolo seguente e' per fare le cose fatte bene.

Adesso esprimiamola un po' meglio in funzione della r-esima coordinata.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k\right] \\ &= \frac{1}{2}a_{rr}\dot{q}_r\dot{q}_r + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}(1-\delta_{hr})a_{hr}\dot{q}_h\dot{q}_r + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{kr})a_{kr}\dot{q}_k\dot{q}_r + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{hr})(1-\delta_{kr})a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2}a_{rr}\dot{q}_r^2 + \sum_{k=1}^{n} a_{kr}\dot{q}_k\dot{q}_r + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{hr})(1-\delta_{kr})a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k \end{aligned}$$

Praticamente abbiamo estratto dalla sommatoria su h e su k tutti i termini per cui $h = r$, oppure $k = r$, oppure $h = k = r$, e abbiamo lasciato i termini che non dipendono dalla coordinata r-esima in una sommatoria a parte. Poi, visto che secondo e terzo termine differivano tra loro solo per il nome dell'indice, li abbiamo messi insieme.

L'utilita' di questa operazione apparentemente insensata e' subito mostrata:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}a_{rr}\dot{q}_r^2 + \sum_{k=1}^{n} a_{kr}(1-\delta_{kr})\dot{q}_k\dot{q}_r + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1-\delta_{hr})(1-\delta_{kr})a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} &= a_{rr}\dot{q}_r + \sum_{k=1}^{n} a_{kr}(1-\delta_{kr})\dot{q}_k + 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} &= \sum_{k=1}^{n} a_{kr}\dot{q}_r \qquad (17)
\end{aligned}$$

Infatti ci sono 3 possibilita per la sommatoria su due indici che descrive l'energia cinetica:

- O entrambi gli indici sono uguali ad r, e allora abbiamo una cosa del tipo $\frac{1}{2}\dot{q}_r^2$.
- O uno solo degli indici e' uguale ad r, e allora derivando rispetto a $\dot{q}_r$ abbiamo una cosa in cui non compare mai r, ma di coefficiente 1 e non $\frac{1}{2}$, poiche' 2 sono le sommatorie.
- O nessuno dei due indici e' uguale ad r, e allora la derivata rispetto ad r e' nulla.

Capito dove siamo voluti andare a parare? Abbiamo ricavato la seguente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{kh}\dot{q}_k \qquad (18)$$

9.1.2 Dimostrazione della proprieta'

Sostituiamola dunque la (18) nella equazione (16), che definisce l'energia generalizzata.

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L \\
&= \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k \dot{q}_h - T + U \\
&= \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_k \dot{q}_h - \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + U \\
&= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + U \\
&= T + U = E
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato in modo chiaro e veloce questa proprieta' dell'energia generalizzata. Dimostriamone un'altra.

Teorema 4 *Se la lagrangiana non dipende dal tempo, e' una costante del moto.*

Da notare che l'energia generalizzata coincide con l'energia totale solo se nemmeno i vincoli dipendono dal tempo, ma questo teorema afferma che se la lagrangiana non dipende dal tempo non conosciamo a priori la correlazione tra energia totale e energia generalizzata, pero' sappiamo almeno che l'energia generalizzata e' una costante.

Questo si dimostra molto facilmente. Intanto, quanto vale la derivata della lagrangiana rispetto al tempo? Usando la derivata delle funzioni composte di due variabili:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \dot{q} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{19}$$

Deriviamo rispetto al tempo l'energia generalizzata, utilizzando l'equazione (19), fresca fresca di elaborazione:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{h=1}^{n} \dot{p}_h \dot{q}_h - \mathcal{L} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} \\
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \\
\frac{dH}{dt} &= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right] - \sum_{h=1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Dove si e' sfruttata la prima proprieta' che abbiamo dedotto della lagrangiana, la (13). Si vede benissimo che se la lagrangiana ha derivata nulla rispetto al tempo, l'energia generalizzata e' costante, e in caso contrario, la derivata dell'energia generalizzata rispetto al tempo e' l'opposto di quella della lagrangiana.

9.1.3 Un esempio in cui l'energia generalizzata si conserva, ma non coincide con l'energia del sistema.

Mettiamoci su un tavolo, su cui mettiamo una guida che ruota attorno al punto O, con un motorino che lo fa girare con $\omega = costante$, per cui dunque $\theta(t) = \omega t$. Prendiamo un punto che si muove su questa quida, sul quale noi non vediamo alcuna forza che non sia vincolare.

Sia ξ il vettore-posizione del punto. Sappiamo che l'energia cinetica sarà:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \omega^2)$$

Non ci sono forze che non siano vincolari se ci mettiamo in un sistema di riferimento inerziale, ragion per cui

$$U = 0$$

Dunque:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \omega^2)$$

L'energia generalizzata vale:

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \mathcal{L} = m\dot{\xi}\dot{\xi} - \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \omega^2\xi^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi} - \omega^2\xi^2)$$

Vedete bene che energia totale ed energia generalizzata sono ben diverse!

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{\xi} - \omega^2\xi^2) \neq \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\omega^2) = T$$

Da questo punto in poi fate esercizi su equazioni di lagrange, poi farete approssimazioni su equazioni di lagrange, e nella prossima ora faremo invece l'$\mathcal{H}$amiltoniana.

10 L'$\mathcal{H}$amiltoniana

Avendo n equazioni di lagrange (dunque del secondo ordine), sarebbe bello trasformarle in 2n equazioni del primo ordine, perche' queste si modellano meglio. Prendiamo una equazione differeziale da usare come modello. Se $u := \frac{dy}{dt}$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= f(y, \frac{dy}{dt}, t) \\ \frac{du}{dt} &= f(y, u, t) \end{aligned}$$

Ecco fatta la trasformazione. Le equazioni di hamilton hanno tante belle proprietà, che giustificano il fatto che ogni volta li ricaviamo. Nella hamiltoniana non useremo piu' le q_h e le $\dot{q}_h$, ma le $p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$ e le q_h. Perche' lo faremo? Cosi' otteniamo delle equazioni comodissime.

Sappiamo già che:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}(q|\dot{q}|t)}{\partial \dot{q}_h}$$

Ah, sulle dispense la formula 1.5 pagina 30 e' sbagliata. Posso invertire la cosa, ottenendo:

$$\dot{q}_h = f_h(q|p|t)$$

Introduciamo ora lo spazio delle fasi del sistema. Esso ha 2n dimensioni, e spesso viene indicato con Γ^{2n}. Ad ogni asse viene associata una q o una p.

Voglio trovare un nuovo sistema di equazioni, equivalente alle equazioni di Lagrange. C'e' una maniera molto sistematica di farlo in matematica, che incontrerete molto spesso (anche in termodinamica). Tu la conosci già, e' la trasformata di Legendre. Pero' per noi e' complicata, e ci arriviamo per un'altra via. Abbiamo definito l'energia generalizzata come:

$$H(q, \dot{q}, t) = H(q, f_h(q, p, t), t) = \sum_{h=1}^{n} p_h f_h(q, p, t) - \mathcal{L}(q|f(q|p(t)|t)$$

Se la esprimiamo in funzione delle q, delle p e del tempo, la chiamo hamiltoniana.

$$\mathcal{H}(q, p, t) = H(q, f_h(q, p, t), t) := \sum_{h=1} p_h \dot{q}_h - \mathcal{L} \tag{20}$$

Ehehe, guardate un po' che cosetta carina!

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} &= \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial f_r}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial f_r}{\partial q_h} \\
&= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \\
&= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} &= -\dot{p}
\end{aligned} \tag{21}$$

E inoltre:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} &= \dot{q}_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_h} \\
&= \dot{q}_h
\end{aligned} \tag{22}$$

Anche la formula 2.2 e' sbagliata, perche' ho toppato gli indici.
Mettiamo un po' insieme la 21 e la 22!

$$\begin{cases} \dot{q}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \end{cases} \tag{23}$$

Queste sono le equazioni di hamilton, note anche come equazioni canoniche. Sono molto importanti, e da questo si partirà sempre. I vantaggi? Li vedremo lungo la strada.

10.0.4 Un esempio nel piano

Esempio 1 *Sia p un punto nel piano in presenza di un potenziale U. Trova il moto.*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U \\
\mathcal{H} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U \\
p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\
\dot{x} &= \frac{p}{m} \\
\mathcal{H} &= \frac{p^2}{2m} + U
\end{aligned}
$$

Prendiamo un esempio un po' meno banale.

Esempio 2 *Prendiamo un punto che si muove nel piano in coordinate polari. Discuti l'hamiltoniana.*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - U \\
p_\rho &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m\dot{\rho} \\
p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\rho^2\dot{\theta} \\
\dot{\rho} &= p_\rho/m \\
\dot{\theta} &= p_\theta/(m\rho^2)
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'hamiltoniana, otteniamo:

$$
\mathcal{H} = \sum p_h \dot{q}_h - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + \frac{\dot{p}_\theta}{\rho^2}) + U
$$

il fatto che questa non funzioni per $\rho = 0$ deriva dal fatto che non c'e' corrispondenza biunivoca per l'origine del piano (una volta che r=0, θ non e' importante).

Parte VII

Martedí 21 Ottobre 2008

La volta scorsa abbiamo parlato dell'hamiltoniana, numericamente identica all'energia generalizzata.

$$H(q|p|t) : \begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \end{cases}$$

In tutti i nostri esercizi, H sara' semplicemente la somma delle energie.

11 Pochi teoremi sulle leggi di conservazione

Teorema 5 *Se la coordinata q_h e' ciclica rispetto all'hamiltoniana, ovvero se $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = 0$, allora p_h e' costante.*

La dimostrazione e' evidente, come nel caso della lagrangiana.

Teorema 6 *Se la funzione hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, $\mathcal{H}$ e' una costante del moto, ovvero:*

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = cost$$

Dimostriamolo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \dot{p}_h \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \\ &= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

si vede evidentemente non solo che se non dipende dal tempo e' costante, ma se dipende dal tempo la derivata totale dell'hamiltoniana rispetto al tempo coincide con la derivata parziale rispetto al tempo.

11.1 Qualche esempio

11.1.1 L'oscillatore armonico

Questo lo conoscete bene, ma lo facciamo perche' e' il paradigma di tutti gli esempi: l'*oscillatore armonico*. Conoscete le equazioni del moto:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Scriviamo l'hamiltoniana:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

dove, come al solito, $p = m\dot{x}$. Il grafico dello spazio delle fasi e' una ellisse, poiche' p e' proporzionale alla velocita'.

11.1.2 Il pendolo reale piano

E' costituito da un peso che si muove lungo una circonferenza. E' un sistema ad un solo grado di liberta', e come variabile generalizzata si puo' prendere l'angolo. L'energia cinetica e':

$$T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$$

mentre

$$U = mgL(1 - \cos\theta)$$

L'hamiltoniana del sistema e' quindi:

$$\mathcal{H} = E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

Percio':

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta}$$

Risostituendo nella hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2mL^2} + mgL(1 - \cos\theta)$$

Il grafico dello spazio delle fasi, per una energia superiore alla massima energia potenziale (cioe' $2mgL$), smette di riportare ellissi chiuse, ma fa orbite aperte, e continua a girare sempre nella stessa direzione, senza mai fermarsi. Questo accade perche' l'angolo continua ad aumentare, poiche' il pendolo non torna mai sui suoi passi. Questo si chiama moto di librazione.

Mettendo in evidenza p nella equazione qua, e poi risostituendolo, sopra si ottiene:

$$L\sqrt{\frac{m}{2}}\dot{\theta} = \pm\sqrt{E - mgL(1 - \cos\theta)}$$

Sapendo che $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, si ricava:

$$dt = \pm \frac{L d\theta}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - mgL(1-\cos\theta)\right]}}$$

Se volessi l'equazione del pendolo potrei integrare ambo i membri tra t e t0 e ottenere il tempo, in funzione dell'angolo, da cui posso ottenere angolo in funzione del tempo, ma la realta' e' che questo integrale non e' risolvibile analiticamente.

Se vuoi fare bella figura puoi guardartelo sulle dispense di analisi.

12 Parentesi di Poisson

Definizione 14 *Siano $f(q|p|t)$ e $g(q|p|t)$ due funzioni. La seguente espressione e' definita come parentesi di Poisson :*

$$[f,g]_{q,p} := \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{\partial g}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r}\frac{\partial g}{\partial q_r} \right)$$

12.1 Proprieta' delle parentesi di poisson

Queste sono di verifica immediata:

antisimmetria : $[f,g] = -[g,f]$.

bilinearita' :

$$\begin{aligned} [\alpha f, g] &= \alpha[f,g] \\ [f_1 + f_2] &= [f_1, g] + [f_2, g] \end{aligned}$$

identita' di jacobi :

$$[[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] = 0$$

Potete verificarle da voi.

Queste proprieta' sono abbastanza simpatiche, perche' le parentesi di Poisson definiscono con lo spazio delle fasi uno spazio simplettico, analogamente a come il prodotto scalare da' la struttura di spazio euclideo ad uno spazio vettoriale.

Da notare che l'indice r e' un indice muto, che non ha legami con eventuali indici dati dalle funzioni.

Utilizzando questa notazione, possiamo inventarci le parentesi di poisson fondamentali.

Definizione 15 *Le parentesi di poisson fondamentali sono:*

$$[q_h, q_k] = 0 \qquad [p_h, p_k] = 0 \qquad [q_h, p_k] = \delta_{hk}$$

La dimostrazione e' ovvia dalla definizione di parentesi di poisson. In quantistica l'equivalente di queste grandezze sono i commutatori, e sono legati al principio di indeterminazione. Effettivamente, l'analogo delle parentesi di Poisson fondamentali e' in quantistica il celebre principio di indeterminazione di Heisenberg.

Usiamo queste parentesi di poisson per scrivere le equazioni di hamilton.

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = [q_h, \mathcal{H}] \\ \dot{p}_h = [p_h, \mathcal{H}] \end{cases}$$

Una condizione necessaria e sufficiente affinche' X sia costante e' che $[X, \mathcal{H}] + \frac{\partial X}{\partial t} = 0$.

Prendiamo una generica grandezza $X(q, p, t)$:

$$\begin{aligned} [X, \mathcal{H}] &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial q_h}\frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial X}{\partial p_h}\frac{\partial H}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial X}{\partial p_h}\dot{p}_h = \end{aligned}$$

Sommiamo membro a membro la derivata parziale di x rispetto al tempo, e otteniamo:

$$[X, \mathcal{H}] + \frac{\partial X}{\partial t} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial X}{\partial p_h}\dot{p}_h + \frac{\partial X}{\partial t} = \dot{X}$$

Ecco giustificato il nostro interesse per le parentesi di Poisson: esse, sommate alla derivata parziale rispetto al tempo, forniscono la derivata rispetto al tempo. Segue un bel teorema:

Teorema 7 *Condizione necessaria e sufficiente perche' X sia una costante del moto e' che* $[X, \mathcal{H}] + \frac{\partial X}{\partial t} = 0$

Palesemente, se X non dipende esplicitamente dal tempo, sono le parentesi di poisson a dover essere nulle se e solo se X e' una costante del moto.

Teorema 8 *Se X ed Y sono costanti lungo il moto, allora [X, Y]=cost.*

Questo e' abbastanza simpatico, e si dimostra tramite l'identita' ciclica di Jacobi.

$$\begin{aligned} [[X,Y],\mathcal{H}] + [[Y,\mathcal{H}],X] + [[\mathcal{H},X],Y] &= 0 \\ [[X,Y],\mathcal{H}] &= 0 \end{aligned}$$

Che implica che [X,Y] e' una costante del moto per quanto visto poco fa.

Definizione 16 *Due grandezze X e Y si dicono compatibili se* $[X, Y] = 0$.

Con questa definizione possiamo trovare un bel paio di teoremi.

Teorema 9 *Se due grandezze X e Y dipendono da due variabili differenti, le due grandezze sono compatibili.*

Anche questa proprieta' e' evidente. E' tutto cosi' evidente che bisognerebbe guardarle sul Goldstein, perche' cala tutto dall'alto come Tom Cruise in Mission Impossible.

Teorema 10 *Se due grandezze sono espresse l'una in funzione dell'altra (Y=Y(X)), le due grandezze sono compatibili.*

E' molto insolita questa cosa, non credete? Se sono completamente distinte, sono compatibili, se non dipendono affatto l'una dall'altra sono compatibili, se sono un po' e un po' allora non sono compatibili.

Le parentesi di Poisson sono molto utili per valutare la correlazione tra l'una e l'altra variabile.

13 Un simpatico problemino matematico

Risolvete il problema della brachistocrona.

Parte VIII
Martedí 11 Novembre 2008

14 Equazioni di Eulero-Lagrange

Questo argomento e' spiegato DA PAURA sul taylor, per cui e' quasi inutile che io lo stia scrivendo

Sia dato un integrale, che vogliamo rendere stazionario[1]:

$$I[q] = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

Sia adesso $\bar{q}$ il cammino ideale, che minimizza l'integrale. Ogni altro cammino si puo' scrivere come:

$$q(t) = \bar{q}(t) + \alpha\eta(t)$$

ovvero come somam tra il cammino ideale e un altro cammino qualunque. Da notare che, poiche' il nuovo cammino deve comunque partire e arrivare negli stessi punti di $\bar{q}$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. L'integrale di cui sopra puo' essere riscritto comes:

$$I[q] = \int_a^b L(\bar{q}(t) + \alpha\eta(t), \dot{\bar{q}} + \alpha\dot{\eta}(t), t)dt$$

Adesso, chiaramente quando $\alpha = 0$ l'integrale ha un punto stazionario per ipotesi, essendo $q|_{\alpha=0} = \bar{q}$

Il differenziale dell'integrale in $\alpha = 0$ e', analogamente a quanto vale per la formula di taylor:

$$\delta I = \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha$$

L'integrale in funzione di α varra':

$$I(\alpha) = I(\bar{q}) + \delta I + O(\alpha^2)$$

La derivata dell'integrale rispetto ad α vale:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \alpha \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right] dt = 0$$

Fissiamoci un attimo sul secondo addendo dentro l'integrale, e facciamo uso di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}dt &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta\right|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt\eta \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta dt\end{aligned}$$

[1]come vedrai, questo e' l'integrale di azione

Ci siamo potuti mangiare quel termine perche' sappiamo che $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Ragion per cui, varra' adesso:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right] dt = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] \eta dt = 0$$

Per azzerare l'integrale dobbiamo azzerare la funzione integrale. Non possiamo contare sul fatto che η vada a 0, perche' a noi interessa che quello che stiamo dicendo valga per qualunque sia la funzione η.

Certo, a priori potrebbero esserci delle compensazioni, quindi questa potrebbe essere una condizione si sufficiente, ma non necessaria.

Il seguente lemma non si trova sul Taylor.

Lemma 1 (fondamentale del calcolo delle variazioni) *Sia $\varphi(t)$ una funzione continua, e η una funzione di classe C^2 nulla agli estremi. Vale:*

$$\int_a^b \varphi(t)\eta(t)dt = 0 \quad \forall\eta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) = 0$$

Se questo lemma funziona, allora evidentemente poniamo la roba tra parentesi si annulli e abbiamo fatto.

La dimostrazione e' molto semplice: supponiamo, per assurdo, che esista una funzione $\varphi(t)$ non nulla per cui l'integrale sia nullo. Supponiamo dunque che almeno in un punto la funzione non sia nulla. Allora, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno della funzione in cui la funzione e' non nulla (essendo la funzione continua). Sia il punto suddetto ξ, e sia l'intervallo (ξ_1, ξ_2) in cui la funzione e' non nulla.

Se riesco a trovare una funzione che fa si che, in prodotto con eta, abbia integrale non nullo, allora ho fatto. Prendo dunque ad esempio la funzione che vale $\eta(t) = (t - \xi_1)^m(\xi_2 - t)^m$ nell'intervallo considerato in cui $\varphi > 0$.

Questa e' di classe C2 e al tempo stesso e' positiva, dunque preserva il segno, dunque ho dimostrato l'assurdo.

IO lo dimostrerei dicendo che, se la $\varphi(t)$ e' sempre positiva o sempre negativa, prendo la funzione $\eta = 1$, e ho risolto, se non e' cosi' prendo una funzione che sia sempre di segno concorde con φ, per cui l'integrale e' sempre positivo.

Quindi vogliamo che la roba tra parentesi si annulli, quindi che:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Ovvero:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Un certo senso di Deja-Vu, eh?

Principio 1 (di Hamilton, o di minima Azione) *Se il moto e' naturale, allora l'integrale di azione e' stazionario:*

$$A = \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

La dimostrazione vale per n gradi di liberta', anche se qui e' stata affrontata solo per uno.

Se invece di dipendere da una sola q dipende da n coordinate q, invece di una equazione ne ho n.

Parte IX

Giovedí 13 Novembre 2008

La vota scorsa abbiamo parlato di principi variazionali.

Un certo sistema meccanico parte da un punto dello spazio delle fasi e deve arrivare ad un altro.

Abbiamo visto che in principio il sistema puo' spostarsi in infiniti modi possibili, ma la volta scorsa abbiamo fatto il principio di Hamilton, che ci permette di sapere quale percorso sceglierà' il sistema: il sistema spendera' la minima azione possibile.

In meccanica quantistica il concetto di traiettoria non esiste, ma la probabilita' di andare da un punto ad un altro e' dato da una somma pesata tramite la azione di tutte le traiettorie possibili.

Vediamo dunque che la meccanica classica e' un particolare limite della meccanica quantistica. la volta scorsa avevamo visto che perche' l'azione avesse un punto stazionario doveva essere:

$$\delta I = 0 = \int_a^b \eta(t) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right] dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

La meccanica lagrangiana puo' quindi essere fondata sia sul principio dei lavori virtuali sia sul principio di Hamilton.

In questo modo noi sappiamo che traiettoria sceglie il sistema per andare da uno stato ad un altro quando il moto e' naturale.

Esiste ora un principio variazionale da cui far discendere l'hamiltoniana? Io spererei di si', ma adesso vediamo.

15 Hamiltoniana e principi variazionali

Sia:

$$A'[q,p] = \int_{t_2}^{t_1} dt \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - H(q,p,t)\right]$$

questa e' circa sempre la azione, perche' tanto la parentesi rappresenta in realta' la lagrangiana.

Adesso pero' dobbiamo fare una variazione sia di q che di p, perche' sono due coordinate ben diverse.

Il significato fisico di p e' $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$, pero' io per adesso le considero come coordinate puramente geometriche, per cui sara' il mio sistema a sciegliere la p per tenere un moto fisicamente coerente.

Il mio sistema si scegliera' p e q per rendere stazionaria la azione. Calcolo ora la variazione di A'.

$$\begin{aligned}
\delta A' &= \int_{t_2}^{t_1} \sum_{h=1}^{n} \left[p_h \delta \dot{q}_h + \dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}\delta q_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}\delta p_h\right] dt = \\
&= [p_h \delta q_h]_{t_2}^{t_1} + \int_{t_2}^{t_1} \sum \left[-\dot{p}_h \delta q_h + \dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}\delta q_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}\delta p_h\right] dt = \\
&= \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} \delta q_h (-\dot{p}_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}) + \delta p_h (\dot{q}_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h})\right] dt = 0
\end{aligned}$$

quello tra quadre a seconda riga e' 0 perche' la variazione di q all'inizio e alla fine e' nulla (punto di partenza e arrivo non si spostano). Perche' l'integrale a terzo membro sia nullo, la roba dentro la parentesi deve essere 0, usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni:

$$\begin{cases} -\dot{p}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \end{cases}$$

16 Il principio di Maupertuis

Sia l'hamiltoniana una funzione che non dipende esplicitamente dal tempo. Prendiamo tutti i moti in cui l'energia e' costante e tutti di stessa energia, che pero' possono impiegare piu' o meno tempo. Il moto naturale e' quello che minimizza l'azione di Maupertuis, ovvero:

$$A'' = \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h\right] dt$$

di questo principio io non vi daro' una dimostrazione, pero' vi faro' considerare un caso particolare. Se i vincoli non dipendono dal tempo, ricorderete che $\mathcal{H} = T + U$, e dunque varra' anche:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h &= \sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathcal{H} + \mathcal{H} = \\ &= \mathcal{L} + \mathcal{H} = \\ &= T - U + T + U = \\ &= 2T \qquad (24)\end{aligned}$$

Consci della (24), possiamo dedurre:

$$\begin{aligned}A'' &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt 2T = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} 2(E - U) dt\end{aligned}$$

questo e' analogo al principio di Fermat. Non sapete cosa sia?

16.1 Un'analogia ottica

Il principio di Fermat dice che un raggio luminoso di tutti i possibili percorsi sceglie quello che rende minimo il cammino ottico , ovvero quello che minimizza:

$$l = \int_{s_0}^{s} n ds$$

con n l'indice di rifrazione.

Ho un corpo di massa 1 che nel passare da una regione 1 a una regione 2 ha una brusca variazione dell'energia potenziale. La velocita' vale:

$$\frac{1}{2} v_1^2 = T \Rightarrow v_1 = \sqrt{2T}$$

Dunque, avremo, poiche' $ds = v \cdot dt$, che:

$$A'' = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T \frac{dt}{\sqrt{2T}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(E - U)} dt$$

se poniamo $n = \sqrt{2(E - U)}$, otteniamo il principio di Fermat.

e analogamente per v_2. D'altro canto, la velocita' lungo le x deve conservarsi, per cui $v_{x1} = v_{x2}$, ovvero:

$$v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$$

16.2 Il principio di Huygens

Questo paragrafo e' nel non necessario esame, e non e' che sia molto chiaro. La legge di Snell-Cartesio dice che se α e' l'angolo di incidenza e β e' l'angolo di rifrazione, allora vale:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

Adesso, riprendiamo le cose da dove le avevamo lasciate.

Continuiamo sul quaderno giallo, con un po di esercizi.

Parte X

Martedí 18 Novembre 2008

17 Funzione caratteristica di Hamilton e equazioni di Hamilton-Jacobi

Oggi concludiamo con queste cose, e poi andiamo avanti. L'unica cosa che ci resta quando si parla di azione e' la funzione A', che avevamo definito come:

$$A' = \int_{t_2}^{t_1} dt \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathcal{H}(q,p,t)\right]$$

La dimostrazione si faceva calcolando la variazione delle coordinate p e q, ottenendo

$$\begin{cases} -\dot{p}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \end{cases}$$

supponiamo adesso di aver trovato la soluzione $q_h(t)$ e $p_h(t)$. Ci mancano le condizioni iniziali e finali, ovvero posizione e tempo di partenza e di arrivo.

Considerando un certo q_0 e un certo q_1, con un certo t_0 e un certo t_1 dati, sono tante le traiettorie che partono da q_0 e arrivano a q_1.

Basta pensare ad un oscillatore armonico, che puo' passare da una estensione della molla ad un altra tramite infinite traiettorie nello spazio delle fasi (muovendosi cioe' con infinite velocita' possibili).

Tuttavia, se io fisso la velocita', c'e' una sola traiettoria che mi collega questi due punti nel piano delle fasi, ed e' quella che minimizza l'azione hamiltoniana. L'azione e' dunque in realta' $A'(q_0, q_1, t_0, t_1)$.

Per confondervi le idee io posso cambiare il parametro di integrazione, e lo chiamo τ.

$$A' = \int_{t_2}^{t_1} d\tau \left[\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h - \mathcal{H}(q, p, \tau) \right]$$

Quando A' viene fatta dipendere solo da partenza e arrivo, con le q e le p che rispettano il formalismo hamiltoniano, viene chiamata funzione caratteristica di Hamilton oppure funzione principale di Hamilton.

Voglio ora andare a fare una variazione non di percorso, ma di partenza e di arrivo (il cammino continua ad essere solo quello fisicamente possibile).

Parto cioe' a posizioni e tempi leggermente spostati, e arrivo a posizioni e tempi leggermente spostati. Voglio vedere come cambia l'azione dopo queste variazioni.

Le variazioni delle q, ovverosia quelle spaziali le abbiamo gia' calcolate la volta precedente, ma qui le riportiamo in parte, anche perche' c'e' una piccola differenza che ora vedremo:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} p\delta\dot{q}_h + \dot{q}\delta p - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\delta q - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\delta p \\
&= [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (-\dot{p}_h \delta q_h + \dot{q}\delta p - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}\delta q_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}\delta p_h) dt = \\
&= [p_h \delta q_h]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}$$

notiamo adesso e' il contrario della volta di prima: poiche' l'integrale e' stazionario, quello e' nullo, mentre condizioni di partenza e di arrivo cambiano. In questo modo possiamo trovare la variazione spaziale.

facciamo dunque ora una piccola variazione rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta t[p(t)\dot{q}(t) - H(q(t)|p(t)|t)] - \delta t_0[p(t_0)\dot{q}(t_0) - \mathcal{H}(q(t_0), p(t_0), t_0)] = \\
&= \sum_{h=1}^{n} p_h(t) q_h(t) - \delta t \mathcal{H}(q(t)|p(t)|t) - \sum_{h=1}^{n} p_h(t_0) q_h(t_0) + \mathcal{H}(q(t_0), p(t_0), t_0)\delta t_0 =
\end{aligned}$$

I calcoli un poco nebulosi di cui sopra portano tuttavia, di sicuro, alla seguente relazione:

$$\delta S = \sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t)\delta t - \sum_{h=1}^{n} p_{h,0}\delta q_{h,0} + \mathcal{H}(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t_0)\delta t_0$$

dove l'hamiltoniana e' stata scritta come dipendente dai vettori solamente per mettere in evidenza il fatto che dipende da tutte le h coordinate generalizzate e tutti i p momenti generalizzati.

Tuttavia, facendo il differenziale totale di S, possiamo trovare un'altra espressione della sua variazione rispetto a tempi e spazis:

$$\delta S = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial S}{\partial q_h}\delta q_{0h} + \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \frac{\partial S}{\partial t_0}\delta t_0$$

Queste due cose devono essere uguali:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_h}\delta q_h + \frac{\partial S}{\partial q_h}\delta q_{0h} + \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \frac{\partial S}{\partial t_0}\delta t_0 =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - \mathcal{H}(\vec{q},\vec{p},t)\delta t - \sum_{h=1}^{n} p_{h,0}\delta q_{h,0} + \mathcal{H}(\vec{q}_0,\vec{p}_0,t_0)\delta t_0$$

a questo punto, variazione per variazione, troviamo delle uguaglianze:

$$p_h(t) = \frac{\partial S}{\partial q_h} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(q(t),p(t),t)$$
$$p_h(t_0) = -\frac{\partial S}{\partial q_h} \qquad \frac{\partial S}{\partial t_0} = +\mathcal{H}(q_0,p_0,t_0)$$

queste quattro equazioni ci aiuteranno per capire il significato fisico della funzione caratteristica, e si chiamano equazioni di Hamilton-Jacobi.

Segue esercizio che svolgiamo sul nostro simpaticissimo quaderno.

Parte XI
Martedí 20 Novembre 2008

Adesso facciamo le trasformazioni canoniche.

18 Trasformazioni canoniche

Abbiamo visto che nell'approccio hamiltoniano le 2n coordinate (p_h, q_h), soddisfano le equazioni del moto di hamilton.

A noi piacerebbe avere delle coordinate piu' semplici di quelle che gia' non abbiamo, pero' sempre mantenendo intatto il formalismo hamiltoniano. E' analogo allo spazio vettoriale, poiche' adesso faro' una trasformazione che preservi una struttura simplettica, come una isometria mantiene angoli e distanze.

Iniziamo dunque a definire delle quantita' Q_r, funzioni delle q_h e eventualmente del tempo, e similmente facciamo per P_r.

$$Q_r = Q_r(q_1, q_2, ..., q_n, t) \qquad P_r = P_r(p_1, p_2, ..., p_n, t)$$

Ovviamente, affinche le trasformazioni siano invertibili, io voglio che il determinante dello jacobiano di questa trasformazione sia non nullo:

$$det\left(\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\right) \neq 0$$

chiaramente non tutte le trasformazioni mantengono il formalismo hamiltoniano. Lo mantengono solo se io posso definire una nuova hamiltoniana per cui valga:

$$\begin{cases} \dot{Q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_h} \\ \dot{P}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q_h} \end{cases}$$

da notare che non sempre $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(Q|P|t)$, ma quando questo succede abbiamo una trasformazione completamente canonica.

Mi piacerebbe avere un algoritmo che produce solo trasformazioni canoniche...

19 Caratterizzazione di Lie

La trasformazione e' canonica se:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h = \lambda(\sum_{h=1}^{n} P_h dQ_h) + \psi dt + dF$$

dove ψ e dF sono funzioni dello spazio delle fasi (q,p).

Che paravento il signor Lie! Questa e' una condizione necessaria e sufficiente perche' la trasformazione sia canonica.

Il coefficiente λ e' solo un fattore di scala nelle unita' di misura dei nuovi impulsi P_h, infatti noi spesso lo poniamo uguale a 1.

19.1 Un caso in cui λ=-1

Prendiamo una trasformazione canonica molto stupida, semplicemente quella che manda le q nelle p e viceversa. Tanto lo posso fare, ragion per cui non ho nessuna remora a farlo:

$$\begin{cases} Q = p \\ P = q \end{cases}$$

Applico il formalismo hamiltoniano, se pongo (lo faccio perche' mi aiuta) $\mathcal{H}' = -\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \Rightarrow \dot{P} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{Q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P}\end{aligned}$$

Riprendiamo la formula di prima:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h = \lambda(\sum_{h=1}^{n} P_h dQ_h) + \psi dt + dF$$

un altro modo per scriverla e' dire che:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \delta q_h - \lambda(P_h dQ_h) = \psi dt + dF$$

vedete che perche' l'espressione $pdq - \lambda PdQ$ sia un differenziale totale, e' sufficiente fare:

$$QdP - \lambda PdQ = QdP + PdQ$$

ovvero porre $\lambda = -1$. Comunque per noi spesso $\lambda = 1$.

19.2 Dimostrazione della sufficienza con $\lambda = 1$

Se vale la condizione di Lie, allora la trasformazione e' canonica: questo e' cio' che vogliamo dimostrare. La necessarieta' non la facciamo perche' e' molto complicata.

Allora, abbiamo visto che se la variazione dell'azione e' 0, otteniamo le equazioni di hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{h=1}^{n} p_h q_h - H(q,p,t)]dt = 0$$

questo vuol dire che le mie equazioni sono equazioni di Hamilton. Se io da questa arrivo ad una condizione analoga, soddisfatta da Q e P su H', ho svoltato. Quello che faremo sara' ovviamente giungere alla cendizione di Lie.

Quello che io faccio e' prendere la condizione di lie, con $\lambda = 1$ poiche' spesso capitera' cosi', e anche a meno di un fattore moltiplicativo chiaramente la variazione sara sempre la stessa indipendentemente dal valore non negativo di lambda.

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h &= \left(\sum_{h=1}^{n} P_h dQ_h\right) + \psi dt + dF \\
\sum_{h=1}^{n} p_h \frac{dq_h}{dt} &= \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{dQ_h}{dt}\right) + \psi + \frac{dF}{dt} \\
\sum_{h=1}^{n} p_h \dot{q}_h &= \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \dot{Q}_h\right) + \psi + \frac{dF}{dt}
\end{aligned}$$

La sostituisco nella azione hamiltoniana:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\sum_{h=1}^{n} P_h \dot{Q}_h\right) + \psi + \frac{dF}{dt} - H(q,p,t)\right] dt = 0$$

palleggio un po:

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [(\sum_{h=1}^{n} P_h \dot{Q}_h) - (H - \psi)] dt \right\} + \delta \left[F\right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

Come facevamo la variazione nel principio generalizzato di hamilton? Tenevamo fisso l'istante di partenza, per trovare il percorso che minimizzava l'azione. Abbiamo visto che non ci serviva dire che le p non variassero, perche' a noi serviva solo sulle q che la partenza di p non variasse, poiche' integrando per parti il primo termine era un prodotto di p e q: se gia' q e' 0, p puo' avere valore arbitrario.

Pero' lo potevamo imporre, se ci andava. La dimostrazione non cambiava. Questa volta imponiamo che nemmeno le p varino. Infatti F potrebbe dipendere sia da p che da q, oltre che dal tempo, per cui a me serve che le p si stiano ferme. Se non vario ne' le p, ne le q, la funzione all'inizio e alla fine non si sposta, per cui la sua variazione e' 0. Posso eliminare l'ultimo termine. Allora deduco che vale:

$$\delta \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [(\sum_{h=1}^{n} P_h \dot{Q}_h) - (H - \psi)] dt \right\} = 0$$

ovviamente, se pongo $H' = H - \psi$, ho svoltato. Se $\psi = 0$, allora la mia trasformazione e' detta completamente canonica.

Queste cose sono particolarmente importanti, perche' sono l'analogo delle isometria tra spazi vettoriali. Abbiamo un modo per spostare lo spazio delle fasi in un altra prospettiva senza deformarlo.

20 Come usare la condizione di Lie per generare trasformazioni canoniche?

20.1 Funzione generatrice di tipo 1

Immaginiamo di avere una funzione $F_1(q, Q, t)$: una funzione che dipende dalle q, dalle Q e dal tempo e' detta funzione generatrice di tipo 1.

Prendiamo la condizione di Lie, e poniamo $F \equiv F_1$:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{n} p_h dq_h - (P_h dQ_h) &= \psi dt + dF_1 = \\ \sum_{h=1}^{n} p_h dq_h - (P_h dQ_h) &= \psi dt + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial F_1}{\partial Q_h} dQ_h \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{25}$$

che portando dall'altra parte mi da:

$$\left[\sum_{h=1}^{n} \left(p_h - \frac{\partial F_1}{\partial q_h} \right) dq_h - \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_h} + P_h \right) dQ_h \right] - \left(\psi + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0 \tag{26}$$

Dalla (26) otteniamo la seguente:

$$\begin{cases} \psi = -\frac{\partial F_1}{\partial t} \\ P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_1} \\ p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h} \end{cases}$$

Se potete risolvere questo sistema, allora potete trovare una trasformazione canonica, ed esibire anche l'$\mathcal{H}'$.

20.2 Funzione generatrice di tipo 2

Definizione 17 *Una funzione $F_2(q, P, t) = F_1 + \sum_{h=1}^{n} P_h Q_h$ si dice generatrice di tipo 2*

questo perche' e' alla base della trasformazione di Legendre: per farla basta sommare o sottrarre alla vecchia quantita' la vecchia variabile moltiplicato per la nuova[2].

Con pochi passaggi preliminari, otteniamo.

[2] l'onanismo della generalizzazione non mi tenta: ecco spiegata l'assenza di fattori moltiplicativi

$$\begin{aligned}
\sum p_h dq_h - P_h dQ_h &= \psi dt + dF_1 = \\
&= \psi dt + dF_2 - \sum_{h=1}^{n} d\left[P_h Q_h\right] = \\
&= \psi dt + dF_2 - \sum_{h=1}^{n} (P_h dQ_h + Q_h dP_h) \\
\sum p_h dq_h + Q_h dP_h &= \psi dt + dF_2 \qquad (27)
\end{aligned}$$

Adesso manipoliamo la (27) come abbiamo fatto prima con la (25):

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{n} (p_h dq_h + Q_h dP_h) &= \psi dt + dF_2 \\
&= \psi dt + \sum_{h=1}^{n} (\frac{\partial F_2}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial F_2}{\partial P_h} dP_h) + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

e otteniamo

$$\sum_{h=1}^{n} (p_h - \frac{\partial F_2}{\partial q_h}) dq_h + (Q_h - \frac{\partial F_2}{\partial P_h}) dP_h - (\psi + \frac{\partial F_2}{\partial t}) dt = 0 \qquad (28)$$

un po' come prima, otteniamo delle identita' dalla (28):

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} \\ Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} \\ \psi = -\frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

Parte XII

Martedí 25 Novembre 2008

Vi ricordo che venerdi' c'e' l'esonero. Nell'aula 3 di matematica vanno fino alla lettera I. Nell'aule 3 e 4 di fisica nuova ci stanno tutti l'altri. L'orario non e' sicuro, tra il 4 e il 3.

Andiamo avanti con le trasformazioni canoniche. La volta scorsa abbiamo visto il criterio di Lie, e abbiamo visto che se:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h - (\lambda) P_h dQ_h = \psi dt + dF$$

allora la trasformazione e' canonica. Inoltre, se il primo membro e' un differenziale esatto allora ψ e' nulla, e la trasformazione e' completamente canonica.

La volta scorsa vi avevo anche presentato la funzione generatrice di primo tipo e di secondo tipo. Adesso vi presento le altre 2.

21 Funzione generatrice di tipo 3

Una funzione generatrice di tipo 3 usa i vecchi momenti e le nuove coordinate, e' un po' il contrario della F_2. Infatti vale $F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_{h=1}^{n} p_h q_h$, dove ho usato la trasformata di legendre della funzione di primo tipo, ottengo nella condizione di Lie:

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{n} p_h dq_h - P_h dq_h &= \psi dt + dF_1 = \\
&= \psi dt + dF_3 + \sum_{h=1}^{n} d(p_h q_h) = \\
&= \psi dt + dF_3 + \sum_{h=1}^{n} (q_h dp_h + p_h dq_h) = \\
\sum_{h=1}^{n} q_h dp_h + P_h dQ_h &= -\psi dt - dF_3 \qquad (29)
\end{aligned}$$

Adesso manipoliamo la (29) come abbiamo fatto prima con la (25) e la (27):

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^{n} q_h dp_h + P_h dQ_h &= -\psi dt - dF_3 \\
&= -\psi dt - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F_3}{\partial p_h} dp_h - \frac{\partial F_3}{\partial Q_h} dQ_h - \frac{\partial F_3}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

e otteniamo

$$\sum_{h=1}^{n} (q_h + \frac{\partial F_3}{\partial p_h}) dp_h + (P_h + \frac{\partial F_3}{\partial Q_h}) dQ_h + (\psi + \frac{\partial F_3}{\partial t}) dt = 0 \qquad (30)$$

Stesso procedimento di prima, analogo risultato.

$$\begin{cases} -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} = q_h \\ -\frac{\partial F_3}{\partial Q_h} = P_h \\ -\frac{\partial F_3}{\partial t} = \psi \\ H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

22 Funzione generatrice di tipo 4

Questa sezione va rivista, io non lo ho fatto per pigrizia Una funzione generatrice di tipo 4 dipende dai momenti vecchi e nuovi. Vale cioe':

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{h=1}^{n} p_h q_h + \sum P_h Q_h$$

Sostituendo, ottengo con grande semplicita':

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{n} p_h dq_h - P_h dQ_h &= \psi dt + dF_1 \\ &= \psi dt + dF_4 + \sum_{h=1}^{n} d(p_h q_h) - \sum_{h=1}^{n} d(P_h Q_h) \\ &= \psi dt + dF_4 + \sum_{h=1}^{n} (p_h dq_h + q_h dp_h) - \sum_{h=1}^{n} (P_h dQ_h + Q_h dP_h) \\ 0 &= \psi dt + dF_4 + \sum_{h=1}^{n} q_h dp_h - Q_h dP_h \\ \sum_{h=1}^{n} q_h dp_h - Q_h dp_h &= -\psi dt - dF_4 \end{aligned}$$

Ma al tempo stesso, dF_4 e' il differenziale totale. Ragion per cui riscrivo:

$$\sum_{h=1}^{n} q_h dp_h - Q_h dP_h = -\psi dt - \sum (\frac{\partial F_4}{\partial p} dp + \frac{\partial F_4}{\partial p} dP) - \frac{\partial F_4}{\partial t} dt$$

ovverosia, portando tutto dalla stessa parte dell'uguale:

$$\sum_{h=1}^{n} \left(q_h + \frac{\partial F_4}{\partial p} \right) dp_h + \left(\frac{\partial F_4}{\partial P} - Q_h \right) dP_h + \left(\frac{\partial F_4}{\partial t} + \psi \right) = 0 \qquad (31)$$

Otteniamo in questo caso:

$$\begin{cases} q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} \\ Q_h = \frac{\partial F_4}{\partial P_h} \\ \psi = -\frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

Notate che, ogni volta che la funzione generatrice non dipende dal mio tempo, la trasformazione e' completamente canonica.

E' molto importante! Una trasformazione canonica indipendente dal tempo e' completamente canonica.

Sul Goldstein c'e' una bella tabella riassuntiva delle funzioni generatrici, che potrebbe valer la pena ricopiare qui.

23 Metodo di Hamilton-Jacobi

Ora facciamo un bell'esempio: una funzione generatrice di tipo 1.

Prendo una funzione del tipo:

$$F_1(q, t, Q, t_0)$$

Solo che io faccio si' che sia costante in Q, per cui diventa (e gia' che ci sono gli do un altro nome):

$$S(q, t, Q_0, t_0)$$

visto? E' l'azione hamiltoniana! Io la hamiltoniana la ottengo tramite una funzione F_1.

Per funzioni di questo tipo valeva:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ P = p_0 = -\frac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$$

Per questo tipo di trasformazioni, vale $H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$, e al tempo stesso $-\frac{\partial S}{\partial t} = H$. Poiche' $S \equiv F_1$, allora la nuova hamiltoniana e' nulla.

Questa e' una ficata ragazzi[3], perche' se prendete dello condizioni iniziali la trasformazione canonica generata dalla S e' quella che vi collega i due punti dello spazio delle fasi: e' la trasformazione canonica che porta il sistema dalle coordinate vecchie alle coordinate nuove.

Il fatto che la nuova hamiltoniana sia nulla ci dice, usando le equazioni di hamilton sulla nuova hamiltoniana, $p_0 = cost$ e $q_0 = cost$ lungo il moto, cosa ovvia perche' le condizioni iniziali non variano lungo il moto.

[3]ipse dixit

L'evoluzione temporale da' una trasformazion canonica di cui la funzione principale di Hamilton e' la funzione generatrice.

Questo e' un nuovo modo di vedere il moto. E' un legame tra le condizioni iniziali e le posizioni ad un certo istante di tempo: le nuove coordinate sono le condizioni iniziali, che giustamente sono costanti, e la stessa cosa per i nuovi momenti.

Questo e' l'approccio di Hamilton Jacobi: dall'azione lungo il moto naturale, si trova il moto effettivo del corpo. Da notare che questa trasformazione non e' completamente canonica.

24 Un rapido test di canonicita' tramite parentesi di Poisson

Vi ricordo che le parentesi di Poisson di due funzioni $f(q,p)$ e $g(q,p)$ sono:

$$[f,g]_{q,p} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_h}\frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial g}{\partial q_h}$$

Se io ho una cosa del tipo:

$$\begin{array}{rcll} q_h & = & q_h(Q,P) & \qquad Q(q,p) \\ p_h & = & p_h(Q,P) & \qquad P(q,p) \end{array}$$

Scrivo le due funzioni nelle nuove coordinate. Varra' ora, per la sola definizione di parentesi di Poisson:

$$[f',g']_{Q,P} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial Q_h}\frac{\partial g'}{\partial P_h} - \frac{\partial f'}{\partial P_h}\frac{\partial g'}{\partial Q_h}$$

Dove le funzioni f' e g' sono le funzioni lungo le nuove coordinate.

Proprietà 2 *Le parentesi di Poisson sono invarianti per trasformazioni canoniche, ovvero:*

$$[f,g]_{q,p} = [f',g']_{Q,P}$$

Dimostriamolo solo per trasformazioni canoniche. Questa e' una dimostrazione che cerco di riscrivere un poco meglio.

Allora, immaginiamo di avere una trasformazione completamente canoncia, cui diamo in pasto una funzione dello spazio delle fasi:

$$f'(Q,P) = f(Q(q,p), P(q,p))$$

e una hamiltoniana g':

$$g'(Q,P) = g(Q(q,p), P(q,p))$$

l'uguaglianza di cui sopra vale poiche' la trasformazione e' completamente canonica. Poiche' g e' una hamiltoniana, e la funzione f non dipende esplicitamente dal tempo, vale allora, per le proprieta' delle parentesi di Poisson:

$$[f,g]_{q,p} = \frac{d}{dt}f(q,p)$$

Pero' anche g' e' l'hamiltoniana di f':

$$[f',g']_{Q,P} = \frac{d}{dt}f'(Q,P)$$

visto che f ed f' sono in realta' la stessa funzione, la derivata totale sara' uguale: ovvero:

$$[f',g']_{Q,P} = \frac{d}{dt}f'(Q,P) = \frac{d}{dt}f(q,p) = [f,g]_{q,p}$$

24.1 Applicazioni

Supponiamo di avere solo un grado di liberta'. Abbiamo visto che per definizione in questo caso:

$$[Q,P]_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

Se io uso le nuove variabili, allora ottengo che:

$$[Q,P]_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial Q}\frac{\partial P}{\partial P} - \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{\partial Q}{\partial Q}\frac{\partial P}{\partial P} = 1 \tag{32}$$

Questo per un solo grado di liberta'.

Per piu' gradi di liberta', si ottengono le parentesi di Poisson fondamentali:

$$[Q_r, Q_s]_{q,p} = 0 \qquad [Q_r, P_s]_{q,p} = \delta rs \qquad [P_r, P_s]_{q,p} = 0 \tag{33}$$

Il test di canonicita' si fa semplicemente cosi' si vede che la (32) venga 1.

In questo modo, abbiamo dimostrato che per ogni trasformazione completamente canonica indipendente dal tempo valgono le relazioni (33). In realta', la condizione e' anche sufficiente, ma noi non lo dimostriamo.

Parte XIII

Giovedí 27 Novembre 2008

Domani tu l'esonero lo fai in aula 4. Alle 4. Fino alle 18:30-18:40.

Potete portare tutto quello che vi pare. Vi ho gia' avvisato che saro' feroce su questo aspetto, perche' non dovete copiare in nessun modo.

Finiamo le trasformazioni canoniche:

25 Una proprieta' delle trasformazione canoniche: $|J| = 1$

Il determinante dello jacobiano di una trasformazione canonica e' uguale a 1.

Infatti, se avete $(q,p) \mapsto (Q,P)$, lo jacobiano vale:

$$J = \frac{\partial(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)}{\partial(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)}$$

Questa trasformazione $(q,p) \mapsto (Q,P)$ la posso vedere come $(q,p) \mapsto (q,P) \mapsto (Q,P)$. Cosi' giustifico il primo passaggio. Gli altri sono soltanto algebra e teorema di Binet.

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)}{\partial q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)} = \\
&= \frac{\partial(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)}{\partial(q_1,...,q_n,P_1,...,P_n)}\frac{\partial(q_1,...,q_n,P_1,...,P_n)}{\partial(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)} = \\
&= \frac{\partial(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)}{\partial(q_1,...,q_n,P_1,...,P_n)}\left[\frac{\partial(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)}{\partial(q_1,...,q_n,P_1,...,P_n)}\right]^{-1} = \\
&= \frac{\partial(Q_1,...,Q_n)}{\partial(q_1,...,q_n)}_{P=cost}\left[\frac{\partial(p_1,...,p_n)}{\partial(P_1,...,P_n)}\right]^{-1}_{q=cost} = \\
|J| &= det\left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right]\left[det\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Poniamo di avere una trasformazione di secondo tipo:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

Sostituisco nell'ultima eguaglianza e ottengo:

$$|J| = det\left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right]\left[det\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right)\right]^{-1} = det\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial q_k}\left[det\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_k \partial q_i}\right]^{-1} = 1$$

Infatti quelle due derivate sono identiche, per il teorema di Schwartz, per cui quelle due matrici sono l'una l'inversa dell'altra, e il loro prodotto e' la matrice identita', di determinante 1.

Parte XIV

Martedí 2 Dicembre 2008

Intanto mi sa che non ce la facciamo a fare tutti gli esoneri, purtroppo. Questo e' triste, ma capita.

26 Le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile

Consideriamo un potenziale $U(q_1, ..., q_n)$. Abbiamo visto che se il potenziale ha un minimo isolato, l'equilibrio e' stabile. Se io lo perturbo, quando sta in un potenziale, questo oscilla. Per sapere come oscilla, sviluppiamo in serie di taylor il potenziale:

$$U(q_1, ..., q_n) = U(\bar{q}_1, ..., \bar{q}_n) + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}|_{q_h=\bar{q}_h} \eta_h + \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}|_{q_{h,k}=\bar{q_{h,k}}} \eta_h \eta_k + ...$$

Dove abbiamo posto $\eta_h = q_h - \bar{q}_h$.

Trascurando il termine costante perche' irrilevante per il potenziale, il termine lineare perche' stiamo in un minimo e quelli di ordine superiore al secondo perche' piccoli, vale:

$$U(q_1, ..., q_n) \simeq \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \eta_h \eta_k$$

Possiamo scrivere l'energia cinetica approssimandola con quella calcolata nel punto di equilibrio stabile. Notando inoltre che $\dot{\eta} = \dot{q}$, per l'energia cinetica, abbiamo:

$$T \simeq \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}|_{q=\bar{q}} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_h$$

I coefficienti a_{hk}sono ancora funzione delle q, ma noi stiamo considerando il moto intorno al nostro minimo, per cui calcolandole in un certo valore della posizione smette di variare su di essa.

Dunque la lagrangiana varra', in questo particolare intorno, se chiamiamo $T_{hk} = a_{hk}|_{q=\bar{q}}$:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n}(T_{hk}\dot{\eta}_h\dot{\eta}_k - U_{hk}\eta_h\eta_k$$

Per la proprieta' della lagrangiana, sappiamo che:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}_l} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_l} = 0$$

quando derivo la lagrangiana rispetto alla l-esima coordinata, avro' dei casi in cui uno dei h coincide ad l, uno in cui solo k coincide con l, e uno in cui coincidono entrambi. Dunque ho:

$$\frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{2}T_{hl}\dot{\eta}_k + \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}T_{lk}\dot{\eta}_h = \frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n}T_{hl}\dot{\eta}_k = \sum_{h=1}^{n}T_{hl}\ddot{\eta}_k$$

questo per quanto riguarda il momento generalizzato. Per la derivata del potenziale faccio lo stesso giochino, e alla lunga ottengo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_l} = -\sum_{k=1}^{n}U_{lk}\eta_k$$

Ragion per cui ho ottenuto:

$$\sum_{k=1}^{n}(T_{hk}\ddot{\eta}_k + U_{hk}\eta_k) = 0$$

Ma la soluzione di questo equazione la conoscete, poiche' e' un oscillatore armonico. Cerco dunque delle soluzioni della forma$\eta_k = a_k e^{i\omega t}$. Ottengo:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(T_{hk}(-\omega^2)a_k e^{i\omega t} + U_{hk}a_k e^{i\omega t}\right) = 0$$

Ma ora, io posso semplificare l'esponenziale, poiche' sempre non nullo, e mettere in evidenza a_k.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(T_{hk}(-\omega^2) + U_{hk}\right)a_k = 0$$

Questo e' un sistema di equazioni n (per ogni h ce ne e' una) in n incognite (una per ogni coefficiente a_k). Puo' essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 T_{11} + U_{11} & -\omega^2 T_{12} + U_{12} & \ddots & -\omega^2 T_{1n} + U_{1n} \\ \vdots & -\omega^2 T_{22} + U_{22} & \ddots & \vdots \\ & & & -\omega^2 T_{nn} + U_{nn} \end{pmatrix}$$

Essendo il sistema omogeneo, una soluzione e' quella banale per cui tutti i coefficienti sono 0. Uso il teorema di Rouche'-Capelli, e dico che il determinante deve essere nullo se voglio che ci siano altre soluzioni:

$$det[T_{hk}(-\omega^2) + U_{hk}] = 0$$

Se io trovo i moti propri (diagonalizzo, sempre possibile data la simmetria della matrice, ovvero perche' uso derivate seconde) da questo trovo tutti gli altri. Basta che pensi agli oscillatori accoppiati e capisci perche.

In questo modo trovo tante belle ω_h. Ottengo n moti propri, del tipo $a_{hk}\cos(\omega_h t + \varphi_h)$. In generale, vale:

$$q_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Ovvero lungo ogni coordinata generalizzata ci si muove come un oscillatore accoppiato.

Ora so descrivere le piccole oscillazioni. Facciamo un po' di pausa e un po' di esercizi.

Parte XV

Martedí 4 Dicembre 2008

27 Il metodo di Hamilton-Jacobi

E' un metodo molto importante per la risoluzione delle equazioni del moto, non sempre piu' facile ma concettualmente importantissimo. E' la trasformazione:

$$(q, p) \mapsto (\pi, \beta)$$

vogliamo di nuovo usare la funzione caratteristica di Hamilton come funzione generatrice, ovvero $S(q, \pi, t)$. Abbiamo gia' visto che questa funzione ha Hamiltoniana $H' = 0$ e quindi ha $\dot{\pi} = \dot{\beta} = 0$.

Inoltre, poiceh' S e' una funzione generatrice del primo tipo, deve valere:

$$\begin{cases} H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} \\ p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \\ \beta_h = -\frac{\partial S}{\partial \pi_h} \end{cases}$$

Poiche' la nuova hamiltoniana e' nulla, vale:

$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ma essendo le nuove coordinate β e π le nostre condizioni iniziali, allora abbiamo trovato il moto:

$$q_h = q_h(\pi, \beta, t) \qquad p_h = p_h(\pi, \beta, t)$$

poiche' le nuove coordinate sono le condizioni iniziali. S dipende dalle q e dalle π, con quest'ultime costanti. In generale, quasi sempre ricavare la funzione S e' complicato, per cui non conviene.

Purtuttavia una classe di sistemi molto interessante (quelli in cui $\mathcal{H}$ non dipende dal tempo) consente di trovare una S fatta cosi':

$$S(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = W(q, \frac{\partial S}{\partial q}) - Et$$

Se sostituite questa espressione qui dentro, quando andate a fare la derivata parziale rispetto al tempo ottenete:

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}) + \frac{\partial S}{\partial t} = H - E = 0 \Rightarrow H = E$$

che e' quello che proprio quello che sapevamo gia'. La funzione S e' funzione di q, di p e di t, perche' le nuove coordinate sono costanti, perche' sono le condizioni iniziali. Per cui $E = \pi_1$, visto che tanto sono entrambe costanti le prendo una uguale all'atra. In questo modo posso trovare W, e in seguito trovare il resto. I casi in cui posso trovare S sono quelli integrabili.

28 Applichiamolo all'oscillatore armonico

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

Da qui so che:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial q})^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ma visto che la S dipende dal tempo solo nel termine Et, e dipende dalle coordinate solo nel termine W, ho:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = E$$

E' una equazione alle derivate parziali, con la differenza che visto che il sistema e' unidimensionale la derivata parziale e' un differenziale totale. Sapendo questo, facciamo un poco di calcoli:

$$\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = 2m(E - \frac{k}{2}q^2) = mk(\frac{2E}{k} - q^2)$$

ma allora:

$$\begin{aligned} \int dW &= \int \sqrt{mk(\frac{2E}{k} - q^2)} = \\ W &= \sqrt{mk}\int_{q_0}^{q} dq\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} \end{aligned}$$

ho trovato la S! Posso festeggiare!

$$S(q, E, t) = \sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} - Et$$

Non me ne frega nulla di fare effettivamente l'integrale, perche' ho gia' π, e posso trovare β con semplicita':

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}}\int dq\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}} = \\ &= -t - \sqrt{\frac{m}{k}}\arccos\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right) \end{aligned}$$

Siamo quasi arrivati. Siamo arrivati a dire che:

$$\beta + t = -\sqrt{\frac{m}{k}}\arccos(q\sqrt{\frac{k}{2E}})$$

Chiamiamo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, moltiplichiamo per ω a destra e a sinistra, prendiamo il coseno e otteniamo:

$$q\sqrt{\frac{k}{2E}} = \cos[\omega(\beta + t)]$$

e isolando q:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos[\omega(\beta + t)]$$

che e' l'equazione dell'oscillatore armonico!

L'ultima equazione e' sicuramente giusta, quella prima e' verosimilmente sbagliata.

29 Non necessario esame

¡ E' chiaro che e' difficile risolvere queste equazioni alle derivate parziali, noi ci siamo riusciti solo perche' abbiamo un solo grado di liberta', che ci ha permesso di ricavare le w tramite la separazione di variabili.

Un caso in cui si riesce ad andare piu' avanti e' la separazione di variabili. Il problema vi si propone in modo analogo a quando c'e' un solo grado di liberta', ma avete tante equazioni che poi bisogna mettere insieme. Quando e' che le variabili sono separabili (bisticcio di parole)?

Se q_1 e $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ compaiono sotto forma di una particolare combinazione, ovvero tramite una $\varphi(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1})$

Allora cercate una funzione S del tipo:

$$S = S_1(q_1) + S'$$

In questo caso:

$$\begin{cases} \varphi(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}) = \pi \\ \Phi(q_h, t, \frac{\partial S}{\partial q_h}, \frac{\partial S}{\partial t}, \pi_1) = 0 \end{cases}$$

questo ha la stessa forma dell'oscillatore armonico. Avete preso una variabile e la hai separata dalle altre. Se tutte le coordinate sono separabili, alla fine si puo' integrare il moto.

Parte XVI

Martedí 9 Dicembre 2008

Oggi ci rilassiamo abbastanza e facciamo solo esercizi e rediscussioni di quelli passati. Ancora una volta, fate attenzione alle dimensioni, perche' se fate errori di dimensione io mi scoccero' moltissimo.

Rispieghiamo la funzione caratteristica di Hamilton. Abbiamo visto che la azione (famo che c'e' un solo grado di liberta') e':

$$A[p,q] = \int_{t_0}^{t_1} dt[p\dot{q} - \mathcal{H}]$$

questo e' un funzionale, ovvero e' una applicazione che da una funzione ne da' un'altra, ed e' una espressione di queanto costa al sistema di muoversi in un certo moto. Fino ad ora noi abbiamo parlato di costo del sistema in termini di energia, e l'azione e' correlata all'energia, essendo una energia per un tempo. Questo classicamente, ma in realta' nella meccanica quantistica il sistema non sceglie una traiettoria, le segue tutte quante[4]. La grande intuizione di Feynman e' di discutere la meccanica quantistica in termini di traiettoria dell'elettrone. Noi, stando in meccanica classica, vediamo il corpo scegliere una determinata traiettoria, che e' quella con azione minima. Questo lo abbiamo dimostrato.

Quello che ha fatto il signor $\mathcal{H}$amilton e' valutare l'azione per il moto fisicamente effettivo, fissando q e p e variando il punto di arrivo. Questa la chiamo funzione caratteristica di hamilton.

$$S(q,t,q_0,p_0) = \int_{t_0}^{t} d\tau[p(\tau)\dot{q}(\tau) - \mathcal{H}(q(\tau),p(\tau),\tau)]$$

questa funzione (perche' e' una funzione, non un funzionale) e' univocamente determinata, vedendola per esempio per l'oscillatore armonico. Le cose con 0 sono le condizioni iniziali, mentre q e t sono posizione e tempo effettivo. Fissando le due posizioni, al variare dei tempi, ho varie traiettorie dello spazio delle fasi.

Il valore di questa cosa e' soprattuto concettuale, perche' ci fa vedere il moto non come una cosa che, istante per istante, ho una forza che modifica la velocita' e la velocita' modifica la posizione, ma come una cosa restituita da una certa funzione ben precisa. Voi sapete gia' come si muove il sistema senza far passare il tempo. Se volete, e' un po' come le confessioni di santagostino, dove lui spiega che il tempo per dio sta fermo e lui vede ogni cosa e ogni tempo tutto quanto insieme.

30 Il metodo di $\mathcal{H}$amilton-Jacobi

[4] E' un bel casino!

Voglio andare cosi':

$$(q, p) \mapsto (\pi, \beta)$$

.

Se l'hamiltoniana si conserva e io voglio che queste coordinate siano costanti, allora pongo per esempio $\pi = E$ perche' tanto io so che π e' costante e allora la pongo uguale all'energia. Risolvendo il moto dell'oscillatore armonico come la volta scorsa io ho che la fase e' il momento coniugato dell'energia.

Occhio che la 1.5 c'e' un errore di stampa (dovrebbe esserci un meno). Forse anche 2.3 e 2.4 sono fallate. 9.8 Dovrebbe essere sicuramente giusta, forse.

Comunque, io pongo che sia:

$$S = W - Et$$

con W indipendente dal tempo. Esercizio sul quaderno.

$$0 = H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

ragion per cui:

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} = E$$

Parte XVII

???

La volta scorsa non avevo l'alimentatore del computer, ho dovuto prendere appunti a mano sul quaderno giallo.

Argomento della lezione erano il teorema di Liouville e la ricorrenza di Poincare'. Sulle dispense sono abbastanza chiari, e' inutile che io perda tempo

Parte XVIII

Martedí 16 Dicembre 2008

Oggi piottiamo e cominciamo subito la relativita', cosi' durante le vacanze vi chiarite le idee e dopo le vacanze arrivate con una serie di dubbi e idee confuse da chiarire quando ci vedremo. Cosi' avrete tempo per ragionarci su.

31 La relativita' speciale

Questa la faremo compressa e formalmente insostanziale, poiche' non abbiamo il calcolo tensoriale. Noi faremo una attivita' rigorosa nel nostro piccolo. Io mi occupo di meccanica statistica e teoria dei campi, per cui la relativita' io non la uso di solito. A me piacque molto il fatto che quello che sembra vero non sempre lo e'. E' abbastanza curioso come in tutte e due ci sia lo zampino di Einstein.

Quello che sto per dirvi e' molto concettuale, per cui dovete capire quello che vi dico. Cmq tranquilli, una volta che voi accettate che la natura e' come e' funziona relativamente tutto. Questo e' molto interessante anche dal punto di vista epistemologico e psicologico, c'e' uno psicologo che ha studiato come nel bambino si sviluppa il concetto della quantita' di moto. Noi abbiamo dei paradigmi che ci servono per scappare dal leone, non per acchiappare un elettrone che parte. Per noi la legge di Newton funziona perche' non siamo in grado di vedere una qualunque variazione di massa, essendo tutti noi lentissimi.

32 Punto di vista storico

E' interessante un approccio storico. La relativita' e' nata dal conflitto di due formule: l'equazione delle onde elettromagnetiche

$$(\frac{\partial}{\partial x}^2 + \frac{\partial}{\partial y}^2 + \frac{\partial}{\partial z}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}^2)\varphi = 0$$

e le trasformazioni di Galileo. Se due sistemi si muovono l'uno rispetto all'altro, vale:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

le trasformazioni di Galileo ci paiono molto ragionevoli, soprattutto l'ultima: il mio orologio non va diverso se sto su un aereo in volo o sto fermo.

Se ho un'onda che si propaga nel sistema di riferimento in moto, tramite una sostituzione, ottengo tuttavia un'equazione ben diversa. E' come se ottenessi una seconda legge di Newton che vale solo in un sistema di riferimento inerziale e non in un altro. Una cosa strana, no?

Se l'equazione delle onde vale in s ma non in s', allora c'e' un sistema di riferimento inerziale piu' uguale di tutti gli altri: non tutti sono uguali allo stesso modo.

Il sistema di riferimento dell'universo sarebbe in questo modo quello che abbia la velocita' della luce uguale a c.

La luce e' un onda, dunque ci si aspetta che si propaghi in qualche cosa. Poiche' la propagazione della luce era stata osservata anche nel vuoto, allora si riteneva che la luce si propagasse anche nell'etere, uno strano materiale che permeava ogni cosa, da un lato talmente leggero da non avere massa osservabile e dall'altra talmente rigido da far propagare la luce velocissimamente.

Si era sicuri che l'onda si propagasse secondo l'equazione delle onde, per motivi sia sperimentali sia teorici (l'equazione derivava dall'equazioni di Maxwell, terribilmente eleganti e bellissime), pero' non era invariante per trasformazioni galileiane. Dobbiamo modificare le trasformazioni Galileiane in un qualche modo: non ci va di modificare la parte relativa al tempo, per cui dico che devo mettere il moto d'etere rispetto al sistema di riferimento.

33 Punto di vista sperimentale

attenzione: tutta questa sezione e' spiegata ben meglio sulle dispense.

33.1 L'aberrazione stellare

La luce viene dalla stella con velocita' c, e io sto in un certo punto a guardarla. In quello stesso punto in cui vedo la stella, passsa un osservatore con velocita' diversa dalla mia. Ci aspettiamo che la velocita' della luce per lui sia:

$$\vec{c} = \vec{v} + \vec{c}'$$

e quindi che la posizione delle stelle gli appaia diversa, poiche' la velocita' della luce della stella composta con la sua fa un certo angolo con il raggio vettore che lo collega effettivamente alla stella. Questo appariva quando si guardava dalla terra una stella. L'aberrazione stava nel fatto che, a distanza dei sei mesi, la stella era marcatamente spostata rispetto a prima.

L'angolo di aberrazione vale, per la regola del coseno:

$$\frac{\sin \Delta\theta}{\sin(\pi - \theta')} = \frac{v}{c} \Rightarrow \sin \Delta\theta = \frac{v}{c} \sin(\pi - \theta')$$

Poiche' la velocita' della terra e' molto piccola a paragone della velocita' della luce:

$$\Delta\theta \approx \frac{v}{c} \sin \theta$$

dove ho approssimato θ' con θ perche' i due angoli sono molto simili.

Per trovare questa aberrazione stellare ho usato la composizione delle velocita', ovvero le trasformazioni di Galileo. Questo forniva un accordo sperimentale con la legge dell'etere immobile.

33.2 L'effetto Doppler

E' un effetto comune a tutti i fenomeni ondulatori. Immaginate di avere un'onda che si propaga: c'e' una lunghezza d'onda λ. Se l'onda si propaga con velocita' c, il massimo si sposta andando avanti con il tempo, e dopo un periodo passa un altro massimo. Chiaramente:

$$\lambda\nu = c$$

dove ν e' la frequenza. Se invece l'osservatore si sposta rispetto al mezzo di propagazione dell'onda.

In questo caso il prossimo massimo mi insegue e io vedo l'onda con velocita' $c - v$, dove v e' la mia velocita' si avra':

$$\lambda\nu' = c - v$$

dove ν' e' la frequenza misurata quando mi sposto. In questo caso:

$$\nu' = \frac{c - v}{\lambda} = (1 - \frac{v}{c})$$

poiche' ho messo in evidenza ν, ovvero $\frac{c}{\lambda}$.

Anche questo veniva trovato con la relativita' galileiana, e funzionava, poiche' prevedeva redshift e blueshift effettivamente osservati.

33.3 L'esperimento di Frennel-Fisot

Se abbiamo una sorgente di luce, e mettiamo uno specchio semiriflettente che fa arrivare in un rilevatore due raggi di luce che riuniamo tra loro, in modo da ottenere lo stesso raggio di prima tramite interferenza costruttiva.

E se invece mettiamo un fluido in parte nel percorso, otteniamo la stessa cosa se il mezzo e' fermo. Se il fludio lo facciamo muovere in un senso concorde rispetto ad uno dei raggi e discorde con l'altro, si creano delle frange di interferenza, proporzionali alla velocita'.

Di nuovo, ho visto che la radiazione che si muove con una velocita' c nell'etere quando mi metto in un sistema di riferimento in moto ottengo una frequenza diversa.

Tutto questo appariva coerente con la nostra teoria galileiana.

33.4 Studio dell'etere

Certo, e' un po' brutto tutto questo: sembrerebbe che l'etere sia un gas di neutrini, che c'e' ovunque e non interagisce con nulla. E' ancora piu' strano pensare che la luce e' un onda trasversa, e nel gas le onde trasverse non si propagano perche' e' necessaria una forza di richiamo che fa tornare le molecole a posto. Questo farebbe pensare che l'etere sia al tempo stesso etereo e impalpabile ma terribilmente solido.

Tutti questi risultati dicevano che l'etere era in moto.

33.5 L'esperimento di Michelson-Morley

Questo fu l'esperimento che mostro' nessun movimento rispetto all'etere. In questo esperimento, si sperava di poter dimostrare e misurare la velocita' della terra rispetto alla terra. L'idea e' simile a quella di Frennel-Fisot. Senza che lo descrivo perche' lo conosci gia. Due raggi di luce fanno due percorsi posizionati differentemente rispetto al vento d'etere. Per gli stessi motivi dell'esperimento di Frennel-Fisot, ci si aspetta di trovare delle frange di interferenza: e invece non si vede un tubo. Le due braccia potevano anche essere di lunghezza diversa, ma tanto bastava girare l'apparecchio e il problema era risolto.

Questo oggetto era montata su una tavola di marmo che galleggiava nel mercurio. Questo perche' quando io giravo il coso con la lastra di marmo non dovevo avere delle vibrazioni di sorta, o lo specchio si sarebbe potuto spostare nella rotazione. il tempo dei due percorsi e':

$$\begin{cases} T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ T_2 = \frac{2}{c}\sqrt{l_2^2 + (\frac{vT_2}{2})^2} \end{cases}$$

Poiche' il tempo e' diverso, allora vi e' uno sfasamento Δt:

$$\Delta t = T_2 - T_1 = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{(1-\frac{v^2}{c_2}}\right]$$

Certo, devo misurare i due cammini con precisione del milionesimo di millimetro. Chiaramente, se uno dieci stanze piu' in la' apre la finestra il mio sistema smette di essere preciso. Allora, michelson e morley sono cazzutissimi[5] e lo girano. cosi' rifaccio tutto il discorso di adesso, e scambio tra loro questi due percorsi. In questo caso:

$$\Delta t' = \frac{2}{c}\left[\frac{l_2}{(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

[5]ha detto cosi'

in questo modo le mie frange di interferenza sono uguali ma traslate. allora, in questo caso, ho:

$$\Delta\tau = \Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}(l_1 + l_2)[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}] \tag{34}$$

in questo modo, ho una precisione di 10^{-10}. I due hanno trovato che questo sfasamento semplicemente non sosteneva. Allora, era come se la velocita' della terra rispetto all'etere era nulla.

Allora la gente inizio' a pensare ad un moto laminare dell'etere, come per tutti i fluidi di questo mondo. C'e' un libro molto bello che e' struttura di rivoluzioni scientifiche Thomas Koone. Se voglio posso leggerlo e fare bella figura all'esame.

In soldoni, nella scienza normale c'e' un avanzamento fatto di piccole perturbazioni dal modello iniziale. Ad un certo punto si ha invece un fallimento generalizzato del paradigma, e si fa un grande cambiamento che implica l'abbandono di un paradigma.

Per fortuna e' arrivato zio Albert che ha capito qual'era l'unico singolo punto da toccare per cambiare il mondo.

Il tempo e' relativo, la velocita' della luce no.

34 Le nuove leggi di trasformazione da utilizzare

I dati sperimentali indicavano che la velocita' della luce fosse in modulo la stessa in ogni sistema di rifermimento. Idea centrale della fisica e' che le leggi fisiche fossero le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale. Zio Albert ha dunque sviluppato la sua teoria partendo da queste due cose.

Si abbia il sistema di riferimento S e il sistema di riferimneto S', che si muove con velocita' v rispetto ad S. Vogliamo cercare le leggi di trasformazione analoghe a galileo, assumendo che $c = c'$. Se questa e' la stessa, posso accendere una lampadina e si crea un'onda sferica luminosa che si allontana dall'origine. Questa sfera sara' tale che:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{35}$$

ovvero, il raggio della sfera e' lo spazio percorso nel tempo t. Nel sistema di riferimento S' deve succedere la stessa cosa:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{36}$$

galileo mi dice che:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{37}$$

se trasformo la (36) con le (37) ottengo qualcosa di marcatamente diverso dalla (35):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xvt + v^2t^2 = c^2t^2$$

ragion per cui non penso proprio che le trasformazioni di galileo siano quelle giuste.

Devo fare una modifica, tenendo conto di queste cose:

1. se $\frac{v}{c} \to 0$ vale la trasformazione di galileo.
2. voglio una trasformazione lineare, cosi' mando sfere in sfere, che e' giusto se penso che la velocita' della luce e' sempre la stessa.

Provo allora a trasformare il tempo in questo modo $t' = t + fx$:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xvt + v^2t^2 = c^2t^2 + c^2f^2x^2 - 2c^2f^2xt$$

Vedo che se pongo:

$$f = -\frac{v}{c^2}$$

allora ottengo:

$$x^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + y^2 + z^2 = c^2t^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) \tag{38}$$

se cambiassi anche la x nella trasformazione di galileo, posso ottenere la sfera di partenza semplicemente tramite:

$$x = x\sqrt{\frac{v^2}{c^2}}$$

e al tempo stesso ponessi anche:

$$t' = (t - \frac{v}{c^2})\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

allora otterrei:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Le leggi da usare sono dunque:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y$$
$$t' = \frac{(t - \frac{v}{c^2}x)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad z' = z \tag{39}$$

Lorentz aveva gia' trovato queste trasformazioni, che infatti sono trasformazioni di Lorentz, come quelle che mantengono invariate per sistemi inerziali le equazioni di Maxwell. Einstein scoperse, il significato fisico delle trasformazioni di Lorentz.

La volta prossima vediamo la dilatazione dei tempi e la composizione delle velocita'.

Parte XIX
Giovedí 18 Dicembre 2008

Oltre alle dispense, potreste comprare la fisica 1di Bertley[6]. Poi c'e' il Taylor francese che e' AL'LA DECOUVER DE LO ESPACETIME (O UNA COsa del genere, ma tanto e' in francese e sticazzi).

Con l'esperimento di michelson e morley abbiamo visto che la velocita' della luce sembra essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento, indipendentemente dal loro moto. Questo sembrava portare come corollario il fatto che la terra e' ferma rispetto all'etere, che aveva una conseguenza molto strana[7].

Adesso, io ho due sistemi di riferimento. Se i due sistemi di riferimento sono in movimento l'uno rispetto all'altro, e l'uno accende una lampadina per le trasformazioni galileiane il nostro amico si sente al centro della onda sferica, mentre il tizio in moto no. Usando la composizione di Loretnz, invece (che lorentz le aveva ricavate perche' queste mantenevano l'elettromagnetismo invariante per sistemi di riferimento), tutto fila. In questo modo il tempo non e' piu' qualche cosa di assoluto, bensi' di relativo. Questo vuol dire che la simultaneita' di due eventi e' dipendente dal sistema di riferimento. Il tempo diventa una coordinata, per cui qualunque evento e' caratterizzato da 4 coordinate, di cui tre spaziali e una temporale. Per ragioni dimensionali, lo moltiplichiamo per una costante, come ad esempio c:

[6] no grazie, ho il goldstein
[7] pensa il papa come era contento!

$$E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$$

e

$$E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$$

sono due eventi, come ad esempio la partenza e l'atterraggio di lui che lancia un gessetto. Nello spazio euclideo la distanza e' invariante, e noi vogliamo mantenere questa proprieta'. Vogliamo introdurre una quantita' invariante nel nostro mondo quadridimensionale.

Nel cambiare riferimento devo usare le (**??**). La distanza e' il modulo del vettore differenza, ma il modulo lo definiamo in modo un po' diverso per mantenerlo invariante per trasformazioni di Lorentz.

Definizione 18 *La distanza di due eventi nello spazio tempo si indica con* $|E_1E_2|$ *e coincide con il modulo del vettore differenza, ovvero:*

$$|E_1E_2| = \sqrt{c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$$

dove il modulo non coincide con quello euclideo.

Questa trasformazione e' invariante per rotazioni nello spaziotempo. la distanza ta l'evento E_1 e una sua piccola correzione, ovvero tra E_1 e:

$$E_2 = E_1 + ds$$

dove:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ricaviamo ora la composizione della velocita'. Differenziamo la prima e la quarta equazione di Lorentz:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = dt\frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = dt\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}u_x)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

allora, il loro rapporto sara':

$$\frac{dx'}{dt'} = u'x = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}u_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

in modo analogo lui trova:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = u_y \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

e

$$u'_z = \frac{dy'}{dt'} = u_z \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_z}$$

Notate che se mettete $u_x = c$ o $u_y = c$ allora ottenete che il corpo sta giustamente a velocita' v.

34.1 La spiegazione dell'aberrazione stellare

Ci sono due sistemi di riferimento, uno fermo e uno immobile, che guardano dallo stesso punto una stella.

Il vettore velocita' del raggio di luce dalla stella e' $u = (0, c, 0)$, perche' si muove lungo l'asse y. La velocita' vista dal tizio in moto e' invece, svolgendo i calcoli $u' = (-v, c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, 0)$. Il vettore risulta effettivamente inclinato, ma ha modulo c^2. La teoria e' coerente con se stessa. Prendetevi 5 minuti perche' po vi dico della dilatazione dei tempi.

34.2 Un esperimento mentale

Abbiamo un sistema di riferimento S, per la cui origine passa un razzo S' . L'orologio del razzo e' fatto da una lampadina e da uno specchio, e funziona contando le volte in cui il raggio di luce fa avanti e indietro. In questo caso:

$$t' = \frac{\Delta y'}{c} \qquad (m)$$

Per cui dico che e' passato il tempo necessario alla luce per fare un certo numero di metri. Considero c come un numero puro.

Quando S' passa da S, l'astronauta sul razzo accende la lampadina. Supponiamo che lui conti il tempo che ci mette ad andare e tornare la luce dalla lampadina allo specchio allo specchio sulla lampadina.

In ogni caso, in questo caso $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$, $\Delta z' = 0$, $\Delta t' = 2m$.

La distanza nello spaziotempo e' in questo caso $\Delta s'^2 = \Delta t'^2$, poiche' nel sistema di riferimento del razzo il razzo stesso e' fisso.

Nel sistema di riferimento fisso, invece, $\Delta y' = \Delta y = \Delta z = \Delta z'$, pero' cambia il Δx.

$$\Delta x = v\Delta t$$

e anche il delta t va ricalcolato, che avevamo definito come il rapporto tra spazio percorso e c:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{(v\Delta t\frac{1}{)}^2 2 + y_0^2}}{c}$$

Ma il Δx elevato alla seconda e' sempre positivo, a questo sommo y_0^2, anch'esso un quadrato, per cui per me il tempo impiegato dal raggio luminoso e' piu' lungo. Questo orologio in moto per me va piu' piano di quanto non vada per quello che si muove.

Per me e' passato un tempo di due metri, per l'astronave solo un metro e mezzo: io vedo la roba dentro il razzo piu' lenta di quanto non la veda l'astronauta. La cosa interessate e' che l'astronauta vede me che vado piu' lento di quanto io non veda me stesso. Infatti posso fare lo stesso discorso anche all'incontrario. Le leggi fisiche devono essere le stesse in qualunque sistema di riferimento inerziale. Fate attenzione, perche' il rischio e' quello di fare dell'onanismo mentale[8].

Se prendo un muone e lo tengo fermo, vedo che decade dopo solo $10^{-7}s$. Se io faccio un fascio di muoni, vedo che pero' e' stabile anche per un tempo piu' lungo. Questo perche' si muove molto velocemente rispetto a me, e dunque il suo tempo scorre ai miei occhi molto lentamente.

Questo si vede perche' spesso sono prodotti da protoni solari che cozzano con gli strati alti dell'atmosfera. Lui lo spiega in maniera un po' nebulosa, ma tu dovrai fare in modo di saper fare il calcolino come sul wilson-buffa perche' cosi' fai una bella figura.

35 Il paradosso dei gemelli

Due gemelli partono dalla terra, uno fa piu' strada l'altro di meno, accelerando e decelerando nello stesso modo.

Che eta' relativa hanno i gemelli quando tornano sulla terra?

$$dt' = \frac{dt + \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vabbe, ve lo faccio un'altra volta,

[8]attenzione che questo e' quello che ha detto

Parte XX

Giovedí 8 Gennaio 2009

Allora, parliamo di composiozione di velocita' e tempo.

La volta scorsa dicevamo di fare l'orologio a luce con la luce che rimbalza da uno specchio all'altro. Oggi, invece, facciamo che invece di avere un raggio di luce abbiamo la superficie che rimbalza tra due superfici perefettamente elastiche. In questo modo il tempo lo misuriamo in bonocore gay. Ovvero sia, per noi il tempo passa in

$$T = \frac{2-1}{v}$$

Se la mia navicella va a velocita' lontana da quella della luce allora noi vediamo la pallina che ha una velocita' somma delle due velocita', e l'orologio segna lo stesso tempo se la vediamo da noi o dalla navicella.

Se la pallina o la navicella vanno MOLTO veloci, allora gli effetti relativistici si fanno sentire, e il tempo misurato e' diverso perche' sommando vettorialmente le velocita' come siamo abituati a fare allora otterremmo un valore maggiore di quello della luce: si devono usare le trasformazioni di Lorentz.

Non c'e' niente da fare, il mondo funziona cosi', bisogna rendersene conto: gli esperimenti lo confermano.

36 Richiamo su spazio vettoriale

Nello spazio vettoriale ci sono vettori. E' uno spazio vettoriale perche' moltiplicando per scalare un vettore o sommandone due tra loro si ottiene un altro vettore, che fa parte dello spazio. Questo vuol dire che ha struttura affine. In uno spazio Euclideo ho anche una distanza ben precisa, nota come norma euclidea, che e' quella ottenibile tramite il teorema di pitagora. Con questa norma io posso anche definire un prodotto scalare tra i vettori, per cui la norma e' la radice del prodotto scalare del vettore per se stesso.

La distanza e' invariante per isometrie, ovvero trasformazioni ortogonali (cambio di base ortonormale, che si modellizza con matrice ortogonale).

37 Lo spazio di Minkowsky

Un punto dello spazio di Minkowsky e' detto evento, ed e' identificato in modo univoco da un vettore di 4 componenti. Minkowsky voleva che lo spazio tempo fosse invariante per trasformazioni di Lorentz (ovvero che le trasformazioni di Lorentz fossero un semplice cambio di sistema di riferimento).

Lorentz cerco' un prodotto scalare che fosse invariante per le sue trasformazioni, e lo trovo':

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_2 b_3$$

La distanza[9] di due eventi dello spazio tempo e' la norma del vettore che collega A e B secondo il prodotto scalare di Lorentz:

$$\overline{AB} = (c(t_2 - t_1), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|AB| = \sqrt{c^2(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

questo ci consente di spostarci nello spazio tempo senza modificare lo spaziotempo, ovvero possiamo spostare la telecamera senza inciampare nei fili e cadere nella cristalleria.

La cosa carina di questa norma e' che se il vettore ha norma negativa in un sistema di riferimento, lo avra' in TUTTI, essendo questa particolare norma invariante per trasformazioni di Lorentz. Essendo invariante , e' una caratteristica tipica del vettore [10].

Inoltre, quardate che cosa carina! Se un vettore ha norma nulla, possiamo portare le coordinate di posizione dall'altra parte. Otteniamo:

$$tc^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

i vettori a norma nulla sono tutti quelli sul cono formato dagli zeri del prodotto di Lorentz.

Se un vettore ha norma positiva stara' all'interno del cono, e si chiamera vettore di tipo tempo,poiche' esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso posto. I vettori a norma nulla sono detti di tipo luce, poiche' la luce si muove solo lungo questi vettori (e' vincolata, partendo da un punto, a stare in ogni punto altro solo in un certo tempo, non potendo cambiare la sua velocita'). I vettori fuori dal cono sono di tipo spazio, poiche' esistono sistemi di riferimento in cui avvengono simultanei. Poiche' per raggiungere due punti di tipo spazio bisognerebbe andare piu' veloce della luce, tra due punti di tipo spazio non puo' esserci rapporto di causa effetto.

[9] che non e' la distanza euclidea, come vedremo adesso.

[10] finche alla trasformazione di Lorentz non aggiungiamo una traslazione.

Fate l'esercizio: (0,3,2,0) e (b,-1,b,1). Per quali valori di b avvengono nello stesso punto?

Un altro esercizio carino e': due vettori (1,3,0,0) e (6,a,0,0). Per quale a sono simultanei?

Parte XXI
Giovedí 13 Gennaio 2009

Abbiamo visto che adesso siamo nel fantastico mondo della relativita', dove lo spazio non ha 3 dimensioni ma ne ha 4, di cui una e' il tempo (per ragioni dimensionali, il tempo e' moltiplicato per la velocita' della luce, cosi' ha le dimensioni di una lungezza).

La roba puo' cmq avere una traiettoria, descritta appropriatamente come una curva nello spazio tempo. Essa puo' essere rappresentata parametricamente, per cui in due dimensioni e':

$$\begin{cases} t(\lambda) = \dots \\ x(\lambda) = \dots \end{cases}$$

la linea di universo e' sempre tutta all'interno del cono, perche' nulla si puo' spostare piu' velocemente della luce.

Se esprimiamo x in funzione di t, rappresentazione cartesiana, otteniamo l'usuale traiettoria $x(t)$.

In linea di principio, l'oroloio puo' anche accelerare, per cui io non so bene come si comporta. Il tempo proprio e' il tempo per come scorre in un sistema di riferimento inerziale, solidale al mio corpo che fa la traiettoria. Se il corpo accelera, per ogni istante scelgo un nuovo sistema di riferimento inerziale, cosi' mi consente di bypassare la relativita' generale.

38 Tempo proprio

Il tempo proprio e' un parametro che scorre, e costituisce il parametro da inserire al posto del lambda.

Matematicamente, il tempo proprio e' definito come:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c}$$

poiche' in questo modo lo definisco tramite la norma, esso e' invariante per trasformazioni di Lorentz, ovvero per cambi di sistema di riferimento. Da qui introdurremo tutta una serie di quantita' cinematiche, che ci servono per analizzare il moto.

E' la stessa cosa della cinematica classica vista a Meccanica: prima abbiamo visto la cinematica, e poi avete definito varie grandezze, tra cui velocita' e accelerazioni. La quadrivelocita' ha componenti U_i, dove U_0 e' quella temporale e le altre tre quelle spaziali[11].

39 Quadrivelocita'

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau}$$

Notiamo che il modulo della quadrivelocita' e' sempre uguale a quello della velocita' della luce:

$$\begin{aligned}
d\tau &= \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} \\
c &= \frac{dds}{d\tau} = \frac{\sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{d\tau} \\
c^2 &= \frac{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{d\tau^2} \\
c^2 &= c\frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{d\tau^2} - \frac{dy^2}{d\tau^2} - \frac{dz^2}{d\tau^2} = U^2
\end{aligned}$$

Visto che cosa carina?

$$\vec{U} = (c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau})$$

C'e' di piu'. Sappiamo che per la dilatazione dei tempi:

$$dt = \gamma d\tau$$

Sostituiamo nell'espressione della velocita', e otteniamo:

$$\vec{U} = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

Precisiamo non solo che la linea di universo non puo' uscire dal cono, ma non puo' mai essere piu' inclinata del cono perche' senno' localmente si andrebbe piu' veloce della luce: il principio di relativita' pone serie limitazioni alla traiettoria di universo di un qualunque corpo nello spaziotempo.

[11] da ora in poi gli indici latini vanno da 0 a 3, quelli greci da 1 a 3

40 Quadriaccelerazione

E' definito semplicemente come:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau}$$

La quardiaccelerazione ha la proprieta' delle derivate di vettori di modulo costante: e' ortogonale alla velocita':

$$0 = \frac{dc^2}{d\tau} = \frac{d|U|^2}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} \cdot U = 2U\frac{dU}{d\tau} = 0$$

il fatto che, come abbiamo visto, la velocita' e' di genere tempo, assicura che l'accelerazione (essendo ortogonale) sia di genere spazio.

Dunque la quadriaccelerazione si puo' calcolare derivando rispetto al tempo proprio, ma le cose sono un pochetto piu' complicate di quanto non dovrebbero essere.

$$A_0 = \frac{dU_0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}c\gamma = \frac{d}{dt}c\gamma\frac{dt}{d\tau} = \gamma c * v * \frac{dv}{dt}\gamma^3\frac{1}{2c^2} = \gamma^4 v \cdot a$$

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{dU_x}{d\tau} = \\ &= \frac{d}{dt}(v_x(t)\gamma)\gamma = \\ &= a_x\gamma + v_x(t)\gamma\left[\frac{v \cdot \frac{dv}{dt}\gamma^4}{c^2}\right] = \end{aligned}$$

$$a_x\gamma^2 + v_x\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}\gamma^4}{c^2}$$

41 Quadriimpulso

E' definito come:

$$P = m_0 U$$

ovvero come la massa a riposo per la velocita'. Si definisce massa a riposo perche' la quadrivelocita' abbiamo visto che vale γv_α, per cui possiamo riscriverla come:

$$P = mv_\alpha$$

se poniamo $m = \gamma m_0$. Adesso, la componente 0 della quantita' di moto e':

$$P_0 = cm_0\gamma \qquad E = cP_0 = mc^2$$

E la ho definita come pP_0. Come sappiamo che questa e' anche l'energia in meccanica? vale:

$$E = cP_0 = mc^2 = m_0c^2\gamma$$

per basse velocita', possiamo sviluppare in serie di taylor il gamma:

$$E = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right] \Rightarrow E \approx m_0c^2 + \frac{1}{m_0}v^2$$

Si vede dunque che l'energia di un punto e' l'energia cinetica piu' la sua energia propria legata ala massa. In questo modo vi ho fatto vedere che funziona, ma non ve lo ho dimostrato in modo rigoroso. Su quello se volete torneremo piu' avanti, per ora prendetelo come un dato di fatto.

Adesso, la norma della quadrivelocita' e':

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = m^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)$$

quest'ultima cosa non sono sicuro. Poi vedremo.

Parte XXII
Martedí 20 Gennaio 2009

la seconda legge di Newton e':

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v_\alpha) = F_\alpha \qquad c\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c)$$

per la meccanica relativistica.

La lagrangiana come si estende in relativita? Ci aspetteremmo che sia:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0$$

solo che questa non funziona. Quella che funziona e':

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\gamma - V$$

infatti, vale:

$$\frac{d}{dt}(-m_0c^2\gamma\frac{1}{2}(-\frac{1}{c^2}2v_\alpha) = \frac{d}{dt}(m_0v_\alpha\gamma)$$

Mentre la derivata rispetto alla posizione e':

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = F_\alpha$$

42 Cenni alle trasformazioni di Lorentz generali

Se abbiamo due sistemi di riferimento S e S', l'uno che si muove a velocita' costante rispetto a S, il sistema puo' muoversi o lungo l'asse delle x di S, oppure lungo un altro asse. Se si muove lungo l'asse x, abbiamo gia' trattato il caso. Se invece il sistema S' e' ruotato rispetto a S, e va anche in un'altra velocita, allora mi basta ruotare S' in modo che gli assi siano nella stessa direzione, e poi ruotarli tutti e due in modo che gli assi delle x siano nella stessa direzione degli assi. Ovvero:

- ruoto S' nello spazio, in modo che gli assi siano paralleli.
- faccio una trasfomazione di Lorentz, in cui vado nel sistema S
- ruoto ancora S', in modo da lasciare tutto come avevo trovato [12]

43 Conferme sperimentali della relativita'

Uno era l'esperimento di Michelson-Morley, che abbiamo gia' trattato. Tutti gli altri esperimenti di prima (Fiseaut, Frennel, ecc.) sembravano andare bene secondo la meccanica classica. Infatti, come anche l'aberrazione stellare, tutti implicavano delle correzioni dell'ordine di v/c, mentre se sviluppiamo γ in serie vediamo che il primo termine e' quello di v^2/c^2, per cui ancora ad un primo ordine va bene. In realta', facendo esperimenti abbastanza precisi si vede il secondo ordine, non il primo. Invece, nell'esperimento di Michelson e Morley ci sono correzioni del secondo ordine, che dunque erano ben visibili poiche' il primo termine dello sviluppo di taylor e' un termine quadro.

[12] non chiarissimo

43.1 Gli orologi al cesio

Ne hanno lasciato uno a terra, e uno l'hanno messo su di un jet. Quello che era stato portato in giro sul jet ritardava rispetto al primo, anche se questo era stato sincronizzato con il primo.

44 La forza di Lorentz

44.1 Trattazione classica

La forza di lorentz F vale:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H})$$

ovverosia, e' proporzionale alla carica, ed e' perpendicolare alla velocita' e al campo magnetico[13].

La forza serve solo a far cambiare direzione ala particella, ma non la accelera. Inoltre, le componenti lungo il vettore di campo magnetico non influiscono affatto.

La presenza di un campo magnetico tende dunque a stabilizzare il sistema, poiche' quando do una pizza ad un mio oggetto, nel campo magnetico, diretta lungo il piano, questa inizia a girare vicino a dove era partita.

La forza di lorentz fornisce una accelerazione centripeta:

$$\frac{q}{c}v \times H = \frac{mv^2}{r}$$

ovvero, il raggio vale:

$$r = \frac{m_0 c}{qH}v$$

44.2 Trattazione relativistica

E' la stessa cosa, a patot di ricordarsi che la massa varia. Ovvero:

$$r = \frac{m_0 \gamma c}{qH}v$$

[13]la forza di Lorentz e' il termine del prodotto vettoriale, l'altro e' la forza elettrica

45 Altri effetti

effetto compton, effeti legati al moto della terra attorno al sole. Ne parlero' la volta prossima. Mo' facciamo esercizi.

Parte XXIII

Giovedí 22 Gennaio 2009

46 Effetto compton

Un elettrone se ne sta tranquillo attorno ad un atomo del bersaglio, l'elettrone se ne va da una parte e il fotone se ne va da un'altra[14]. Vogliamo sapere, in funzione dell'angolo θ con cui l'elettrone viene deviato come varia la frequenza della luce emessa in funzione della luce incidente. Diamo per buona la relazione:

$$E = h\nu$$

dopo l'urto, questa vale:

$$E' = h\nu'$$

non va bene la relazione:

$$E = m_0 c \gamma$$

perche' gamma diverge se la massa a riposo non e' nulla. Quella giusta e' quella di cui sopra. Per la quadrivelocita', sappiamo che:

$$U_0^2 - \sum_\alpha U_\alpha^2 = c^2 \Rightarrow c^2\gamma^2 - m_0 v^2 \gamma^2 = c^2$$

ovvero:

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - m_0^2 v^2 \gamma^2 c^2 = m_0 c^4 \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

prendendo il limite per $m_0 \to 0$, mantenendo costante $m_0\gamma$, otteniamo $E = pc$, ovvero

$$E = p^2 c^2$$

[14] e' un termine brutto scatterare, ma mi e' capitato di sentire il plot del fit del beam del crop. Se fate i puristi e rifiutate di usare i termini inglesi nessuno vi capisce, e parlate ad esempio di fessura energetica.

. Quindi si puo' giustificare la faccenda.

Per sapere cosa accade dopo l'urto, e' importante considerare la conservazione di energia e quantita'di moto.

Abbiamo dunque un vettore quantita' di moto del fotone $AO = p = E/c = h\frac{\nu}{c}$, prima dell'inpatto, l'elettrone dopo l'urto ha vettore quantita' di moto $OB = mv\gamma$ e il fotone uscente ha $OC = h\frac{\nu'}{c}$. Usando il teorema del coseno, possiamo determinare l'angolo tra il fotone entrante e quello uscente. Sappiamo che, poiche' per la regola del parallelogramma $OB = AC$:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos\theta$$

che si traduce in:

$$m_0^2 v^2 \gamma^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)\cos\theta \tag{40}$$

Questa ce la teniamo da conto. Inoltre, la mia energia vale:

$$\begin{aligned}
h\nu + m_0c^2 &= h\nu_1 + m_0c^2\gamma \\
h(\nu - \nu_1) &= m_0c^2(\gamma - 1) \\
\frac{h}{m_0c^2}(\nu - \nu_1) + 1 &= \gamma \\
\left(\frac{h}{m_0c^2}\right)^2(\nu^2 + \nu_1^2 - 2\nu\nu_1) + 2\frac{h}{m_0c^2}(\nu - \nu_1) + 1 &= \gamma^2 \\
\left(\frac{h}{m_0c^2}\right)^2(\nu^2 + \nu_1^2 - 2\nu\nu_1) + 2\frac{h}{m_0c^2}(\nu - \nu_1) &= \gamma^2 - 1 \\
\left(\frac{h}{m_0c^2}\right)^2(\nu^2 + \nu_1^2 - 2\nu\nu_1) + 2\frac{h}{m_0c^2}(\nu - \nu_1) &= \frac{v^2\gamma^2}{c^2} \\
\frac{h^2}{c^2}(\nu^2 + \nu_1 - 2\nu\nu_1) + 2hm_0(\nu - \nu_1) &= m_0^2v^2\gamma^2 \qquad (41)
\end{aligned}$$

Eguagliando membro a membro, la (40) e la (41), ottengo:

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{c^2}(\nu^2+\nu_1^2-2\nu\nu_1)+2hm_0(\nu-\nu_1) &= \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2-2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)\cos\theta \\
\frac{h^2}{c^2}(-2\nu\nu_1)+2hm_0(\nu-\nu_1) &= -2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu_1\cos\theta \\
2hm_0(\nu-\nu_1) &= 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu_1(1-\cos\theta) \\
c\frac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1} &= \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \\
\frac{c}{\nu_1}-\frac{c}{\nu} &= \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \\
\lambda_1-\lambda &= \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \\
\lambda_1 &= \lambda+\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \qquad (42)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la relazione $\lambda\nu = c$. Vedi che la formula e' molto bella, perche' mette una relazione di proporzionalita' tra la differenza della lunghezza d'onda e 1 - il coseno dell'angolo del fotone che esce. E' anche un modo per dimostrare h, m_0, c. La frazione li' e' la lunghezza compton.

47 Indice di rifrazione

Vedrete piu' avanti che l'indice di rifrazione e' per alcuni materiali minore di 1. Questo sembra strano, perche' sappiamo che:

$$c' = \frac{c}{n}$$

e se $n < 1$, allora qualcosa potrebbe andare piu' veloce della luce. Potrei violare la casualita', mandare un terminator nel passato, evitare la morte di qualcuno ecectera. La distinzione sta nella differenza tra velocita' di gruppo e velocita' di fase. La velocita' di fase e' la velocita' a cui si muove il massimo di un'onda (o la velocita' con cui trasla un'onda). Potete decidere di avere un massimo piu' alto degli altri, mettete una tacca sull'onda, e vedete come si propaga la tacca. Pero' per fare una tacca dovete sommare un po' di seni e coseni. Se voleste mandare un picco a delta di dirac dovreste sommare infinite onde tra loro. La velocita' con cui si propaga il pacchetto si chiama velocita' di gruppo. L'informazione viaggia con la velocita' di gruppo, non la velocita' di fase. La velocita' per cui funziona la relazione e' la velocita' di gruppo, non la velocita' di fase. Quando accendo o spengo la luce mando sempre un pacchetto di onde, che viaggia con una velocita' sempre minore della luce.

L'orale e' l'11 Febbraio.

48 Il problema dei due corpi

Non v'e' nulla di pornografico nel problema dei due corpi. Si tratta di trattare il problema di due corpi in ambiente non relativistico che interagiscono tramite una forza centrale. Siano presi due punti, P_1 di massa m_1, e supponiamo che esista una forza reciproca tra lui e P_2 con massa m_2, che dipenda da un potenziale che sia solo funzione della loro mutua distanza:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + U(|r_1 - r_2|) \tag{43}$$

Cambiamo variabili. Scegliamo come coordinate la posizione del centro di massa, poiche' sappiamo che si conserva la sua velocita', e il vettore differenza, poiche' il potenziale dipende solo dal suo modulo

$$\begin{cases} r = r_1 - r_2 \\ R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \tag{44}$$

Sostituendo le (44) dentro la (43), otteniamo :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - U(r)$$

ove μ e' la massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Se ci mettiamo nel sistema di riferimento del centro di massa ci mettiamo in un sistema di riferimento inerziale, non essendovi altre forze esterne. Questo ci consente di studiare il moto in questo sistema di riferimento, in cui vale ovviamente $\dot{R} = 0$, e quindi otteniamo una espressione particolarmente semplice della lagrangiana. Studiare il moto dei due corpi equivale a studiare il moto di un punto (fittizio) in un potenziale centrale. Poiche' la forza e' centrale, il momento della forza e' nullo, e il vettore momento angolare si conserva. Questo implica, poiche' il vettore momento angolare e' costante, che il moto si svolge tutto su di un piano.

Questo e' il caso generico di un potenziale qualunque. Se passiamo in coordinate polari abbiamo dei notevoli vantaggi:

$$r \mapsto r, \theta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Infatti, poiche' θ e' una coordinata ignorabile, ovvero la lagrangiana non dipende esplicitamente da essa, il suo momento coniugato si conserva, per cui:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = l = cost \tag{45}$$

puo' essere utile per studiare questo sistema studiare il sistema unidimensionale associato, ovvero dimenticarsi dell'angolo e considerare solo la r. Tanto da essa posso sempre avere informazioni sulla velocita' angolare, secondo la seguente relazione, ricavata dalla (45):

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \tag{46}$$

e a meno di una fase la fisica del sistema e' sempre la stessa. Nonostante in questo modo non perda fisicamente nulla, devo inserire un termine che mi ricordi che il mio corpo sta effettivamente girando, e che quindi sente una componente normale della accelerazione.

Per inserire questa informazione la cosa migliore e' aggiungere una componente centrifuga al potenziale del caso unidimensionale. Senza questa correzione, ad esempio nel caso di un pianeta attorno al sole il pianeta cade nel sole.

Scriviamo ora le equazioni del moto associate alla nostra lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \tag{48}$$

la (47)la ho studiata prima, la (48)mi da:

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

usando la (46), ottengo:

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\partial U}{\partial r} \tag{49}$$

quella frazione che coinvolge il momento angolare e' il termine del potenziale che cercavo. Se vi limitate a sostituire la relazione nella lagrangiana, e poi derivate, ottenete un'equazione del moto che non e' questa e sbagliate. La sostituzione va fatta dopo, perche' cosi' non derivate le r che sono li' dentro. Occhio che nelle dispense non e' chiaro.

La lagrangiana vera la otteniamo adesso, chiedendoci: data la nostra equazione, come e' fatta la nostra lagrangiana per cui otteniamo quella come la direzione del moto?

Poiche' vogliamo che il membro di destra nella (49) sia la derivata del nostro nuovo potenziale, basta porre:

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

e sostituire U_{eff} al posto di U nella (43).

La lagrangiana vera e' dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_{eff} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U_r - \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

questa non dipende dal tempo, non ci sono vincoli, quindi l'energia generalizzata coincide con l'energia, e si conserva, che e':

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}$$

invece che risolvere l'equazione differenziale di secondo grado, usiamo la conservazione dell'energia, che ci da:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}$$

integrando per separazione di variabili:

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}}$$

ho due soluzioni perche' non specifico la direzione in cui si muove il corpo, essendo il moto periodico. Se mi chiedo cosa ne e' dell'angolo, posso o sapere che:

$$d\theta = \frac{l}{\mu r^2}dt$$

oppure, so che $\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$, faccio il rapporto con r e ottengo:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})}$$

da qui separo le variabili, e ottengo, se e' una forza centrale dipendente dal quadrato della distanza:

$$\theta(r) - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} dr \frac{l}{\mu r^2\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - \frac{l^2}{2\mu^2} + k/r)}}$$

in questo caso, integro, ottenendo:

$$\frac{1}{r} = b(1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0))$$

con $b = \frac{\mu k}{l^2}$ e $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{E}{\frac{(\mu k^2)}{2l^2}}}$

questa e' l'equazione di una ellisse in coordinate polari quando l'energia e' negativa, ovvero quando il potenziale efficacie non e' abbastanza alto in nessun punto del moto (visto che l'energia si conserva, ad una certa questa stara' tutta in potenziale efficacie). C'e' un certo valore per cui $\epsilon = 1$, e questa e' una parabola, mentre per altre epsilon, maggiori di 1, abbiamo traiettorie iperboliche, quindi r puo' andare all'infinito per due valori dell'angolo θ, simmetrici rispetto a θ_0.

49 Che succede in relativita'?

L'unica conseguenza e' che la massa deve dipendere dalla velocita'. Se voi mettete che la massa μ dipende dal modulo della velocita', e al posto di μ mettete questa massa, vedete che il moto per velocita' non troppo vicine a quella della luce le orbite non sono piu' chiuse. Questo effetto e' trascurabile per quasi tutti i pianeti, tranne per mercurio (precessione dell'orbita di mercurio). La relativita' ristretta non spiega con buon accordo la precessione di mercurio, perche' la grande massa del sole piega lo spaziotempo nelle sue vicinanze. Ci vuole la relativita' generale.

50 La terza legge di Keplero

Come esercizio, verificate che se $r' = \alpha r$ e $t' = \beta t$, con $\alpha^3/\beta^2 = 1$, che:

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = -k\frac{r'}{r'^3}$$

Parte XXIV

Martedí 27 Gennaio 2009

51 La corda vibrante

Hai un filo che, sottoposto a tensione τ, assume lunghezza l. C'e' un potenziale, che e' proporzianola a quanto e' allungato il filo:

$$U = \tau \delta l$$

il problema puo' essere molto complicato, ma noi lo studiamo per le piccole oscillazioni.

Fissiamo un asse x lungo la corda e due assi y e z perpendicolari ad essa. La corda e' lunga l. Se la corda comincia a vibrare un punto x^* segnato sulla corda si sposta. Per cui si avra':

$$p = \begin{pmatrix} x(x^*, t) \\ y(x^*, t) \\ z(x^*, t) \end{pmatrix}$$

51.1 Condizioni preliminari

Applichiamo ora delle restrizioni al problema. Assumiamo che le oscillazioni siano piccole, ovvero che:

$$\frac{|x - x^*|}{l} < \epsilon \qquad \frac{|y|}{l} < \epsilon \qquad \frac{|z|}{l} < \epsilon$$

quindi il punto non puo' allontanarsi troppo dalla posizione di partenza.

Vogliamo anche che il punto non si allontani troppo velocemente dalla posizione, ovvero che non si muova a scatti troppo discontinui:

$$\frac{\partial(x - x^*)}{\partial x} < \epsilon \qquad \frac{\partial y}{\partial x} < \epsilon \qquad \frac{\partial z}{\partial x} < \epsilon$$

queste due condizioni prendono insieme il nome di infinitesimalita' fisica del fenomeno.

Un'altra condizione posta e' che il moto della nostra corda si svolga nel piano, ovverosia:

$$z(x^*, t) = 0 \quad \forall t, x^*$$

L'ultima condizione e' la trasversalita' del moto, che vuol dire che il punto non si muove nel verso della lunghezza del filo.

$$x(x^*, t) = x^* \quad \forall t, x^*$$

Questo vuol dire che per descrivere il mio sistema basta dare la legge delle y in funzione di tempo e posizione iniziale, essendo la x sempre uguale alla posizione iniziale.

$$y = y(x^*, t)$$

a questo punto posso anche lasciarlo perdere l'asterisco, tanto $x = x^*$ sempre.

Mi serviranno anche delle condizioni a contorno per dire che gli estremi sono sempre fermi ad altezza nulla.

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \forall t$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=l} = 0$$

51.2 Tuffiamoci nel problema

Cosi' dobbiamo studiare un sistema con infiniti gradi di liberta, che per noi rappresenta una nuova avventura.

Se potessimo discretizzare la corda scriveremmo la lagrangiana come abbiamo sempre fatto sino ad oggi. L'idea e' di adattare la meccanica lagrangiana a questo sistema continuo.

Ci aspettiamo che ovunque comparissero somme sui gradi di liberta' ci saranno degli integrali rispetto alle x.

51.2.1 Il potenziale e il cinetico

Abbiamo visto che questo deriva dal fatto che noi tiriamo la corda. Prendiamo l'infinitesimo pezzetto di corda dx: quando vibra, esso diventa un ds. Poiche' sono infinitesimi, possiamo approssimare questo archetto con una linea, e usiamo il teorema di pitagora con lo sviluppo di taylor (non c'e' nulla a denominatore poiche' la derivata rispetto alle y e' limitata):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2} = dx(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \dots) \simeq dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

L'allungamento della corda infinitesimo sara' $\delta l = dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.

Dunque, l'allungamento totale della corda sara' il suo integrale, e il potenziale varra' percio':

$$U[y] = \frac{1}{2}\int_0^l dx(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \tau$$

Se la densita' lineare e' μ, ogni mio pezzo di corda avra' massa μdx e quindi l'energia cinetica sara':

$$T[y] = \frac{1}{2}\int_0^l dx\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

51.3 La lagrangiana

Questa e' facilmente ricavabile conoscendo energia cinetica e potenziale:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2}\int_0^l dx\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

Il moto della corda puo' essere studiato con profitto se ci ricordiamo del principio di Hamilton. Prendiamo ora l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} dt\mathcal{L}[y,\dot{y},t] = \int_{t_0}^{t_1} dt\frac{1}{2}\int_0^l dx\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

o per meglio dire, la variazione dell'azione:

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l dx\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial t}\right) - \tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\right] = 0$$

Gli estremi di integrazione non sono stati fatti variare in questo caso, perche' le condizioni a contorno che abbiamo messo ci dicono che . Abbiamo visto che le corde sono inchiodate, per cui:

$$\delta y(0,t) = \delta y(l,t) = 0 \qquad \delta y(x,t_0) = \delta y(x,t_1) = 0$$

le seconde due le imponiamo non variabili perche' vogliamo ottenere il moto effettivo[15].

[15] niente affatto chiaro

Per cui, se lo scriviamo e integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left[\mu \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \delta y}{\partial t} - \tau \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right] dx \\
&= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \mu \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial \delta y}{\partial t} dx - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \tau \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial x} dx \\
&= \int_0^l \left[\mu \frac{\partial y}{\partial t}\delta y\right]_{t=t_0}^{t=t_1} dx - \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \mu \delta y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dt \\
&- \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\tau \frac{\partial y}{\partial x}\delta y\right]_{x=0}^{x=l} + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \tau \delta y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \left(\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \delta y = 0
\end{aligned}$$

come al solito, l'integrale nullo vuol dire che:

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

In natura vale $v = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$ e $\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\mu}{t}}$.

L'equazione di cui sopra noi la usiamo per spaccare la capoccia di guglielmo, e spesso la chiamiamo di D'Alambert.

Tramite la sostituzione:

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases}$$

e un po' di tediosa algebra delle derivate (dimentica che i ∂ indicano delle derivazioni e trattali come degli infinitesimi qualunque) otteniamo che l'equazione di D'Alambert puo' essere riscritta in ben'altra forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Questo vuol dire che y deve essere somma di due termini, uno dipendente da ξ e uno da η:

$$y(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \psi(\eta)$$

infatti vogliamo che la derivata mista sia nulla, per cui y deve essere fatta in due variabili diverse. Dunque:

$$y(x, t) = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt)$$

Che cosa significa questa equazione? Ancora non abbiamo imposto le condizioni a contorno, pero' vale la pena soffermarci un attimo e fare delle considerazioni. Una qualunque soluzione e' composizione dei due termini φ e ψ.

In piu', con lo scorrere del tempo la funzione φ viene traslata verso destra (si dice dunque che e' progressiva), mentre la ψ trasla verso sinistra (regressiva). Una generica onda che si propaga lungo una corda infinita (poiche' non abbiamo imposto le condizioni a contorno) e' somma di due profili generici, che si allontanano dal punto in cui abbiamo perturbato la corda.

51.4 Separazione di vriabili

Adesso facciamo la separazione di variabili per risolvere l'equazione.

Sappiamo che:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(l,t) = 0 \end{cases}$$

vediamo ora se esistono funzioni che risolvono l'equazione di d'Alambert a variabili separabili, ovvero fatte cosi':

$$y(x,t) = F(t)G(x)$$

Sostituiamo questa funzione nell'equazione di d'Alambert, e otteniamo

$$\begin{aligned} v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial d\tau^2} &= 0 \\ v^2 F(t)G''(x) &= G(x)F''(t) \\ v^2\frac{G''(x)}{G(x)} &= \frac{F''(t)}{F(t)} \end{aligned}$$

Poiche' le due sono funzioni di diverse variabili, ma sempre uguali, esse devono essere delle costanti:

$$\begin{cases} F'' - CF = 0 \\ G'' - \frac{C}{v^2}G = 0 \end{cases}$$

Queste due equazioni si risolvono con facilita':

$$G(x) = ae^{\frac{\sqrt{c}}{v}x} + be^{-\frac{\sqrt{c}}{v}x}$$

determiniamo le costanti a e b imponendo $G(0) = G(l) = 0$:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{\frac{\sqrt{c}}{v}l} + be^{-\frac{\sqrt{c}}{v}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(e^{\frac{\sqrt{c}}{v}l} - e^{-\frac{\sqrt{c}}{v}l}) = 0 \end{cases}$$

In questo caso l'unica soluzione possibile sarebbe quella banale. L'unico caso in cui esistono soluzioni non banali e' quello in cui C e' negativo. Possiamo scriverlo come $C = -\omega^2$.

Ora ho due oscillatori armonici da studiare:

$$\begin{cases} F'' + \omega^2 F = 0 \\ G'' + \frac{\omega^2}{v^2} G = 0 \end{cases}$$

se siete arrivati fin qui le soluzioni le saprete trarre:

$$\begin{aligned} F(t) &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ G(x) &= c\cos\frac{\omega x}{v} + d\sin\frac{\omega x}{v} \end{aligned}$$

A questo punto, occupiamoci di condizioni iniziali:

$$\begin{cases} G(0) = c\cos 0 = 0 \\ G(l) = d\sin\frac{\omega l}{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ \omega = \frac{\pi v}{l} n \end{cases}$$

nella seconda equazione ci siamo rifiutati di porre $d = 0$ per non cadere nella banalita'. Il numero n puo' essere un intero qualunque. Avendo determinato queste due costanti, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= d\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a\cos\left(\frac{n\pi}{l}vt\right) + b\sin\left(\frac{n\pi}{l}vt\right)\right] \\ &= a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}vt\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}vt\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo conglobato la costante d nei valori di a e b, a priori dipendenti da n. Se n=1, ottenete una specie di arco che collega i due capi. Se n=2, otteniamo una sinusoide stiracchiata in modo da avere periodo l. Per ogni l, ogni punto della corda si muove come un oscillatore armonico.

Parte XXV
Giovedí 29 Gennaio 2009

52 La serie di Fourier

La volta scorsa abbiamo visto che l'onda puo' propagarsi verso destra (progressiva), verso sinistra (regressiva), oppure nessuna delle due, e fa un'onda stazionaria. Questa ha caratteristica di avere dei nodi (punti in cui l'ampiezza e' zero) e dei ventri (punti in cui l'ampiezza e' massima.

Noi vogliamo ora discutere il moto della nostra corda, al tempo t=0, e ad un certo profilo, ovvero:

$$y(x,0) = h(x)$$

per cui che il profilo iniziale sia simile. Per le nostre condizioni imposte all'inizio, $h \in C^1$.

Un'altra condizione e' che:

$$\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = k(x)$$

ovverosia, vogliamo che ci sia una certa velocita' data al tempo iniziale.

Rimangono le condizioni $h(0) = h(l) = 0$ e $k(0) = k(l) = 0$.

Ora tuffiamoci nel problema. Poiche' vale il principio di sovrapposizione, qualunque somma di onde stazionarie sara' un'onda stazionaria.

$$y(x,t) = \sum_{h=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi v}{l} t) + b_n \sin(\frac{n\pi v}{l} t)] \sin(\frac{n\pi}{l} x)$$

al tempo 0 varra' dunque:

$$h(x) = y(x,0) = \sum_{h=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

e

$$k(x) = \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{h=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

l'affermazione che io vi faccio e' la seguente. Vedete la h(x)? Prendiamo la sua simmetrica rispetto all'origine (ottenuta ruotando il grafico di 180 gradi). L'unione di queste due funzioni ha derivata continua nell'origine, per il modo in cui la ho costruita. Adesso il dominio e' due volte l. Al limite destro dell'intervallo, nel punto l, posso ribaltarla ancora una volta. con questi ribaltamenti, ottengo una funzione periodica, alla lunga, che si estende lungo l'asse reale. Per il modo in cui la ho costruita, la funzione e' dispari, proprio come un seno.

Teorema 11 (di Fourier) *Se una funzione e' periodica e con la derivata prima continua allora se' sviluppabile come serie di seni e coseni, e in particolare se la funzione e' dispari la posso sviluppare solo con i seni.*

Per cui, vale:

$$h(x) = \sum_{h=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

$$k(x) = \sum_{h=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

Il teorema di Fourier dice anche come trovare i coefficienti:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx h(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx k(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

abbiamo trovato i coefficienti da utilizzare, e abbiamo dunque trovato la posizione e la velocita' di ogni punto della corda.

53 Energia

L'energia della corda vibrante vale:

$$\begin{aligned} E &= T(y) + U(y) = \\ &= \int_0^l dx \left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \end{aligned}$$

L'hamiltoniana invece, essendo questo sistema una somma di oscillatori armonici, varrebbe, es fosse discreto:

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\sum_i^N \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{N-1}(y_i - y_{i+1})^2$$

54 Linguaggio dell'analisi vettoriale

Questa non e' fisica, ma vi anticipo delle cose di matematica. Vi mostro che le funzioni:

$$\sin(\frac{k\pi}{l}x) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$
$$\cos(\frac{k\pi}{l}x) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

fanno uno spazio vettoriale di cui sono base. Per l'esattezza, esse sono base dello spazio vettoriale delle funzioni derivabili indefinitamente e di periodo $2l$. Perche' siano base devono essere linearmente indipendenti (ovvio), e devono generarlo (quasi incredibile). Intanto, notiamo un po' di relazioni

$$\int_{-l}^{l} dx \sin(\frac{k\pi}{l}x)\sin(\frac{k'\pi}{l}x) = 0 \qquad \forall k \neq k'$$
$$\int_{-l}^{l} dx \cos(\frac{k\pi}{l}x)\cos(\frac{k'\pi}{l}x) = 0 \qquad \forall k \neq k'$$
$$\int_{-l}^{l} dx \sin(\frac{k\pi}{l}x)\cos(\frac{k'\pi}{l}x) = 0 \qquad \forall k$$

Queste relazioni potete immaginarle come se fossero dei prodotti scalari, se immaginate le funzioni seno e coseno come se fossero dei vettori di infiniti elementi. Infatti se definiamo un prodotto scalare:

$$(g, f) = \int_a^b g(x) \cdot f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} g_i f_i$$

visto? Passando dall'integrazione alla sommatoria diventa evidente la somiglianza con il prodotto scalare, solo nel continuo invece che nel discreto. Le funzioni seno e coseno sono come dei vettori di infiniti elementi.

Esse costituiscono una base dello spazio vettoriale.

Adesso, devo ricordarmi che:

$$\int_{-l}^{l} \sin^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = l \qquad \forall k \neq 0$$
$$\int_{-l}^{l} \cos^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = l \qquad \forall k \neq 0$$
$$\int_{-l}^{l} \cos^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = 2l \qquad k = 0$$

Se voglio le funzioni normalizzate, mi basta dividerle per il risultato:

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{l}\sin^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = 1 \qquad \forall k \neq 0$$
$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{l}\cos^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = 1 \qquad \forall k \neq 0$$
$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2l}\cos^2(\frac{k\pi}{l}x)dx = 1 \qquad k = 0$$

ottengo cosi' una base ortonormale.

Questa e' una base ortonormale dello spazio delle funzioni periodiche, poiche' la somma di fourier, che e' una combinazione lineare di elementi della base, costituisce una funzione periodica, e ogni funzione periodica sufficientemente regolare puo' essere scritta in forma di somma di Fourier.

Ora vi mostro che per qualunque funzione f io riesco a determinare in modo univoco chi sono a_n e b_n.

Sia infatti:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{l}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

Ricorda ora quella che sambusetti chiamava la formula di Fourier $\sum_{i=1}^{n}(v \cdot b_1) \cdot b_1$ da' il cambio di base di un vettore.

Facendo la stessa cosa, devo fare:

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^{l} dx \cos(\frac{m\pi}{l}x)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-l}^{l}[a_n \cos(\frac{n\pi}{l}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)]\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-l}^{l}[a_n \cos(\frac{n\pi}{l}x)]\cos(\frac{m\pi}{l}x)dx = \\
&= a_m \int_{-l}^{l}\cos^2(\frac{m\pi}{l}x)dx \\
&= a_m l \\
a_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx f(x)\cos(\frac{m\pi}{l}x)
\end{aligned}$$

Questi calcoli sono giustificati dalle definizioni che abbiamo dato all'inizio di questo discorso. Infatti il prodotto di due coseni qualunque non puo' essere di verso da 0, se i due k sono diversi tra loro, e dunque sopravvive alla sommatoria solo l'elemento m-esimo.

analogamente si fa per il seno e per a_0 e si ottiene:

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx f(x)\cos(\frac{n\pi}{l}x) \\
b_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} dx f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x) \\
a_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx
\end{aligned}
$$